Matemàtiques orientades a les ensenyances acadèmiques:

4º B d'ESO

www.apuntesmareaverde.org.es

Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

Textos Marea Verde

TEXTOS MAREA VERDE

www.apuntesmareaverde.org.es

I.S.B.N. - 13: 978-84-697-0275-8

I.S.B.N. - 10: 84-697-0275-0

Textos Marea Verde

Matemàtiques orientades a les ensenyances acadèmiques.

4t B ESO

Capítol 1:

Nombres reals

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Paco Moya

Revisors: Javier Rodrigo i Sergio Hernández

Il·lustracions: Paco Moya i Banc d'Imatges d'INTEF

Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

Índex

Resum

Ja coneixes els nombres naturals, els nombres enters i els nombres racionals. En aquest capítol estudiarem els nombres reals que estan formats pels nombres racionals i els irracionals. Per tant, amb alguns nombres reals irracionals ja t'havies trobat, amb$\sqrt{2}$, amb π…

Però hi ha molts, molts més. Hi ha molts més nombres irracionals que racionals. I et preguntaràs, com pot dir això si són infinits? Resulta que hi ha infinits més grans que altres. A l'infinit dels nombres naturals se li denomina "infinit numerable". Resulta que el dels nombres enters i dels nombres racionals també és "infinit numerable", però el dels nombres reals ja no és numerable, és molt major, se li denomina "la potència del continu". Una de les seues propietats més importants és la seua relació amb els punts d'una recta, per la qual cosa aprendrem a representar-los en la recta "real" en la que no deixen "forats".

Com els nombres irracionals tenen infinites xifres decimals no periòdiques és complicat utilitzar-los tal qual, així que aprendrem a aproximar-los i calcular l'error que per això, cometem.

1. NOMBRES RACIONALS I IRRACIONALS

Et recordem els distints tipus de nombres que ja coneixes:

Naturals ➔ ℕ= {0, 1, 2, 3, …}

Són els nombres que s'usen per a comptar i ordenar. El 0 pot incloure's o no, dependrà del teu professor.

Enters ➔ ℤ= {…, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, …}

Són els nombres naturals i els seus oposats. No tenen part decimal, d'ací el seu nom. Inclouen als Naturals.

Als nombres que es poden expressar en forma de quocient de dos nombres enters se'ls denomina **nombres racionals** i se'ls representa per la lletra ℚ.

Per tant

Racionals➔ $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b}; a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$

Els nombres racionals inclouen als enters.

També contenen als nombres que tenen expressió decimal exacta (0,12345) i als que tenen expressió decimal periòdica (7,01252525…) com veurem.

Notació:

∈vol dir "pertany"

∪vol dir "unió"

⊂vol dir "incluit"

∩vol dir "intersecció"

1.1. Expressions decimals finites o periòdiques

Recorda que:

• Si el denominador (de la fracció irreductible) només té com a factors primers potències de 2 o 5 l'expressió decimal és exacta.

Exemple:

Així per exemple $\frac{1}{2^3 \cdot 5} = 5^2 \cdot 10^{-3} = 0{,}025$; jaque $\frac{10^3}{2^3 \cdot 5} = 5^2$, i açò és general ja que sempre hi haurà una potència de 10 que siga múltiple del denominador si aquest només conté dosos o cincs. Fixa't que el nombre de decimals és el major dels exponents de 2 i 5.

• Si el denominador (de la fracció irreductible) té algun factor primer que no siga 2 ni 5 la fracció tindrà una expressió decimal periòdica.

• Si suposem un nombre *n* amb factors primers diferents de 2 i 5, aleshores

$$\frac{1}{n} = m \cdot 10^{-a} \Rightarrow \frac{10^a}{n} = m,$$

però el denominador no pot donar un quocient exacte en dividir al numerador, ja que 10 només té els factors 2 i 5. Això ens demostra que l'expressió decimal no pot ser exacta.

Vegem que és periòdica:

Exemple:

Amb un exemple ens bastarà, si dividim 1 entre 23 obtenim un primer residu que és 10, després un altre que és 8 i seguim, però, es repetirà alguna vegada la resta i per tant les xifres del quocient?, la reposta és que sí, segur que sí, els residus són sempre menors que el divisor, en aquest cas de l'1 al 22, si jo obtinc 22 residus diferents (com és el cas) en traure un més ha de repetir-se!, és l'anomenat *Principi de les caselles*. I a partir d'ací els valors del quocient es repeteixen.

Per tant l'expressió decimal és periòdica i el nombre de xifres del període és com a màxim una unitat inferior al denominador (no sempre ocorre açò però 1/23 té un període de 22 xifres, 1/97 el té de 96 xifres, no obstant això 1/37 té un període de només 3 xifres, una pista: 37 és divisor de 999).

Totes les fraccions tenen expressió decimal exacta o periòdica.

Activitats proposades

1. Mentalment decideix quins de les següents fraccions té una expressió decimal exacta i quines la tenen periòdica

a) 2/3 b) 3/5 c) 7/30 d) 6/25 e) 7/8 f) 9/11

2. Calcula l'expressió decimal de les fraccions de l'exercici anterior i comprova si la teua deducció era correcta

3. Calcula l'expressió decimal de les fraccions següents:

a) 1/3 b) 1/9 c) 7/80 d) 2/125 e) 49/400 36/11

1.2. Forma de fracció d'una expressió decimal

Recorda el procediment:

Activitats resoltes

Càlcul de la forma de fracció de a) 0,175; b) 1,7252525…

a) Expressió decimal exacta: $0{,}175 = \frac{175}{1000} = \frac{7}{40}$, es divideix entre 10 elevat al nombre de xifres decimals.

b) Expressió decimal periòdica:

Hem d'aconseguir 2 nombres amb la mateixa part decimal perquè en restar desapareguen els decimals.

$$\begin{aligned} \mathrm{N} &= 1{,}7252525\ldots \\ 1000\mathrm{N} &= 1725{,}2525\ldots \\ 10\mathrm{N} &= 17{,}2525\ldots \end{aligned}$$

$$\text{Si restem: } 990\mathrm{N} = 1708 \Rightarrow \mathrm{N} = \frac{1708}{990} = \frac{854}{495}$$

Primer ens emportem la coma al final del primer període (fixa't que l'avantperíode i el període junts tenen 3 xifres), després al principi del primer període l'avantperíode té 1 xifra). Tenim dues expressions amb la mateixa part decimal pel que en restar, aqueixos decimals se'n van, només queda aïllar N.

Tota expressió decimal exacta o periòdica es pot posar com a fracció.

Activitats proposades

4. Escriu en forma de fracció les següents expressions decimals exactes i redueix-les, comprova amb la calculadora que està bé:

a) 7,92835; b) 291,291835; c) 0,23

5. Escriu en forma de fracció les següents expressions decimals periòdiques, redueix-les i comprova que està bé:

a) 2,353535….. b) 87,2365656565…. c) 0,9999….. d) 26,5735735735…..

1.3. $\sqrt{2}$no és un nombre racional:

Utilitzarem un mètode de demostració molt habitual en Matemàtiques que s'anomena "**Reducció a l'Absurd**" que consisteix en:

> Si només hi ha 2 possibilitats per a quelcom que anomenem A i noA i volem demostrar A, comencem suposant que es compleix noA, fem algun raonament on s'arriba a una contradicció (Absurd) i rebutgem noA, havent de complir-se per tant A.

Més fàcil d'entendre: suposa que només hi ha 2 possibles camins per a arribar a un lloc. Tires per un d'ells i descobreixes que no arriba enlloc, per la qual cosa ha de ser l'altre.

Anem a això:

Volem demostrar A:

$\sqrt{2}$**no** pot posar-se com a fracció.

Suposem cert el seu contrari noA:

$\sqrt{2}$**si** pot posar-se com a fracció.

Aleshores$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, **fracció irreductible**. Elevem al quadrat als 2 membres

$$\Rightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 2b^2$$

per tant a^2 és parell i per tant a també ho és (el quadrat d'un nombre imparell és sempre imparell), posem a = 2*k* i substituïm:

$$(2k)^2 = 2b^2 \Rightarrow 4k^2 = 2b^2 \Rightarrow b^2 = 2k^2$$

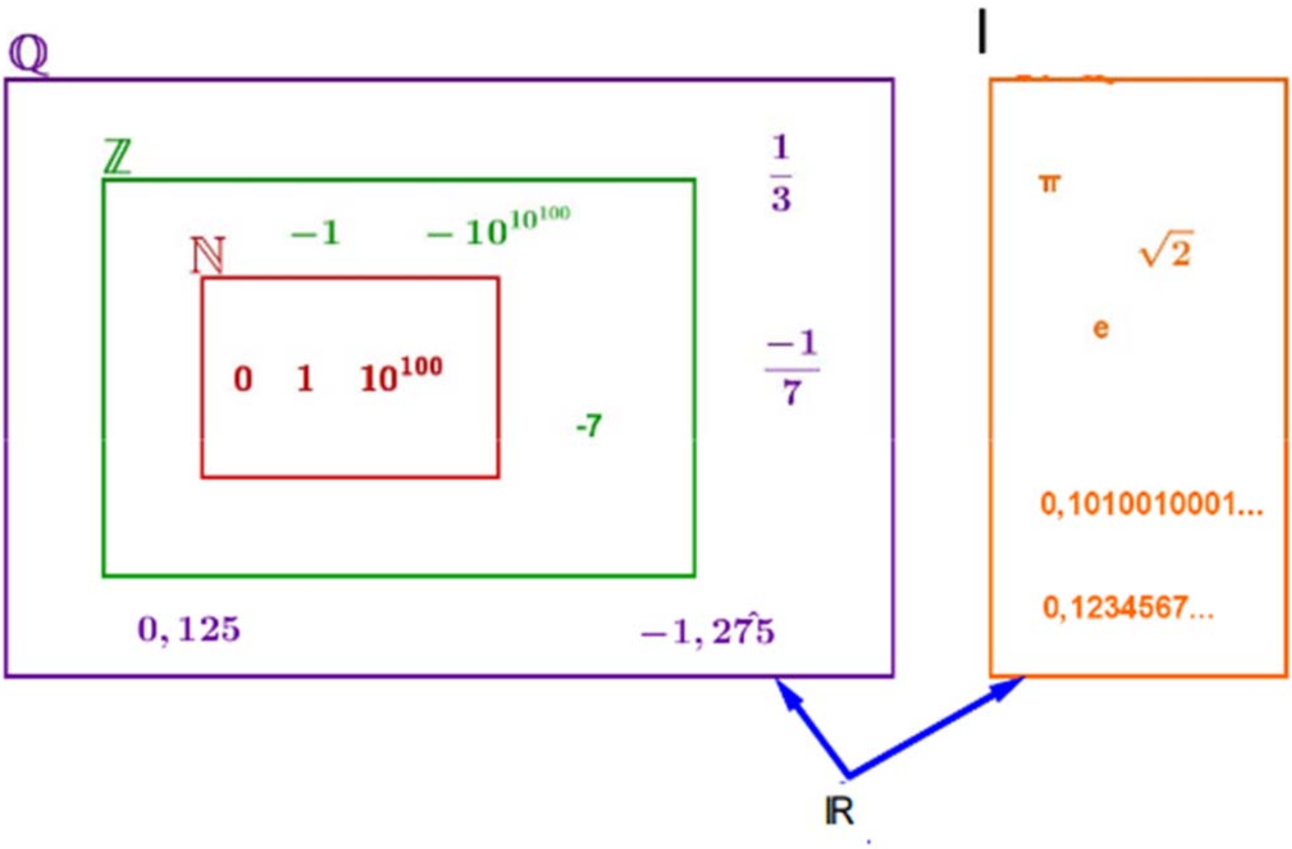
doncs b^2 és parell i per tant b també ho serà.

En definitiva: *a* i *b* són els 2 nombres parells. CONTRADICCIÓ, absurd, hem dit que la fracció era irreductible, per la qual cosa *a* i *b* no poden ser ambdós múltiples de 2.

Per tant rebutgem noA i ens quedem amb que A és certa.

Aquest procediment serveix igual per a totes **les arrels no exactes**, de qualsevol índex.

Però no val per a tots els irracionals, per a demostrar que π és un nombre irracional cal estudiar molt. Va ser demostrat a finals del segle XVIII per Lambert. Fins a aqueix moment encara es continuaven calculant decimals per a trobar un període que no en té.



1.4. Diferents tipus de nombres

Tots aquests nombres com$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots \pi$ junt amb els nombres racionals formen el conjunt dels nombres reals. I als nombres reals que no són nombres racionals se'ls anomena nombres irracionals. Per tant

Irracionals ➔ $\mathrm{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

Són nombres irracionals els nombres que no són racionals i per tant aquells nombres que no poden posar-se com a fracció de nombres enters. Hi ha més del que podria paréixer (de fet hi ha més que racionals ¡!), són tots aquells que tenen una expressió decimal que no és exacta ni periòdica, és a dir, infinites **xifres decimals i sense període.** Exemples: 17,6766766676... que m'ho acabe d'inventar o 0,1234567891011... que se'l va inventar Carmichael. Inventa't u, busca en Internet i si no el trobes, aleshores és teu (per ara ☺)

Reals ➔ $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathrm{I}$

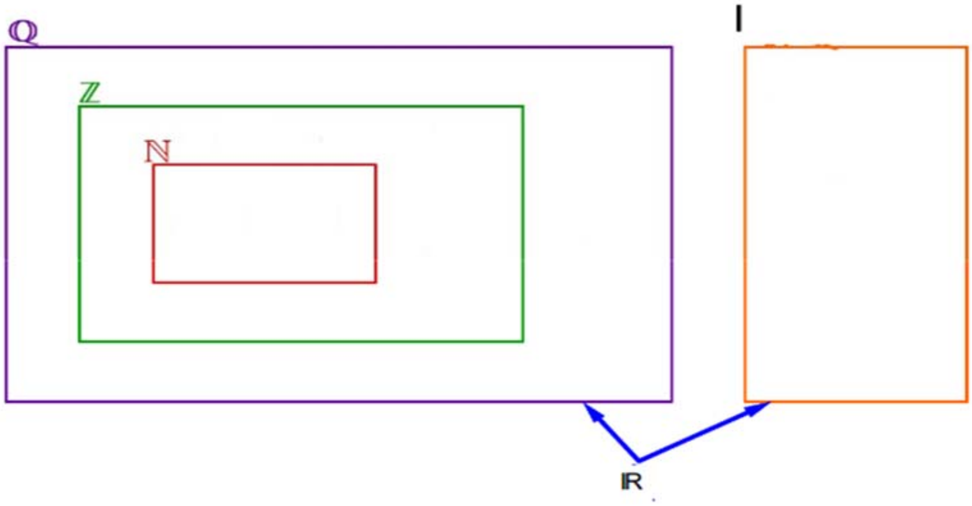
És la unió dels nombres racionals i dels irracionals.

Tenim per tant que: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

$\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$

Son aquests tots els nombres?

No, els reals formen part d'un conjunt més ampli que és el dels Nombres Complexos $\mathbb{C}$ (en 1º de batxillerat es veuen, en l'opció de Ciències).



Activitats proposades

6. Copia al teu quadern la taula adjunta i assenyala amb una X a quins conjunts pertanyen els nombres següents:

Nombre	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	I	$\mathbb{R}$
-2,01					
$\sqrt[3]{-4}$					
0,121212…					
$\sqrt[3]{-1000}$					
1,223334…					
$\sqrt{-4}$					
$\frac{1}{2}$					

7. Copia al teu quadern l'esquema següent i fica els nombres de l'exercici anterior al seu lloc:

Pots demostrar que 4,99999… = 5?, quant val 2,5999…?

8. Demostra que $\sqrt[3]{7}$és irracional.

9. Quantes xifres pot tindre com a màxim el període de$\frac{1}{47}$?

10. Quants decimals té$\frac{1}{2^7 \cdot 5^4}$?, t'atreveixes a donar la raó?

11. Fes la divisió 999 999:7 i després fes 1:7. Serà casualitat?

12. Ara divideix 999 entre 37 i després 1:37, és casualitat?

2. APROXIMACIONS I ERRORS

Encara que en aquest curs treballarem en la mesura que siga possible amb valors exactes ($\sqrt{3}$ no se substitueix per 1,73 ni π per 3,1416) hi ha vegades en què és necessari fer aproximacions per motius pràctics (no li anem a dir al botiguer que ens done 2π metres de corda pel compte que ens porta) i a treballar amb nombres aproximats per entre altres motius no conéixer els valors exactes. Així per exemple, si ens pesem és una bàscula i marca 65,4 Kg, quant pesem exactament? No es pot saber, és impossible, el màxim que podem dir és que el nostre pes està entre 65,3 i 65,5 Kg si l'error màxim és de 100 g.

2.1. Error Absolut.

Es defineix l'Error Absolut (EA) com EA =|*valor real-valor aproximat*| .

Les barres signifiquen "valor absolut" que ja saps que vol dir que en cas de ser negatiu el convertim a positiu.

Exemple:

Si aproximem $\pi \approx 3{,}1416$ tindrem que l'EA $=|\pi - 3{,}1426|=|-0{,}0000073...|\approx 0{,}0000073$ unes 7 milionèsimes.

Cota de l'Error Absolut:

Encara sense conéixer amb exactitud el valor exacte, sempre podem posar una cota (un valor màxim) a l'error absolut només tenint en compte l'orde d'aproximació, així, si hem arredonit en les deumil·lèsimes (com en l'exemple) sempre podem afirmar que l'EA $\leq$ 0,00005, és a dir, menor o igual que mitja unitat del valor de la xifra d'arredoniment o 5 unitats de la següent (5 centmil·lèsimes), que és el mateix.

Activitats resoltes

- Calcula la cota de l'error absolut de:

N≈ 2,1 → $EA < 0{,}05$

N≈600 → $EA \leq 50$ si suposem que hem arredonit en les centenes.

Quan no es coneix el valor real, no pot conéixer-se l'error absolut, però si una cota. Si un cronòmetre té una precisió de desenes de segon direm que l'EA$\leq$ 0,05 s (mitja desena o 5 centèsimes)

Si tenim un nombre A i la cota de l'error absolut és ΔA (es llig increment d'A) sol posar-se $A \pm \Delta A$ sobretot a les Ciències Experimentals.

2.2. Error Relatiu.

Per a comparar errors de distintes magnituds o nombres es defineix l'Error Relatiu (ER) com:

$$ER = \frac{EA}{|\text{Valorreal}|}$$

que sol multiplicar-se per 100 per a parlar de % d'error relatiu.

Si no es coneix el valor real es substitueix pel valor aproximat (la diferència normalment és xicoteta).

Activitats resoltes

- Si aproximem arrel de 3 per 1,73, l'error relatiu comés és:

$$\sqrt{3} \approx 1{,}73 \Rightarrow \text{EA} \approx 0{,}0021 \Rightarrow \text{ER} = \frac{0{,}0021}{\sqrt{3}} \approx 0{,}00121 \Rightarrow 0{,}121\%$$

Si a l'última divisió posem el valor aproximat 1,73 l'ER ix aproximadament 0,121%.

- A les aproximacions A = 5,2 amb EA≤0,05 i B = 750 amb EA≤5, en quina estem cometent proporcionalment menor error?

Calculem els errors relatius:

A➔ $\text{ER} \leq \frac{0{,}05}{5{,}2} \Rightarrow \text{ER} \leq 0{,}0096 \Rightarrow \text{ER} \leq 0{,}96\%$

B➔$\text{ER} \leq \frac{5}{750} \Rightarrow \text{ER} \leq 0{,}0067 \Rightarrow \text{ER} \leq 0{,}67\%$

És millor aproximació la de B.

Control de l'error comés:

No hi ha res més ignorant matemàticament parlant que utilitzar massa xifres decimals treballant en problemes pràctics. Dir que en una manifestació van participar **aproximadament** 51226 persones danya el sentit comú. També és una gamberrada dir que l'estimació de vot per al partit A és del 25,6 % de vots si l'error pot ser del 3 % (cosa que no sol mencionar-se). Posar com a nota d'un examen un 6,157 és almenys curiós per la seua aparent precisió.

Activitats resoltes

- Tenim dos nombres **arredonits** a les desenes: A = 2,5 i B = 5,7

Farem operacions amb ells controlant els errors.

Com l'$\text{EA} \leq 0{,}05$ (recorda: si arredonim en les desenes l'error serà inferior o igual a 5 centèsimes) tenim que A pot estar entre 2,45 i 2,55; igualment B estarà entre 5,65 i 5,75.

Suma:

El valor més xicotet serà 2,45 + 5,65 = 8,1; el valor màxim serà 2,55 + 5,75 = 8,3. Si restem dóna 0,2. Si prenem com a valor de la suma 8,2, que és la mitjana, ara l'EA ≤ 0,1 (la mitat de la diferència entre el màxim i el mínim, fixa't en que 8,2 està a distància 0,1 de 8,1 i de 8,3) quan abans era inferior a 0,05. Ja no podem estar segurs de l'últim decimal. Amb la resta passa el mateix.

Mínim 5,65 – 2,55 = 3,1 (ull!, el menor menys el major). Màxim 5,75 – 2,45 = 3,3. La mitjana és 3,2 i com(3,3 – 3,1):2 =0,1 l'EA ≤ 0,1

En cada suma o resta l'error absolut és la suma dels errors absoluts (demostra-ho).

Si fem diverses sumes i restes, tenim que augmentarà perillosament.

Producte:

Valor més xicotet 2,45 · 5,65 = 13,8425; valor màxim 2,55 · 5,75 = 14,6625. La diferència és ara de 0,82. Si prenem com a producte 14,25 tenim que EA ≤ 0,41; s'ha multiplicat per 8. Ja no hem d'estar segurs ni de les unitats, podria ser 14 o 15.

Si multipliquem A (amb EA = *a*) amb B (amb EA = *b*) obtenim un **EA = a · B + b · A**.

Has de notar que depend dels valors de A i B.

Nota:

La fórmula **EA = a · B + b · A** ix de fer (A+a)·(B+b)–(A-a)·(B-b) i dividir entre 2. Comprova-la.

Si fem (aB+bA)/(AB) obtenim (a/A)+(b/B), és a dir:

Els errors relatius es sumen en multiplicar dos nombres.

Divisió:

El valor més xicotet possible s'obté de dividir el més xicotet entre el més gran:

5,65 : 2,55 = 2,22;

el més gran al revés (el més gran entre el més xicotet):

5,75 : 2,45 = 2,35.

Per tant EA $\leq$ 0,065.

Ara ix aproximadament$\mathrm{EA} = \frac{\mathrm{a \cdot B + b \cdot A}}{\mathrm{B}^2}$, que si B és gran fa que isca reduït, però si B és xicotet ens dóna una ingrata sorpresa.

Activitats resoltes

- Càlcul de l'error absolut i relatiu si A = 5; *a* = 0,05; B = 0,5; *b* = 0,05 ➔ A/B = 10 amb EA $\leq$ 1,1, un 11 % d'error relatiu.

No tot són males notícies. Si dividim un nombre aproximat entre un nombre exacte l'error absolut disminueix si el divisor és major que 1. Per exemple (5$\pm$0,05):20=0,25$\pm$0,025. No obstant això l'error relatiu roman igual (prova-ho).

Nota:

Aquesta fórmula ix de fer$\frac{\mathrm{A+a}}{\mathrm{B-b}} - \frac{\mathrm{A-a}}{\mathrm{B+b}}$i dividir entre 2, despreciem b^2 enfront de B^2. No cal saber-se-la.

Potència:

Pot ratllar la catàstrofe. Comprova que el mínim ix 158 i el màxim 218. EA $\leq$ 30.

Açò és $(2,5 \pm 0,05)^{5,7 \pm 0,05}$=188 $\pm$ 30 el que representa un 16 % d'error relatiu.

Curiosament 188 no és $2,5^{5,7}$ que val 185,5 aproximadament, 188 és la mitjana entre el mínim i el màxim.

Activitats resoltes

Mesurem el ràdio d'una circumferència amb un regle mil·limetrat i marca 7,0 cm. Volem calcular l'àrea del cercle. L'error màxim en el radi és de 0,05 cm per tant pot estar entre 6,95 i 7,05. Si apliquem la fórmula πr^2 per a aquests valors obtenim 151,7 i 156,1, que són els valors mínim i màxim. La diferència és 4,4 i la seua meitat és 2,2 que és la cota d'error absolut. Direm que

$$A = 153{,}9 \pm 2{,}2 \text{ cm}^2.$$

La cota de l'error relatiu $\frac{2{,}2}{153{,}9} \cdot 100 = 1{,}4$ %.

El radi tenia una cota de (0,05 : 7)·100 = 0,71 %, per tant hem perdut precisió.

Si operem amb nombres aproximats, i pitjor encara, si ho fem moltes vegades, els errors es van acumulant fins al punt de poder fer-se intolerables. No sigues massa precís si les dades de partida no són fiables.

Activitats proposades

13. Arredoneix $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ fins a les centèsimes i troba els errors absolutes i relatives comesos.

14. Troba una cota de l'error absolut a les aproximacions següents:

a) 2,1
b) 123
c) 123,00
d) 4000 amb arredoniment en les desenes.

15. Una balança té un error inferior o igual a 50 g en les seues mesures. Usem aqueixa balança per a elaborar 10 paquets de sucre d'1 Kg cada un que són un lot. Determina el pes mínim i màxim del lot. Quina és la cota de l'error absolut per al lot?

16. Els nombres A = 5,5 i B =12 han sigut arredonits. Troba una cota de l'error absolut i de l'error relatiu per a:

a) A+B
b) A·B
c) B/A
d) A^B

Nota: Determina els valors màxim i mínim de A i B. Després els valors màxims i mínims de cada apartat (recorda que la resta i la divisió funcionen distint)

17. Com mesurar el grossor d'un foli amb un error inferior a 0,0001 cm amb l'ajuda d'un regle mil·limetrat i la del conserge de l'institut?, fes-ho.

3. REPRESENTACIÓ A LA RECTA REAL DELS NOMBRES REALS:

3.1. Densitat dels Nombres Reals:

Els nombres reals són densos, és a dir, entre cada dos nombres reals hi ha infinits nombres al mig.

Això és fàcil de deduir, si *a*, *b* són dos nombres amb *a* < *b* sabem que$a < \frac{a+b}{2} < b$, és a dir, la mitjana està entre els dos nombres. Com açò podem fer-ho les vegades que vullguem, doncs d'ací el resultat.

Curiosament els racionals són també densos, així com els irracionals.

Activitats proposades

18. Calcula 3 nombres reals que estiguen entre$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$i 1.

19. Troba 5 nombres racionals que estiguen entre$\sqrt{2}$i$1{,}5$

20. Troba 5 nombres irracionals que estiguen entre 3,14 i π

3.2. Representació a la recta real dels nombres reals:

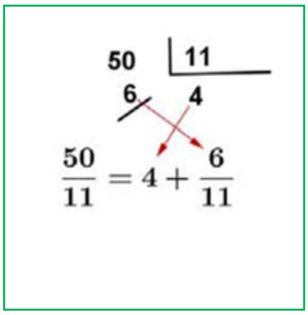
Triat l'origen de coordenades i la grandària de la unitat (o dit d'una altra manera, si col·loquem el 0 i l'1) tot nombre real ocupa una posició en la recta numèrica i al revés, tot punt de la recta es pot fer correspondre amb un nombre real.

Vegem com representar de forma exacta **alguns** nombres reals:

I.- Representació a la recta dels nombres racionals:

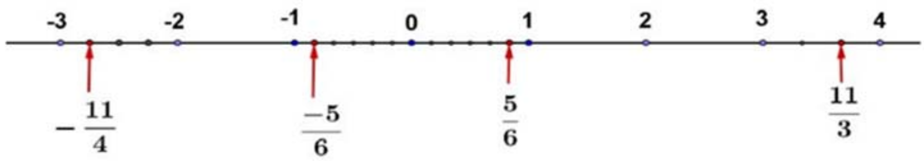
Activitats resoltes

- Si la fracció és **pròpia** (numerador menor que el denominador, valor menor que 1), per exemple $\frac{5}{6}$bastarà de dividir la primera unitat en 6 parts iguals i prendre 5. En cas de ser negativa comptarem cap a l'esquerra. (Veure figura)
- Si la fracció és **impròpia** (numerador major que denominador i per tant valor major que 1) farem la divisió entera (sense decimals) quedant-nos amb el quocient i el residu. Açò ens permet posar-la en forma mixta (suma d'un enter i una fracció pròpia). Així per exemple: $\frac{11}{3} = 3 + \frac{2}{3}$ja que en dividir 11 entre 3 obtenim 3 de quocient i 2 de residu. *El quocient és la part entera i el residu el numerador de la fracció pròpia*.



Per a representar-la només ens hem d'anar on diu la part entera (3) i la unitat següent (la que va del 3 al 4) la dividim en 3 parts iguals i prenem 2.

- Un altre exemple:$\frac{17}{7} = 2 + \frac{3}{7}$, ja que la divisió dóna 2 de quocient i 3 de residu.



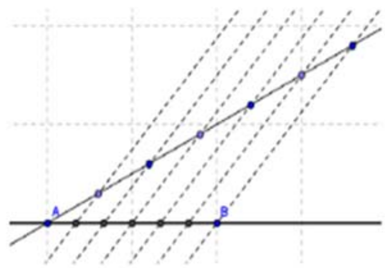
Ens n'anem al 2, dividim la unitat següent (del 2 al 3) en 7 parts iguals i prenem 3.

- **En cas de ser negativa**:$-\frac{11}{4} = -(2+\frac{3}{4}) = -2-\frac{3}{4}$, es farà igual però comptant cap a l'esquerra. Ens n'anem al –2, la unitat que va del –2 al –3 es divideix en 4 parts i prenem 3 (però comptant del –2 al –3 clar!).

Recorda que:

Per a dividir un segment en part iguals:

Per a dividir el segment AB en, per exemple, 6 parts iguals, tracem per A una línia obliqua qualsevol, obrim el compàs una obertura qualsevol i marquem 6 punts en la recta anterior a distància igual. Unim l'últim punt amb B i tracem paral·leles que passen pels punts intermedis de la recta obliqua. Pel *Teorema de Tales*, el segment AB ha quedat dividit en 6 parts iguals.



Normalment no t'exigiran que ho faces tan exacte, ho faràs de forma aproximada, però vés en compte en què les parts pareguen iguals.

II.- Representació a la recta de les arrels quadrades:

Per a representar arrels quadrades usem el Teorema de Pitàgores. Si en un triangle rectangle la hipotenusa és *h* i els catets són *a*, *b* tenim que $h^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow h = \sqrt{a^2+b^2}$.

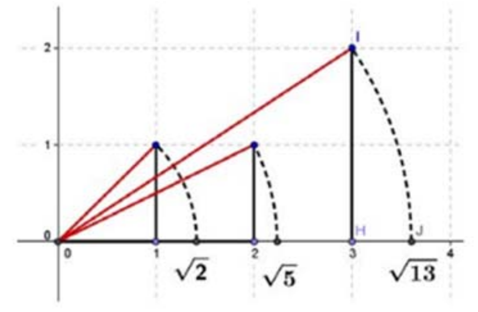
Activitats resoltes

- Representa a la recta$\sqrt{2}$

Si *a* = *b* = 1 tenim que$h = \sqrt{2}$. Només hem de construir un triangle rectangle de catets 1 i 1, la seua hipotenusa medeix$\sqrt{2}$, (la diagonal del quadrat de costat 1 medeix$\sqrt{2}$). Ara utilitzant el compàs, portem aqueixa distància a l'eix X (veure figura).

- Representa a la recta$\sqrt{5}$

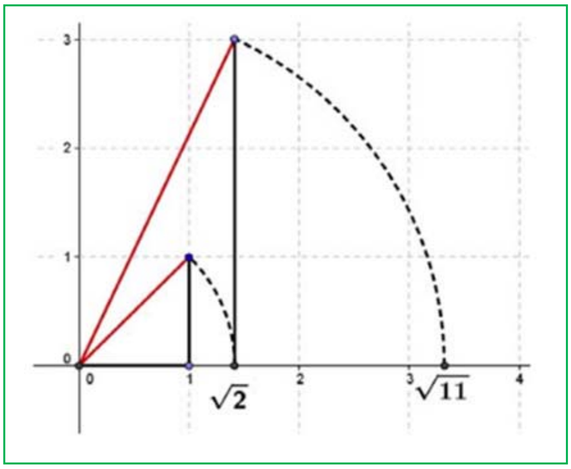
Com$\sqrt{5} = \sqrt{2^2+1^2}$només cal construir un triangle rectangle de catets 2 i 1, i la seua hipotenusa medeix$\sqrt{5}$.



Has agarrat el truc?, el radicand cal expressar-lo com a suma de 2 quadrats. El triangle rectangle tindrà com a catets aqueixos dos nombres.

- Així, per a representar $\sqrt{13}$, expressem 13 com a suma de 2 quadrats:$13 = 9 + 4 = 3^2 + 2^2 \Rightarrow \sqrt{13} = \sqrt{3^2 + 2^2}$per tant en un triangle rectangle de costats 3 i 2 la hipotenusa serà$\sqrt{13}$.

- Però, i si el nombre no pot posar-se com a suma de dos quadrats?, per exemple l'11 (sempre complicant les coses! ☹).



Caldrà fer-ho en 2 passos. 11 = 2 + 9, hi ha algun nombre el quadrat del qual siga 2?, per descomptat que sí, $\sqrt{2}$. Per tant $\sqrt{11} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 3^2}$, hem de fer un triangle rectangle de catets$\sqrt{2}$i 3. Per a això primer es construeix$\sqrt{2}$ com abans i es traça una perpendicular de longitud 3 (veure figura).

Poden dibuixar-se ja així totes les arrels?, no. Hi ha algunes per a les que cal fer més passos ($\sqrt{7}$per exemple requereix 3), però millor ho deixem ací, no?

Activitats proposades

21. Representa a la recta numèrica els nombres següents:

$\frac{7}{6}; -\frac{17}{4}; 2{,}375; -3,\overline{6}$

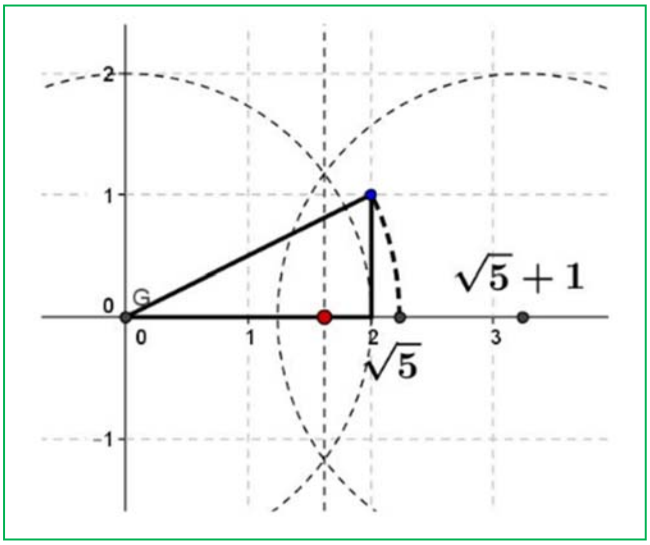
22. Representa a la recta numèrica:

$\sqrt{20}; -\sqrt{8}; \sqrt{14}; \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

3.3. Un exemple d'interés matemàtic, natural i artístic:

Has sentit parlar del nombre d'or?

El Nombre d'Or (o Raó Àuria o Proporció Harmònica o Divina Proporció) és igual a $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$



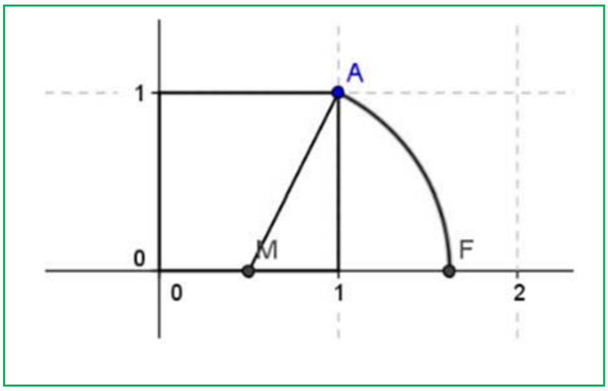
Activitats resoltes

- Com el representem a la recta?

Només cal construir $\sqrt{5}$com dalt, sumar 1 (traslladem 1 unitat amb el compàs) i dividir entre 2 trobant el punt mitjà (amb la mediatriu), fet.

- Una altra forma diferent:

Construïm un quadrat de costat 1 (un què?, un el que vullgues!). Trobem el punt mitjà del costat inferior (M) i portem la distància MA amb el compàs a l'eix horitzontal, OF és el nombre d'or.

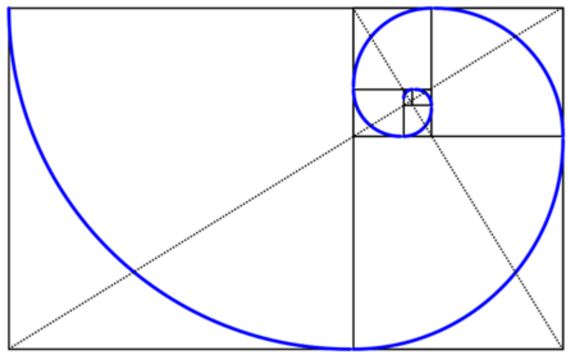


Vegem:

$$\mathrm{MA} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\mathrm{OF} = \frac{1}{2} + \mathrm{MA} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Un exemple de l'aplicació de la raó Àuria per a construir una espiral (imatge de wikipedia).



Espiral Àuria. Wikipedia

Activitats proposades

23. Busca rectangle auri i espiral Àuria.

24. Ja de pas busca la relació entre el Nombre d'Or i la Successió de Fibonacci.

25. Busca en youtube "algo pasa con phi" i em contes.

3.4. Ferramenta informàtica per a estudiar la proporció àuria

En aquesta activitat es va a utilitzar el programa *Geogebra* per a realitzar un estudi de la proporció àuria.

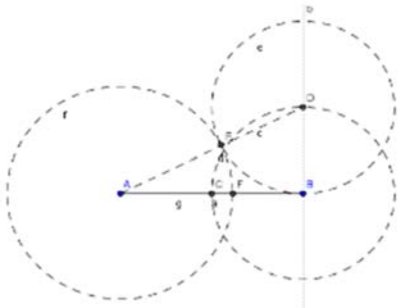
Un segment està dividit en dues parts que estan en proporció àuria si la raó entre la longitud del segment i la longitud de la part major coincideix amb la raó entre la longitud de la part major i la de la part menor.

Activitats resoltes

- *Utilitza Geogebra per a dividir un segment en dues parts que estiguen en proporció àuria.*

Obri una nova finestra de *Geogebra,* en el menú **Visualitza** desactiva **Eixos** i **Quadricula**

- Determina amb **Nou punt** els punts *A* i *B* i dibuixa el segment, *a*, que els uneix.
- Traça un segment *BD* perpendicular al segment *AB* en el punt *B*, la longitud del qual siga la meitat d'AB, *pots* seguir les instruccions següents:
    - ➢ Calcula el Punt **mitjà o centre** del segment *AB* i crida'l *C*.
    - ➢ Dibuixa amb **Circumferència amb centre i punt que creua** la que té centre en *B* i passa per *C*.
    - ➢ Traça la **Recta Perpendicular** al segment *AB* que passe per *B*.
    - ➢ Defineix *D com* el **Punt d'Intersecció** entre aquesta recta i la circumferència.



- Dibuixa el segment *AD* i una circumferència amb centre *D* que passe per *B*. Siga *E* el **Punt d'Intersecció** d'aquesta circumferència amb el segment *AD*.
- Amb centre en *A* traça la circumferència que passa per *E* i determina el **punt d'Intersecció,** *F*, d'aquesta circumferència amb el segment *AB*.
- Traça el segment, *g*, que uneix els punts *A* i *F*.
- Comprova que el punt *F* divideix al segment *AB* en dues parts que estan en proporció àuria:
  - Tria en el menú **Opcions**, 5 **Posicions decimals**.
  - Calcula en la línia **d'Entrada** els quocients *a/g i g/(ag).*

Observa en la **Finestra algebraica** que aquests valors coincideixen, has calculat un valor aproximat del nombre d'or, Φ.

- Amb la ferramenta **Desplaça**, canvia la posició dels punts inicials *A* o *B* i comprova que el quocient entre les longituds dels segments *AF* i *FB* roman constant.
- Per a visualitzar millor la construcció pots dibuixar els elements auxiliars amb traç discontinu, triant en el menú contextual, **Propietats i Estil de traç**.

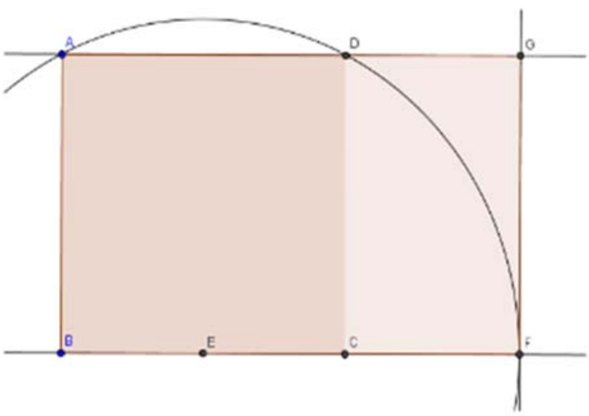
Un rectangle és auri si els seus costats estan en proporció àuria.

Si a un rectangle auri li llevem (o li afegim) un quadrat obtenim un rectangle semblant al de partida i per tant també auri.

- *Utilitza Geogebra per a dibuixar un rectangle auri.*

Obri una nova finestra de *Geogebra,* en el menú **Visualitza** desactiva **Eixos** i **Quadricula**

- Defineix dos punts *A* i *B* que seran els extrems del costat menor del rectangle i amb la ferramenta ***polígon* regular** *dibuixa*, a partir dels punts *A* i *B*, el quadrat *ABCD* i oculta els noms dels costats amb la ferramenta **Exposa/Oculta rètol**.



- Calcula el **Punt mitjà**, *E*, del costat *BC*. Amb centre en *E* dibuixa la **Circumferència** amb centre en *E* que passa per *A*.
- Traça la recta, *a*, que passa per *BC* i defineix com a *F* el **Punt d'intersecció** entre aquesta recta i la circumferència.
- Dibuixa la **Recta perpendicular** a la recta *a què* passa per *F*, i la **recta** que passa pels punts *A i D*, anomena *G* al **Punt d'intersecció** d'aquestes rectes i defineix amb **Polígon** el rectangle *ABFG*.
- En la finestra algebraica apareixen les longituds dels costats del rectangle com a *f* i *g*, introdueix en la línia **d'Entrada** *g / f* i observa en aquesta finestra que apareix el valor *e* que és una aproximació al nombre auri. Tria en el menú **Opcions**, 5 **Posicions decimals.**

- Dibuixa el **segment** *CF*, en la finestra algebraica apareix la seua longitud, *h*, introdueix en la línia **d'Entrada** *f / h*, observa que aquest quocient coincideix amb *g / f* i és una aproximació del nombre auri.

- Amb la ferramenta **Desplaça**, canvia la posició dels punts inicials *A* o *B* i observa que el quocient entre les longituds dels costats dels rectangles és constant.

El rectangle *ABFG és* auri ja que el quocient entre la longitud del seu costat major i la del menor és el nombre d'or, a més el rectangle *DCFG*, que s'obté en llevar un quadrat de costat el menor del rectangle, és també auri i per tant semblant al primer.

- *Crea les teues pròpies ferramentes amb Geogebra. Crea una que dibuixe rectangles auris.*

Es va a crear una ferramenta que a partir de dos punts *A* i *B* dibuixe el rectangle auri en què el segment *AB* siga el costat menor.

- En la figura anterior oculta el nom dels punts *C, D, E, F* i *G* amb la ferramenta **Exposa/Oculta rètol** fent clic amb el ratolí sobre ells, en l'àrea de treball o en la finestra algebraica.
- Activa en el menú **Ferramentes** , l'opció **Creació de nova ferramenta i** defineix:

Objectes d'eixida: el polígon quadrat, el polígon rectangle **i** els punts *C, D, F*, i *G*.

Objectes d'entrada: els dos punts inicials *A* i *B*.

I tria com a **nom de la ferramenta** *rectangleauri*. Observa que apareix en la barra de ferramentes.

En l'opció **Maneig d'útils** del menú **Ferramentes** grava la ferramenta creada com *rectangleauri* , que es guarda com *rectangleauri.ggt*

Utilitza la ferramenta **Desplaçament de la zona gràfica** per a anar a una part buida de la pantalla i comprovar que la ferramenta *rectangleauri* funciona perfectament.

- *Dibuixa una espiral àuria, i crea una ferramenta que dibuixe espirals àuries.*

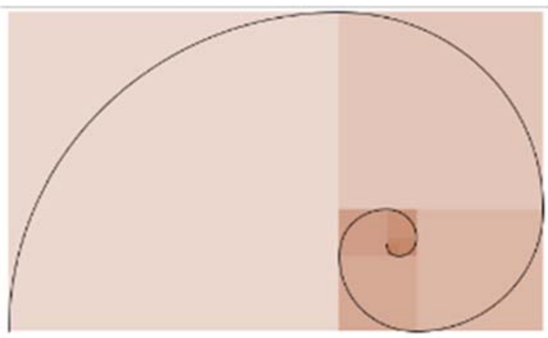
Obri una nova finestra de *Geogebra,* en el menú **Visualitza** desactiva **Eixos** i **Quadricula** i obri l'arxiu *rectangleauri.ggt* que acabes de crear.

- Defineix dos punts *A* i *B* i aplica la ferramenta *rectangleauri,* s'obté el rectangle auri *ABEF* i el quadrat *ABCD* amb el nom dels vèrtexs *C, D, E i F ocults.*
- Utilitza la ferramenta ***Arc* de circumferència donats centre i dos punts extrems** *per a* dibuixar l'arc amb centre el punt *C* i que passa pels punts *D* i *B*.

Es va a crear una nova ferramenta que dibuixe el rectangle auri i l'arc.

- Activa en el menú **Ferramentes** , l'opció **Creació de nova ferramenta i** defineix:

Objectes d'eixida: el quadrat, el polígon rectangle, els punts *C, D, E*, *F* i l'arc *c*.



Objectes d'entrada: els dos punts inicials *A* i *B*.

Tria com a **nom de la ferramenta** *espiralauria*.

En l'opció **Maneig d'útils** del menú **Ferramentes** grava la ferramenta creada com *espiralauria,* que es grava com *espiralauria.ggt.*

- Activa successivament la ferramenta anterior, a fi de dibuixar l'espiral que resulta d'unir amb un arc de circumferència dos vèrtexs oposats dels quadrats de forma consecutiva i de major a menor.

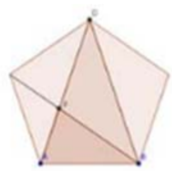
- Per a millorar l'aspecte de l'espiral es poden ocultar els punts, millor en la finestra algebraica, amb la ferramenta **Exposa / Oculta objecte**.

Observa que en variar els angles en una progressió aritmètica de diferència α=90º, els costats dels quadrats es modifiquen segons una progressió geomètrica de raó: Φ.

Activitats proposades

26. Comprova que la longitud del costat del pentàgon regular i la del seu diagonal estan en proporció àuria.

27. Calcula amb Geogebra una aproximació de la raó de semblança entre un pentàgon regular i el que es forma en el seu interior en dibuixar els seus diagonals. Determina sense utilitzar Geogebra el valor real de la raó de semblança entre aquests dos pentàgons.



28. Comprova que els triangles *ABD* i *ABF* de la figura són semblants i calcula aproximadament amb *Geogebra* la seua raó de semblança.

29. Calcula amb *Geogebra* el valor aproximat de la raó de semblança entre un decàgon regular i el decàgon que es forma en traçar les diagonals de la figura. Determina sense utilitzar Geogebra el valor real de la raó de semblança entre aquests dos polígons

4. INTERVALS, SEMIRECTES I ENTORNS:

Com ja sabem entre dos nombres reals hi ha infinits nombres. Hi ha una notació especial per a referir-se a aqueixos infinits nombres que hauràs de dominar per a aquest i futurs cursos.

4.1. Intervals

(Del lat. *Intervallum*): **2.** m. Conjunt dels valors que pren una magnitud entre dos límits donats.

I.- Intervals Oberts:

Si ens volem referir al conjunt dels nombres que hi ha entre dos valors però sense comptar els extrems, usarem un **interval obert**

Exemple:

Els nombres superiors a 2 però menors que 7 es representen per (2 , 7) i es llig “interval obert d’extrems 2 i 7”. A ell pertanyen infinits nombres com 2,001; 3,5; 5; 6,999; … però no són d’aquest conjunt ni el 2 ni el 7. Això representen els parèntesis, que entren tots els nombres del mig però no els extrems.

Exemple:

Els nombres positius menors que 10, es representen per (0 , 10), l’interval obert d’extrems 0 i 10. Fixa’t que 0 no és positiu, per la qual cosa no entra i el 10 no és menor que 10, per la qual cosa tampoc entra.

Nota: No s’admet posar (7 , 2), el menor sempre a l’esquerra!

També cal dominar l’expressió d’aquests conjunts usant desigualtats, prepara’t:

$$(2, 7) = \{x \in \mathbb{R} / 2 < x < 7\}.$$

Traduïm: Les claus s’utilitzen per a donar els elements d’un conjunt, dins d’elles s’enumeren els elements o es dóna la propietat que compleixen tots ells. S’utilitza la *x* per a denotar a un nombre real, la / significa “tal que” i finalment es diu la propietat que compleixen mitjançant una doble desigualtat. Així que no t’espantes, això de dalt es llig: *els nombres reals tal que són majors que 2 i menors que 7*.

És necessari dominar aquest llenguatge matemàtic ja que la frase en valencià pot no entendre’s en altres països però t’assegure que això de les claus i la / ho entenen tots els estudiants de matemàtiques del món (bo, quasi tots).

L’altre exemple: $(0, 10) = \{x \in \mathbb{R} / 0 < x < 10\}$.

Finalment la **representació gràfica**:

Es posen **punts sense omplir** en els extrems i es ressalta la zona intermèdia.

Pregunta: Quin és nombre que està més prop de 7, sense ser 7?

Pensa que 6,999…=7 i que entre 6,999 i 7 hi ha “molts, moltíssims …” nombres.

*Nota: En alguns textos els intervals oberts es representen així]2 , 7[la qual cosa tenen alguns avantatges com que els estudiants amb confonguen l’interval (3, 4) amb el punt del pla (3, 4), que assegurem que ha ocorregut (però tu no seràs un d'ells no?), o l'enutjosa necessitat de posar (2,3; 3,4) perquè (2,3,3,4) no ho entendria ni Gauss.

II.- Intervals Tancats:

Igual que els oberts però ara **sí** que pertanyen els extrems.

Exemple:

L'interval dels nombres majors o iguals que –2 però menors o iguals que 5. Ara el –2 i el 5 sí que entren. Es fa igual però posant claudàtors [–2 , 5].

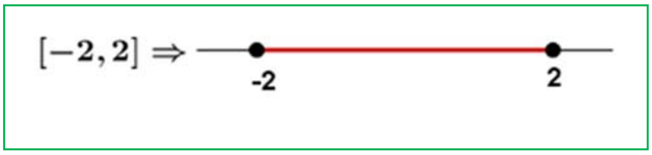
En forma de conjunt s'escriu: [–2, 5] = $\{x \in \mathbb{R}; -2 \leq x \leq 5\}$. Fixa't que ara posem $\leq$ que significa "menor o igual".

Exemple:

L'interval dels nombres el quadrat dels quals no és superior a 4. Si ho penses un poc veuràs que són els nombres entre el –2 i el 2, ambdós inclosos (no superior $\Leftrightarrow$ menor o igual). Per tant:

[–2, 2] = $\{x \in \mathbb{R}; -2 \leq x \leq 2\}$.

La representació gràfica és igual però posant **punts plens**.



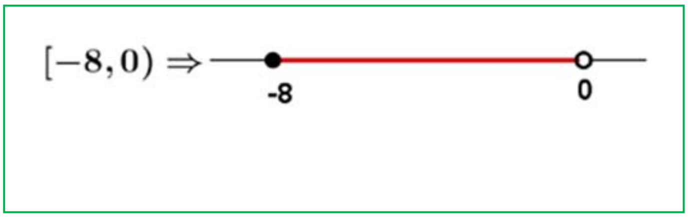
III.- Intervals Semioberts (o semitancats, a triar)

Per descomptat que un interval pot tindre un extrem obert i un altre tancat. La notació serà la mateixa.

Exemple:

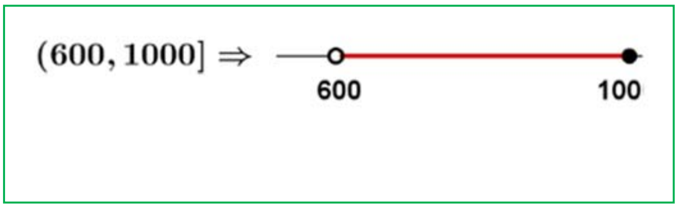
- Temperatura negativa però no per davall de -8 ºC:

  [-8,0)=$\{x \in \mathbb{R}; -8 \leq x < 0\}$.



- Nombres superiors a 600 però que no excedisquen de 1000.

(600,1000]=$\{x \in \mathbb{R} / 600 < x \leq 1000\}$



4.2. Semirectes

Moltes vegades el conjunt d'interés no està limitat per un dels seus extrems.

Exemple:

- Els nombres positius: No hi ha cap nombre positiu que siga el major. Es recorre llavors al símbol ∞ i s'escriu (0,+∞) = {x /x >0} .

Has de notar que és equivalent posar x > 0 que posar 0 < x, es pot posar d'ambdues formes.

Exemple:

- Nombres no majors que 5: (-∞,5] = {x / x≤5} . Ací el 5 sí que entra i per això el posem tancat ("no major" equival a "menor o igual")

Exemple:

- Solució de x > 7: (7,+∞) = {x /x >7} .
  Nota: **L'extrem no tancat sempre es posa obert**. **No** volem veure açò: (7 , +∞]

$(0, +\infty) \Rightarrow$

$(-\infty, 5] \Rightarrow$

4.3. Entorns

És una forma especial de posar els intervals oberts.

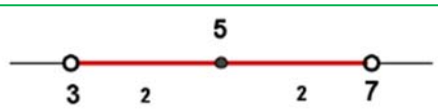
Es defineix l'entorn de centre *a* i ràdio *r* i es denota E(*a* , *r*) (una altra forma usual és $E_r(a)$) com el conjunt de nombres que estan a una **distància de *a* menor que *r***.

Amb un exemple ho entens millor:

Exemple:

L'entorn de centre 5 i ràdio 2 són els nombres que estan de 5 una distància menor que 2. Si ho pensem un poc, seran els nombres entre 5 – 2 i 5 + 2, és a dir, l'interval (3 , 7). És com agafar el compàs i amb centre en 5 marcar amb obertura 2.

$E(5, 2) = (3, 7) \Rightarrow$



Fixa't que el 5 està en el centre i la distància del 5 al 7 i al 3 és 2.

E(*a* , *r*) = (*a* – *r* , *a* + *r*)

Exemple:

E(2 , 4) = (2 – 4 , 2 + 4) = (–2 , 6)

És molt fàcil passar d'un entorn d'un interval. Anem a fer-ho al contrari.

Exemple:

Si tinc l'interval obert (3 , 10), com es posa en forma d'entorn?

Trobem el punt mitjà$\frac{3+10}{2} = \frac{13}{2} = 6{,}5$ que serà el centre de l'entorn. Ens falta trobar el radi:

(10-3):2 = 3,5 és el radi (la meitat de l'ample). Per tant (3 , 10) = E(6,5 ; 3,5)

En general:

L'interval (*b* , c) és l'entorn $\mathrm{E}(\frac{b+c}{2}, \frac{c-b}{2})$.

Exemple:

L'interval (–8, 1) =$\mathrm{E}(\frac{-8+1}{2}, \frac{1-(-8)}{2}) = \mathrm{E}(-3'5, 4'5)$

També hi ha els entorns tancats però són d'ús menys freqüent.

Activitats proposades

30. Expressa com a interval o semirecta, en forma de conjunt (usant desigualtats) i representa gràficament:

a) Percentatge superior al 26 %.
b) Edat inferior o igual a 18 anys.
c) Nombres el cub dels quals siga superior a 8.
d) Nombres positius la part entera dels quals té 3 xifres.
e) Temperatura inferior a 25ºC.
f) Nombres per als que hi ha la seua arrel quadrada (és un nombre real).
g) Nombres que estiguen de 5 a una distància inferior a 4.

31. Expressa en forma d'interval els entorns següents:

a) E(1 , 5)

b) $\mathrm{E}(-2, \frac{8}{3})$

c) E(-10 ; 0,001)

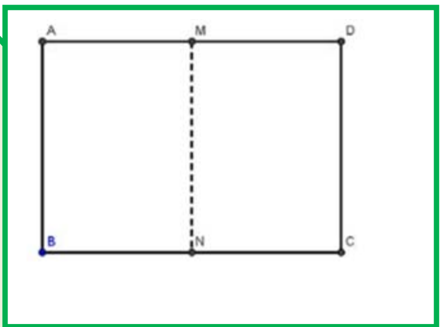
32. Expressa en forma d'entorn els intervals següents:

a) (4 , 7)
b) (-7 , -4)
c) (-3 , 2)

33. Els sous superiors a 500 € però inferiors a 1000 € es poden posar com a interval de nombres reals?

*Pista: 600,222333€ pot ser un sou?

CURIOSITATS. REVISTA



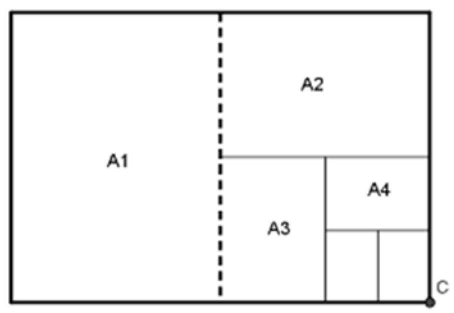
Folis i

Ja sabem que un quadrat de costat L té una diagonal que val L , vegem alguna cosa més:
La imatge representa un foli amb la norma DIN 476 que és la més utilitzada a nivell mundial.
Aquesta norma especifica que un foli DIN A0 té una superfície de 1 m^2 i que en partir-lo por la meitad obtindrem un DIN A1 que ha de ser un rectangle semblant a l'anterior. Partint l'A1 en 2 iguals obtenim el DIN A2 , després el DIN A3 i el DIN A4 que és el més usat. Tots són semblants als anteriors.
Qué significa ser semblant?
Doncs que , però AM = AD/2 per tant

Una taula

	Largo (cm)	Ancho (cm)	Área (cm^2)
A0	118,92	84,09	10000
A1	84,09	59,46	5000
A2	59,46	44,04	2500
A3	42,04	29,83	1250
A4	29,73	21,02	625
A5	21,02	14,87	415,2

Per tant als folis DIN 476:
la razó entre el llarg y l'ample és
No queda ací la cosa, fixa't que al partir el foli en 2 parts iguals el nou foli té el costat major que coincideix amb el costat menor de l'original: AB es ara el costat major i abans era el menor, com AB = AD/ resulta que la raó de semblança és . És a dir, per a passar d'un foli A0 a un altre A1 dividim els seus costats entre .
El mateix per als següents.
Calculem les dimensions:
Per a l'A0 tenim que l'àrea és AD · AB = 1m^2



AB = . Per a obtindre les mesures de l'A4

dividirem 4 vegades entre :

Llarg =

Ample= Llarg/ 0,210 m = 21,0 cm

Questions:

Comprova els valors de la taula anterior (hi ha almenys dos valors equivocats ☺)
Quants folis A4 caben en un foli A0?
Quines són les dimensions de l'A6?, i de l'A7?

El nombre d'or

Dividim un segment en dos parts de forma que si dividim la longitud del segment total entre la part major ha de donar el mateix que al dividir la part major entre la part menor.
Tenim que (*a*+*b*)/a = *a/b*.

El nombre d'Or (o Raó Àuria) anomenat Φ (fi) és precisament el valor d'aquesta proporció, així:

$$\Phi = \frac{a}{b};\ \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \Rightarrow 1 + \frac{1}{\Phi} = \Phi \Rightarrow \Phi^2 - \Phi - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618034$$

Ja tenim dos curiositats:

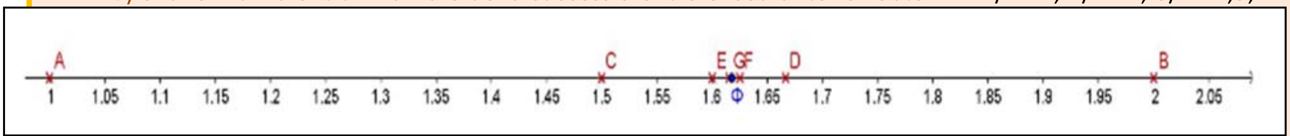
1

$$\Phi^2 = \Phi + 1$$
$$\frac{1}{\Phi} = \Phi - 1$$

2

$$\Phi^2 = \Phi + 1$$
$$\Phi^3 = 2\Phi + 1$$
$$\Phi^4 = 3\Phi + 2$$
$$\ldots \Phi^n = F_n\Phi + F_{n-1}$$

On F_n és l' *n*-èsim Nombre de Fibonacci. Aquests nombres són 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 … on cada terme a partir del tercer s'obté sumant els dos anteriors.
Més relacions entre el Nombre d'Or i la Successió de Fibonacci:
a) Si anem dividient un nombre de la successió entre el seu anterior obtenim: 1/1 =1; 2/1 =2; 3/2 =1,5;



Com es pot vore, ens acostem ràpidament al valor del nombre d'Or, primer per baix, després per dalt, per baix, … alternativament.

b) Fórmula de Binet:

Per a calcular un nombre de Fibonacci, per exemple el que ocupa el lloc 20 hi ha que calcular els 19 anteriors.
Aço no té que ser necessariament així, ja que Binet va deduir aquesta fórmula, que per a l'autor és una de les més boniques de les matemàtiques.

$$F_n = \frac{\Phi^n - \left(-\frac{1}{\Phi}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

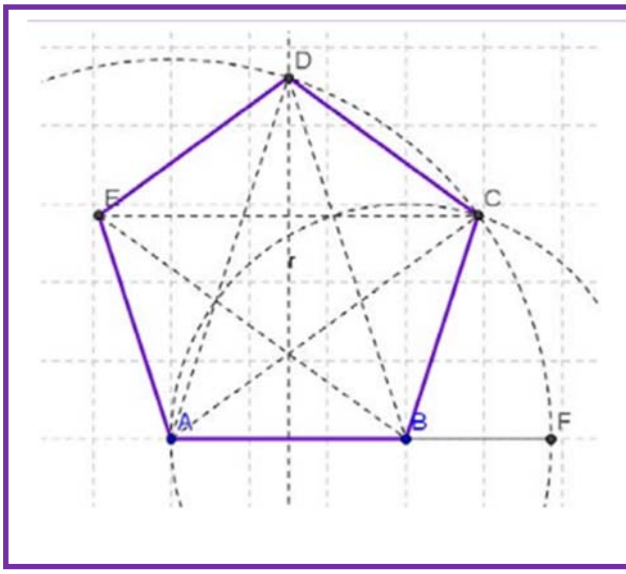
Si per exemple sustituim *n* per 20 obtenim $F_{20} = 6765$.
Realment podem prescindir del 2n terme del numerador, per a *n* > 3 es fa molt més xicotet que el primer. Per exemple, per a *n* = 6, si fem $\frac{\Phi^6}{\sqrt{5}}$ obtenim 8,0249 que arredonit és 8, el valor correcte.

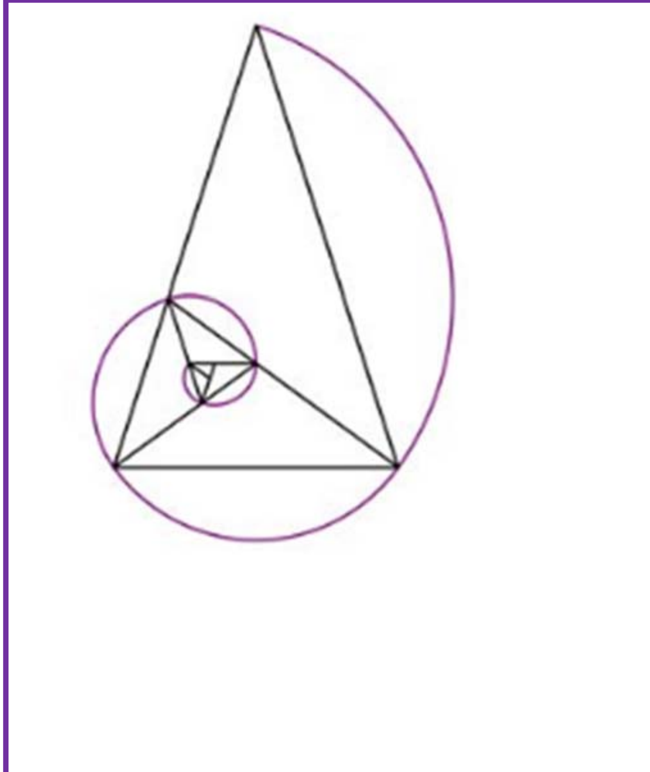
Activitats:

a) Calcula F_{31} i F_{30} amb la fórmula de Binet.

b) Fes el quocient i mira si és una bona aproximació del Nombre d'Or.

El pentàgon regular i el Nombre d'Or.





En un pentàgon regular la raó entre una diagonal i el costat es Φ . Com sabem construir Φ , la construcció d'un pentàgon regular es molt senzilla:

Si AB ha de ser un costat del nostre pentàgon, construïm el punt F alineat amb A i B que complisca AF/AB igual a Fi (s'indica com fer-ho al text).

Aleshores, AB serà el costat i AF la mida de la diagonal.

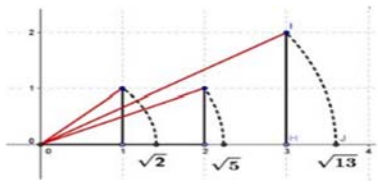
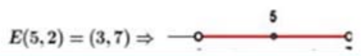
Tracem la mediatriu de AB i una circumferència de centre A i radi AF. Es tallen en D que és un vèrtex del pentàgon.

Tracem ara una circumferència amb centre B i radi AB, es talla amb l'anterior en C que és un altre vèrtex del pentàgon. Només queda trobar E que és molt fàcil.

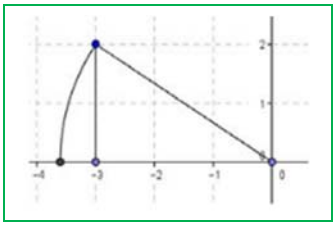
El pentàgon regular amb les seues diagonals es coneix com “Pentagrama Místic” i pareix ser que tornava bogets als pitagòrics, en ell el nombre d'Or apareix sense mesura.

Del Pentagrama hem tret aquest triangle, anomenat Triangle Àuri que permet obtindre més triangles àuris fent la bisectriu en un dels angles iguals i formar aquesta espiral. Aquesta espiral es pareguda a l'Espiral Àuria, a la de Fibonacci i a l'espiral logarítmica que és la que apareix en: galàxies, huracans, petxines,

RESUM

Conjunts de nombres	**Naturals** ➔ $\mathbb{N}=\{0, 1, 2, 3, \dots\}$; **Enters** ➔ $\mathbb{Z}=\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ **Racionals** ➔ $\mathbb{Q}=\{\frac{a}{b}; a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$; **Irracionals** ➔ $\mathrm{I}=\mathbb{R}-\mathbb{Q}; \mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup \mathrm{I}$	
Fraccions i expressió decimal	Totes les fraccions tenen expressió decimal exacta o periòdica. Tota expressió decimal exacta o periòdica es pot posar com a fracció.	$0{,}175=\frac{175}{1000}=\frac{7}{40}$ X = 1,7252525… = 854/495
$\sqrt{2}$**irracional**	$\sqrt{2}$**no** pot posar-se com a fracció.	
Error Absolut	Error Absolut (*EA*) = |*valor real – valor aproximat*|	$\sqrt{3}\approx 1{,}73\text{: EA}\approx 0{,}0021$
Cota de l'error	Trobem la cota calculant un valor major	$EA \le 0{,}003$
Error Relatiu	$ER=\frac{\text{EA}}{\lvert\text{Valorreal}\rvert}$	$ER=\frac{0{,}0021}{\sqrt{3}}\simeq 0{,}00121$
Control de l'error	En cada suma o resta l'error absolut és la suma dels errors absoluts. Els errors relatius se sumen en multiplicar dos nombres.	
Densitat	Els nombres reals i els nombres racionals són densos. Entre cada dos nombres, sempre podem trobar a un altre.	
Representació a la recta real	Fixat un origen i una unitat, hi ha una biyección entre els nombres reals i els punts de la recta. A cada punt de la recta li correspon un nombre real i al contrari.	
N Reals	Tota expressió decimal finita o infinita és un nombre real i al contrari.	$0{,}3333, \pi, \sqrt{2}$
Interval obert	Interval obert en el que els extrems **no** pertanyen a l'interval	(2, 7) = {*x* ∈ℝ/ 2 < *x* < 7}. 
Interval tancat	Els extrems **SI** pertanyen a l'interval	 [–2, 2] = {*x* ∈ℝ; $-2 \le x \le 2$}
Intervals Semioberts (o semitancats)	Interval amb un extrem obert i un altre tancat	 $[-8,0)=\{x\in\mathbb{R} \;/ -8\le x<0\}$
Entorns	Forma especial d'expressar un interval obert: **E(*a* , *r*) = (*a* – *r* , *a* + *r*)**	

EXERCICIS I PROBLEMES



1. Nombres

2. La imatge és la representació d’un nombre irracional, quin?

3. Representa en la recta numèrica: –3,375; 3,666…

4. Representa en la recta numèrica: $-\sqrt{8}; 2\sqrt{5}; \frac{\sqrt{10}}{2}$

5. Troba el valor exacte de $\frac{0,\overline{4}}{0,4}$ sense calculadora.

6. Digues quines d’aquestes fraccions tenen expressió decimal exacta i quines periòdica:

$$\frac{9}{40}; \frac{30}{21}; \frac{37}{250}; \frac{21}{15}$$

7. Troba 3 fraccions *a, b, c* tals que $\frac{3}{4} < a < b < c < \frac{19}{25}$

8. Fes al teu quadern una taula i digues a quins conjunts pertanyen els nombres següents:

2,73535…; π - 2 ; $\sqrt[5]{-32}$; $\frac{2}{0}$; 10^{100} ; $\frac{102}{34}$; -2,5 ; 0,1223334444…

9. Contesta verdader o fals, justificant la resposta.

a) $\mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) = \{0\}$

b) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

c) L’arrel quadrada d’un nombre natural és irracional.

d) $\sqrt{7} \notin \mathbb{Q}$

e) 1/47 té expressió decimal periòdica.

10. Posa exemples que justifiquen:

a) La suma i la resta de nombres irracionals pot ser racional.

b) El producte o divisió de nombres irracionals pot ser racional.

11. Què serà la suma de nombre racional amb un altre irracional? (Pensa en la seua expressió decimal)

12. La suma de 2 nombres amb expressió decimal periòdica, pot ser un enter?

13. Expressa amb paraules els següents intervals o semirectes:

a) (–7, 7]

b) $\{x \in \mathbb{R} / -3 \leq x < 5\}$

c) 

d) (–2, +∞)

14. Quants metres hi ha de diferència en calcular el perímetre de la Terra posant $\pi \approx 3{,}14$ en compte del seu valor real?, és molt o poc?

Bàsicament has de trobar l’error absolut i el relatiu.

*Radi aproximadament 6370 km

15. Els antics van fer bones aproximacions de Pi, entre elles citem Arquimedes (segle III a.C) amb 211875/67441 i a Ptolemeu (segle II d.C,) amb 377/120.

Quin dels dos va cometre menor error relatiu?

16. El següent és un **Pi**-text (està en castellà): "Soy y seré a todos definible, mi nombre tengo que daros, cociente diametral siempre inmedible soy de los redondos aros." (Manuel Golmayo)

Conta i apunta el nombre de lletres de cada paraula i veuràs d'on ve el seu nom. Inventa una frase en valencià amb la mateixa propietat, no cal que siga tan llarga (almenys 10 paraules)

17. Troba:

a) (3, 5] U (4, 6]

b) (3, 5] $\cap$(4, 6]

c) $(-\infty,2] \cap(-2, +\infty)$

18. Pot expressar-se com a entorn una semirecta?

19. Expressa com a entorns oberts els intervals següents:

a) (0 , 7)

b) (–8 , –2)

c) (2,+∞)

20. Expressa com a intervals oberts els entorns següents:

a) E(2 , 2/3)

b) E(–7, 1/2)

21. Un nombre irracional tan important com a Pi és el nombre "e".$e \approx 2{,}718281828...$ que pareix periòdic, però no, no ho és. Es defineix com el nombre a què s'acosta$(1+\frac{1}{n})^n$ quan *n* es fa molt, però que molt gran. **Agafa la calculadora** i dóna-li a *n* valors cada vegada majors, per exemple: 10, 100, 1000, … Apunta els resultats a una **taula**.

22. Una altra forma de definir *e* és$e = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+...$

Que diràs tu què són aqueixos nombres tan admirats!, s'anomenen factorials i és molt senzill: 4! = 4·3·2·1 = 24, es multiplica des del nombre fins a arribar a 1. Per exemple: 6! = 6·5·4·3·2·1= 720. No et preocupes, que la tecla ! està a la calculadora.

Pots calcular *e* amb 6 xifres decimals correctes?

*Nota: Fixa't que ara la convergència és molt més ràpida, només has hagut d'arribar fins a *n* = ¿?

23. Ara treballem amb valors exactes, ni les fraccions ni els irracionals se substitueixen per la seua expressió decimal, exemples:

$\frac{4\pi\cdot 5^3}{3}=\frac{500\pi}{3}$

$$3\sqrt{2}+2\sqrt{2}=5\sqrt{2}$$

Troba l'àrea i el perímetre d'un rectangle de costats$\sqrt{2}$i$\sqrt{8}$m.

24. Troba l'àrea i el perímetre d'un quadrat la diagonal del qual medeix 2 m.

25. Troba l'àrea i el perímetre d'un hexàgon regular de costat$\sqrt{3}$m.

26. Troba l'àrea i el perímetre d'un cercle de radi $\sqrt{10}$m.

27. Troba l'àrea total i el volum d'un cub de costat $\sqrt[3]{7}$m.

28. Per quin nombre hem de multiplicar els costats d'un rectangle perquè la seua àrea es faça el triple?

29. Quant ha de valdre el radi d'un cercle perquè la seua àrea siga 1 m^2?

30. Tenim una circumferència i un hexàgon inscrit en ella. Quina és la raó entre els seus perímetres? (Raó és divisió o quocient)

31. Quins nombres al quadrat donen 7?

32. Quins nombres reals al quadrat donen menys de 7?

33. Quins nombres reals al quadrat donen més de 7?

34. Mesurar la grandària de les pantalles en polzades (") ja no pareix molt bona idea. La mesura es referix a la longitud de la diagonal del rectangle, així, una televisió de 32" es referix que la diagonal mesura 32". Això no dóna molta informació si no sabem la proporció entre els costats. Les més usuals en les pantalles de televisió i ordinador són 4:3 i 16:9.

Si una polzada són 2,54 cm, quines seran les dimensions d'una pantalla de 32" amb proporció 4:3?, i si la proporció és 16/9? Quina té major superfície?

AUTOAVALUACIÓ

1) *Saps a quins conjunts pertanyen els diferents nombres.*
   Indica en una taula o un diagrama (com el del text) a quins conjunts numèrics pertanyen els nombres següents: 0; -2; 3/4, 7,3; 6,252525…, π-2 ;;$\sqrt[4]{-16}$; 1,123124125…; 2,999…

2) *Saps arredonir amb un nombre adequat de xifres i calcules l'error relatiu per a comparar aproximacions. Saps trobar una cota per a l'error absolut i el relatiu.*
   a) Els següents nombres s'han arredonit, troba una cota de l'error absolut i de l'error relatiu:
      a_1) 3,14
      a_2) 45600 amb arredoniment en les centenes.
   b) Si prenem$\sqrt{10} \approx 3{,}16$y$\frac{2}{3} \approx 0{,}67$ en qual de les aproximacions cometem proporcionalment menor error?

3) *Saps quan una fracció té expressió decimal exacta o periòdica sense fer la divisió*.
Prova-ho amb aquestes:
   30/150; 30/21

4) *Saps passar de decimal a fracció per a treballar amb valors exactes:*
   Troba: 0,72525…+0,27474…

5) *Saps representar nombres racionals i irracionals de forma exacta*
   Representa de forma exacta$\frac{-21}{9}$; $\frac{30}{7}$; $\sqrt{10}$; $\sqrt{7}$

6) *Domines les distintes formes i notacions d'un interval o semirecta (interval, conjunt amb desigualtats i gràfica).*
   Expressa en forma d'interval (o semirecta), en forma de desigualtat i representa gràficament:
   a) Nombres reals inferiors o iguals que -1
   b) Nombres reals compresos entre -4 i 2, inclòs el 1r però no el 2n.

7) *Saps passar d'un entorn d'un interval i viceversa.*
   a) Escriu com a interval: E(-2 , 2/3)
   b) Escriu com a entorn l'interval (-5/2 , 7/3)

8) *Saps resoldre problemes treballant amb quantitats exactes.*
   Troba l'àrea, el volum i la diagonal principal d'un ortoedre de costats$\sqrt{5}$; $2\sqrt{5}$i$3\sqrt{5}$m.

Matemàtiques orientades a les ensenyances acadèmiques.

4tB ESO
Capítol 2:
Potències i arrels

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: JOSE ANTONIO ENCABO DE LUCAS

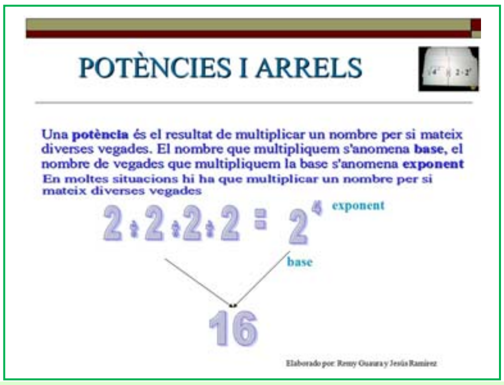
Revisora: Nieves Zuasti

Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF

Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

Índex

En aquest capítol estudiarem les potències d'exponent natural i enter amb les seues propietats. Aprendrem a operar amb les potències aplicant les seues propietats.



Estudiarem les potències d'exponent racional, que són els radicals, les seues propietats i així com les operacions que podem realitzar amb ells. Ens detindrem en la racionalització, que és una operació molt utilitzada en matemàtiques que la necessitarem per a operar amb radicals.

Estudiarem la notació científica, les propietats per a poder operar amb aquest tipus de notació i els avantatges d'operar amb aquesta notació.

Finalment estudiarem els logaritmes i les seues propietats, que faciliten les operacions perquè transformen, per exemple, els productes en sumes. Quan no hi havia calculadores ni ordinadors i volien multiplicar nombres de més de deu xifres, com ho feien?

1. POTÈNCIES D'EXPONENT ENTER. PROPIETATS

1.1. Potències d'exponent natural.

Recorda que:

Donat *a,* un nombre qualsevol, i *n,* un nombre natural, la potència a^n és el producte del nombre *a* per si mateix *n* vegades

En forma desenrotllada, la potència de base *a* i exponent *n* s'escriu: $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$, *n* vegades, sent *a* qualsevol nombre i *n* un nombre natural

Exemple:

$3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$, 5 vegades

$(-3)^5 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)$, 5 vegades.

La base *a pot* ser positiva o negativa. Quan la base és positiva el resultat és sempre positiu. Quan la base és negativa, si l'exponent és parell el resultat és positiu, però si és imparell el resultat és negatiu.

Si calculem els exemples de dalt tindrem:

$3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$. Resultat positiu perquè multiplique un nombre positiu 5 vegades.

$(-3)^5 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -243$. Multiplique un nombre negatiu un nombre imparell de vegades, per la qual cosa el resultat és negatiu. Cada vegada que multipliquem dues vegades dos nombres negatius ens dóna un positiu, com tenim 5, quedaria un signe menys sense multiplicar, per tant:

$(+) \cdot (-) = (-)$.

Recorda que:

Base positiva: resultat sempre positiu.

Base negativa i exponent parell: resultat positiu.

Base negativa i exponent imparell: resultat negatiu

Activitats resoltes:

- Calcula les potències següents:

a) $(-3)^5 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -243$

b) $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

c) $-(2)^4 = -(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = -16$

Activitats proposades:

1. Calcula les potències següents:

a) -3^3 b) $(2 + 1)^3$ c) $-(-2x)^2$

1.2. Potències d'exponent negatiu:

Definició de potència d'exponent negatiu $-n$ i base a:

$$a^{-n} = 1/a^n$$

$$a^{-n} = 1/a^n$$

Açò es justifica ja que es desitja que es continuen verificant les propietats de les potències:

$$a^m/a^n = a^{m-n}.$$

$$a^m/a^{m+n} = a^{m-(m+n)} = a^{-n} = 1/a^n.$$

Exemple:

- 5^{-2} és el mateix que $(1/5)^2$.

2. PROPIETATS DE LES POTÈNCIES. EXEMPLES:

Les propietats de les potències són:

El producte de potències de la mateixa base és igual a una altra potència de la mateixa base i com a exponent la suma dels exponents.

$$a^n \cdot a^m = a^{m+n}$$

Exemple:

- $3^2 \cdot 3^4 = (3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = 3^{4+2} = 3^6$

Propietats de les Potències
$a^m . a^n = a^{n+m}$
$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
$(a^m)^n = a^{n.m}$
$(a.b)^n = a^n.b^n$
$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

El quocient de potències de la mateixa base és igual a una altra potència que té com a base la mateixa, i com a exponent la diferència dels exponents.

$$a^n : a^m = a^{n-m}$$

Exemple:

- $5^5/5^3 = (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) / (5 \cdot 5 \cdot 5) = 5^{5-3} = 5^2$

La potència d'una potència és igual a la potència l'exponent de la qual és el producte dels exponents.

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Exemple:

- $(7^2)^3 = (7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7) = 7^6$

El producte de potències de distinta base amb el mateix exponent és igual a una altra potència la base de la qual és el producte de les bases i l'exponent del qual és el mateix:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

Exemple:

- $3^2 \cdot 5^2 = (3 \cdot 3) \cdot (5 \cdot 5) = (3 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 5) = (3 \cdot 5)^2$

El quocient de potències de distinta base i el mateix exponent és igual a una altra potència la base de la qual és el quocient de les bases i l'exponent del qual és el mateix.

$a^n/b^n = (a/b)^n$

Exemple:

- $8^3/7^3 = (8 \cdot 8 \cdot 8) / (7 \cdot 7 \cdot 7) = (8/7) \cdot (8/7) \cdot (8/7) = (8/7)^3$

Totes aquestes propietats de les potències que s'han citat per als exponents naturals continuen sent vàlides per a altres exponents: negatius, fraccionaris…

Activitats resoltes:

- Calcula les següents operacions amb potències:

  a) $3^5 \cdot 9^2 = 3^5 \cdot (3^2)^2 = 3^5 \cdot 3^4 = 3^9$

  b) $(2^3)^3 = 2^{3 \cdot 3} = 2^9$

  c) $5^3 / 5^0 = 5^{3-0} = 5^3$

  d) $3^4/3^{-5} = 3^{4-(-5)} = 3^{4+5} = 3^9$

Activitats proposades:

2. Efectua les següents operacions amb potències:

a) $(x + 1) \cdot (x + 1)^3$ b) $(x + 2)^3 : (x + 2)^4$ c) $[(x - 1)^3]^4$ d) $(x + 3) \cdot (x + 3)^{-3}$

3. POTÈNCIES D'EXPONENT RACIONAL. RADICALS

3.1. Potències d'exponent racional. Definició.

Es defineix la potència d'exponent fraccionari i base *a* com:

$$a^{r/s} = \sqrt[s]{a^r}$$

Exemple:

- Exponents fraccionaris: $(16)^{3/4} = \sqrt[4]{16^3}$

Els propietats esmentades per a les potències d'exponent enter són vàlides per a les potències d'exponents fraccionaris

Exemple:

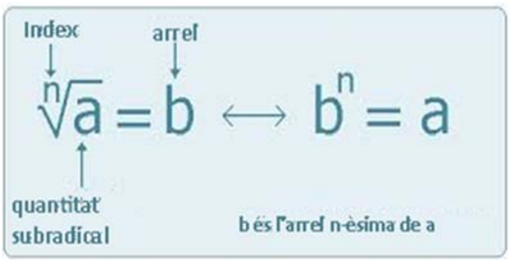
- $8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$

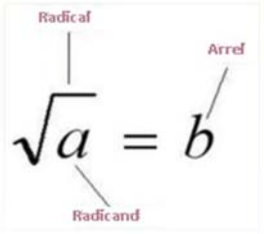
3.2. Radicals. Definició. Exemples

Es defineix arrel **n-èsima** d'un nombre *a*, com el nombre *b* que verifica la igualtat $b^n = a$.

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

Sent: *n* és **l'índex**, *a* és la quantitat **subradical** o **radicand** i *b* és l'arrel **n-èsima** de *a*





Important: *n* sempre és positiu. No hi ha l'arrel –5.

La radicació d'índex *n* és *l'operació inversa de la potenciació d'exponent n*.

Per la definició d'arrel *n*-èsima d'un nombre *a* es verifica que si *b* és arrel, aleshores:

$$\sqrt[n]{a} \Leftrightarrow b^n = a$$

Observa que es pot definir: $a^{1/n}=\sqrt[n]{a}$ja que: $(a^{1/n})^n = a^{(1/n)\cdot n} = a^1 = a$

Com $a^{1/n}$ satisfà la mateixa propietat que *b* han de ser considerats com el mateix nombre.

Exemples:

- $(16)^{3/4} = \sqrt[4]{16^3} = \sqrt[4]{(2^4)^3} = \sqrt[4]{2^{12}} = (2)^{12/4} = 2^3 = 8$
- $8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$

3.3. Propietats dels radicals. Exemples.

Les propietats de les potències enunciades anteriorment per al cas d'exponents fraccionaris, també es poden aplicar a les arrels:

a) Si multipliquem l'índex d'una arrel *n* per un nombre *p*, i al mateix temps elevem el radicand a aqueix nombre *p* el valor de l'arrel no varia.

Es verifica $\forall p \neq 0$es verifica que :

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n\cdot p]{a^p}$$

Demostració:

$$\sqrt[n\cdot p]{a^p} = a^{\frac{p}{p\cdot n}} = a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Exemple:

- $\sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{25}$Es verifica ja que segons acabem de veure:$\sqrt[3]{5} = \sqrt[3\cdot 2]{5^2} = \sqrt[6]{25}$

b) Per a multiplicar arrels del mateix índex, es multipliquen els radicands i es troba l'arrel d'índex comú:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

Demostració:

Segons les propietats de les potències d'exponents enters es verifica que:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = (a \cdot b)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

c) Per a dividir arrels del mateix índex es divideixen els radicands i es troba l'arrel de l'índex comú. Suposem que $b \neq 0$ perquè tinga sentit el quocient.

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Demostració:

Si escribim:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Exemple:

$$\frac{\sqrt[3]{a^7}}{\sqrt[3]{a^4}} = \sqrt[3]{\frac{a^7}{a^4}} = \sqrt[3]{a^{7-4}} = \sqrt[3]{a^3} = a$$

d) Per a elevar un radical a una potència n'hi ha prou amb elevar el radicand a la dita potència:

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Demostració:

Aquesta propietat la podem demostrar com segueix:

$$(\sqrt[n]{a})^m = (a^{\frac{1}{n}})^m = a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

e) L'arrel d'una arrel és igual a l'arrel l'índex del qual és el producte dels índexs:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$$

$m > 0$ y $m \in Z$

Demostració:

Es verifica que:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = (a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m \cdot n}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

Exemple:

- $\sqrt[3]{\sqrt[5]{x^{15} \cdot y^{30}}} = \sqrt[15]{x^{15} \cdot y^{30}} = (x^{15} \cdot y^{30})^{\frac{1}{15}} = (x^{15})^{\frac{1}{15}} \cdot (y^{30})^{\frac{1}{15}} = x \cdot y^2$

Activitats resoltes:

- Redueix a índex comú (6) els següents radicals: $\sqrt[3]{536}$; $\sqrt{70}$

  $\sqrt[3]{536} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 67} = \sqrt[6]{(2^3 \cdot 67)^2}$

  $\sqrt{70} = \sqrt{2 \cdot 5 \cdot 7} = \sqrt[6]{2^3 \cdot 5^3 \cdot 7^3}$

- Trau factors fora de l'arrel: $\sqrt{108}$

  $\sqrt{108} = \sqrt{2^2 \cdot 3^3} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 3} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

- Escriu els següents radicals com una única arrel:

$$\frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{4}}{\sqrt[6]{24}} = \frac{\sqrt[6]{3^3} \cdot \sqrt[6]{4^2}}{\sqrt[6]{2^3 \cdot 3}} = \sqrt[6]{\frac{3^3 \cdot 2^4}{2^3 \cdot 3}} = \sqrt[6]{2 \cdot 3^2} = \sqrt[6]{18}$$

Activitats proposades:

3. Calcula:

a) $\left(\sqrt[3]{a^6 \cdot b^9}\right)^2$ b) $\sqrt[3]{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{4}}$ c) $\left(\sqrt[12]{(x+1)^3}\right)^2$

4. Troba:

a) $\sqrt{\sqrt[4]{\frac{x}{5y}}} : \sqrt{\sqrt[4]{\frac{3x}{y^2}}}$ b) $\sqrt{\frac{5}{3}} : \sqrt{\frac{2}{3}}$

5. Realitza les següents operacions amb radicals:

a) $\sqrt[4]{\frac{x}{5y}} : \sqrt[4]{\frac{3x}{y^2}}$ b) $\left(\sqrt[5]{(x+3)^2}\right)^3$

4. OPERACIONS AMB RADICALS: RACIONALITZACIÓ.

4.1. Operacions. Definició. Exemples

Suma i resta de radicals:

RECORDA:

Per a sumar i restar radicals aquests deuen de ser idèntics:

$$\sqrt{4}+\sqrt{9}=2+3=5\neq\sqrt{13}$$

Per a sumar aquests radicals cal sumar les seues expressions aproximades.

No obstant això l'expressió:

$$7\sqrt{5}+11\sqrt{5}-\sqrt{5}=17\sqrt{5}$$

si es pot sumar i restar ja que els seus radicals són idèntics

PER A PODER SUMAR O RESTAR RADICALS ÉS NECESSARI QUE TINGUEN EL MATEIX ÍNDEX I EL MATEIX RADICAND.

NOMÉS QUAN AÇÒ SUCCEEIX PODEM SUMAR O RESTAR ELS COEFICIENTS O PART NUMÈRICA DEIXANT EL MATEIX RADICAL

Exemple:

- $\sqrt{18}+\sqrt{8}+\sqrt{1250}=\sqrt{2\cdot 3^2}+\sqrt{2^3}+\sqrt{2\cdot 5^4}$

Per les propietats dels radicals podem traure factors del radical deixant que tots els radicals siguen idèntics:

$$\sqrt{2\cdot 3^2}+\sqrt{2^2\cdot 2}+\sqrt{2\cdot 5^2\cdot 5^2}=3\cdot\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{2}+5\cdot 5\cdot\sqrt{2}=3\sqrt{2}+2\sqrt{2}+25\sqrt{2}$$
$$=(3+2+25)\sqrt{2}=30\sqrt{2}$$

Producte de radicals:

Per a multiplicar radicals hem de convertir-los en radicals del mateix índex i multiplicar els radicands:

1.- Calculem el m.c.m.de els índexs

2.- Dividim el m.c.m entre cada índex i el multipliquem per l'exponent del radicand i simplifiquem

Exemple:

- $\sqrt[5]{8}\cdot\sqrt[3]{7}=\sqrt[15]{8^3\cdot 7^5}=\sqrt[15]{(2^3)^3\cdot 7^5}=\sqrt[15]{2^9\cdot 7^5}$

Divisió de radicals:

Per a dividir radicals hem d'aconseguir que tinguen el mateix índex, com en el cas anterior i després dividir els radicals.

Exemple:

- $\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{4}}{\sqrt[6]{24}} = \sqrt[6]{\frac{3^3\cdot 4^2}{24}} = \sqrt[6]{\frac{3^3\cdot(2^2)^2}{2^3\cdot 3}} = \sqrt[6]{\frac{3^3\cdot 2^4}{2^3\cdot 3}} = \sqrt[6]{3^2\cdot 2^1} = \sqrt[6]{18}$

Arrel d'una arrel:

És l'arrel l'índex del qual és el producte dels índexs (segons es va demostrar en la propietat e), i després simplifiquem extraient factors fora el radical si es pot.

Exemple:

- $\sqrt{\sqrt[3]{x^7\cdot y^5}} = \sqrt[6]{x^7\cdot y^5} = \sqrt[6]{x^6\cdot x^1\cdot y^5} = x\cdot\sqrt[6]{x\cdot y^5}$

RECORDA:

Per a extraure factors del radical s'ha de complir que l'exponent del radicand siga major que l'índex de l'arrel.

2 opcions:

- ✓ Es divideix l'exponent del radicand entre l'índex de l'arrel, el quocient indica el nombre de factors que extrac i el residu els que es queden dins.
- ✓ Es descomponen els factors del radicand elevant-los al mateix índex de l'arrel, cada exponent que coincidisca amb l'índex, eixirà el factor i els que sobren es queden dins

Exemple:

- Extrau factors del radical:

1. $\sqrt{20} = \sqrt{4}.\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$
2. $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27.2} = \sqrt[3]{27}.\sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}$
3. $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{4}.\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \sqrt{4} = 2$

$$\sqrt{\frac{28x^5}{75y^3}} = \sqrt{\frac{2^2\cdot 7\cdot x^5}{3\cdot 5^2\cdot y^3}} = \sqrt{\frac{2^2\cdot 7\cdot x^2\cdot x^2\cdot x}{3\cdot 5^2\cdot y^2\cdot y}} =$$

Els factors que podríem extraure serien el 2, *x, y* i el 5, de la manera següent:

Dividim l'exponent de la *x*, 5, entre 2, ja que l'índex de l'arrel és 2, i tenim de quocient 2 i de residu 1, per la qual cosa eixiran dos *x* i queda 1 dins.

De la mateixa manera per a la *y*, dividim 3 entre 2 i obtenim 1 de quocient i un de residu, per la qual cosa ix 1 *y* i es queda una altra dins.

Vegem: $\sqrt{\frac{2^2\cdot 7\cdot x^2\cdot x^2\cdot x}{3\cdot 5^2\cdot y^2\cdot y}} = \frac{2x^2}{5y}\sqrt{\frac{7y}{3y}}$

Activitats proposades:

6. Escriu davall un sol radical i simplifica: $\sqrt{2\cdot\sqrt{3\cdot\sqrt{4\cdot\sqrt{5\cdot\sqrt{6\cdot\sqrt{8}}}}}}$

7. Calcula i simplifica: $\frac{\sqrt[4]{x^3\cdot y^3}\cdot\sqrt[3]{x^4\cdot y^5}}{\sqrt[6]{x^5\cdot y^4}}$

8. Realitza l'operació següent: $\sqrt{x^3}+\sqrt{16x^7}+\sqrt{x}$

9. Calcula i simplifica: $\sqrt{\frac{3}{x}}\cdot\sqrt[3]{\frac{x^2}{8}}\cdot\sqrt[4]{\frac{9}{5}}$

4.2. Racionalització. Exemples.

Racionalitzar una fracció algebraica consisteix a trobar una altra equivalent que no tinga radicals al denominador.

Per fer això, cal multiplicar numerador i denominador per l'expressió adequada.

Quan en la fracció només hi ha monomis, es multiplica i divideix la fracció per un mateix nombre per a aconseguir completar en el denominador una potència del mateix exponent que l'índex de l'arrel.

Exemple:

- $\sqrt[4]{\frac{6}{x^3}}$

Multipliquem i dividim per $\sqrt[4]{x}$ per a obtindre en el denominador una quarta potència i llevar el radical.

$$\sqrt[4]{\frac{6}{x^3}}=\frac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt[4]{x^3}}=\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x}}\cdot\frac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt[4]{x^3}}=\frac{\sqrt[4]{6x}}{\sqrt[4]{x^4}}=\frac{\sqrt[4]{6x}}{x}$$

Quan en la fracció apareixen en el denominador binomis amb arrels quadrades, es multiplica i es divideix per un factor que proporcione una diferència de quadrats, aquest factor és el factor conjugat del denominador.

$\sqrt{a}+\sqrt{b}$, el seu conjugat és: $\sqrt{a}-\sqrt{b}$

Un altre exemple: $(\sqrt{a}+b)$ el seu conjugat és: $(\sqrt{a}-b)$

Exemple:

- $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

Multipliquem pel conjugat del denominador que en aquest cas és: $\sqrt{3}-\sqrt{5}$

$$\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{(\sqrt{3}+\sqrt{5})\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{5})}=\frac{3\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{3-5}=-\frac{3\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{2}$$

Activitats proposades:

10. Racionalitza l'expressió: $\frac{x+3y}{\sqrt{x}-\sqrt{2y}}$

11. Racionalitza: $\frac{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

12. Racionalitza: $\frac{5\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{\sqrt{5}-2}$

5. NOTACIÓ CIENTÍFICA.

5.1. Definició. Exemples.

La notació científica s'utilitza per a escriure nombres molt grans o molt xicotets. L'avantatge que té sobre la notació decimal és que les xifres se'ns donen comptades, amb la qual cosa l'orde de magnitud del nombre és evident.

Un nombre posat en notació científica consta de:

- ✓ Una part entera formada per només una xifra que no és el zero (la de les unitats).
- ✓ La resta de les xifres significatives posades com a part decimal.
- ✓ Una potència de base 10 que dóna l'orde de magnitud del nombre.

N = a,bcd...·10ⁿ → $N = a,bcd\ldots\cdot 10^n$

*sent: **a** la seua part entera (només una xifra)*

b c d… la seua part decimal

10^n La potència entera de base 10

Si *n* és positiu, el nombre *N* és "gran"

I si *n* és negatiu, llavors *N* és "xicotet"

Exemples:

- $2,48 \cdot 10^{14}$ (= 248000000000000): Nombre gran.
- $7,561 \cdot 10^{-18}$ (= 0,000000000000000007561): Nombre xicotet.

5.2. Operacions amb notació científica

Per a operar amb nombres donats en notació científica es procedix de forma natural, tenint en compte que cada nombre està format per dos factors: l'expressió decimal i la potència de base 10.

El producte i el quocient són immediats, mentres que la suma i la resta exigeixen preparar els sumands de manera que tinguen la mateixa potència de base 10 i, així poder traure factor comú.

Exemples:

a) $(5{,}24 \cdot 10^6) \cdot (6{,}3 \cdot 10^8) = (5{,}24 \cdot 6{,}3) \cdot 10^{6+8} = 33{,}012 \cdot 10^{14} = 3{,}3012 \cdot 10^{15}$

b) $\frac{5{,}24 \cdot 10^6}{6{,}3 \cdot 10^{-8}} = (5{,}24 : 6{,}3) \cdot 10^{6-(-8)} = 0{,}8317 \cdot 10^{14} = 8{,}317 \cdot 10^{13}$

RECORDA:

✓ Per a **multiplicar** nombres en notació científica, es multipliquen les parts decimals i se sumen els exponents de la potència de base 10.

✓ Per a **dividir** nombres en notació científica, es divideixen les parts decimals i es resten els exponents de la potència de base 10.

✓ Si fa falta es multiplica o es divideix el nombre resultant per una potència de 10 per a deixar amb una sola xifra en la part entera.

c) $5{,}83 \cdot 10^9 + 6{,}932 \cdot 10^{12} - 7{,}5 \cdot 10^{10} = 5{,}83 \cdot 10^9 + 6932 \cdot 10^9 - 75 \cdot 10^9 = (5{,}83 + 6932 - 75) \cdot 10^9 =$

$= 6862{,}83 \cdot 10^9 = 6{,}86283 \cdot 10^{12}$

RECORDA:

✓ Per a **sumar o restar** nombres en notació científica, cal posar els nombres amb la mateixa potència de base 10, multiplicant o dividint per potències de base 10.

✓ Es trau factor comú la potència de base 10 i després se sumen o resten els nombres decimals quedant un nombre decimal multiplicat per la potència de 10.

✓ Finalment si fa falta es multiplica o es divideix el nombre resultant per una potència de 10 per a deixar en la part entera una sola xifra.

Activitats proposades:

13. Calcula:

a) $(7{,}83 \cdot 10^{-5}) \cdot (1{,}84 \cdot 10^{13})$ b) $(5{,}2 \cdot 10^{-4}) : (3{,}2 \cdot 10^{-6})$

14. Efectua i expressa el resultat en notació científica:

a) $\frac{3 \cdot 10^{-5} + 7 \cdot 10^{-4}}{10^6 - 5 \cdot 10^5}$ b) $\frac{7{,}35 \cdot 10^4}{5 \cdot 10^{-3}} + 3{,}2 \cdot 10^7$

15. Realitza les següents operacions i efectua el resultat en notació científica:

a) $(4{,}3 \cdot 10^3 - 7{,}2 \cdot 10^5)^2$ b) $(7{,}8 \cdot 10^{-7})^3$

6. LOGARITMES:

6.1. Definició:

El **logaritme** d'un nombre ***m***, positiu, de **base a** , positiva i diferent de u, és l'exponent a què cal elevar la base per a obtindre el dit nombre.

$$\text{Si } a > 0,\ \log_a m = z \Leftrightarrow m = a^z$$

Els logaritmes més utilitzats són els logaritmes **decimals** o logaritmes de base 10 i els logaritmes **neperians** (anomenats així en honor a **Neper**) o logaritmes en base *e* (e és un nombre irracional les primeres xifres del qual són: *e* = 2,71828182…). Ambdós tenen una notació especial:

$$\log_{10} m = \log m \qquad \log_e m = \ln m$$

Exemples:

- $\log_3 9 = 2 \Leftrightarrow 9 = 3^2$
- $\log_2 16 = 4 \Leftrightarrow 16 = 2^4$
- $\log_{1000} = 3 \Leftrightarrow 1000 = 10^3$
- $\ln e = 1 \Leftrightarrow e = e^1$

Com a **conseqüències immediates** de la definició es dedueix que:

✓ El logaritme d'1 és zero (en qualsevol base)

Demostració:

Com $a^0 = 1$, per definició de logaritme, tenim que $\log_a 1 = 0$

Exemples:

- $\log_a 1 = 0$
- $\log_2 1 = 0$
- $\log_3 1 = 0$

✓ El logaritme de la base és 1.

Demostració:

Com $a^1 = a$, per definició de logaritme, tenim que $\log_a a = 1$

Exemples:

- $\log_a a = 1$
- $\log_3 3 = 1$
- $\log_5 5 = 1$
- $\log_3 3^5 = 5$

✓ El logaritme d'1 és zero (en qualsevol base)
✓ El logaritme de la base és 1.
✓ Només tenen logaritmes els nombres positius.

✓ Només tenen logaritmes els nombres positius, però pot haver-hi logaritmes negatius. Un logaritme pot ser un nombre natural, enter, fraccionari i fins i tot un nombre irracional

En ser la base un nombre positiu, la potència mai ens pot donar un nombre negatiu ni zero.

- log_2 (–4) No existeix
- log_2 0 No existeix.
- $log\ 100 = 2 \Leftrightarrow 100 = 10^2$.
- $log\ 0,1 = -1 \Leftrightarrow 0,1 = 10^{-1}$.
- $log\ \sqrt{10} = 1/2 \Leftrightarrow \sqrt{10} = 10^{1/2}$.
- $log\ 2 = 0,301030....$.

Activitats resoltes:

- $\log_3 81 = x \Leftrightarrow 3^x = 81 \Rightarrow 3^x = 3^4 \Rightarrow x = 4$
- $\log_2 128 = x \Leftrightarrow 2^x = 128 \Rightarrow 2^x = 2^7 \Rightarrow x = 7$
- $\log_3 \sqrt{243} = x \Leftrightarrow 3^x = (243)^{1/2} \Rightarrow 3^x = (3^5)^{1/2} \Rightarrow x = 5/2$

Activitats proposades:

15. Copia la taula adjunta en el teu quadern i emparella cada logaritme amb la seua potència:

$2^5 = 32$	$\log_5 1 = 0$	$2^0 = 1$	$5^2 = 25$
$5^1 = 5$	$\log_2 2 = 1$	$5^0 = 1$	$\log_2 32 = 5$
$2^1 = 2$	$\log_2 1 = 0$	$\log_5 5 = 1$	$\log_5 25 = 2$
$2^4 = 16$	$\log_3 81 = 4$	$\log_2 16 = 4$	$3^4 = 81$

16. Calcula utilitzant la definició de logaritme:

a) $\log_2 2^5$ b) $\log_5 25$ c) $\log_2 2^{41}$ d) $\log_5 5^{30}$

17. Calcula utilitzant la definició de logaritme:

a) $\log_2 27$ b) $\log_{10} 100$ c) $\log_{1/2}(1/4)$ d) $\log_{10} 0'0001$

18. Calcula x utilitzant la definició de logaritme:

a) $\log_2 64 = x$ b) $\log_{1/2} x = 4$ c) $\log_x 25 = 2$

19. Calcula utilitzant la definició de logaritme:

a) $\log_2 64 + \log_2 1/4 - \log_3 9 - \log_2 \sqrt{2}$

b) $\log_2 1/32 + \log_3 1/27 - \log_2 1$

6.2. Propietats dels logaritmes:

1. El logaritme d'un **producte** és igual a la suma dels logaritmes dels seus factors:

$$\log_a(x\cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

Demostració:

Anomenem A = $\log_a x$ i B = $\log_a y$. Per definició de logaritmes sabem que:

$A = \log_a x \Leftrightarrow a^A = x$

$B = \log_a y \Leftrightarrow a^B = y$

Multipliquem: $x\cdot y = a^A \cdot a^B = a^{A+B} \Leftrightarrow \log_a x\cdot y = A + B = \log_a x + \log_a y$.

Exemple:

- $\log_a(2\cdot 7) = \log_a 2 + \log_a 7$

2. El logaritme d'un **quocient** és igual al logaritme del dividend menys el logaritme del divisor:

$$\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y$$

Demostració:

Anomenem A = $\log_a x$ y B = $\log_a y$. Per definició de logaritmes sabem que:

$A = \log_a x \Leftrightarrow a^A = x$

$B = \log_a y \Leftrightarrow a^B = y$

Dividim: $x / y = a^A / a^B = a^{A-B} \Leftrightarrow \log_a(x / y) = A - B = \log_a x - \log_a y$.

Exemple:

- $\log_a (75/25) = \log_a 75 - \log_a 25$

3. El logaritme d'una **potència** és igual a l'exponent multiplicat pel logaritme de la base de la potència:

$$\log_a x^y = y.\log_a x$$

Demostració:

Per definició de logaritmes sabem que:

$A = \log_a x \Leftrightarrow a^A = x \Leftrightarrow (a^A)^y = x^y = a^{Ay} \Leftrightarrow Ay = \log_a x^y = y \log_a x$

Exemple:

- $\log_a 2^5 = 5\cdot\log_a 2$

4. El logaritme d'una **arrel** és igual al logaritme del radicand dividit per l'índex de l'arrel:

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n}\log_a x$$

Demostració:

Tenint en compte que una arrel és una potència d'exponent fraccionari.

Exemple:

- $\log_a \sqrt[3]{27} = (\frac{\log_a 27}{3})$

5. **Canvi de base:** El logaritme en base *a* d'un nombre *x* és igual al quocient de dividir el logaritme en base *b* de *x* pel logaritme en base *b* de *a*:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Aquesta expressió es coneix amb el nom de ***"fórmula del canvi de base"***. Les calculadores només permeten el càlcul de logaritmes decimals o neperians, per la qual cosa, quan volem utilitzar la calculadora per a calcular logaritmes en altres bases, necessitem fer ús d'aquesta fórmula.

Exemple:

- $\log_2 11 = \frac{\log 11}{\log 2} = \log 11 - \log 2 = 3{,}45943162$

Activitats resoltes:

- Desenrotllar les expressions que s'indiquen:

$$\log_5[\frac{a^3 \cdot b^2}{c^4}] = \log_5[a^3 \cdot b^2] - \log_5 c^4 = \log_5 a^3 + \log_5 b^2 - \log_5 c^4 = 3\log_5 a + 2\log_5 b - 4\log_5 c$$

$$\log(\frac{x^2}{y^5 \cdot z})^3 = 3\log(\frac{x^2}{y^5 \cdot z}) = 3[\log x^2 - \log(y^5 \cdot z)] = 3(2\log x - 5\log y - \log z)$$
$$= 6\log x - 15\log y - 3\log z$$

- Escriu amb un únic logaritme:

$$3\log_2 a + \frac{1}{2}\log_2 x - \frac{2}{3}\log_2 b + 2\log_2 c - 4 = \log_2 a^3 + \log_2\sqrt{x} + \log_2 c^2 - \log_2\sqrt[3]{b^2} - \log_2 2^4 =$$
$$=(\log_2 a^3 + \log_2\sqrt{x} + \log_2 c^2) - (\log_2\sqrt[3]{b^2} + \log_2 2^4) = \log_2(a^3 \cdot \sqrt{x} \cdot c^2) - \log_2(\sqrt[3]{b^2} \cdot 2^4)$$
$$= \log_2(\frac{a^3 \cdot \sqrt{x} \cdot c^2}{\sqrt[3]{b^2} \cdot 2^4})$$

- Expressa els logaritmes dels següents nombres en funció de log2 = 0,301030:

a) 4 $\Rightarrow$ log4= log 2^2= 2·log2 = 2·0,301030 = 0,602060

b) 1024$\Rightarrow$ log1024 = log 2^{10}= 10·log2 = 10 · 0,301030 = 3,01030

Activitats proposades:

20. Desenrotlla les expressions que s'indiquen:

a)$\ln\sqrt[5]{\frac{4x^2}{e^3}}$ b)$\log(\frac{a^3 \cdot b^2}{c^4 \cdot d})$

21. Expressa els logaritmes dels nombres següents en funció de log 3 = 0,4771212

a) 81 b) 27 c) 59049

22. Simplifica l'expressió següent:$\frac{1}{2}\log m - 2\log t - \log p + \frac{5}{2}\log h$

CURIOSITATS. REVISTA

POTÈNCIES D'11

Les potències d'11

Les potències enteres d'11 no deixen de cridar la nostra atenció i poden ser incloses entre els productes curiosos:

11 x 11 = 121

11 x 11 x 11 = 1331

11 x 11 x 11 x 11 = 14641

Disposició no menys interesant presenten els nombres 9, 99, 999, etc. quan són elevats al quadrat:

$9^2 = 81$

$99^2 = 9801$

$999^2 = 998001$

$9999^2 = 99980001$

Utilitza la calculadora o l'ordinador per a calcular 26^{378}.

¡Dóna error! No ix. És necessari emprar logaritmes! Apliquem logaritmes decimals a l'expressió:

$$x = 26^{378} \Leftrightarrow \log(x) = 378 * \log(26)$$

Això sí sap calcular-lo la calculadora o l'ordinador. Dóna:

$$\log(x) = 534{,}86 \Leftrightarrow x = 10^{534{,}86} = 10^{534} \cdot 10^{0{,}86} = 10^{534} \cdot 7{,}24.$$

Solució:

$$26^{378} = 7{,}24 \cdot 10^{534}.$$

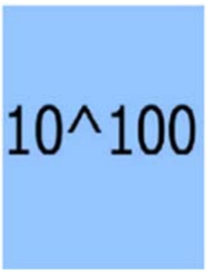
És un nombre tan gran que ni l'ordinador ni la calculadora sap calcular-lo directament i és necessari emprar logaritmes. Repeteix el procés amb 50^{200} i comprova que ix $6{,}3 \cdot 10^{339}$.

NOmBRes grans

Els primers nombres que s'acosten a la nostra definició del que és infinit els podem prendre de la mateixa naturalesa, comptant elements molt xicotets que existeixen en abundància, com són **les gotes del mar** (1×10^{25} gotes), **els grans de sorra en totes les platges del món** ($5{,}1 \times 10^{23}$ grans) o el **nombre d'estreles de tot l'Univers conegut** (3×10^{23} estreles). Podem inclús prendre el nombre de partícules elementals de l'univers (1×10^{80}) si volem obtindre un nombre més gran.

Si volem trobar un nombre més gran **"Googol"**, acunyat per un xiquet de 9 anys en 1939, posseeix 100 zeros, i va ser creat amb l'objectiu de donar-nos una aproximació cap al que significa l'infinit. Però hui en dia es coneixen quantitats (molt) més grans que el Googol.

Tenim per exemple, els **nombres primers de la forma de Mersenne**, que han pogut ser trobats gràcies a la invenció de les computadores. En 1952, el nombre primer de Mersenne més gran era $(2 \cdot 10^{17})-1$, un nombre primer amb 39 dígits, i aqueix mateix any, les computadores van provar que el nombre $(2 \cdot 10^{521})-1$ és també primer, i que el dit nombre posseeix 157 dígits, sent aquest molt més gran que un Googol



RESUM

Potències d'exponent natural i enter	$a^{-n} = 1/a^n$	$(-3)^2 = (-3).(-3) = 9$ $(-\frac{1}{2})^{-2} = (-2)^{-2} = 4$
Propietats de les potències	$a^n.a^m=a^{m+n}$ $a^n:a^m=a^{n-m}$ $(a^n)^m=a^{n.m}$ $a^n.b^n=(a.b)^n$ $a^n/b^n=(a/b)^n$	$(-3)^3\cdot(-3)^3 = (-3)^{3+3} = (-3)^6$ $5^3 : 5^2 = 5^{2-1} = 5^1$ $(-3^5)^2 = (-3)^{5.2} = (-3)^{10}$ $(-2)^3\cdot(-5)^3 = ((-2)\cdot(-5))^3$ $3^4/2^4 = (3/2)^4$
Potències d'exponent racional. Radicals	$a^{r/s} = \sqrt[s]{a^r}$	$(16)^{3/4} = \sqrt[4]{16^3}$
Propietats dels radicals	$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n\cdot p]{a^p}\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}\,\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} =$ $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} \qquad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\cdot n]{a}$	$\sqrt[3\cdot 2]{5^2} = \sqrt[6]{25}\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3 \cdot 2}$ $= \sqrt[3]{6}\,\frac{\sqrt[3]{a^7}}{\sqrt[3]{a^4}} = \sqrt[3]{\frac{a^7}{a^4}}$ $= \sqrt[3]{a^{7-4}} = \sqrt[3]{a^3}$ $= a(\sqrt[5]{2})^3$ $= \sqrt[5]{2^3}\sqrt[3]{\sqrt{5}} = \sqrt[3\cdot 2]{5}$ $= \sqrt[6]{5}$
Racionalització de radicals	Es suprimeixen les arrels del denominador. Es multiplica numerador i denominador per l'expressió adequada (conjugat del denominador, radical del numerador, etc.)	$\frac{1}{\sqrt[3]{25}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5^2}}$ $= \frac{\sqrt[3]{5}}{5}\,\frac{1}{5-\sqrt{3}} = \frac{5+\sqrt{3}}{(5-\sqrt{3})\cdot(5+\sqrt{3}}$ $\frac{5+\sqrt{3}}{5^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{5+\sqrt{3}}{22}$
Notació científica	Es suprimeixen les arrels del denominador. Es multiplica numerador i denominador per l'expressió adequada (conjugat del denominador, radical del numerador, etc.)	$5{,}83\cdot10^9+6{,}932\cdot10^{12}-7{,}5\cdot10^{10}=$ $5{,}83\cdot10^9+6932\cdot10^9-75.10^9=(5{,}83+6932-75)\cdot10^9= 6862{,}83\cdot10^9= 6{,}86283\cdot10^{12}$ $(5{,}24\cdot10^6)\cdot(6{,}3\cdot10^8)=33{,}012\cdot10^{14}=3{,}32012\cdot10^{15}$ $\frac{5{,}24\cdot 10^6}{6{,}3\cdot 10^{-8}} = (5{,}24:6{,}3)\cdot 10^{6-(-8)}$ $= 0{,}8317 \cdot 10^{14}$
Logaritmes	*Si $a > 0$, $\log_a m = z \Leftrightarrow m = a^z$* $\log_a (x\cdot y) = \log_a x + \log_a y$ $\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y$ $\log_a x^y = y.\log_a x$	$\log_a (75/25) = \log_a 75 - \log_a 25$ $\log_a 2^5 = 5\cdot\log_a 2$ $\log_a \sqrt[3]{27} = (\frac{\log_a 27}{3})$

EXERCICIS I PROBLEMES:

Potències:

1. Expressa en forma exponencial**:**

a) $\frac{1}{64}$ **b)** $\frac{t}{t^5}$ **c)** $(\frac{1}{z+1})^2$ **d)** $\frac{27^{-2}}{81^{-5}}$ **e)** $\frac{x^{-2}\cdot y^{-7}}{x^8\cdot y^{-4}}$

2. Calcula:

a) $4^{\frac{1}{2}}$ b) $125^{\frac{1}{3}}$ c) $625^{\frac{5}{6}}$ d) $(64^{\frac{2}{3}})^{\frac{5}{6}}$ e) $(8^{\frac{-4}{3}})^{\frac{2}{5}}$

Radicals:

3. Expressar en forma de radical:

a) $x^{\frac{7}{9}}$ b) $(m^5\cdot n^3)^{\frac{1}{3}}$ c) $[(x^2)^{\frac{1}{3}}]^{\frac{1}{5}}$ d) $a^{\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{1}{3}}$

4. Expressar en forma exponencial:

a) $(\sqrt[3]{x^2})^5$ b) $\sqrt{\frac{a^{13}}{a^6}}$ c) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^k}}$ d) $\sqrt[3]{x^{(5x+1)}}$ e) $\sqrt[4]{(x^2)^{(3x+2)}}$ f) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt{(x^2)^{\frac{1}{5}}}}}$

5. Expressa com a potència única:

a) $\frac{\sqrt[3]{a^8}}{a^2}$ b) $\frac{\sqrt{125}}{\sqrt[3]{25}}$ c) $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a\sqrt{a}}$ d) $2\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ e) $a\cdot\sqrt{\frac{1}{a}}$ f) $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}$ g) $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a^3}\cdot\frac{a^3}{\sqrt{a}}$

Propietats dels radicals:

6. Simplifica:

a) $\sqrt[9]{64}$ b) $\frac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{\sqrt[4]{a^3\cdot b^5\cdot c}}{\sqrt{a\cdot b^3\cdot c^3}}$ d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x^5\cdot x^7}}$ e) $(\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}})^8$ f) $\frac{\sqrt[4]{x^3\cdot y^3\cdot\sqrt[3]{x^4\cdot y^5}}}{\sqrt[6]{x^5\cdot y^4}}$ g) $\sqrt[5]{x^2\cdot 3\cdot\sqrt[10]{x^2\cdot\sqrt{x^3}}}$

7. Extraure factors del radical:

a) $\sqrt[3]{32x^4}$ b) $\sqrt[3]{81a^3b^5c}$ c) $(\sqrt{\sqrt{2}})^{10}$ d) $\sqrt[4]{\frac{25a^2b}{c^6}}$ d) $\sqrt{\frac{8a^5}{b^4}}$ e) $\sqrt{\frac{28x^5}{75y^3}}$ f) $\sqrt{\frac{32a^3}{45b^4}}$

8. Introduir factors en el radical:

a) $2\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}$ b) $3\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}$ c) $2\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ d) $2\cdot\sqrt[4]{\frac{5}{12}}$ e) $\frac{1}{2}\sqrt{12}$ f) $\frac{2}{3}\cdot\sqrt[3]{\frac{9}{4}}$

Operacions amb radicals:

a) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[3]{b^4}\cdot\sqrt[3]{b^2}$ b) $\sqrt{5a}\cdot\sqrt{10ab}\cdot\sqrt{8a^3b}\cdot\sqrt{a}$ c) $\frac{\sqrt[6]{20}}{\sqrt[4]{10}}$ d) $\sqrt[4]{\frac{5}{12}}:\sqrt[4]{\frac{20}{3}}$ e) $\sqrt{\frac{3}{2}}:\sqrt{\frac{2}{3}}$ f) $\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}}$

9. Efectua:

a)$\sqrt{18}+\sqrt{50}-\sqrt{2}-\sqrt{8}$ b)$\sqrt{50a}-\sqrt{18a}$ c)$\sqrt{320}+\sqrt{80}-\sqrt{500}$ d)$\sqrt{\frac{7}{64}}+\sqrt{\frac{7}{4}}$

e) $5\sqrt{96}-\sqrt[5]{\frac{3}{32}}$ f) $\sqrt[3]{\frac{135}{8}}-\sqrt[3]{\frac{5}{8}}$ g)$\sqrt{150}+\sqrt{54}-\sqrt{24}$

Racionalitzar

10. Racionalitza els denominadors:

a)$\frac{5}{\sqrt[3]{2}}$ b)$\frac{3}{2-\sqrt{3}}$ c)$\frac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ d)$\frac{6}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$f)$\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

11. Racionalitza i simplifica:

a) $\frac{11}{2\cdot\sqrt{5}+3}$ b)$\frac{\sqrt{2}}{2\cdot\sqrt{2}+3}$ c)$\frac{\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$ d)$\frac{\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{3}-2\cdot\sqrt{2}}$ e) $\frac{4\cdot\sqrt{15}-2\cdot\sqrt{21}}{2\cdot\sqrt{5}-\sqrt{7}}$ f)$\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$

12. Efectua i simplifica:

a) $(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}})\cdot(3+2\cdot\sqrt{2})$ b)$\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{\sqrt{5}-1}-3\sqrt{5}$ c) $(1-\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}):(1+\frac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}})$

Logaritmes

13. Desenrotlla els logaritmes següents:

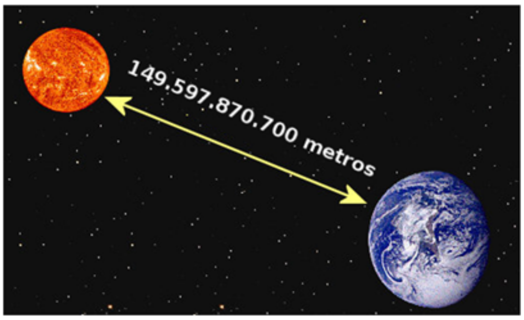
a) $\ln(\frac{\sqrt{x^3}}{y^2\cdot z^{-4}})$

b) $\log_3\sqrt[4]{\frac{(x\cdot y)^5}{z^{1/2}\cdot e^2}}$

14. Simplifica l’expressió següent:

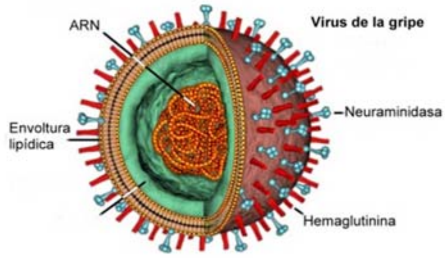
$$\log_2 5-3\log_2 a+\frac{7}{3}\log_2 9$$

Notació científica:



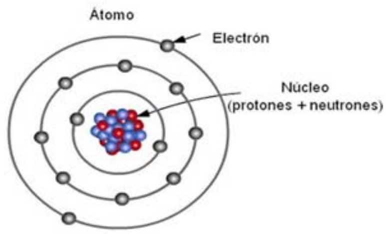
15. La massa del Sol és 330000 vegades la de la Terra, aproximadament, i aquesta és $5{,}98\cdot10^{21}$ t. Expressa en notació científica la massa del Sol, en quilograms.

16. El ser viu més xicotet és un virus que pes de l'orde de 10^{-18} g i el més gran és la balena blava, que pesa, aproximadament, 138 t. Quants virus serien necessaris per a aconseguir el pes de la balena?.



17. Els cinc països més contaminants del món (Estats Units, Xina, Rússia, Japó i Alemanya) van emetre 12 bilions de tones de CO_2 l'any 1995, quantitat que representa el 53,5 % de les emissions de tot el món. Quina quantitat de CO_2 es va emetre l'any 1995 en tot el món?

18. Expressa en notació científica:



a) Recaptació de les quinieles en una jornada de la lliga de futbol: 1628000 €

b) Tones de CO_2 que es van emetre a l'atmosfera en 1995 als Estats Units 5228,5 milers de milions.

c) Radi de l'àtom d'oxigen: 0,000000000066 m

19. Efectua i expressa el resultat en notació científica:

a) $(3\cdot10^{-7})\cdot(8\cdot10^{18})$ b) $(4\cdot 10^{-12})\cdot(5\cdot 10^{-3})$ c) $(5\cdot10^{12}) : (2\cdot10^{-3})$ d) $3{,}1\cdot10^{12}+2\cdot10^{10}$ e) $(4\cdot 10^{5})^{-2}$

20. Expressa en notació científica i calcula:

a) $(75800)^4 : (12000)^4$ b) $\frac{0{,}000541\cdot10318000}{1520000\cdot0{,}00302}$ c) $(0{,}0073)^2\cdot(0{,}0003)^2$ d) $\frac{2700000-13000000}{0{,}00003-0{,}00015}$

21. Efectua i expressa el resultat en notació científica:

a) $\frac{3\cdot10^{-5}+7\cdot10^{-4}}{10^{6}-5\cdot10^{5}}$ b) $\frac{7{,}35\cdot10^{4}}{5\cdot10^{-3}}+3{,}2\cdot10^{7}$ c) $(4{,}3\cdot10^{3}-7{,}2\cdot10^{5})$

22. Que resultat és correcte de la següent operació expressada en notació científica: $(5{,}24.10^{6})\cdot(8{,}32\cdot10^{5})$:

a) $4{,}35968\cdot10^{12}$ b) $43{,}5968\cdot10^{13}$ c) $4{,}35968\cdot10^{11}$ d) $4{,}35968\cdot10^{13}$

AUTOAVALUACIÓ

1. El nombre $8^{-4/3}$ val:

a) un setzé b) Dos c) Un quart d) Un mitjà.

2. Expressa com a potència de base 2 cada un dels nombres que van entre parèntesis i efectua després l'operació: $(16^{1/4}) \cdot (\sqrt[6]{4}) \cdot (\frac{1}{8})$. El resultat és:

a) $2^{-1/3}$ b) $2^{-5/4}$ c) $2^{-5/3}$ d) 2^{-5}

3. El nombre: $\sqrt[3]{4\sqrt[3]{6\sqrt{8}}}$ és igual a :

a) $6^{1/4}$ b) $2^{1/3}$ c) $2^{5/6} \cdot 6^{1/9}$ d) 2

4. Quin és el resultat de la següent expressió si l'expressem com a potència única?: $\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{16}}$

a) $\frac{1}{2\cdot\sqrt[3]{2}}$ b) $\frac{2}{2\cdot\sqrt[3]{2}}$ c) $\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{2}}$ d) $\sqrt[3]{2}$

5. Simplificant i extraient factors la següent expressió té un valor: $\sqrt{\sqrt{625a^6 \cdot b^7 \cdot c^6}}$

a) $5^3 \cdot a \cdot b \cdot c^2 \cdot \sqrt[4]{a \cdot b^2 \cdot c}$ b) $5 \cdot a^2 \cdot b \cdot c \cdot \sqrt[4]{a^2 \cdot b^3 \cdot c^2}$ c) $5 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot \sqrt[4]{a^3 \cdot b^2 \cdot c^3}$ d) $5 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot \sqrt[4]{a^2 \cdot b^3 \cdot c^2}$

6. Quin dels següents valors és igual a $a^{3/2}$?

a) $a^{1/2} \cdot a^2$ b) $a^{5/2} \cdot a^{-1}$ c) $(a^2)^2$ d) $a^3 \cdot a^{-2}$

7. Quin és el resultat d'aquesta operació amb radicals?: $\sqrt{63} - \frac{5}{2} \cdot \sqrt{28} + \frac{\sqrt{112}}{3}$

a) $2 \cdot \sqrt{7}$ b) $\frac{11}{8} \cdot \sqrt{7}$ c) $-\frac{2}{3} \cdot \sqrt{7}$ d) $\frac{-2}{5} \cdot \sqrt{7}$

8. Una expressió amb un únic radical de: $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{(x+2)^3} \cdot \sqrt{(x+1)}$ està donada per:

a) $\sqrt[6]{x^2 \cdot (x+2) \cdot (x+1)}$ b) $\sqrt[8]{x^2 \cdot (x+2)^3 \cdot (x+1)}$ c) $\sqrt[12]{x^8 \cdot (x+2)^9 \cdot (x+1)^6}$
d) $\sqrt[12]{x^2 \cdot (x+2)^3 \cdot (x+1)}$

9. Per a racionalitzar l'expressió: $\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ cal multiplicar numerador i denominador per:

a) $\sqrt{3} - \sqrt{5}$ b) $2 \cdot \sqrt{3} - \sqrt{5}$ c) $2 + \sqrt{5}$ d) $\sqrt{5} + \sqrt{3}$

10. Quin és el resultat en notació científica de la següent operació?: $5,83 \cdot 10^9 + 6,932 \cdot 10^{12} - 7,5 \cdot 10^{10}$

a) $6,86283.10^{12}$ b) $6,86283 \cdot 10^{13}$ c) $6,8623 \cdot 10^{11}$ d) $6,8628 \cdot 10^{12}$

11. Quin és el resultat de la següent operació expressat en notació científica?: $\frac{5,24 \cdot 10^{10}}{6,3 \cdot 10^{-7}}$

a) $0,8317.10^{17}$ b) $8,317 \cdot 10^{16}$ c) $8,317 \cdot 10^{15}$ d) $83,17.10^{16}$

Matemàtiques orientades a les ensenyances acadèmiques:

4tB ESO

Capítol 3: Expressions algebraiques. Polinomis.

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez

Revisor: Javier Rodrigo

Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF i commons.wikimedia

Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

Índex

Resum

En multitud de situacions el ser humà es veu obligat a quantificar, a manejar quantitats, dades, nombres, ja siga per a explicar quelcom ocorregut al passat, algun fet que estiga succeint a l'actualitat, o per a predir o pronosticar el comportament de determinat fenomen al futur. A pesar de la dificultat que puguen tancar aqueixes justificacions, algunes ferramentes són de caràcter senzill, com les operacions usuals de suma, resta, producte i divisió. De vegades cal manejar dades encara no conegudes, per la qual cosa apareixen indeterminades o variables. La mescla de nombres reals i les citades quatre operacions bàsiques ens porta a les expressions algebraiques i, dins d'elles, destaquen unes expressions concretes pel seu abundant ús i simplicitat d'exposició, els polinomis.

1. INTRODUCCIÓ. EXPRESSIONS ALGEBRAIQUES

1.1. Introducció

No cal imaginar situacions rebuscades perquè, a l'hora de realitzar un raonament, ens topem amb alguna de les quatre operacions matemàtiques bàsiques: suma, resta, multiplicació o divisió.

Exemples:

- Tres amics han realitzat un viatge de vacacions. A la volta, han sumat els gastos efectuats i aquests ascendeixen a 414 euros. El gasto realitzat per cada un ha sigut $\frac{414}{3}$ d'euros, és a dir, 138 euros.

- Si comprarem mandarines a una fruiteria en què el preu d'un quilogram és de 1'25 euros, resulta habitual que, segons anem introduint la fruita en una bossa, anem tantejant l'import final. Per a això podem col·locar diverses vegades la bossa sobre una balança i, després d'observar el pes, realitzem l'operació

$$1{,}25\cdot x$$

on x és la quantitat de quilograms que ens ha indicat la balança. Després de cada pesada, el resultat d'aqueixa multiplicació reflectix l'import de les mandarines que, en aqueix moment, conté la bossa.

- Suposem que tenim un contracte amb una companyia de telefonia mòbil pel que paguem 5 cèntims d'euro per minut, així com 12 cèntims per establiment de telefonada. Amb aqueixa tarifa, una telefonada de 3 minuts ens costarà:

$$(0'05\cdot 3)+0'12=0'15+0{,}12=0'27 \text{ euros}$$

Però quin és el preu d'una telefonada qualsevol? Com desconeixem la seua duració, ens trobem amb una quantitat no determinada, o indeterminada, per la qual cosa en qualsevol resposta que donem a la pregunta anterior s'apreciarà l'absència d'aqueixa dada concreta. Podem dir que el cost d'una telefonada qualsevol és

$$(0'05\cdot x)+0'12=0'05\cdot x+0'12 \text{ euros}$$

on x assenyala la seua duració, en minuts.

Activitats proposades

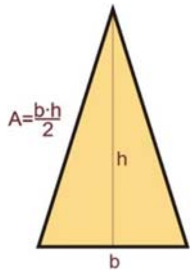
1. A finals de cada mes l'empresa de telefonia mòbil ens proporciona la factura mensual. En ella apareix molta informació, en particular, el nombre total de telefonades realitzades (N) així com la quantitat total de minuts de conversació (M). Amb les dades de l'anterior exemple, justifica que l'import de les telefonades efectuades durant aqueix mes és:

$$(0'05\cdot M)+(0'12\cdot N)=0'05\cdot M+0'12\cdot N \text{ euros}$$

Exemple:

- És ben coneguda la *fórmula* de l'àrea d'un triangle de base b i altura associada h:

$$\frac{b\cdot h}{2}$$



En tots aquests exemples han sorgit **expressions algebraiques**.

1.2. Expressions algebraiques

Anomenem **expressió algebraica** a qualsevol expressió matemàtica que es construïsca amb nombres reals i les operacions matemàtiques bàsiques: suma, resta, multiplicació i/o divisió. En una expressió algebraica pot haver-hi dades no concretades; segons el context, rebran el nom de ***variable***, ***indeterminada***, ***paràmetre***, entre altres.

Si en una expressió algebraica no hi ha *variables*, la dita expressió no és més que un nombre real:

Exemple:

$$\frac{3\cdot(-7)}{\frac{4}{5}-\frac{2}{3}}+1=\frac{-21}{\frac{4\cdot 3}{5\cdot 3}-\frac{2\cdot 5}{3\cdot 5}}+1=\frac{-21}{\frac{12}{15}-\frac{10}{15}}+1=\frac{-21}{\frac{2}{15}}+1=\frac{-21\cdot 15}{2}+1=\frac{-315}{2}+1=\frac{-315}{2}+\frac{2}{2}=\frac{-313}{2}$$

Al fixar un valor concret per a cada *indeterminada* d'una expressió algebraica apareix un nombre real: el **valor numèric** d'aqueixa expressió algebraica per a tals valors de les indeterminades.

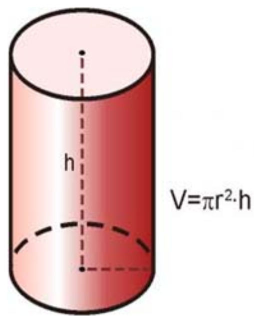
Exemple:

a) El volum d'un cilindre ve donat per l'expressió algebraica

$$\pi\cdot r^2\cdot h$$

en la que *r* és el radi del cercle base i *h* és la seua altura. D'aquesta manera, el volum d'un cilindre la base del qual té un radi de 10 cm i d'altura 15 cm és igual a:

$$\pi\cdot 10^2\cdot 15=1500\cdot\pi cm^3$$

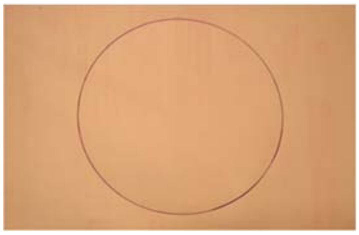


b) L'expressió algebraica que representa el producte dels quadrats de dos nombres qualssevol *x* i *y* es simbolitza per $x^2\cdot y^2$.

c) Si a l'expressió $7+\frac{x}{2}+x\cdot y^3-\frac{6}{z}$particularitzem les tres variables amb els valors $x=4y=-1z=\frac{1}{2}$sorgeix el nombre real $7+\frac{4}{2}+4\cdot(-1)^3-\frac{6}{1/2}=7+2-4-12=-7$

En una expressió algebraica pot no tindre sentit donar algun valor a certa indeterminada. En efecte, en l'últim exemple no és possible fer $z=0$.

Activitats proposades



2. Recorda l'expressió algebraica que ens proporciona la longitud d'una circumferència.

3. Escriu en llenguatge algebraic els següents enunciats, referits a dos nombres qualssevol *x* i *y*:

a) La mitat de l'oposat de la seua suma.

b) La suma dels seus cubs

c) El cub de la seua suma

d) L'invers de la seua suma

e) La suma dels seus inversos

4. Una botiga de roba anuncia en els seus aparadors que està de rebaixes i que tots els seus articles estan rebaixats un 20 % sobre el preu imprés a cada etiqueta. Escriu el que pagarem per una peça en funció del que apareix a la seua etiqueta.

5. L'anterior comerç, als últims dies del període de rebaixes, desitja desfer-se de les seues existències i per a això ha decidit augmentar el descompte. Manté el 20 % per a la compra d'una única peça i, a partir de la segona, el descompte total augmenta un 5 % per cada nova peça de roba, fins a un màxim de 10 articles. Analitza quant pagarem en realitzar una compra en funció de la suma total de les quantitats que figuren en les etiquetes i del nombre d'articles que s'adquirisquen.

6. Calcula el valor numèric de les següents expressions algebraiques per al valor o valors que s'indiquen:

a) $x^2 + 7x – 12$ per a $x = 0$.

b) $(a + b)^2 – (a^2 + b^2)$ per a $a = –3$ i $b = 4$.

c) $a^2 – 5a + 2$ per a $a = –1$.

7. Indica, en cada cas, el valor numèric de l'expressió següent: $10x + 20y + 30z$

a) $x = 1, y = 2, z = 1$

b) $x = 2, y = 0, z = 5$

c) $x = 0, y = 1, z = 0$.

2. POLINOMIS. SUMA I PRODUCTE

2.1. Monomis. Polinomis

Unes expressions algebraiques de gran utilitat són els **polinomis**, la versió més simple i, dels quals al mateix temps, generadora d'ells, són els **monomis**.

Un **monomi** ve donat pel producte de nombres reals i indeterminades. Anomenarem **coeficient** d'un monomi al nombre real que multiplica a la indeterminada, o indeterminades; la indeterminada, o indeterminades, conformen la **part literal** del monomi.

Exemples:

- L'expressió que ens proporciona el doble d'una quantitat, 2·x, és un monomi amb una única variable, x, i coeficient 2.
- El volum d'un cilindre,$\pi \cdot r^2 \cdot h$, és un monomi amb dues indeterminades, *r* i *h*, i coeficientπ La seua part literal és$r^2 \cdot h$.
- Altres monomis:$\frac{4}{7} \cdot x^2 \cdot y^3$,$5 \cdot \sqrt{2} \cdot x \cdot y^2 \cdot z$
- L'expressió$7xy^2 + 3xy - 2x$està formada per tres termes, tres monomis. Cada un té un coeficient i una part literal:

    Al primer,$7xy^2$, el coeficient és 7 i la part literalxy^2

    El segon, 3 *xy*, té per coeficient 3 i part literal *xy*

    - I al tercer, -2*x*, el coeficient és -2 i la part literal *x*

Atenent a l'exponent de la variable, o variables, adjudicarem un **grau** a cada monomi d'acord amb el criteri següent:

a) Quan hi haja una única indeterminada, el grau del monomi serà l'exponent de la seua indeterminada.

b) Si apareixen diverses indeterminades, el grau del monomi serà la suma dels exponents d'aqueixes indeterminades.

Exemples:

- 2·*x* és un monomi de grau 1 en la variable *x* .
- $\pi \cdot r^2 \cdot h$és un monomi de grau 3 en les indeterminades *r* i *h*.
- $\frac{4}{7} \cdot x^2 \cdot y^3$és un monomi de grau 5 en *x* i *y*.
- $5 \cdot \sqrt{2} \cdot x \cdot y^2 \cdot z$és un monomi de grau 4 en *x*, *y* i *z*.

Un nombre real pot ser considerat com un monomi de grau 0.

Un **polinomi** és una expressió construïda a partir de la suma de monomis. El **grau d'un polinomi** vindrà donat pel major grau dels seus monomis.

Exemples:

- $\frac{1}{5} \cdot x^2 - 7 \cdot x^3 + 2$és un polinomi de grau 3 en la variable *x*.
- $-3 \cdot y^4 + 8 \cdot x^2 + 2 \cdot x$és un polinomi de grau 4 en les indeterminades *x* i *y*.

- $4 \cdot x^2 \cdot y^3 - 7 + 3 \cdot y^2$és un polinomi de grau 5 en *x* i *y*.
- $x - 2 \cdot y + 6 \cdot z$és un polinomi de grau 1 en *x*, *y* i *z*.

Tant en aquesta secció com a la següent ens limitarem, bàsicament, a considerar polinomis amb una única variable. És habitual escriure els diferents monomis d'un polinomi de manera que els seus graus vagen en descens per a, amb aquest criteri, apreciar en el seu primer monomi quin és el grau del polinomi.

L'aspecte genèric d'un polinomi en la variable *x* és

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

on els coeficientsa_k són nombres reals.

Diem que un polinomi és **mònic** quan el coeficient del seu terme de major grau és igual a 1.

Exemples:

- $-3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2$és un polinomi de grau 4 en la variable *x*.
- $4y^3 + 3y - 7$és un polinomi de grau 3 en la indeterminada *y*.
- $z^2 - 3z + 12$és un polinomi de grau 2 en *z*. A més, és un polinomi mònic.
- $3x + 9$és un polinomi de grau 1 en *x*.

Com ocorre amb qualsevol expressió algebraica, si fixem, o triem, un valor concret per a la variable d'un polinomi apareix un nombre real: el **valor numèric** del polinomi per a aqueix valor determinat de la variable. Si hem anomenat *p* a un polinomi, a l'avaluació de *p* en, per exemple, el nombre -3 la denotem per *p(-3),* i llegim *"p de menys tres"* o *"p en menys tres"*. Amb aquest criteri, si *p* és un polinomi la indeterminada del qual és la variable *x*, podem referir-nos a ell com *p* o *p(x)* indistintament.

D'aquesta forma apreciem que un polinomi pot ser entés com una manera concreta d'assignar a cada nombre real un altre nombre real.

Exemples:

- Si avaluem el polinomi $p \equiv -3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2$ en $x = 5$ ens trobem amb el nombre
  - $p(5) = -3 \cdot 5^4 + \frac{1}{5} \cdot 5^2 + 2 = -3 \cdot 625 + 5 + 2 = -1875 + 7 = -1868$
- El valor del polinomi $q(y) = 4y^3 + 3y - 7$per a $y = -1$és
  - $q(-1) = 4 \cdot (-1)^3 + 3 \cdot (-1) - 7 = 4 \cdot (-1) - 3 - 7 = -4 - 10 = -14$
- En particularitzar el polinomi$r \equiv z^2 - 3z + 12$ en $z = 0$resulta el nombre$r(0) = 12$.

2.2. Suma de polinomis

Com un polinomi és una suma de monomis, la suma de dos polinomis és un altre polinomi. A l'hora de sumar dos polinomis procedirem a sumar els monomis de la mateixa part literal.

Exemples:

- La suma dels polinomis$-3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2$ i$-x^4 + 4x^2 - 5x - 6$ és el polinomi

- $$\left(-3x^4+\frac{1}{5}x^2+2\right)+(-x^4+4x^2-5x-6)=(-3x^4-x^4)+\left(\frac{1}{5}x^2+4x^2\right)-5x+(2-6)=$$
$$=(-3-1)\cdot x^4+\left(\frac{1}{5}+4\right)\cdot x^2-5x+(2-6)=-4x^4+\frac{21}{5}x^2-5x-4$$
- $(5x^2-3x+1)+(x^2+4x-7)=(5x^2+x^2)+(-3x+4x)+(1-7)=6x^2+x-6$
- $(2x^3+1)+(-x^4+4x)=-x^4+2x^3+4x+1$
- $(x^3+9)+(-x^3+2)=11$
- $3xy+5xy+2x=8xy+2x$

Al següent exemple sumarem dos polinomis disposant-los, adequadament, un sobre l'altre.

Exemple:

$$\begin{array}{rrrrrrr} & 4x^5 & +2x^4 & +x^3 & -5x^2 & +x & +4 \\ + & -7x^5 & & +4x^3 & +5x^2 & -3x & -6 \\ \hline & -3x^5 & +2x^4 & +5x^3 & & -2x & -2 \end{array}$$

Propietats de la suma de polinomis

Propietat commutativa. Si *p* i *q* són dos polinomis, no importa l'orde en què els col·loquem a l'hora de sumar-los:

$$p+q\equiv q+p$$

Exemple:

$$(4x^2-2x+7)+(-x^3+x^2-3x+1)=-x^3+(4x^2+x^2)+(-2x-3x)+(7+1)=-x^3+5x^2-5x+8$$

$$(-x^3+x^2-3x+1)+(4x^2-2x+7)=-x^3+(x^2+4x^2)+(-3x-2x)+(1+7)=-x^3+5x^2-5x+8$$

Propietat associativa. Ens assenyala com es poden sumar tres o més polinomis. Basta fer-ho agrupant-los de dos en dos:

$$(p+q)+r\equiv p+(q+r)$$

Exemple:

$$(4x^2-2x+7)+(-x^3+x^2-3x+1)+(x-6)=(4x^2-2x+7-x^3+x^2-3x+1)+(x-6)=$$
$$=(-x^3+5x^2-5x+8)+(x-6)=-x^3+5x^2-4x+2$$

També:

$$(4x^2-2x+7)+(-x^3+x^2-3x+1)+(x-6)=(4x^2-2x+7)+(-x^3+x^2-3x+1+x-6)=$$
$$=(4x^2-2x+7)+(-x^3+x^2-2x-5)=-x^3+5x^2-4x+2$$

Activitats proposades

8. Realitza les següents sumes de polinomis:

- $(x^2-x)+(-2x^2-3x+1)+(2x^3-2x^2+x-2)$

- $-x^4+(x^3+2x-3)+(-3x^2-5x+4)+(2x^3-x+5)$

Element neutre. Hi ha un polinomi amb una propietat particular: el resultat de sumar-lo amb qualsevol altre sempre és aquest últim. Es tracta del polinomi donat pel nombre 0, el polinomi *zero*.

Exemple:

$$0+(-7x^3+3x+7)=(-7x^3+3x+7)+0=-7x^3+3x+7$$

Element oposat. Cada polinomi té associat un altre, al que anomenarem el seu polinomi *oposat*, tal que la suma d'ambdós és igual al polinomi zero. Aconseguim el polinomi oposat d'un donat, simplement, canviant el signe de cada monomi.

Exemple:

- El polinomi oposat de $p\equiv -2x^4+x^3+2x-7$ és $2x^4-x^3-2x+7$, al què denotarem com $"-p"$. Ratifiquem que la seua suma és el polinomi zero:

$$(-2x^4+x^3+2x-7)+(2x^4-x^3-2x+7)=(-2x^4+2x^4)+(x^3-x^3)+(2x-2x)+(-7+7)=0$$

Activitats proposades

9. Escriu el polinomi oposat de cada un dels polinomis següents:

a) $3x^4+5x^3+x^2+4x-1$ b) $7x$ c) $-x^4+3x^2$

10. Considera els polinomis $p\equiv -x^3-5x+2$, $q\equiv 3x^2+3x+1$, així com el polinomi suma $s\equiv p+q$. Troba els valors que adopta cada un d'ells per a $x=-2$, és a dir, calcula $p(-2)$, $q(-2)$ i $s(-2)$. Estudia si hi ha alguna relació entre aqueixos tres valors.

11. Obtín el valor del polinomi $p\equiv -x^3-5x+2$ en $x=3$. Quin valor pren el polinomi oposat de p en $x=3$?

2.3. Producte de polinomis

Una altra operació que podem realitzar amb polinomis és la multiplicació.

El resultat del producte de polinomis sempre serà un altre polinomi. Encara que en un polinomi tenim una indeterminada, o variable, com ella pren valors als nombres reals, a l'hora de multiplicar polinomis utilitzarem les propietats de la suma i el producte dels nombres reals, en particular la propietat distributiva del producte respecte de la suma; així, tot queda en funció del producte de monomis, qüestió que resolem amb facilitat:

$$ax^n\cdot bx^m=abx^{n+m}$$

Exemples:

- $(-5)x^2\cdot 2x^4=(-5)\cdot 2\cdot x^{2+4}=-10x^6$
- $5x^3\cdot(-4)=5\cdot(-4)\cdot x^3=-20x^3$
- $3x^2\cdot(2x^2-4x+6)=(3x^2\cdot 2x^2)-(3x^2\cdot 4x)+(3x^2\cdot 6)=6x^4-12x^3+18x^2$

- $(-x^3+3x-1)\cdot(-2x)=(-x^3)\cdot(-2x)+(3x)\cdot(-2x)+(-1)\cdot(-2x)=2x^4-6x^2+2x$
- $(3x-2)\cdot(x^2-4x-5)=(3x)\cdot(x^2-4x-5)+(-2)\cdot(x^2-4x-5)=(3x^3-12x^2-15x)+(-2x^2+8x+10)=$ $=3x^3+(-12x^2-2x^2)+(-15x+8x)+10=3x^3-14x^2-7x+10$
- $(x-6)\cdot(x^3-2x)=(x-6)\cdot x^3+(x-6)\cdot(-2x)=(x^4-6x^3)+(-2x^2+12x)=x^4-6x^3-2x^2+12x$

També podem materialitzar el producte de polinomis tal com multipliquem nombres enters:

Exemple:

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & & & -2x^3 & & +x+4 \\
\times & & & x^2 & -3x & +1 \\
\hline
 & & & -2x^3 & & +x+4 \\
 & 6x^4 & & -3x^2 & -12x & \\
-2x^5 & & +x^3 & +4x^2 & & \\
\hline
-2x^5 & +6x^4 & -x^3 & +x^2 & -11x & +4
\end{array}
$$

Recordem que el polinomi *oposat* d'un altre s'obté simplement canviant el signe de cada monomi. Aquesta acció es correspon de multiplicar pel nombre "-1" el polinomi original. D'aquesta manera el polinomi oposat de p és

$$-p\equiv(-1)\cdot p$$

En aquest moment apareix de manera natural l'operació **diferència**, o **resta**, de polinomis. La definim amb l'ajuda del polinomi oposat d'un donat:

$$p-q\equiv p+(-q)\equiv p+(-1)\cdot q$$

Exemple:

- $(-5x^2-3x+2)-(-2x^4+x^3+3x^2+6)=(-5x^2-3x+2)+(2x^4-x^3-3x^2-6)=$ $=2x^4-x^3+(-5x^2-3x^2)-3x+(2-6)=2x^4-x^3-8x^2-3x-4$

Activitats proposades

12. Efectua els següents productes de polinomis:

- $(-4x^3+2x)\cdot(-3x^2)$
- $(2x^4+x)\cdot(-3x-4)$
- $(2x^3+x^2-x)\cdot(3x^2-x)$
- $(-1)\cdot(7x^3-4x^2-3x+1)$

13. Realitza les següents diferències de polinomis:

- $(-4x^3+2x)-(-3x^2)$
- $(2x^4+x)-(-3x-4)$

- $(3x^2 - x) - (2x^3 + x^2 - x)$

14. Multiplica cada un dels següents polinomis per un nombre de tal forma que sorgisquen polinomis mònics:

- $4x^3 - 3x^2 + 2x$
- $-2x^4 + x - 1$
- $-x^2 + x - 7$

15. Calcula i simplifica els productes següents:

a) $3x \cdot (2x^2 + 4x - 6)$ b) $(3x - 4) \cdot (4x + 6)$

- c) $(2a^2 - 5b) \cdot (4b - 3a^3)$ d) $(3a - 6) \cdot (8 - 2a) \cdot (9a - 2)$

Propietats del producte de polinomis

Propietat commutativa. Si *p* i *q* són dos polinomis, no importa l'orde en què els col·loquem a l'hora de multiplicar-los: $p \cdot q \equiv q \cdot p$

Exemple:

$$(2x-7)\cdot(-x^3+x^2) = 2x\cdot(-x^3+x^2) - 7\cdot(-x^3+x^2) = -2x^4+2x^3+7x^3-7x^2 = -2x^4+9x^3-7x^2$$

$$(-x^3+x^2)\cdot(2x-7) = -x^3\cdot(2x-7) + x^2\cdot(2x-7) = -2x^4+7x^3+2x^3-7x^2 = -2x^4+9x^3-7x^2$$

Propietat associativa. Ens assenyala com es poden multiplicar tres o més polinomis. Basta fer-ho agrupant-los de dos en dos:

$$(p\cdot q)\cdot r \equiv p\cdot(q\cdot r)$$

Exemple:

$$\left((4x^2-2)\cdot(-3x+1)\right)\cdot(-x^3+x) = (-12x^3+4x^2+6x-2)\cdot(-x^3+x) =$$
$$= 12x^6 - 12x^4 - 4x^5 + 4x^3 - 6x^4 + 6x^2 + 2x^3 - 2x = 12x^6 - 4x^5 - 18x^4 + 6x^3 + 6x^2 - 2x$$

També:

$$(4x^2-2)\cdot\left((-3x+1)\cdot(-x^3+x)\right) = (4x^2-2)\cdot(3x^4-3x^2-x^3+x) =$$
$$= 12x^6 - 12x^4 - 4x^5 + 4x^3 - 6x^4 + 6x^2 + 2x^3 - 2x = 12x^6 - 4x^5 - 18x^4 + 6x^3 + 6x^2 - 2x$$

Activitats proposades

16. Realitza els següents productes de polinomis: $x^2\cdot(-2x^2-3x+1)\cdot 2x^3$

- $(2x-3)\cdot(-3x^2-5x+4)\cdot(-x)$

Element neutre. Hi ha un polinomi amb una propietat particular: en multiplicar-lo per qualsevol altre sempre ens dóna aquest últim. Es tracta del polinomi donat pel nombre 1, el *polinomi unitat*.

Exemple: $1\cdot(-5x^3-2x+3) = (-5x^3-2x+3)\cdot 1 = -5x^3-2x+3$

Propietat distributiva de la multiplicació respecte de la suma. Quan en una multiplicació de polinomis un dels factors ve donat com la suma de dos polinomis com, per exemple,

$$(3x^2-x)\cdot\left((-2x+7)+(x^3-4x)\right)$$

tenim dues opcions per a conéixer el resultat:

a) realitzar la suma i, després, multiplicar

$$(3x^2-x)\cdot\left((-2x+7)+(x^3-4x)\right)=(3x^2-x)\cdot\left(x^3-6x+7\right)=$$
$$=3x^5-18x^3+21x^2-x^4+6x^2-7x=3x^5-x^4-18x^3+27x^2-7x$$

b) distribuir, aplicar, la multiplicació a cada un dels sumands i, després, sumar:

$$(3x^2-x)\cdot\left((-2x+7)+(x^3-4x)\right)=(3x^2-x)\cdot(-2x+7)+(3x^2-x)\cdot(x^3-4x)=$$
$$=(-6x^3+21x^2+2x^2-7x)+(3x^5-12x^3-x^4+4x^2)=3x^5-x^4-18x^3+27x^2-7x$$

Comprovem que obtenim el mateix resultat.

En general, la **propietat distributiva** de la multiplicació respecte de la suma ens diu que

$$p\cdot(q+r)\equiv(p\cdot q)+(p\cdot r)$$

Convé comentar que l'anterior propietat distributiva llegida en sentit contrari, de dreta a esquerra, és el que comunament es denomina **traure factor comú**.

Exemple: $6x^5-4x^4-18x^3+2x^2=(3x^3-2x^2-9x+1)\cdot 2x^2$

Activitats proposades

17. De cada un dels següents polinomis extrau algun factor que siga comú als seus monomis:

a) $-15x^3-20x^2+10x$ b) $24x^4-30x^2$

3. DIVISIÓ DE POLINOMIS

3.1. Introducció a les fraccions polinòmiques

Fins a aquest moment hem estudiat diverses operacions amb polinomis: suma, resta i producte. En qualsevol dels casos el resultat sempre és un altre polinomi. Quan establim una **fracció polinòmica** com, per exemple,

$$\frac{3x^3 - x}{2x^2 + x - 3}$$

el que tenim és una expressió algebraica, una **fracció algebraica**, la qual, en general, no és un polinomi. Sí que apareix un polinomi en el molt particular cas en què el denominador és un nombre real diferent de zero, açò és, un polinomi de grau 0.

És senzill constatar que l'expressió anterior no és un polinomi: qualsevol polinomi pot ser avaluat en qualsevol nombre real. No obstant això aqueixa expressió no pot ser avaluada per a $x=1$, ja que ens quedaria el nombre 0 al denominador.

Podríem creure que la següent fracció polinómica sí que és un polinomi:

$$\frac{-2x^3 + 5x^2 - 3x}{x} = \frac{-2x^3}{x} + \frac{5x^2}{x} + \frac{-3x}{x} = -2x^2 + 5x - 3$$

L'expressió de la dreta sí que és un polinomi, perquè es tracta d'una suma de monomis, però la de l'esquerra no ho és ja que no pot ser avaluada en $x=0$. No obstant això, aqueixa fracció algebraica i el polinomi, quan són avaluats en qualsevol nombre diferent de zero, ofereixen el mateix valor. Són **expressions equivalents** allí on ambdues tenen sentit.

3.2. Divisió de polinomis

Encara que, com hem vist a l'apartat anterior, una fracció polinómica, en general, no és un polinomi, anem a apronfundir en la divisió de polinomis perquè és una qüestió important i útil.

Analitzem amb deteniment la divisió de dos nombres enters positius. Quan dividim dos nombres, *D* (dividend) entre *d* (divisor, diferent de 0), sorgeixen altres dos, el quocient (*c*) i el residu (*r*). Ells es troben lligats per l'anomenada *prova de la divisió*:

$$D = d \cdot c + r$$

Alternativament: $$\frac{D}{d} = c + \frac{r}{d}$$

A més, diem que la divisió és exacta quan $r=0$.

El conegut algoritme de la divisió persegueix trobar un nombre enter, el quocient *c*, tal que el residu *r* siga un nombre menor que el divisor *d*, i major o igual que zero. Fixem-nos en que, sense aquesta exigència per al residu *r*, podem triar arbitràriament un valor per al quocient *c* el qual ens subministra el seu valor associat com a residu *r*. En efecte, si tenim com a dividend *D* = 673 i com divisor *d* = 12, "si volem" que el quocient siga *c* = 48 el seu residu associat és

$$r = D - d \cdot c = 673 - 12 \cdot 48 = 673 - 576 = 97$$

i la connexió entre aquests quatre nombres és $$673 = 12 \cdot 48 + 97$$

Aquesta última "lectura" de la divisió de nombres enters va a guiar-nos a l'hora de dividir dos polinomis.

Donats dos polinomis $p(x)$ i $q(x)$, la divisió de $p(x)$, polinomi dividend, entre $q(x)$, polinomi divisor, ens proporcionarà altres dos polinomis, el polinomi quocient $c(x)$ i el polinomi residu $r(x)$. També ací pesarà una exigència sobre el polinomi residu: el seu grau haurà de ser menor que el grau del polinomi divisor. La relació entre els quatre serà, naturalment,

$$p(x) = q(x) \cdot c(x) + r(x)$$

També escriurem $\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$

encara que, en aquest cas, serem conscients de les cauteles assenyalades a l'apartat anterior quant a les equivalències entre polinomis i altres expressions algebraiques.

Igual que ocorre amb l'algoritme de la divisió entera, l'algoritme de la divisió de polinomis consta de diverses etapes, de caràcter repetitiu, en cada una de les quals apareixen uns polinomis quocient i residu "provisionals" de manera que el grau d'aqueixos polinomis residu va descendint fins que ens topem amb un el grau del qual és inferior al grau del polinomi divisor, la qual cosa indica que hem conclòs. Vegem aquest procediment amb un exemple concret.

Exemple:

Dividirem el polinomi $p(x) = 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2$ entre el polinomi $q(x) = 2x^2 - x + 3$. Com el polinomi divisor, $q(x)$, és de grau 2, hem de trobar dos polinomis, un polinomi quocient $c(x)$, i un polinomi residu $r(x)$ de grau 1 o 0, tals que

$$p(x) = q(x) \cdot c(x) + r(x)$$

o, com a igualtat entre expressions algebraiques, $\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$

A la vista dels polinomis $p(x)$ i $q(x)$, i del que s'ha dit sobre $r(x)$, és evident que el grau del polinomi quocient, $c(x)$, ha de ser igual a 2. Anem a obtindre-lo monomi a monomi.

a) Primera aproximació als polinomis quocient i residu:

Per a poder aconseguir la igualtat $p \equiv q \cdot c + r$, com el grau de $r(x)$ serà 1 o 0, el terme de major grau de $p(x)$, $6x^4$, sorgirà del producte $q(x) \cdot c(x)$. Així obtenim la primera aproximació del $c(x)$, el seu monomi de major grau: $c_1(x) = 3x^2$

i, de manera automàtica, també un primer residu $r_1(x)$:

$$r_1(x) = p(x) - q(x) \cdot c_1(x) = (6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2) - (2x^2 - x + 3) \cdot 3x^2 =$$
$$= (6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2) - (6x^4 - 3x^3 + 9x^2) = 8x^3 - 8x^2 + 3x - 2$$

Com aquest polinomi $r_1(x)$ és de grau 3, major que 2, el grau del polinomi divisor $q(x)$, aqueix polinomi residu no és el definitiu; hem de continuar.

b) Segona aproximació als polinomis quocient i resta:

Si particularitzem la igualtat entre expressions algebraiques $\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$ al que tenim fins ara resulta

$$\frac{6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2}{2x^2 - x + 3} = 3x^2 + \frac{8x^3 - 8x^2 + 3x - 2}{2x^2 - x + 3}$$

Aquesta segona etapa consisteix a dividir el polinomi $r_1(x)=8x^3-8x^2+3x-2$, sorgit com a residu de la etapa anterior, entre el polinomi $q(x)=2x^2-x+3$, el divisor inicial. És a dir, repetim el que hem fet abans però considerant un nou polinomi dividend: el polinomi residu del pas anterior.

El nou objectiu és aconseguir la igualtat $r_1\equiv q\cdot c_2+r$. Igual que abans, el grau d'hauria de ser 1 o 0. Com el terme de major grau de $r_1(x)$, $8x^3$, ix del producte $q(x)\cdot c_2(x)$, és necessari que el polinomi quocient continga el monomi $c_2(x)=4x$

Això ens porta a un segon residu $r_2(x)$:

$$r_2(x)=r_1(x)-q(x)\cdot c_2(x)=(8x^3-8x^2+3x-2)-(2x^2-x+3)\cdot 4x=$$
$$=(8x^3-8x^2+3x-2)-(8x^3-4x^2+12x)=-4x^2-9x-2$$

Com aquest polinomi $r_2(x)$ és de grau 2, igual que el grau del polinomi divisor $q(x)$, aqueix polinomi residu no és el definitiu; hem de continuar.

c) Tercera aproximació als polinomis quocient i residu:

Allò que s'ha realitzat en l'etapa segona ens permet avançar en l'adequada descomposició de l'expressió algebraica que ens ocupa:

$$\frac{6x^4+5x^3+x^2+3x-2}{2x^2-x+3}=3x^2+\frac{8x^3-8x^2+3x-2}{2x^2-x+3}=3x^2+4x+\frac{-4x^2-9x-2}{2x^2-x+3}$$

Aquesta tercera etapa consisteix a dividir el polinomi $r_2(x)=-4x^2-9x-2$, el residu de l'etapa anterior, entre el polinomi $q(x)=2x^2-x+3$, el divisor inicial. De nou repetim l'algoritme però amb un altre polinomi dividend: el polinomi residu del pas anterior.

Perseguim que $r_2\equiv q\cdot c_3+r$. Com en cada pas, el grau deuria de ser 1 o 0. El terme de major grau de $r_2(x)$, $-4x^2$, sorgeix del producte $q(x)\cdot c_3(x)$, pel que $c_3(x)=-2$

i el tercer residu $r_3(x)$ és

$$r_3(x)=r_2(x)-q(x)\cdot c_3(x)=(-4x^2-9x-2)-(2x^2-x+3)\cdot(-2)=$$
$$=(-4x^2-9x-2)-(-4x^2+2x-6)=-11x+4$$

Com aquest polinomi $r_3(x)$ és de grau 1, menor que 2, grau del polinomi divisor $q(x)$, aqueix polinomi resisu sí que és el definitiu. Hem conclòs:

$$\frac{6x^4+5x^3+x^2+3x-2}{2x^2-x+3}=3x^2+\frac{8x^3-8x^2+3x-2}{2x^2-x+3}=3x^2+4x+\frac{-4x^2-9x-2}{2x^2-x+3}=3x^2+4x-2+\frac{-11x+4}{2x^2-x+3}$$

Si ho expressem mitjançant polinomis:

$$6x^4+5x^3+x^2+3x-2=(2x^2-x+3)\cdot(3x^2+4x-2)+(-11x+4)$$

Conclusió: en dividir el polinomi $p(x)=6x^4+5x^3+x^2+3x-2$ entre el polinomi $q(x)=2x^2-x+3$ obtenim com a polinomi quocient $c(x)=3x^2+4x-2$ i com a polinomi residu $r(x)=-11x+4$.

A continuació agilitzarem la divisió de polinomis:

Activitats proposades

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

18. Comprova que els càlculs que tens a continuació reflecteixen el que es va fer en l'exemple anterior per a dividir el polinomi $p(x)=6x^4+5x^3+x^2+3x-2$ entre el polinomi $q(x)=2x^2-x+3$.

$$\begin{array}{rl} 6x^4+5x^3+x^2+3x-2 & \underline{\big|\ 2x^2-x+3} \\ \underline{-6x^4+3x^3-9x^2} & \ 3x^2 \\ 8x^3-8x^2+3x-2 & \end{array}$$

a) Primera etapa:

$$\begin{array}{rl} 6x^4+5x^3+x^2+3x-2 & \underline{\big|\ 2x^2-x+3} \\ \underline{-6x^4+3x^3-9x^2} & \ 3x^2+4x \\ 8x^3-8x^2+3x-2 & \\ \underline{-8x^3+4x^2-12x} & \\ -4x^2-9x-2 & \end{array}$$

b) Primera i segona etapes:

$$\begin{array}{rl} 6x^4+5x^3+x^2+3x-2 & \underline{\big|\ 2x^2-x+3} \\ \underline{-6x^4+3x^3-9x^2} & \ 3x^2+4x-2 \\ 8x^3-8x^2+3x-2 & \\ \underline{-8x^3+4x^2-12x} & \\ -4x^2-9x-2 & \\ \underline{4x^2-2x+6} & \\ -11x+4 & \end{array}$$

c) Les tres etapes:

19. Divideix els polinomis següents:

a) $2x^3-x^2-x+7$ entre x^2-2x+4

b) $-10x^3-2x^2+3x+4$ entre $5x^3-x^2-x+3$

c) $4x^4-6x^3+6x^2-3x-7$ entre $-2x^2+x+3$

d) $-8x^5-2x^4+10x^3+2x^2+3x+5$ entre $4x^3+x^2+x-1$

e) $-6x^5+x^2+1$ entre x^2+1

20. Troba dos polinomis tals que en dividir-los aparega $q(x)=x^2+x-3$ com a polinomi quocient i $r(x)=-3x^2+1$ com a residu.

3.3. Operacions amb fraccions algebraiques

Ja que tant els polinomis com les fraccions algebraiques obtingudes a partir de dos polinomis són, en potència, nombres reals, operarem amb tals expressions seguint les propietats dels nombres reals.

a) **Suma o resta.** Per a sumar o restar dues fraccions polinómicas haurem d'aconseguir que tinguen el mateix denominador. Una manera segura d'aconseguir-ho, encara que pot no ser la més adequada, és aquesta:

$$\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}\equiv\frac{p_1\cdot q_2}{q_1\cdot q_2}+\frac{p_2\cdot q_1}{q_2\cdot q_1}\equiv\frac{p_1\cdot q_2+p_2\cdot q_1}{q_1\cdot q_2}$$

b) **Producte.** Basta multiplicar els numeradors i denominadors entre si:

$$\frac{p_1}{q_1}\cdot\frac{p_2}{q_2}\equiv\frac{p_1\cdot p_2}{q_1\cdot q_2}$$

c) **Divisió.** Segueix la coneguda regla de la divisió de fraccions numèriques:

$$\frac{\frac{p_1}{q_1}}{\frac{p_2}{q_2}}\equiv\frac{p_1\cdot q_2}{q_1\cdot p_2}$$

Activitats proposades

21. Efectua els càlculs següents: $\frac{2x+1}{x^2+1}+\frac{3}{x}$

d) $\frac{1}{x-2}-\frac{2}{x+1}$

e) $\frac{-x}{x^2+3x}\cdot\frac{1}{x-1}$

f) $\frac{x-2}{x^2+3x}:\frac{x-2}{x+3}$

22. Realitza les següents operacions alterant, en cada apartat, únicament un dels denominadors, i el seu respectiu numerador: $\frac{-x^2+x-1}{x^3}+\frac{3x-2}{x^2}$

a) $\frac{x-2}{x^2+3x}-\frac{4}{x+3}$

23. Comprova les següents identitats simplificant l'expressió del costat esquerre de cada igualtat: $\frac{8a^4b^2}{2a^2b}=4a^2b$

b) $\frac{4x^3y^2-3xy^2}{2xy}=2x^2y-\frac{3}{2}y$

c) $\frac{3x^2-9x}{6x+12}=\frac{x^2-3x}{x+4}$

d) $\frac{6a^2b^2+4a^2b-4ab}{2ab^2+16a^2b}=\frac{3ab+2a-2}{b+8a}$

24. Calcula els quocients següents:

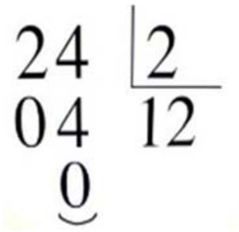
a) $(3x^3 - 9x^2 - 6x) : 3x$ b) $(7a^3 - 70a^2 - 21) : 7$

c) $(25x^4 - 10x^2) : 5x^2$ d) $(3x^2y^3 - 8xy^2) : xy^2$

25. Simplifica les següents fraccions algebraiques:

a) $\frac{3x^2-6x}{9x^2+15}$ b) $\frac{a^3-5a^2}{7a^3+4a^2}$ c) $\frac{x^2y+3xy^2}{4xy}$ d) $\frac{2a^2b^2+3ab}{a^3b-ab}$

4. DESCOMPOSICIÓ FACTORIAL D'UN POLINOMI



4.1. Factorització d'un polinomi

Tal com ocorre amb la divisió entera, la divisió de polinomis també pot ser **exacta**, és a dir, el residu pot ser el polinomi zero.

$$
\begin{array}{r|l}
3x^5-3x^4-4x^3+18x^2-16x+8 & -3x^2+3x-2 \\ \cline{2-2}
\underline{-3x^5+3x^4-2x^3} \qquad\qquad\qquad & -x^3+2x-4 \\
-6x^3+18x^2-16x+8 & \\
\underline{6x^3-6x^2+4x} \qquad & \\
12x^2-12x+8 & \\
\underline{-12x^2+12x-8} & \\
0 &
\end{array}
$$

Exemple:

En aquest cas escrivim $\dfrac{3x^5-3x^4-4x^3+18x^2-16x+8}{-3x^2+3x-2}=-x^3+2x-4$

i direm que $q(x)=-3x^2+3x-2$ divideix a $p(x)=3x^5-3x^4-4x^3+18x^2-16x+8$. Si optem per una igualtat polinómica: $3x^5-3x^4-4x^3+18x^2-16x+8=(-3x^2+3x-2)\cdot(-x^3+2x-4)$

Observem que el fet d'haver obtingut com a residu el polinomi 0 ens permet expressar el polinomi dividend, $p(x)$, com a producte d'altres dos polinomis, els polinomis divisor i quocient, $q(x)\cdot c(x)$. Hem aconseguit una **factorització** del polinomi $p(x)$, o una **descomposició en factors** de $p(x)$.

En general, un polinomi concret pot ser factoritzat, o descompost, per mitjà de diferents grups de factors. Si continuem amb el polinomi $p(x)$ anterior, una manera d'obtindre una descomposició alternativa consisteix en, al seu torn, aconseguir una factorització d'algun dels polinomis $q(x)$ o $c(x)$.

Constatem que el polinomi $-x^2+2x-2$ divideix a $c(x)=-x^3+2x-4$:

$$
\begin{array}{r|l}
-x^3 \qquad +2x-4 & -x^2+2x-2 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3-2x^2+2x} \quad\;\; & x+2 \\
-2x^2+4x-4 & \\
\underline{2x^2-4x+4} & \\
0 &
\end{array}
$$

En efecte, la divisió és exacta i això ens porta a la igualtat següent:

$$-x^3+2x-4=(-x^2+2x-2)\cdot(x+2)$$

Si la traslladem a la descomposició que teníem de $p(x)$:

$$3x^5-3x^4-4x^3+18x^2-16x+8=(-3x^2+3x-2)\cdot(-x^2+2x-2)\cdot(x+2)$$

Activitats proposades

26. Completa, quan siga possible, les factoritzacions següents:

a) $-2x^3+2x=-2x\cdot(\quad\quad)$

b) $-6x^2+5x+6=(2x-3)\cdot(\quad\quad)$

c) $-6x^4+3x^3-3x+6=(2x^2-x+1)\cdot(\quad\quad)$

d) $-6x^4+3x^3-3x+6=(2x^2-x+2)\cdot(\quad\quad)$

27. Determina un polinomi de grau 4 que admeta una descomposició factorial en què participe el polinomi $6x^3-x^2+3x-1$.

Diem que un polinomi és **reductible** si admet una factorització mitjançant polinomis de grau inferior al seu. En cas contrari el polinomi serà **irreductible**.

És clar que els polinomis de grau 1 no poden ser descompostos com a producte d'altres dos polinomis de menor grau. Són polinomis irreductibles. Al següent apartat constatarem que hi ha polinomis de grau 2 que també són irreductibles.

De les diferents factoritzacions que pot admetre un polinomi la que més informació ens proporciona és aquella en què tots els factors que intervenen són polinomis irreductibles, ja que *no és millorable*. Convé advertir que, en general, no és fàcil aconseguir aqueix tipus de descomposicions. A continuació aprofundirem en aquesta qüestió.

4.2. Arrels d'un polinomi

Donat un polinomi $p(x)$ direm que un nombre real concret α és **una arrel**, o **un zero**, del polinomi *p*, si en avaluar *p* en $x=\alpha$ obtenim el nombre 0, açò és, si

$$p(\alpha)=0$$

Exemple:

Considerem el polinomi $s(x)=2x^3+2x^2-8x-8$.

a) El nombre 2 és una arrel de $s(x)$, ja que

$$s(2)=2\cdot2^3+2\cdot2^2-8\cdot2-8=2\cdot8+2\cdot4-16-8=16+8-16-8=0$$

b) Una altra arrel de $s(x)$ és el nombre -1:

$$s(-1)=2\cdot(-1)^3+2\cdot(-1)^2-8\cdot(-1)-8=2\cdot(-1)+2\cdot(+1)+8-8=-2+2+8-8=0$$

c) En canvi, el nombre 1 no és una arrel de $s(x)$:

$$s(1)=2\cdot1^3+2\cdot1^2-8\cdot1-8=2+2-8-8=4-16=-12\neq0$$

d) Tampoc és arrel del $s(x)$ nombre 0:

$$s(0)=2\cdot0^3+2\cdot0^2-8\cdot0-8=0+0-0-8=-8\neq0$$

Activitats proposades

28. Estudia si els següents nombres són o no arrel dels polinomis indicats:

a) $x=3$ de x^3-3x^2+1
b) $x=-2$ de x^3+3x^2+3x+2
c) $x=1$ de x^3-3x^2+x+1
d) $x=0$ de x^3-3x^2+1
e) $x=-1$ de x^3-3x^2-x+3

Al següent exercici arreplegarem algunes connexions entre les arrels d'un polinomi i les operacions de suma i producte de polinomis.

Activitats proposades

29. Suposem que tenim dos polinomis, $p_1(x)$ i $p_2(x)$, i un nombre real α.

a) Si α és una arrel de $p_1(x)$, també és arrel del polinomi suma $p_1(x)+p_2(x)$?

b) Si α és una arrel de $p_1(x)$, també és arrel del polinomi producte $p_1(x)\cdot p_2(x)$?

c) Hi ha alguna relació entre les arrels del polinomi $p_1(x)$ i les del polinomi $4\cdot p_1(x)$?

El que un nombre real siga arrel d'un polinomi està fortament connectat amb la factorització del dit polinomi:

Si un nombre real concret α és una arrel del polinomi $p(x)$, llavors el polinomi $x-\alpha$ divideix a $p(x)$. Dit d'una altra manera, el polinomi $p(x)$ admet una descomposició factorial de la següent forma:

$$p(x)=(x-\alpha)\cdot c(x)$$

per a un cert polinomi $c(x)$, el qual pot ser conegut en dividir $p(x)$ entre $x-\alpha$.

Demostrarem l'anterior asseveració. Si dividim $p(x)$ entre $x-\alpha$, obtindrem

$$p(x)=(x-\alpha)\cdot c(x)+r(x)$$

Com el polinomi divisor, $x-\alpha$, és de grau 1, i el polinomi residu ha de ser d'inferior grau, deduïm que el residu anterior és un nombre real β. Escriguem $r(x)\equiv\beta$:

$$p(x)=(x-\alpha)\cdot c(x)+\beta$$

El polinomi de l'esquerra, $p(x)$, és idèntic al de la dreta, $(x-\alpha)\cdot c(x)+\beta$. Per aqueixa raó, en avaluar-los en un cert nombre real obtindrem el mateix valor. Procedim a particularitzar-los per a $x=\alpha$. En ser α arrel de $p(x)$, $p(\alpha)=0$. Açò ens porta a

$$0=p(\alpha)=(\alpha-\alpha)\cdot c(\alpha)+\beta=0\cdot c(\alpha)+\beta=0+\beta=\beta$$

i, així, el residu és 0, i

$$p(x)=(x-\alpha)\cdot c(x)$$

És natural que ens preguntem si és cert el recíproc del resultat anterior. La resposta és afirmativa:

Si un polinomi $p(x)$ admet una descomposició factorial de la forma

$$p(x)=(x-\alpha)\cdot c(x)$$

per a un cert polinomi $c(x)$ i un cert nombre real α, llavors el nombre α és una arrel del polinomi $p(x)$, açò és, $p(\alpha)=0$.

La seua demostració és senzilla. Basta que avaluem *p* en $x=\alpha$:

$$p(\alpha)=(\alpha-\alpha)\cdot c(\alpha)=0\cdot c(\alpha)=0$$

Si fonem aquests dos últims resultats en un només ens trobem davant del denominat *teorema del factor*:

Teorema del factor. Un nombre real concret α és arrel d'un polinomi $p(x)$ si i només si el polinomi $x-\alpha$ divideix a $p(x)$, és a dir, si i només si el polinomi $p(x)$ admet una descomposició factorial de la forma $p(x)=(x-\alpha)\cdot c(x)$

Exemple:

Tornem amb el polinomi $s(x)=2x^3+2x^2-8x-8$.

- Sabem que el nombre 2 és una arrel de $s(x)$. Ratifiquem que $x-2$ divideix a $s(x)$:

$$\begin{array}{rl|l}
2x^3+2x^2-8x-8 & & x-2 \\ \cline{3-3}
\underline{-2x^3+4x^2} & & 2x^2+6x+4 \\
6x^2-8x-8 & & \\
\underline{-6x^2+12x} & & \\
4x-8 & & \\
\underline{-4x+8} & & \\
0 & &
\end{array}$$

Podem descompondre $s(x)$ de la manera següent:

$$2x^3+2x^2-8x-8=(x-2)\cdot(2x^2+6x+4)$$

- Vam veure que una altra arrel de $s(x)$ és el nombre -1. Si observem la precedent factorització de $s(x)$, és evident que aquest nombre -1 no és arrel del factor $x-2$, pel que necessàriament ha de ser-lo de l'altre factor $c(x)=2x^2+6x+4$:

$$c(-1)=2\cdot(-1)^2+6\cdot(-1)+4=2\cdot(+1)-6+4=0$$

En haver constatat que -1 és arrel del polinomi $c(x)$, deduïm que $x-(-1)=x+1$ ens va a ajudar a descompondre $c(x)$:

$$\begin{array}{rl|l}
2x^2+6x+4 & & x+1 \\ \cline{3-3}
\underline{-2x^2-2x} & & 2x+4 \\
4x+4 & & \\
\underline{-4x-4} & & \\
0 & &
\end{array}$$

Per tant:

$$2x^2+6x+4=(x+1)\cdot(2x+4)$$

- Si reunim allò que s'ha fet als apartats precedents d'aquest exemple:

$$s(x) = 2x^3 + 2x^2 - 8x - 8 = (x-2)\cdot(2x^2 + 6x + 4) = (x-2)\cdot(x+1)\cdot(2x+4) =$$
$$= (x-2)\cdot(x+1)\cdot 2\cdot(x+2) = 2\cdot(x-2)\cdot(x+1)\cdot(x+2)$$

S'ha descompost $s(x)$ com a producte de tres polinomis irreductibles de grau 1. A la vista d'ells coneixem totes les arrels de $s(x)$, els nombres 2, -1 i -2.

Els resultats teòrics que hem establit ens condueixen a aquest altre:

Tot polinomi de grau n té com a màxim n arrels reals, alguna de les quals pot aparéixer repetida entre aqueixos no més de n nombres reals.

Hi ha polinomis que no admeten arrels, és a dir, que no s'anul·len mai:

Exemples:

- El polinomi $t(x) = x^2 + 1$ no té arrels ja que en avaluar-ho en qualsevol nombre real α sempre ens dóna un valor positiu i, per tant, diferent de 0:

$$t(\alpha) = \alpha^2 + 1 > 0$$

A més, aquest polinomi de grau dos, $t(x) = x^2 + 1$, és un polinomi irreductible perquè, en no tindre arrels, no podem expressar-lo com a producte de polinomis de menor grau.

- Un altre polinomi sense arrels és

$$u(x) = (x^2+1)^2 = (x^2+1)\cdot(x^2+1) = x^4 + 2x^2 + 1$$

No obstant això, $u(x) = x^4 + 2x^2 + 1$ és un polinomi reductible ja que, òbviament, pot ser expressat com a producte de dos polinomis d'inferior grau.

Encara que no siga possible demostrar-ho, per la seua dificultat, sí es pot anunciar que tot polinomi de grau imparell posseeix, almenys, una arrel real.

Activitats proposades

30. Construeix un polinomi de grau 3 tal que posseïsca tres arrels distintes.

31. Determina un polinomi de grau 3 tal que tinga, almenys, una arrel repetida.

32. Construeix un polinomi de grau 3 de manera que tinga una única arrel.

33. Conjectura, i després demostra, una llei que ens permeta saber quan un polinomi qualsevol

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 x + a_0$$

admet al nombre 0 com a arrel.

34. Demostra una norma que assenyale quan un polinomi qualsevol

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 x + a_0$$

admet al nombre 1 com a arrel.

35. Obtín totes les arrels de cada un dels polinomis següents: $x+7$

- $-x+5$
- $2x-3$
- $-4x-9$
- $-2x$

- x^2-3x
- $4x^2-x-3$
- x^3-x
- x^3+x

4.3. Regla de Ruffini

A l'apartat anterior es va provar l'equivalència entre que un nombre real α siga arrel d'un polinomi $p(x)$ i el fet de que el polinomi mònic de grau un $x-\alpha$ dividisca a $p(x)$, açò és, que existisca un altre polinomi $c(x)$ tal que siga possible una factorització de $p(x)$ del tipus:

$$p(x)=(x-\alpha)\cdot c(x)$$

A causa de la importància que té la divisió de polinomis quan el polinomi divisor és de la forma $x-\alpha$, és convenient agilitzar tals divisions.

Exemple:

- Considerem el polinomi $p(x)=3x^3-4x^2+x+3$. Anem a dividir-lo entre $x+2$. Si el residu és 0 el nombre -2 serà una arrel de $p(x)$; en el cas contrari, si no és 0 la resta, aleshores -2 no serà arrel de $p(x)$.

$$\begin{array}{rrrr|l}
3x^3 & -4x^2 & +x & +3 & x+2 \\ \cline{5-5}
-3x^3 & -6x^2 & & & 3x^2-10x+21 \\ \cline{1-2}
 & -10x^2 & +x & +3 & \\
 & 10x^2 & +20x & & \\ \cline{2-3}
 & & 21x & +3 & \\
 & & -21x & -42 & \\ \cline{3-4}
 & & & -39 &
\end{array}$$

Ja que el residu no és zero, -2 no és una arrel de $p(x)$.

Vegem com han sorgit tant el polinomi quocient com el residu. El que el grau del dividend siga tres i que el divisor siga de grau un imposa que el quocient tinga grau dos i que el residu siga un nombre real. El quocient consta dels monomis $3x^2$, $-10x$ i 21, els quals coincideixen amb els monomis de major grau de cada un dels dividends després de disminuir els seus graus en una unitat: $3x^2$ procedix de $3x^3-4x^2+x+3$ (el dividend inicial), $-10x$ ve de $-10x^2+x+3$ i, finalment, 21 de $21x+3$. Aquest fet, coincidència en el coeficient i disminució del grau en una unitat, es deu al fet que el divisor, $x+2$, és mònic i de grau u.

A continuació, tindrem en compte únicament els coeficients del dividend, per orde de grau, 3, –4, 1 i 3; quant al divisor, com és mònic i de grau u, basta considerar el seu terme independent, +2, però com el resultat de multiplicar els monomis que van conformant el quocient pel divisor hem de restar-se'l a cada un dels dividends, atenent a aquest canvi de signe, en lloc del terme independent, +2, operarem amb el seu oposat, –2, nombre que, al mateix temps, és l'arrel del divisor $x+2$ i sobre el qual pesa la pregunta de si és o no arrel de $p(x)$.

- Primer pas de la divisió:

$$\begin{array}{lll} 3x^3-4x^2+x+3 & \underline{|\;\; x+2\quad} \\ \underline{-3x^3-6x^2} & 3x^2 \\ \quad -10x^2+\;x\;+3 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 3 & -4 & 1 & 3 \\ -2 & & -6 & & \\ \hline & 3 & -10 & & \end{array}$$

Apareix en el quocient el monomi $3x^2$ (coeficient 3), el qual provoca la "desaparició" de $3x^3$ al dividend i l'aparició del monomi $-6x^2$ (coeficient $-6=(-2)\cdot 3$). Després d'operar (sumar) ens trobem amb $-10x^2$ (coeficient $-10=(-4)+(-6)$) i, en el quocient, $-10x$.

- Segon pas. El dividend passa a ser $-10x^2+\;x\;+3$.

$$\begin{array}{ll} 3x^3-4x^2+x+3 & \underline{|\;\; x+2\quad} \\ \underline{-3x^3-6x^2} & 3x^2-10x \\ \quad -10x^2+\;x\;+3 & \\ \quad \underline{10x^2+20x} & \\ \qquad\quad 21x+3 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 3 & -4 & 1 & 3 \\ -2 & & -6 & 20 & \\ \hline & 3 & -10 & 21 & \end{array}$$

La irrupció en el quocient del monomi $-10x$ (coeficient -10) provoca la "desaparició" de $-10x^2$ al dividend i l'aparició del monomi $20x$ (coeficient $20=(-2)\cdot(-10)$). Després d'operar (sumar) ens trobem amb $21x$ (coeficient $21=1+20$) i, al quocient, 21.

- Tercer pas. El dividend passa a ser $21x\;+3$.

$$\begin{array}{ll} 3x^3-4x^2+x+3 & \underline{|\;\; x+2\quad} \\ \underline{-3x^3-6x^2} & 3x^2-10x+21 \\ \quad -10x^2+\;x\;+3 & \\ \quad \underline{10x^2+20x} & \\ \qquad\quad 21x+3 & \\ \qquad\quad \underline{-21x-42} & \\ \qquad\qquad -39 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 3 & -4 & 1 & 3 \\ -2 & & -6 & 20 & -42 \\ \hline & 3 & -10 & 21 & \big|\,-39 \end{array}$$

Tenim al quocient el terme independent 21. Aquest provoca l'eliminació de $21x$ al dividend i l'aparició del terme $-42=(-2)\cdot 21$. Després d'operar (sumar) ens trobem amb el residu $-39=3-42$.

En cada un dels passos figura, a la part dreta, el mateix que s'ha realitzat a la divisió convencional, però amb l'avantatge que tot és més àgil pel fet que únicament s'utilitzen nombres reals: els coeficients dels distints polinomis intervinents.

Estem davant de l'anomenada **regla de Ruffini**, un algoritme que ens proporciona tant el quocient com el residu que resulten de dividir un polinomi qualsevol entre un altre de la forma $x-\alpha$.

Exemple:

- Dividim el polinomi $p(x)=-x^4+2x^3-5x+4$ entre $x-3$:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & -1 & 2 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & & -3 & -3 & -9 & -12 \\ \hline & -1 & -1 & -3 & -4 & \big|\,-8 \end{array}$$

El quocient és $-x^3-x^2-3x-4$ i el residu -8. Com el residu no és 0 deduïm que el nombre 3 no és arrel de $p(x)=-x^4+2x^3-5x+4$. La relació entre dividend, divisor, quocient i residu és, com sempre:

$$p(x)=-x^4+2x^3-5x+4=(x-3)\cdot(-x^3-x^2-3x-4)+(-8)$$

Si avaluem $p(x)$ en $x=3$ no pot donar zero, però quin valor resulta?

$$p(3)=(3-3)\cdot(-3^3-3^2-3\cdot3-4)+(-8)=0+(-8)=-8$$

Naturalment hem obtingut el residu anterior. Aquest fet ve arreplegat en el denominat teorema del residu.

Teorema del residu. El valor numèric que adopta un polinomi $p(x)$ en particularitzar-lo en $x=\alpha$ coincideix amb el residu que apareix en dividir $p(x)$ entre $x-\alpha$.

Activitats proposades

36. Empra la regla de Ruffini per a realitzar les següents divisions de polinomis: $-2x^2+x+1$ entre $x+1$

d) x^3+2x^2-2x+1 entre $x+2$

e) $4x^3-3x^2-1$ entre $x-1$

f) x^3-9x+1 entre $x-3$

37. Empra la regla de Ruffini per a dictaminar si els següents nombres són o no arrels dels polinomis esmentats: $\alpha=3$ de x^3-4x^2+5

g) $\beta=-2$ de $-x^3-2x^2+x+2$

h) $\gamma=1$ de $-2x^4+x+1$

i) $\sigma=-1$ de $2x^3+2x^2$ Utilitza la regla de Ruffini per a conéixer el valor del polinomi $-x^3+2x^2+x+2$ en $x=3$.

38. Estudia si és possible usar la regla de Ruffini, d'alguna forma, per a dividir x^3+3x^2+3x+2 entre $2x+6$.

Per a facilitar la comprensió dels conceptes i resultats d'aquest tema la majoria dels nombres que han aparegut fins ara, coeficients, arrels, etc., han sigut nombres enters. Per descomptat que podem trobar-nos amb polinomis amb coeficients racionals, o irracionals, o amb polinomis amb arrels donades per una fracció o un nombre irracional. També hi ha polinomis que no tenen arrels.

Exemples:

- Comprovem, mitjançant la regla de Ruffini, que $\alpha=\frac{1}{2}$ és arrel del polinomi $2x^2-3x+1$:

$$\begin{array}{r|rrr} & 2 & -3 & 1 \\ 1/2 & & 1 & -1 \\ \hline & 2 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

- Per a conéixer les arrels del polinomi $x^2 - 2$ hem d'estudiar si hi ha algun nombre real α tal que l'anul·le, és a dir, per al que es tinga

$$\alpha^2 - 2 = 0$$
$$\alpha^2 = 2$$
$$\alpha = \pm\sqrt{2}$$

  Així, el polinomi de grau dos $x^2 - 2$ té dues arrels distintes, les quals són nombres irracionals.
- Ja sabem que hi ha polinomis que no tenen arrels, com per exemple $x^2 + 4$.

Apreciem que la regla de Ruffini ens informa sobre si un nombre concret és o no arrel d'un polinomi. Naturalment, quan estem davant d'un polinomi, i ens interessa conéixer les seues arrels, no és possible efectuar una prova amb cada nombre real per a determinar quines són arrel del polinomi. En el pròxim apartat destacarem certs "nombres candidats" a ser arrel d'un polinomi.

4.4. Càlcul de les arrels d'un polinomi

A l'hora de buscar les **arrels enteres d'un polinomi** disposem del resultat següent:

Donat un polinomi qualsevol

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

els coeficients del qual són tots nombres enters, les seues **arrels enteres**, si les tinguera, es troben necessàriament entre els divisors enters del seu terme independent a_0.

Procedim a la seua demostració. Suposem que un cert nombre enter α és una arrel d'aqueix polinomi. Tal nombre ha d'anul·lar-lo:

$$a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + ... + a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0 = 0$$

$$a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + ... + a_2\alpha^2 + a_1\alpha = -a_0$$

$$\alpha \cdot (a_n\alpha^{n-1} + a_{n-1}\alpha^{n-2} + ... + a_2\alpha + a_1) = -a_0$$

$$a_n\alpha^{n-1} + a_{n-1}\alpha^{n-2} + ... + a_2\alpha + a_1 = \frac{-a_0}{\alpha}$$

En l'última igualtat, el nombre del costat esquerre és enter, perquè està expressat com una suma de productes de nombres enters. Per això, el nombre del costat dret, $\frac{-a_0}{\alpha}$, també és enter. Al ser també enters tant $-a_0$ com α, arrivem a que α és un divisor de a_0.

Exemples:

- Determinem, d'acord amb l'anterior resultat, què nombres enters són candidats a ser arrels del polinomi $2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$:

  Tals nombres enters candidats han de ser divisors del -6, terme independent del polinomi. Per això, els únics nombres enters que poden ser arrel d'aqueix polinomi són:

  $$\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6$$

  Pot comprovar-se que els nombres enters 2 i -3 són arrels; els altres no ho són.

- Les úniques possibles arrels enteres del polinomi $2x^3 + x^2 + 12x + 6$ també són:

  $$\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6$$

  En aquest cas cap d'aqueixos nombres és arrel del polinomi.

Activitats proposades

39. Para cada un dels següents polinomis assenyala, en primer lloc, què nombres enters són candidats a ser arrels seues i, després, determina quins ho són: x^3-x^2+2x-2

j) $x^4+4x^3+4x^2+4x+3$

k) $2x^3+x^2-18x-9$

l) $x^4+2x^3+3x^2+6x$ Un poc més general podem afirmar sobre classes de nombres i arrels d'un polinomi:

Donat un polinomi qualsevol $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+......+a_2x^2+a_1x+a_0$ del qual els coeficients són tots nombres enters, les seues **arrels racionals**, si les tinguera, necessàriament tenen per numerador algun divisor del terme independent, a_0, i per denominador algun divisor del coeficient del terme de major grau, a_n.

Exemples:

- Tornant a un dels polinomis de l'exemple anterior, $2x^3+3x^2-11x-6$, els nombres racionals candidats a ser arrels seues tenen per numerador a un divisor de -6 i per denominador a un divisor de 2. Per tant, els únics nombres racionals que poden ser arrel d'aqueix polinomi són:

$$\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm6,\ \frac{\pm1}{2},\ \frac{\pm2}{2}=\pm1,\ \frac{\pm3}{2},\ \frac{\pm6}{2}=\pm3$$

  A més de 2 i -3, també és arrel $\frac{-1}{2}$; els altres no ho són.

- Les úniques possibles arrels racionals del polinomi $2x^4+2x^3-x^2-3x-3$ són:

$$\pm1,\ \pm3,\ \frac{\pm1}{2},\ \frac{\pm3}{2}$$

  En aquest cas cap d'aqueixos nombres és arrel del polinomi.

Activitats proposades

40. Completa l'exemple precedent comprovant que, en efecte, $\frac{-1}{2}$ és arrel del polinomi $2x^3+3x^2-11x-6$.

41. Per a cada un dels següents polinomis indica quins nombres racional són candidats a ser arrels seues i, després, determina quins ho són:

a) $3x^2+4x+1$ b) $2x^3-9x^2+12x-4$

Al capítol pròxim, dedicat a les equacions, serem capaços d'obtindre les arrels de tot polinomi de grau dos, si les tinguera.

4.5. Factorització de polinomis i fraccions algebraiques

La factorització de polinomis pot ser utilitzada per a simplificar algunes expressions en què intervenen fraccions algebraiques. Vegem-ho a través d'un parell d'exemples:

Exemple:

- Una fracció algebraica com

$$\frac{x^4-8x^2-9}{x^5-6x^3-6x^2-7x-6}$$

pot ser simplificada gràcies a què el numerador i el denominador admeten factoritzacions en què algun polinomi està present en ambdós.

$$\frac{x^4-8x^2-9}{x^5-6x^3-6x^2-7x-6}=\frac{(x^2+1)\cdot(x+3)\cdot(x-3)}{(x^2+1)\cdot(x+2)\cdot(x+1)\cdot(x-3)}=\frac{x+3}{(x+2)\cdot(x+1)}$$

Com ja hem apuntat altres vegades, les expressions final i inicial no són idèntiques però sí que són equivalents en tots aquells valors per als que ambdues tenen sentit, açò és, per a aquells en què no s'anul·la el denominador.

Exemple:

- En una suma de fraccions polinòmiques com aquesta

$$\frac{3x-2}{x^2+x}+\frac{4}{x^2-x-2}$$

podem aconseguir un comú denominador en les fraccions a partir de la descomposició de cada denominador:

$$\frac{3x-2}{x^2+x}+\frac{4}{x^2-x-2}=\frac{3x-2}{x\cdot(x+1)}+\frac{4}{(x+1)\cdot(x-2)}=\frac{(3x-2)\cdot(x-2)}{x\cdot(x+1)\cdot(x-2)}+\frac{4\cdot x}{(x+1)\cdot(x-2)\cdot x}=$$

$$=\frac{(3x-2)\cdot(x-2)+4x}{x\cdot(x+1)\cdot(x-2)}=\frac{3x^2-4x+4}{x\cdot(x+1)\cdot(x-2)}$$

Convé destacar que en el resultat final s'ha optat per deixar el denominador factorizado. D'aqueixa forma, entre altres qüestions, s'aprecia ràpidament per a què valors de la indeterminada aqueixa fracció algebraica no admet ser avaluada.

Activitats proposades

42. Simplifica, si és possible, les expressions següents:

$$\frac{x^2+4x}{x^3+3x^2-6x-8} \qquad \frac{x^2-1}{x^3+3x^2-6x-8} \qquad \frac{x^2-1}{x^3+x^2-6x}$$

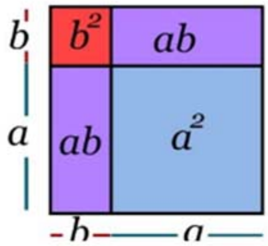
43. Realitza les següents operacions tenint en compte les factoritzacions dels denominadors:

- $\frac{5}{-3x+12}+\frac{x+2}{x^2-4x}$
- $\frac{-x}{x^2-2x+1}-\frac{3x-1}{x^2-1}$

4.6. Productes notables de polinomis

En aquest apartat destacarem una sèrie de productes concrets de polinomis que sorgeixen sovint. Podem exposar-los de molt diverses formes. Tal com ho farem, apareixerà més d'una indeterminada; hem de ser capaços d'apreciar que si, en un algun cas concret, alguna indeterminada passa a ser un nombre concret açò no farà ni més menys que particularitzar una situació més general.

Potències d'un binomi. Les següents igualtats s'obtenen, simplement, després d'efectuar els oportuns càlculs:

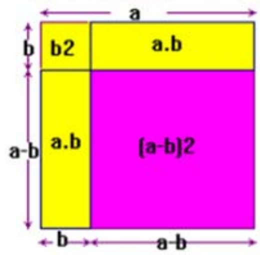


- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

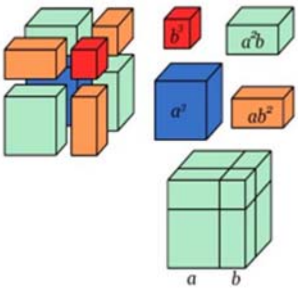
El quadrat d'una suma és igual al quadrat del primer, més el doble producte del primer pel segon, més el quadrat del segon.

Comprova la igualtat a partir dels quadrats i rectangles de la il·lustració.

- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$



El quadrat d'una diferència és igual al quadrat del primer, menys el doble producte del primer pel segon, més el quadrat del segon.



Observa la figura i connecta-la amb la igualtat.

- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Ratifica la igualtat amb els cubs i prismes de la figura.

- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Podem observar que, en cada un dels desenrotllaments, l'exponent del binomi coincideix amb el grau de cada un dels monomis.

Exemples:

- $(a+3)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot 3 + 3^2 = a^2 + 6a + 9$
- $(x-4)^2 = x^2 - 2\cdot x\cdot 4 + 4^2 = x^2 - 8x + 16$
- $(3x+5)^2 = (3x)^2 + 2\cdot 3x\cdot 5 + (5)^2 = 9x^2 + 30x + 25$
- $(x-6y)^2 = x^2 - 2\cdot x\cdot 6y + (6y)^2 = x^2 - 12xy + 36y^2$
- $(2x-5)^3 = (2x)^3 - 3\cdot(2x)^2\cdot 5 + 3\cdot(2x)\cdot 5^2 - 5^3 = 8x^3 - 60x^2 + 150x - 125$

Activitats proposades

44. Realitza els càlculs: $(1+3a)^2$

b) $(-x+3)^2$

c) $(-3x-2)^2$

d) $(x^2-1)^3$

e) $(4x+2)^3$ Obtín les fórmules dels quadrats dels trinomis següents: $(a+b+c)^2$

a) $(a+b-c)^2$ Desenrotlla les potències següents:

a) $(2x + 3y)^2$ b) $(3x + y/3)^2$ c) $(5x – 5/x)^2$

d) $(3a – 5)^2$ e) $(a^2 – b^2)^2$ f) $(3/5y – 2/y)^2$

45. Expressa com quadrat d'una suma o d'una diferència les següents expressions algebraiques:

a) $a^2 + 6a + 9$ b) $4x^2 – 4x + 1$ c) $b^2 – 10b + 25$

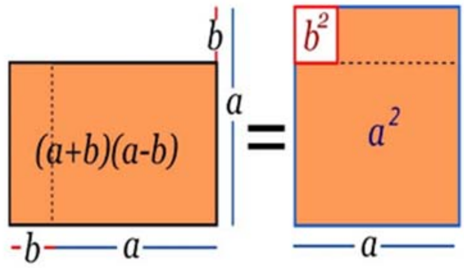
d) $4y^2 + 12y + 9$ e) $a^4 – 2a^2 +1$ f) $y^4 + 6y^2 + 9$

Suma per diferència. De nou la següent igualtat s'obté després d'efectuar el producte assenyalat:

$$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$$

Suma per diferència és igual a diferència de quadrats.

Observa les figures i connecta-les amb la igualtat.



Exemples:

- $(a+7)\cdot(a-7)=a^2-7^2=a^2-49$
- $(x+1)\cdot(x-1)=x^2-1^2=x^2-1$
- $(2x+3)\cdot(2x-3)=(2x)^2-3^2=4x^2-9$
- $(-3x-5)\cdot(-3x+5)=(-1)\cdot(3x+5)\cdot(-3x+5)=(-1)\cdot(5+3x)\cdot(5-3x)=$
  $=(-1)\cdot(5^2-(3x)^2)=-25+9x^2$

Activitats proposades

46. Efectua aquests productes:

a) $(4x+3y)\cdot(4x-3y)$

b) $(2x^2+4)\cdot(2x^2-4)$

c) $(-x^2+3x)\cdot(x^2+3x)$

De volta als polinomis d'una variable, podem dir que en aquest apartat hem expandit *potències d'un polinomi*, o productes d'un polinomi per si mateix, així com productes de la forma *suma per diferència*. Convé donar-se compte que les seues fórmules, llegides al revés, constitueixen una factorització d'un polinomi.

Exemples:

- $x^2+12x+36=x^2+2\cdot6\cdot x+6^2=(x+6)^2$
- $2x^3-12x^2+18x=2x\cdot(x^2-6x+9)=2x\cdot(x^2-2\cdot3\cdot x+3^2)=2x\cdot(x-3)^2$
- $x^2-5=(x+\sqrt{5})\cdot(x-\sqrt{5})$
- $x^4-16=(x^2+4)\cdot(x^2-4)=(x^2+4)\cdot(x+2)\cdot(x-2)$

Activitats proposades

47. D'acord amb allò que s'ha exposat, factoriza els polinomis següents: $x^2 - 2x + 1$

d) $3x^2 + 18x + 27$

e) $4x^5 - 16x^3$

48. Calcula els productes següents:

a) $(3x + 1) \cdot (3x - 1)$ b) $(2a - 3b) \cdot (2a + 3b)$

c) $(x^2 - 5) \cdot (x^2 + 5)$ d) $(3a^2 + 5) \cdot (3a^2 - 5)$

49. Expressa com a suma per diferència les següents expressions

a) $9x^2 - 25$ b) $4a^4 - 81b^2$ c) $49 - 25x^2$ d) $100a^2 - 64$

50. Simplifica les següents fraccions algebraiques

a) $\frac{x^2 - 1}{3x + 3}$ b) $\frac{2x^2 + 12x + 18}{x^2 - 9}$ c) $\frac{6 - 3a}{a^2 - 4}$

CURIOSITATS. REVISTA

Nombrosos actes que podem enquadrar dins de **"trucs de màgia"** poden ser analitzats, o "destripats", mitjançant un ús adequat de les Matemàtiques, en particular a partir d'expre-ssions algebraiques.

Dis-li a un company que escriga a un paper un nombre natural i que el mostre
Que el multiplique per 10
Que al resultat anterior li sume 32
Que multiplique per 100 el que ha obtingut
Que li sume 800
Que dividisca per 1000 l'úlitma quantitat que al resultat precedent li reste el nombre que va escriure al principi
Té un 4! Màgia!

Als exercicis 1 i 2 tens altres exemples d'açò.

Algoritmes

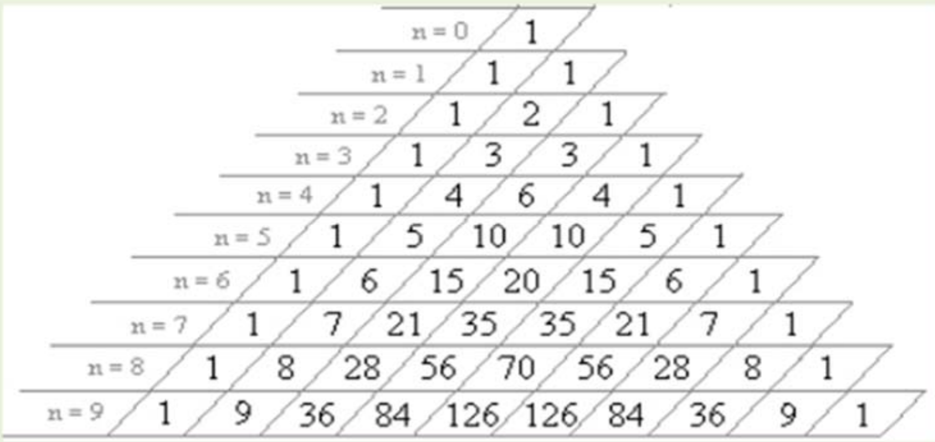
La regla de Ruffini és un exemple d'*algoritme*. Un *algoritme* és una relació ordenada i precissa d'operacions, o accions, que s'han de realitzar a les dades que inicialment disposem amb la finalitat de resoldre un problema o d'arribar a nova informació. Altres algoritmes:

- el de la divisió de dos nombres enters, que ens proporciona el seu quocient i el seu residu.
- el d'Euclides, pel que obtenim el màxim comú divisor de dos enters positius.
- el de l'arrel quadrada, que ofereix l'arrel quadrada d'un nombre.
- el que origina la lletra d'un DNI o NIF.

Els algoritmes són un fonament bàsic en el funcionament de qualsevol ordinador o computadora

COEFICIENTS BINOMIALS

Quan expandim el binomi apareix un polinomi tal que tots el seus monomis són del mateix grau, grau *n* . La part literal de cadascun d'ells és molt fàcil d'escriure, no així, en principi, cada un dels coeficients. No obstant això, gràcies a un triangle numèric podem conèixer els coeficients que corresponen a cada exponent : el ***triangle de Tartaglia*** o ***de Pascal***. És un triangle numèric amb moltes propietats i utilitats. Apuntem una propietat: cadascuna de les seues línies comença i acaba amb el dígit 1 , la resta de nombres és igual a la suma dels dos nombres que se troben damunt d'ell.



Per exemple, el desenvolupament per a l'exponent 5 seria:

$$(a+b)^5=a^5+5a^4b+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$

RESUM

Noció	*Descripció*	*Exemples*
Expressió algebraica	Expressió matemàtica que es construeix amb nombres reals i les operacions matemàtiques bàsiques de suma, resta, multiplicació i/o divisió	$\frac{-3x}{2x+y^3} - x \cdot y^2 \cdot z$
Variable, indeterminada	Allò no concretat a una expressió algebraica	Les variables, o indeterminades, de l'exemple anterior són *x*, *y*, *z*.
Valor numèric d'una expressió algebraica	En fixar un valor concret per a cada indeterminada, o variable, d'una expressió algebraica apareix un nombre real: el **valor numèric** d'aqueixa expressió algebraica per a tals valors de les indeterminades	Si, en l'expressió precedent, fem $x=3$, $y=-2$, $z=1/2$ obtenim $\frac{-3\cdot 3}{2\cdot 3+(-2)^3} - 3\cdot(-2)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{-3}{2}$
Monomi	Expressió donada pel producte de nombres reals i indeterminades	$-5\cdot x\cdot y^3\cdot z^2$, $7\cdot x^2$
Coeficient d'un monomi	El nombre real que multiplica a la indeterminada, o indeterminades, del monomi	Els coeficients dels anteriors monomis són, respectivament, -5 i 7
Part literal d'un monomi	La indeterminada, o producte d'indeterminades, que multiplica al coeficient del monomi	La part literal de $-5\cdot x\cdot y^3\cdot z^2$ és $x\cdot y^3\cdot z^2$
Grau d'un monomi	Quan hi ha una única indeterminada és l'exponent de dita indeterminada. Si apareixen diverses, el grau del monomi serà la suma dels exponents d'aqueixes indeterminades	Els graus dels monomis precedents són 6 i 2, respectivament
Polinomi	Expressió construïda a partir de la suma de monomis	$-x^3+4x^2+8x+6$
Grau d'un polinomi	El major grau dels seus monomis	L'anterior polinomi és de grau 3
Suma, resta i producte de polinomis	El resultat sempre és un altre polinomi	$p = -3x + 6$; $q = x^2 + 4$. $p + q = x^2 - 3x + 10$; $p - q = -x^2 - 3x + 2$; $p \cdot q = -3x^3 + 6x^2 - 12x + 24$.
Divisió de dos polinomis	S'obtenen altres dos polinomis, els polinomis quocient ($c(x)$) i residu ($r(x)$), lligats als polinomis inicials, els polinomis dividend ($p(x)$) i divisor ($q(x)$)	$p(x)=q(x)\cdot c(x)+r(x)$

Factorització d'un polinomi	Consisteix a expressar-lo com a producte d'altres polinomis de menor grau	$x^5-3x^3-x^2+3=$ $=(x^2-3)\cdot(x^3-1)$
Polinomi irreductible	És aquell que no pot ser expressat com a producte d'altres polinomis de grau inferior	$-3x+6$, x^2+4
Arrel d'un polinomi	Un nombre real concret α és **una arrel**, o **un zero**, del polinomi p, si en avaluar p en $x=\alpha$ obtenim el nombre 0, és a dir, si $p(\alpha)=0$	2 es arrel de $-3x+6$ 1i -3 són arrels de x^2+2x-3
Arrels i factorització	El que un nombre real concret α siga una arrel del polinomi $p(x)$ és equivalent que el polinomi $p(x)$ admeta una descomposició factorial de la forma $p(x)=(x-\alpha)\cdot c(x)$ per a un cert polinomi $c(x)$	-2 es una arrel de x^3+2x^2-x-2 $x^3+2x^2-x-2=(x+2)\cdot(x^2-1)$
Nombre d'arrels i grau	Tot polinomi de grau n té com a màxim n arrels reals, alguna de les quals pot aparéixer repetida entre aqueixos no més de n nombres reals	x^2+2x-3 té dues arrels, 1i -3 $3x^2+7$ no té arrels
Regla de Ruffini	Ens pot ajudar a l'hora de factorizar un polinomi i conéixer les seues arrels	

EXERCICIS I PROBLEMES

1. En aquest exercici es va a presentar un *truc* mitjançant el qual endevinarem el nombre que resulta després de manipular repetidament un nombre desconegut. Converteix en una expressió algebraica les successives alteracions del nombre desconegut i justifica el que ocorre.

i. Dis-li a un company que escriga en un paper un nombre natural i que no el mostre

ii. Que el multiplique per 10

iii. Que al resultat anterior li sumeix 100

iv. Que multiplique per 1000 el que obté

v. Que dividisca entre 10000 l'última quantitat

vi. Que al resultat precedent li reste el nombre que va escriure

vii. Independentment del nombre desconegut original quin nombre ha sorgit?

2. En aquest altre exercici endevinarem dos nombres que ha pensat un company. Construeix una expressió algebraica que arreplegue tots els passos i, finalment, descobreix el truc.

i. Sol·licita a un company que escriga en un paper, i no mostre, dos nombres naturals: un d'una xifra (entre 1 i 9) i un altre de dues xifres (entre 10 i 99)

ii. Que multiplique per 4 el nombre triat d'una xifra

iii. Que al resultat anterior li sumeix 3

iv. Que multiplique per 5 el que obté

v. Que a l'última quantitat li sumeix 10

vi. Que multiplique el resultat precedent per 5

vii. Que li sumeix a l'anterior el nombre de dues xifres que va triar

viii. Dis-li al company que desvele quin és el resultat de tots aqueixos canvis

ix. Què hem de fer per a descobrir els dos nombres que va triar el company?

3. Estudia si hi ha nombres reals en què les següents expressions no poden ser avaluades: $\dfrac{3x-6}{(x+2)\cdot(2x-14)}$

- $\dfrac{-x}{x^2-4x+4}$
- $\dfrac{3x^3-x}{-2x^4-3x^2-4}$
- $\dfrac{5x-y+1}{x^2+y^2}$ Una persona té estalviats 1000 euros i decideix depositar-los en un producte bancari amb un tipus d'interés anual del 3 %. Si decideix recuperar els seus estalvis al cap de dos anys, quina serà la quantitat total de què disposarà?

4. Generalitzem l'exercici anterior: Si ingressem X euros en un depòsit bancari el tipus d'interés del qual és de l'anual, quina serà la quantitat que recuperarem al cap de *n* anys?

5. Construeix un polinomi de grau 2, $p(x)$, tal que $p(3) = -7$.

6. Considerem els polinomis $p(x) = -5x^3 + x^2 - 3x - 2$, $q(x) = 3x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 7$ i $r(x) = 4x^2 + 5x - 1$. Realitza les operacions següents:

- $p + q + r$
- $p - q$
- $p \cdot r$
- $p \cdot r - q$

7. Calcula els productes:

a) $\left(\frac{ax}{3} - \frac{by}{2}\right) \cdot \left(\frac{-xy}{6}\right)$ b) (0,3*x* – 0,2*y* + 0,1*z*) · (0,1*x* + 0,2*y* – 0,3*z*) c) (*x* – 1) (*x* – *a*) (*x* – *b*)

8. Efectua les divisions de polinomis:

- $2x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 9x - 1$ entre $2x^2 + 3x - 3$
- $4x^5 - 5x^4 + 6x^3 + 2x^2 - 10x - 6$ entre $x^3 + 2x + 3$

9. Calcula els quocients:

a) $(5x^4):(x^2)$ b) $(3x^2y^4z^6) : ((1/2)xy^3z^5)$ c) $(x^4 + 2x^2y + y^2) : (x^2 + y)$

10. Realitza les operacions entre fraccions algebraiques: $\frac{x-1}{x^2-3x} + \frac{2x}{x^2-6x+9}$

- $\frac{x-1}{x^2-3x} - \frac{2x}{x^2-6x+9}$
- $\frac{x-1}{x^2-3x} \cdot \frac{2x}{x^2-6x+9}$
- $\frac{x-1}{x^2-3x} : \frac{2x}{x^2-6x+9}$

11. Construeix un polinomi de grau 2 tal que el nombre -5 siga arrel seua.

12. Determina un polinomi de grau 3 tal que les seues arrels siguen 6, -3 i 0.

13. Construeix un polinomi de grau 4 tal que tinga únicament dues arrels reals.

14. Troba un polinomi $q(x)$ tal que en dividir $p(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$ entre $q(x)$ s'obtinga com a polinomi residu $r(x)=5x^2+5x+1$.

- Troba les arrels enteres dels polinomis següents: $3x^3+11x^2+5x-3$
- $3x^3+2x^2+8x-3$
- $3x^3+5x^2+x-1$
- $2x^3+x^2-6x-3$

15. Obtín les arrels racionals dels polinomis de l'exercici anterior.

16. Descompon els següents polinomis com a producte de polinomis irreductibles:

- $3x^3+11x^2+5x-3$
- $3x^3+5x^2+x-1$
- $2x^3+x^2-6x-3$
- $3x^3-6x^2+x-2$

17. Calcula les potències:

a) $(x-2y+z)^2$ b) $(3x-y)^3$ c) $((1/2)a+b^2)^2$ d) $(x^3-y^2)^2$

- Analitza si els següents polinomis han sorgit del desenrotllament de potències de binomis, o trinomis, o d'un producte *suma per diferència*. En cas afirmatiu expressa la seua procedència. x^2+6x+9
- x^4-8x^2+16
- $x^2+\sqrt{20}xy+5y^2$
- $x^4+2x^3+x^2+2x+1$
- $x^4-2x^3+x^2+2x+1$
- x^2-36
- $5x^2+1$
- $5x^2-11$
- x^2-3y^2

18. Descompon en factors:

a) x^4-1 b) x^2-y^2 c) $x^2y^2-z^2$ d) $x^4-2x^2y+y^2$

19. Amb aquest exercici es pretén mostrar la conveniència a l'hora de no operar una expressió polinòmica que tenim factoritzada totalment o parcialment.

a) Comprova la igualtat $x^4-5x^2+6=(x^2-2)\cdot(x^2-3)$.

b) Determina totes les arrels del polinomi $x^4 - 5x^2 + 6$.

20. Factoriza numerador i denominador i simplifica:

a) $\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}$ b) $\dfrac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}{x^2 + y^2}$ c) $\dfrac{x^3 - x}{x^4 - 1}$

21. Efectua les següents operacions i simplifica tot el possible:

a) $\dfrac{2}{x(5-x)} - \dfrac{3}{2(5-x)}$ b) $\dfrac{x-y}{x+y} \cdot \dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ c) $\dfrac{2x+1}{4x^2-1}$

22. Efectua les següents operacions i simplifica tot el possible:

a) $\dfrac{x^4-1}{x^7} : \dfrac{x^2+1}{x^8}$ b) $\dfrac{2x+3y}{a-b} - \dfrac{3x+4y}{2a-2b}$ c) $-4x + (1-x^4)\left(\dfrac{x+1}{1-x} - \dfrac{1-x}{1+x}\right)$

23. Efectua les següents operacions i simplifica tot el possible:

a) $\left(x^4 - \dfrac{1}{x^2}\right) : \left(x^2 + \dfrac{1}{x}\right)$ b) $\dfrac{x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3}{x+a} : \dfrac{x-a}{x+a}$ c) $\left(\dfrac{a+b}{a-b} - \dfrac{a-b}{a+b}\right) : \dfrac{ab}{a+b}$

24. Efectua les següents operacions i simplifica tot el possible:

a) $\dfrac{\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{x+y}}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{x+y}} : \dfrac{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{a+y}}{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{a+y}}$ b) $\left(1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{2}{x^3}\right) : \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{2}{x^3}\right)$ c) $\dfrac{\dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{y}}{\dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{y}} \cdot \dfrac{\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{y}}{\dfrac{3}{x} + \dfrac{5}{y}}$

AUTOAVALUACIÓ

1. Assenyala els coeficients que apareixen en les següents expressions algebraiques:

a) $\frac{3x-7}{2-3y^2}+5xy^3-\frac{6}{z}$ b) $-2x^5+x^4-x^3+5x-1$ c) $5\cdot\sqrt{2}\cdot x\cdot y^2\cdot z$

2. El valor numèric de l'expressió $\frac{3x-7}{2-3y^2}+5xy^3-\frac{6}{z}$ en $x=2,\ y=-1,\ z=-1$ és:

a) 17 b) 15 c) -3 d) -5

3. Completa adequadament les frases següents:

a) La suma de dos polinomis de grau dos és sempre un altre polinomi de grau ……….

b) La suma de tres polinomis de grau dos és sempre un altre polinomi de grau ……….

c) El producte de dos polinomis de grau dos és sempre un altre polinomi de grau ……….

d) La diferència de dos polinomis de grau dos és sempre un altre polinomi de grau ……….

4. En dividir el polinomi $p(x)=x^5+x^4+x^3+1$ entre $q(x)=x^2+x+1$ el polinomi residu resultant:

a) ha de ser de grau 2. b) pot ser de grau 2.

c) ha de ser de grau menor que 2. d) cap de les opcions precedents.

5. Considera el polinomi $2x^4-7x^3+5x^2-7x+3$. Quins dels següents nombres enters són *raonables candidats* per a ser una arrel seua?

a) 3 b) 2 c) -1 d) -7

6. Considera el polinomi $2x^4+7x^3+x^2-7x-3$. Quins dels següents nombres racionals són *raonables candidats* per a ser una de les seues arrels?

a) -3 b) $\frac{-1}{2}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{3}{2}$

7. Tot polinomi amb coeficients enters de grau tres

a) té tres arrels. b) té, com a màxim, tres arrels. c) té, almenys, tres arrels.

8. És possible que un polinomi, amb coeficients enters, de grau quatre tinga exactament tres arrels, ja siguen diferents o amb alguna múltiple?

9. Justifica la veracitat o falsedat de cada una de les frases següents:

a) La regla de Ruffini serveix per a dividir dos polinomis qualssevol.

b) La regla de Ruffini permet dictaminar si un nombre és arrel o no d'un polinomi.

c) La regla de Ruffini només és vàlida per a polinomis amb coeficients enters.

d) La regla de Ruffini és un algoritme que ens proporciona totes les arrels d'un polinomi.

10. Analitza si pot haver-hi algun polinomi de grau huit que no tinga cap arrel.

Matemàtiques orientades a les ensenyances acadèmiques:

4tB ESO
Capítol 4:
Equacions i sistemes

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Raquel Hernández

Revisora: María Molero

Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF

Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

Índex

Resum

Els matemàtics han tardat prop de tres mil anys a comprendre i resoldre equacions tan senzilles i que tu coneixes tan bé com $ax + b = 0$. Ja els egipcis resolien problemes que es poden considerar d'equacions encara que no existia la notació algebraica. El matemàtic grec *Diofanto* al segle III va resoldre equacions de primer i segon grau. Al segle XV va haver-hi un desafiament per a premiar a qui resolguera una equació de tercer grau. Al segle XIX es va demostrar que no hi ha una fórmula general que resolga les equacions de cinqué grau. Per a imposar que l'equació $ax + b = 0$ tinga sempre solució, el conjunt numèric dels nombres naturals ha d'ampliar-se amb els nombres negatius. Per a imposar que l'equació $ax = b$ tinga sempre solució, el conjunt numèric dels nombres enters ha d'ampliar-se amb els nombres fraccionaris. Per a imposar que l'equació $x^2 = a$, $a > 0$, recorda $x^2 = 2$, tinga solució, el conjunt numèric ha d'ampliar-se amb els nombres irracionals. Però l'equació $x^2 + 1 = 0$, encara no té solució en el conjunt numèric dels nombres reals. El pròxim curs s'ampliarà el domini als nombres complexos.

En aquest capítol repassarem la solució d'equacions de segon grau i sistemes lineals, que ja coneixes, i ampliarem amb equacions i sistemes nous.

1. EQUACIONS DE SEGON GRAU

1.1. Concepte d'equacions de segon grau

Recorda que:

Una **equació de segon grau** és una equació polinómica en la que la major potència de la incògnita és 2. Les equacions de segon grau es poden escriure de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

on *a, b i c* són nombres reals, amb $a \neq 0$.

Exemple:

a) *Són equacions de 2n grau:*

$2x^2 - 7x + 4 = 0$; $-9x^2 + 2x - 5 = 0$; $6x^2 - (1/2)x - 3{,}25 = 0$

b) *Els coeficients de les equacions de* 2n grau són nombres reals, per tant poden ser fraccions o arrels. Per exemple:

$\frac{9}{2}x^2 - \sqrt{3}x + \frac{2}{5} = 0$; $\frac{7}{3}x^2 - \frac{1}{5}x - \frac{4}{9} = 0$; $-5{,}8x^2 + 1{,}7x - 7{,}02 = 0$; $\sqrt{5}x^2 + \frac{3}{2}x - \sqrt[3]{2} = 0$.

Activitats proposades

1. Indica si són equacions de segon grau les equacions següents:

a) $3x^2 - \sqrt{7}x + 5 = 0$ b) $4{,}7x^2 - 6{,}25 = 0$ c) $7x^2 - \frac{2}{x} + 5x = 0$

d) $2xy^2 - 5 = 0$ e) $33 - 2{,}35x = 0$ f) $9x^2 - 52\sqrt{x} + 3'2 = 0$

2. A les següents equacions de segon grau, indica qui són *a*, *b* i *c*.

a) $3 - 8x^2 + 10x = 0$ b) $-3{,}4x^2 + 7{,}8x = 0$

c) $6x^2 - 1 = 0$ d) $1{,}25x^2 - 3{,}47x + 2{,}75 = 0$.

1.2. Resolució d'equacions de 2n grau completes

Recorda que:

S'anomena equació **de segon grau completa** a aquella que té valors diferents de zero para *a*, *b* i *c*.

Per a resoldre les equacions de segon grau completes s'utilitza la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Aquesta fórmula ens permet calcular les dues solucions de l'equació.

Anomenem **discriminant** a la part de la fórmula que està a l'interior de l'arrel:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Activitats resoltes

- *Resol l'equació de segon grau* $x^2 - 3x + 2 = 0$.

Primer hem de saber qui són *a*, *b* i *c:*

$$a = 1;\ b = -3;\ c = 2.$$

Substituint aquests valors en la fórmula, obtenim:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4\cdot 1\cdot 2}}{2\cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

Per tant, les dues solucions són: $x_1 = \frac{3+1}{2} = 2$; $x_2 = \frac{3-1}{2} = 1$.

En efecte, $2^2 - 3\cdot 2 + 2 = 4 - 6 + 2 = 0$, i $1^2 - 3\cdot 1 + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$, per tant 2 i 1 són solucions de l'equació.

Activitats proposades

3. Resol les següents equacions de 2n grau completes:

a) $x^2 - 8x + 7 = 0$ b) $2x^2 + 3x - 12 = 0$

c) $10x^2 - 9x + 50 = 0$ d) $x^2 - 13x + 22 = 0$

4. Resol les equacions següents:

a) $2x - 3\cdot\frac{x-1}{5} = 6x^2 - \frac{8x+7}{5}$; b) $2\cdot\frac{x-7}{5} - \frac{3-2x}{x} = 10$; c) $5x\cdot(x - 3) + 4(x^2 - 5) + 10 = -10$;

d) $5(x^2 - 1) + 3(x^2 - 5) + 4 = 7$; e) $\frac{2-5x^2}{3x} - \frac{5}{3} = \frac{4x-7}{6}$; f) $\frac{2-3x^2}{5x} - \frac{4}{3} = \frac{2x-1}{15}$.

1.3. Nombre de solucions d'una equació de 2n grau completa

Recorda que:

Abans hem definit el que era el **discriminant**, et recordes?

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Per a saber quantes solucions té una equació de 2n grau, ens anem a fixar al signe del discriminant.

Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, l'equació té **dues solucions reals i distintes**.

Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, l'equació té dues solucions reals iguals, (una solució **doble**).

Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ l'equació **no té solució.**

El motiu és molt senzill, l'arrel quadrada d'un nombre real negatiu no és un nombre real, no existeix.

Exemple:

- *L'equació* $x^2 - 7x + 10 = 0$ *té com a discriminant*:

$$b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4\cdot 1\cdot 10 = 49 - 40 = 9 > 0$$

Per tant, l'equació donada té 2 solucions reals i distintes, 2 i 5. (Comprovació*:* $5^2 - 7\cdot 5 + 10 = 25 - 35 + 10 = 0$ i $(2)^2 - 7(2) + 10 = 4 - 14 + 10 = 0$).

- *L'equació* $x^2 - 6x + 9 = 0$ *té com a discriminant*:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4\cdot 1\cdot 9 = 36 - 36 = 0$$

Per tant, l'equació té dues solucions reals iguals. Es pot escriure com:

$x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow (x-3)^2 = 0$, que té la solució doble $x = 3$.

- L'equació $x^2 + 4x + 10 = 0$ *té com a discriminant*:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4\cdot 1\cdot (10) = 16 - 40 = -24 < 0$$

Per tant, l'equació no té solució real. Cap nombre real verifica l'equació.

Activitats proposades

5. Esbrina quantes solucions tenen les següents equacions de 2n grau:

a) $9x^2 + 4x + 7 = 0$ **b)** $3x^2 - 5x + 2 = 0$

c) $x^2 - 9x - 12 = 0$ **d)** $2x^2 - 7x + 9 = 0$.

1.4. Resolució d'equacions de 2n grau incompletes

Recorda que:

Anomenem **equació de 2n grau incompleta** a aquella equació de segon grau en què el coeficient b val 0 (falta b), o el coeficient c val 0 (falta c).

Observa: Si el coeficient a val zero no és una equació de segon grau.

Exemple:

- *L'equació de segon grau* $3x^2 - 22 = 0$ és incompleta perquè el coeficient $b = 0$, és a dir, falta b.
- *L'equació de segon grau* $2x^2 - 7x = 0$ és incompleta perquè no té c, és a dir, $c = 0$.

Una equació de segon grau incompleta també es pot resoldre utilitzant la fórmula de les completes però és un procés més lent i és més fàcil enganyar-se.

Si el **coeficient $b = 0$:** Aïllem la incògnita normalment, com féiem en les equacions de primer grau:

$$ax^2 + c = 0 \Rightarrow ax^2 = -c \Rightarrow x^2 = \frac{-c}{a} \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{-c}{a}} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

Si $\frac{-c}{a} > 0$ té dues solucions distintes, si $\frac{-c}{a} < 0$ no hi ha solució.

Si el coeficient ***c* = 0:** Traiem factor comú:

$$ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x\cdot(ax + b) = 0.$$

Perquè el producte de dos factors valga zero, un dels factors ha de valdre zero.

Per tant $x = 0$, o $ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = \frac{-b}{a}$.

Resum

Si el **coeficient *b* = 0,** $ax^2 + c = 0$, aïllem la incògnita: $x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$.

Si el **coeficient *c* = 0,** $ax^2 + bx = 0$, traiem factor comú: $x = 0$ i $x = \frac{-b}{a}$.

Exemple:

- *En l'equació* $2x^2 - 200 = 0$ *falta la b*.

Per a resoldre-la aïllem la incògnita, és a dir, x^2:

$$2x^2 - 200 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 200 \Rightarrow x^2 = 200/2 = 100$$

Una vegada que arribem ací, ens falta llevar aqueix quadrat que porta nostra incògnita. Per a això, fem l'arrel quadrada als 2 membres de l'equació:

$$\boldsymbol{x = \pm\sqrt{100} = \pm 10}.$$

Així hem obtingut les dues solucions de la nostra equació, 10 i –10.

En efecte, $2\cdot 10^2 - 200 = 2\cdot 100 - 200 = 0$, i $2\cdot(-10)^2 - 200 = 2\cdot 100 - 200 = 0$.

Exemple:

- *En l'equació* $3x^2 - 21x = 0$ *falta la c*.

Per a resoldre-la, traiem factor comú:

$$3x^2 - 21x = 0 \Rightarrow 3x\cdot(x - 21) = 0$$

Una vegada que arribem ací, tenim dues opcions

1) $3x = 0 \Rightarrow x = 0$.

2) $x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7$.

Així hem obtingut les dues solucions de l'equació $x = 0$ i $x = 7$.

En efecte, $3\cdot 0^2 - 21\cdot 0 = 0$, i $3\cdot(7)^2 - 21\cdot 7 = 3\cdot 49 - 21\cdot 7 = 147 - 147 = 0$.

Activitats resoltes

- *Resol l'equació de segon grau* $2x^2 - 50 = 0$:

Solució: Es tracta d'una equació de 2n grau incompleta on falta la *b*. Per tant, aïllem la incògnita:

$$2x^2 - 50 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 50 \Rightarrow x^2 = 50/2 = 25 \Rightarrow \text{Les solucions són 5 i } -5.$$

- *Resol l'equació de segon grau* $x^2 + 11x = 0$:

Solució: Es tracta d'una equació de 2n grau incompleta on falta la *c*.

Per tant, traiem factor comú: $x^2 + 11x = 0 \Rightarrow x(x + 11) = 0$.

Obtenim les dues solucions: $x = 0$ i $x + 11 = 0 \Rightarrow x = -11$.

Les solucions són 0 i –11.

Activitats proposades

6. Resol les següents equacions de 2n grau incompletes:

a) $5x^2 + 75x = 0$ b) $4x^2 - 160 = 0$

c) $x^2 - 64 = 0$ d) $3x^2 + 2x = 0$

e) $9x^2 - 49 = 0$ f) $3x^2 - 33x = 0$.

7. Resol les següents equacions de 2n grau incompletes:

a) $3x^2 + 18x = 0$ b) $5x^2 - 180 = 0$

c) $x^2 - 49 = 0$ d) $2x^2 + x = 0$

e) $4x^2 - 25 = 0$ f) $5x^2 - 10x = 0$.

1.5. Suma i producte de les solucions en una equació de segon grau

Recorda que:

Si en una equació de segon grau: $x^2 + bx + c = 0$, amb $a = 1$, coneixem les seues solucions: x_1 i x_2 sabem que podem escriure l'equació de forma factorizada:

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$$

Fem operacions:

$$x^2 - x_1 \cdot x - x_2 \cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0 \Rightarrow x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0,$$

per tant el coeficient *c* és igual al producte de les solucions i la suma de les solucions és igual a l'oposat del coeficient *b*, és a dir, –*b*.

$$\boldsymbol{x_1 \cdot x_2 = c;\ x_1 + x_2 = -b.}$$

Si l'equació és $ax^2 + bx + c = 0$, dividint per a, ja tenim una de coeficient $a = 1$, i obtenim que:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \; ; \; x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

Aquesta propietat ens permet, de vegades, resoldre mentalment algunes equacions de segon grau.

Activitats resoltes

- *Resol mentalment l'equació* $x^2 + x - 2 = 0$.

Les solucions són 1 i –2, perquè el seu producte és –2 i la seua suma –1.

- *Resol mentalment l'equació* $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Busquem, mentalment dos nombres el producte del qual siga 6 i la suma dels quals siga 5. En efecte, $2 \cdot 3 = 6$, i $2 + 3 = 5$, per tant les solucions de l'equació són 2 i 3.

- *Resol mentalment l'equació* $x^2 - 8x + 16 = 0$.

El producte ha de ser 16. Provem amb 4 com a solució, i en efecte 4 + 4 = 8. Les solucions són l'arrel 4 doble.

- *Resol mentalment l'equació* $x^2 + x - 2 = 0$.

Les solucions són –2 i 1, perquè el seu producte és –2 i la seua suma –1.

Activitats proposades

8. Resol mentalment les següents equacions de 2n grau:

a) $2x^2 + 8x = 0$ b) $x^2 + 6x - 27 = 0$

c) $x^2 - 81 = 0$ d) $x^2 - 10x + 22 = 0$

e) $x^2 - 3x - 4 = 0$ f) $x^2 - 5x - 24 = 0$

9. Escriu una equació de segon grau les solucions de la qual siguen 5 i 9.

10. El perímetre d'un rectangle mesura 20 cm i la seua àrea 24 cm^2. Calcula mentalment les seues dimensions.

11. Si 3 és una solució de $x^2 - 7x + a = 0$, quant val a?

2. ALTRES TIPUS D'EQUACIONS

Durant segles els algebristes han buscat fórmules, com la que ja coneixes de l'equació de segon grau, que resolguera les equacions de tercer grau, de quart, de cinqué… sense èxit a partir del cinqué grau. Les fórmules per a resoldre les equacions de tercer i quart grau són complicades. Només sabem resoldre de forma senzilla algunes d'aquestes equacions.

Exemple:

- Resol: $(x-5)\cdot(x-3)\cdot(x+2)\cdot(x-9)\cdot(x-6)=0$.

És una equació **polinómica** de grau cinc, però en estar factorizada sabem resoldre-la ja que perquè el producte de diversos factors siga zero, un d'ells ha de valdre zero. Igualant a zero cada factor tenim que les solucions són 5, 3, –2, 9 i 6.

2.1. Equacions biquadrades

Una **equació biquadrada** és una equació de la forma $ax^{2n}+bx^{n}+c=0$.

Per a resoldre-la, fem el canvi $x^n=t$, convertint-la així en una equació de segon grau de fàcil resolució.

Quan hàgem calculat el valor de t, desfem el canvi efectuat, $x=\sqrt[n]{t}$ per a obtindre la solució x.

Les equacions biquadrades més comuns són les de quart grau

Exemple:

- *Per a resoldre l'equació biquadrada* $x^4-10x^2+9=0$, fem el canvi obtenint l'equació de segon grau $t^2-10t+9=0$.

Resolem la dita equació de segon grau:

$$t=\frac{10\pm\sqrt{(-10)^2-4\cdot1\cdot9}}{2\cdot1}=\frac{10\pm8}{2}$$

$$t_1=\frac{10+8}{2}=9 \quad i \quad t_2=\frac{10-8}{2}=1$$

Desfem el canvi per a obtindre els valors de x:

$$Si\ t_1=9\rightarrow x=\pm\sqrt{9}=\pm3$$
$$Si\ t_2=1\rightarrow x=\pm\sqrt{1}=\pm1$$

Activitats resoltes

- *L'equació* $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ és una equació polinómica de quart grau, però amb una forma molt especial, és una equació **biquadrada**, perquè podem transformar-la en una equació de segon grau anomenant a x^2 per exemple, t.

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Rightarrow t^2 - 5t + 4 = 0 \Rightarrow t = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

Una solució de l'equació de segon grau és $t = 4$, i l'altra és $t=1$.

Per tant si $t = x^2 = 4$, aleshores $x = 2$ i $x = -2$.

I si $t = x^2 = 1$, aleshores $x = 1$ i $x = -1$.

La nostra equació de quart grau té quatre solucions: 2, –2, 1 i –1.

Activitats proposades

12. Resol les equacions següents:

a) $(x - 7) \cdot (x - 2) \cdot (x + 5) \cdot (x - 3) \cdot (x - 11) = 0$ b) $3(x - 5) \cdot (x - 7) \cdot (x + 2) \cdot (x - 3) \cdot (x - 4) = 0$

13. Resol les següents equacions biquadrades:

a) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ b) $x^4 + 12x^2 + 35 = 0$ c) $x^4 - 4x^2 - 12 = 0$.

14. Resol les equacions biquadrades següents:

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ b) $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$ c) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ d) $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$.

2.2. Equacions racionals

Si hi ha incògnites al denominador, l'equació es denomina **racional**, i es resol de forma semblant, llevant denominadors.

Per a resoldre equacions **racionals**, es multipliquen ambdós membres de l'equació pel mínim comú múltiple dels denominadors.

Exemples:

- *Resol* $\frac{3x - 8 + 9x}{2x} = 4$

Llevem denominadors:

$$\frac{3x - 12 + 9x}{2x} = 4 \Rightarrow 3x - 12 + 9x = 8x \Rightarrow 3x + 9x - 8x = 12 \Rightarrow 4x = 12 \Rightarrow x = 3.$$

- *Per a resoldre l'equació racional* $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} = \frac{1}{x^2 - 4}$, primer calculem el mínim comú múltiple dels denominadors:

$$\text{m.c.m.}(x - 2, x + 2, x^2 - 4) = (x - 2) \cdot (x + 2).$$

Multipliquem tota l'equació pel mínim comú múltiple, obtenint la nova equació:

$$\frac{(x-2)\cdot(x+2)}{x-2}+\frac{(x-2)\cdot(x+2)}{x+2}=\frac{(x-2)\cdot(x+2)}{x^2-4}\Rightarrow (x+2)+(x-2)=1.$$

Resolem la dita equació i així obtenim el resultat:

$$(x+2)+(x-2)=1 \Rightarrow 2x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2}.$$

Activitats proposades

15. Resol les següents equacions racionals:

a) $\frac{1}{x^2-x}-\frac{1}{x-1}=0$ b) $\frac{1}{x-6}+\frac{x}{x-2}=\frac{1}{x^2-8x+12}$ c) $\frac{3}{x}=1+\frac{x-13}{6}$.

2.3. Equacions radicals

Si hi ha incògnites dins d'un radical, l'equació es denomina **irracional**, i es resol aïllant el radical i elevant al quadrat (o a l'índex del radical). Ara és necessari tindre una precaució, en elevar al quadrat, l'equació obtinguda no és equivalent, es poden haver afegit solucions. Sempre és convenient comprovar el resultat, però en aquest cas, és necessari.

Una **equació radical o irracional** és aquella que té la incògnita davall del signe de l'arrel.

Per a resoldre equacions radicals, seguim els passos següents:

1.- S'aïlla un radical en un dels dos membres, passant a l'altre membre la resta dels termes, encara que tinguen també radicals.

2.- S'eleven al quadrat els dos membres.

3.- Si queden més radicals, es torna a aïllar un i s'eleva al quadrat, fins que no quede cap.

4.- Es resol l'equació obtinguda.

5.- Es comprova que la solució és vàlida.

Exemple:

- *Resoldrem l'equació radical* $\sqrt{2x-3}+1=x$.

1.- S'aïlla un radical en un dels dos membres, passant a l'altre membre la resta dels termes:

$$\sqrt{2x-3}+1=x \Rightarrow \sqrt{2x-3}=x-1.$$

2.- S'eleven al quadrat els dos membres:

$$\sqrt{2x-3}=x-1 \Rightarrow 2x-3=(x-1)^2 \Rightarrow 2x-3=x^2-2x+1.$$

3.- Es resol l'equació obtinguda:

$$2x-3=x^2-2x+1 \Rightarrow x^2-4x+4=0 \Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot1\cdot4}}{2\cdot1}=\frac{4\pm0}{2}=2 \text{ doble.}$$

4.- Es comprova que la solució és vàlida:

$$\sqrt{2\cdot 2-3}+1=2 \Rightarrow \sqrt{1}+1=2 \Rightarrow 2=2.$$

Activitats resoltes

- *Resol l'equació radical* $\sqrt{x+6}-\sqrt{x-2}=2$.

1.- S'aïlla un radical en un dels dos membres, passant a l'altre membre la resta dels termes, encara que tinguen també radicals:

$$\sqrt{x+6}=2+\sqrt{x-2}.$$

2.- S'eleven al quadrat els dos membres:

$$\left(\sqrt{x+6}\right)^2=\left(2+\sqrt{x-2}\right)^2 \Rightarrow x+6=4+4\sqrt{x-2}+x-2.$$

Simplifiquem l'equació obtinguda:

$$x+6=4+4\sqrt{x-2}+x-2 \Rightarrow x+6-4-x+2=4\sqrt{x-2} \Rightarrow 4=4\sqrt{x-2}.$$

3.- Tornem ara al pas 2 per a eliminar l'arrel que tenim encara:

$$4=4\sqrt{x-2} \Rightarrow 4^2=\left(4\sqrt{x-2}\right)^2 \Rightarrow 16=16(x-2).$$

4.- Es resol l'equació obtinguda:

$$16=16(x-2) \Rightarrow 1=x-2 \Rightarrow x=3.$$

5.- Es comprova que la solució és vàlida:

$$\sqrt{x+6}-\sqrt{x-2}=2 \Rightarrow \sqrt{3+6}-\sqrt{3-2}=2 \Rightarrow \sqrt{9}-\sqrt{1}=2 \Rightarrow 3-1=2 \Rightarrow 2=2.$$

La solució $x = 3$ verifica l'equació.

Activitats proposades

16. Resol les següents equacions irracionals:

a) $\sqrt{5x+4}-1=2x$ b) $\sqrt{x+19}+1=\sqrt{2x+4}$ c) $3\sqrt{x-1}+11=2x$.

2.4. Altres equacions

Hi ha també equacions trigonomètriques, logarítmiques, exponencials. Així, si la incògnita està en un exponent l'equació es denomina **exponencial**. Si podem expressar els dos membres de l'equació com a potències de la mateixa base, s'igualen els exponents.

Exemple:

- Resol: $2^{2x} = \frac{1}{16}$

Expressem l'equació com a potències d'una mateixa base: $2^{2x} = \frac{1}{16} \Rightarrow 2^{2x} = 2^{-4}$

Igualem els exponents: $2x = -4 \Rightarrow x = -2$.

Activitats proposades

17. Resol les equacions següents:

a) $(x-9)\cdot(x-1)\cdot(x+24)\cdot(x-5)\cdot(x-3)=0$ b) $3(x-5)\cdot(x-9)\cdot(x+2)\cdot(x-1)\cdot(x-4)=0$

18. Resol les equacions biquadrades següents:

a) $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$ b) $x^4 - 21x^2 + 12100 = 0$ c) $x^4 - 45x^2 + 234 = 0$ d) $x^4 - 37x^2 + 36 = 0$

19. Resol les equacions racionals següents:

a) $\frac{2x-1+7x}{3x} = \frac{3}{x} - 2$ b) $\frac{1}{x} + 1 - \frac{1}{x-2} = \frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{4}{3}$ d) $\frac{2x-3}{x} + \frac{1}{x} = 1$

20. Resol les equacions irracionals següents:

a) $5+\sqrt{x-1}=x+2$ b) $\sqrt{x-2}+3\sqrt{x-2}=x+1$ c) $\sqrt{x}-4=x-1$ d) $7+\sqrt{x+4}=x+9$

21. Resol les equacions exponencials següents:

a) $5^{3x} = \frac{1}{625}$ b) $2^{2x}\cdot 4^{x} = \frac{1}{16}$ c) $2^{x+5} + 2^{x+4} + 2^{x+3} = 28$

3. SISTEMES D'EQUACIONS LINEALS

3.1. Concepte de sistema d'equacions lineals

Recorda que:

Una **equació** amb diverses incògnites és una igualtat que les relaciona.

Per exemple:

$x^2 + y^2 = 25$, és l'equació d'una circumferència de centre l'origen i radi 5.

Un **sistema d'equacions** és un conjunt d'equacions amb diverses incògnites.

Per exemple:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 7x + 2y = 0 \end{cases}$$

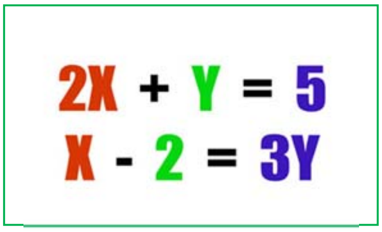
La primera equació és la d'una circumferència de centre l'origen i radi 5, i la segona és l'equació d'una recta que passa per l'origen. Les solucions del sistema són els punts d'intersecció entre la circumferència i la recta.

S'anomena **solució del sistema** a cada un dels conjunts de nombres que verifiquen totes les equacions del sistema.

Dos sistemes són **equivalents** quan tenen les mateixes solucions.

Un **sistema d'equacions lineals** amb dues incògnites es pot expressar de la forma:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$



on *a*, *b*, *a'* i *b'* són nombres reals que es denominen **coeficients** i *c* i *c*' també són nombres reals anomenats **termes independents**.

Anomenem **solució** del sistema al parell de valors (*x*, y) que satisfan les dues equacions del sistema.

Es diu que dos sistemes d'equacions són **equivalents**, quan tenen la mateixa solució.

Exemple:

- *Són sistemes d'equacions lineals, per exemple:*

$$\begin{cases} 3x - 4y = -1 \\ 2x + 5y = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} 5x + 2y = 7 \\ x - y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 7x - 3y = 4 \end{cases}$$

Exemple:

- ***No*** *és un sistema lineal* $\begin{cases} 9xy + 2y = 5 \\ 3x - xy = 4 \end{cases}$ perquè té termes en *xy*, encara que és un sistema de dues equacions.

Tampoc ho és $\begin{cases} 5x^2 + 9y = 2 \\ 4x - 3y = 6 \end{cases}$ perquè té un terme en x^2, encara que també és un sistema de dues equacions.

Activitats proposades

22. Raona si són o no sistemes d'equacions lineals els sistemes següents:

a) $\begin{cases} 7xy + 5y = 2 \\ 3x - 5y = 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2y - 4x = 3 \\ 3x - 5y = -6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 4 = 2y \\ 6x + 8y = 9 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x^2 + 3y = 5 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$

3.2. Classificació de sistemes d'equacions

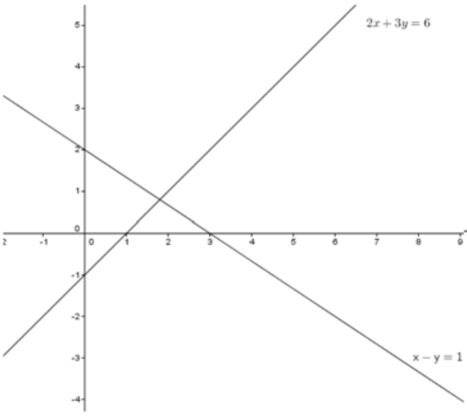
Recorda que:

En un sistema d'equacions lineals amb dues incògnites, cada una de les equacions representa una recta al pla. Aquestes rectes poden estar posicionades entre si de tres maneres distintes, la qual cosa ens ajudarà a classificar el nostre sistema en:

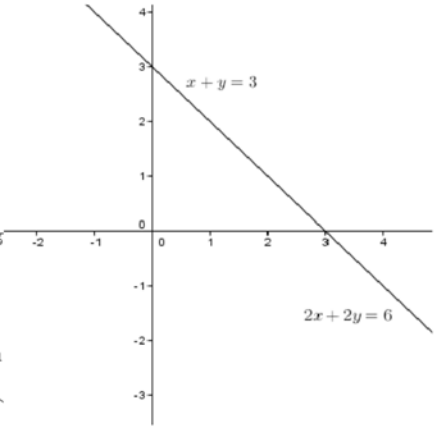
1) **Compatible determinat**: el sistema té una única solució, per la qual cosa nostres rectes són **SECANTS**

2) **Compatible indeterminat**: el sistema té infinites solucions, per la qual cosa les rectes són **COINCIDENTS**

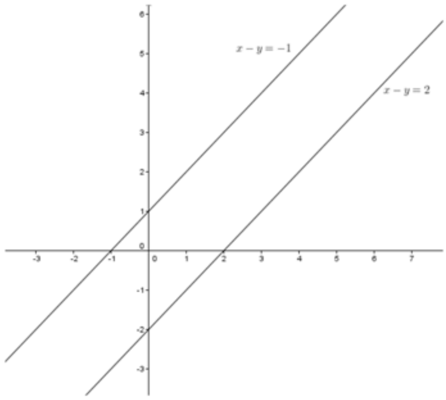
3) **Incompatible**: el sistema no té solució, per la qual cosa les rectes són **PARAL·LELES.**



Compatible determinat



Compatible indeterminat



Incompatible

Activitats resoltes

- *Afig una equació a* $x - 2y = 2$ perquè el sistema resultant siga:

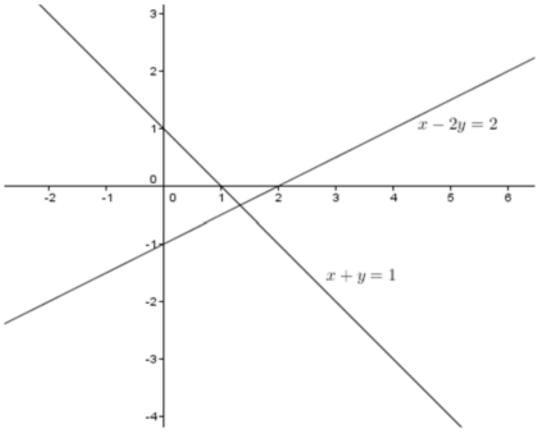
  a) Compatible determinat.

  b) Incompatible.

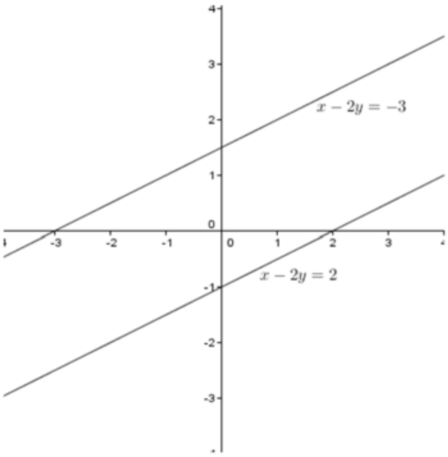
  c) Compatible indeterminat.

Solució:

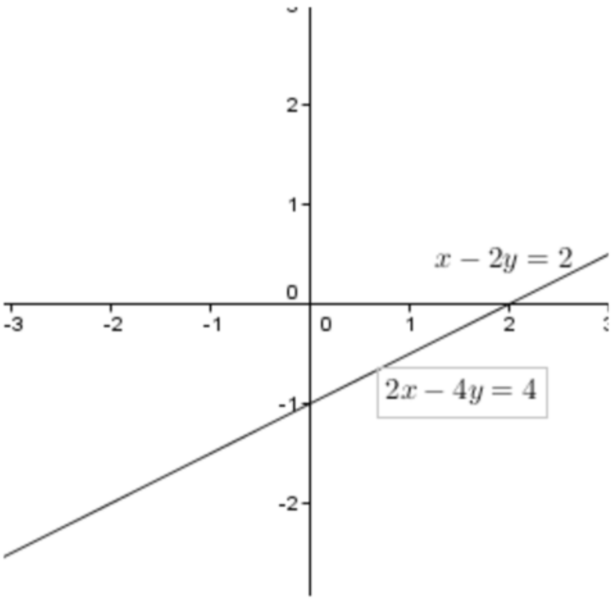
a) Perquè el sistema siga compatible determinat, afegirem una equació que no tinga els mateixos coeficients que la que ens dóna l'exercici. Per exemple, $x + y = 1$.



b) Perquè siga incompatible, els coeficients han de ser els mateixos però tindre diferent terme independent. Per exemple $x - 2y = -3$.



c) Perquè siga compatible indeterminat, posarem una equació proporcional a la que tenim. Per exemple $2x - 4y = 4$.



Activitats proposades

23. Representa els següents sistemes i classifica'ls:

a) $\begin{cases} 2x+y=4 \\ -2x+y=-1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x-y=4 \\ -y+3x=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-9y=9 \\ 2x-6y=6 \end{cases}$

24. Resol gràficament els següents sistemes i classifica'ls:

a) $\begin{cases} 2x+y=6 \\ -3x+y=-1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y=3 \\ -2y+2x=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x-3y=3 \\ 4x-6y=6 \end{cases}$

25. Resol gràficament els següents sistemes i classifica'ls:

a) $\begin{cases} x+y=5 \\ -3x+y=-3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y=3 \\ -2y+x=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x-3y=5 \\ 4x-4y=4 \end{cases}$

3.3. Resolució de sistemes pel mètode de substitució

Recorda que:

El **mètode de substitució** consisteix a aïllar una incògnita d'una de les equacions del sistema i substituir l'expressió obtinguda en l'altra equació. Així, obtenim una equació de primer grau en la què podrem calcular la incògnita aïllada. Amb el valor obtingut, obtenim el valor de l'altra incògnita.

Exemple:

- *Resoldrem el sistema* $\begin{cases} \mathbf{2x-3y=1} \\ \mathbf{x+2y=4} \end{cases}$ *pel mètode de substitució:*

Aïllem *x* de la segona equació: $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ x+2y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-3y=1 \\ x=4-2y \end{cases}$

i la substituïm en la primera:

$$\begin{cases} 2(4-2y)-3y=1 \\ x=3-2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8-4y-3y=1 \\ x=3-2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4y-3y=1-8 \\ x=3-2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -7y=-7 \\ x=3-2y \end{cases} \Rightarrow y = 1.$$

Amb el valor obtingut de *y*, calculem la *x*: $x = 4 - 2y \Rightarrow x = 4 - 2\cdot 1 = 2$.

La solució és: $\begin{cases} \mathbf{x=2} \\ \mathbf{y=1} \end{cases}$. *Comprovem*: $\begin{cases} 2\cdot 2-3\cdot 1=4-3=1 \\ 2+2\cdot 1=4 \end{cases}$.

Activitats proposades

26. Resol els següents sistemes pel mètode de substitució:

a) $\begin{cases} 2x+5y=-6 \\ x+2y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x+4y=5 \\ 4x+y=8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x-2y=3 \\ 2x+y=10 \end{cases}$

27. Resol els següents sistemes pel mètode de substitució:

a) $\begin{cases} 3x+4y=26 \\ x-2y=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+4y=26 \\ 3x+y=24 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-2y=8 \\ 2x+3y=14 \end{cases}$

3.4. Resolució de sistemes pel mètode d'igualació

Recorda que:

El **mètode d'igualació** consisteix a aïllar la mateixa incògnita a les dues equacions que formen el sistema i igualar els resultats obtinguts. Així, obtenim una equació de primer grau en la que podrem calcular la incògnita aïllada. Amb el valor obtingut, calculem el valor de l'altra incògnita

Exemple:

- *Resoldrem el sistema* $\begin{cases} \mathbf{2x - 3y = 1} \\ \mathbf{x + 2y = 4} \end{cases}$ pel *mètode d'igualació:*

Aïllem la mateixa incògnita de les dues equacions que formen el sistema:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3y+1}{2} \\ x = 4 - 2y \end{cases}$$

Igualem ara els resultats obtinguts i resolem l'equació resultant:

$$\begin{cases} \dfrac{3y+1}{2} = 4 - 2y \\ x = 4 - 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y + 1 = 8 - 4y \\ x = 4 - 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y + 4y = 8 - 1 \\ x = 4 - 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7y = 7 \\ x = 4 - 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 4 - 2y \end{cases}$$

Amb el valor obtingut de *y*, calculem la *x*: $\begin{cases} y = 1 \\ x = 4 - 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 4 - 2 \cdot 1 = 2 \end{cases}$

La solució és: $\begin{cases} \mathbf{x = 2} \\ \mathbf{y = 1} \end{cases}$

Comprovem: $\begin{cases} 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 4 - 3 = 1 \\ 2 + 2 \cdot 1 = 4 \end{cases}$

Activitats proposades

28. Resol els següents sistemes pel mètode d'igualació:

a) $\begin{cases} x + y = 11 \\ -x + 3y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 5y = 4 \\ 2x + 7y = -11 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 7x - 3y = 5 \\ 3x + 4y = 11 \end{cases}$

29. Resol els següents sistemes pel mètode d'igualació:

a) $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ -2x + y = -5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 3y = -5 \\ 4x + 5y = 12 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 9x - 2y = 7 \\ x + 3y = 8 \end{cases}$

4.5. Resolució de sistemes pel mètode de reducció

Recorda que:

El **mètode de reducció** consisteix a eliminar una de les incògnites sumant les dues equacions. Per a això es multipliquen una o ambdues equacions per un nombre de manera que els coeficients de *x* o *y* siguen iguals però de signe contrari.

Exemple:

- *Resoldrem el sistema* $\begin{cases} \mathbf{2x - 3y = 1} \\ \mathbf{x + 2y = 4} \end{cases}$ pel *mètode de reducció:*

Multipliquem la segona equació per –2 perquè els coeficients de la *x* siguen iguals però de signe contrari i sumem les equacions obtingudes:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \xrightarrow[\cdot(-2)]{} \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -2x - 4y = -8 \end{cases} \xrightarrow[\text{sumem}]{} \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -7y = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Amb el valor obtingut de *y*, calculem la *x*:

$$\begin{cases} 2x - 3\cdot(1) = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{2} = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

La solució és: $\begin{cases} \mathbf{x = 2} \\ \mathbf{y = 1} \end{cases}$.

Comprovem: $\begin{cases} 2\cdot 2 - 3\cdot 1 = 4 - 3 = 1 \\ 2 + 2\cdot 1 = 4 \end{cases}$.

Activitats proposades

30. Resol els següents sistemes pel mètode de reducció:

a) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ -2x - 5y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ x - 4y = 5 \end{cases}$

31. Resol els següents sistemes pel mètode de reducció:

a) $\begin{cases} 3x + y = 8 \\ x - 5y = -9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 3y = 9 \\ x + 2y = 10 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x - 2y = 7 \end{cases}$

5. SISTEMES D'EQUACIONS NO LINEALS

5.1. Concepte de sistema d'equacions no lineals

Un **sistema d'equacions és no lineal** quan almenys una de les seues equacions no és de primer grau

$$\begin{cases} ax^2 + by^2 = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

On *a, b, a'* i *b' són* nombres reals que es denominen **coeficients** i *c* i *c'* també són nombres reals anomenats **termes independents**.

Anomenem **solució** del sistema al parell (*x, y*) de valors que satisfan les dues equacions del sistema.

Exemple:

- *Són sistemes d'equacions **no** lineals, per exemple:*

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x \cdot y = 6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y = 7 \\ x + y = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \sqrt{x} + y = 3 \\ x + 5y = 7 \end{cases}$

Activitats proposades

32. Raona si són o no sistemes d'equacions lineals els sistemes següents:

a) $\begin{cases} x \cdot y + 2y = 6 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5y - x = 4 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x - 2 = y \\ 3x + 5y = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 + y = 2 \\ 3x + y^2 = 4 \end{cases}$

5.2. Resolució de sistemes d'equacions no lineals

La resolució d'aquest tipus de sistemes se sol fer pel mètode de **substitució** mitjançant els passos següents:

1.- S'aïlla una incògnita d'una de les equacions, si és possible de la de primer grau.

2.- Es substitueix la incògnita aïllada a l'altra equació.

3.- Es resol l'equació resultant.

4.- Cada un dels valors obtinguts es substitueix a l'altra equació, s'obtenen així els valors corresponents de l'altra incògnita.

Activitats resoltes

- *Resoldrem el sistema no lineal* $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x + y = 7 \end{cases}$

1.- S'aïlla una incògnita d'una de les equacions, si és possible de la de primer grau:

$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x+y=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=25 \\ y=7-x \end{cases}$$

2.- Es substitueix la incògnita aïllada a l'altra equació:

$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ y=7-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+(7-x)^2=25 \\ y=7-x \end{cases}$$

3.- Es resol l'equació resultant:

$$\begin{cases} x^2+(7-x)^2=25 \\ y=7-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+49-14x+x^2=25 \\ y=7-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2-14x+24=0 \\ y=7-x \end{cases}$$

$$x=\frac{14\pm\sqrt{(-14)^2-4\cdot 2\cdot 24}}{2\cdot 2}=\frac{14\pm 2}{4} \Rightarrow x_1=4 \wedge x_2=3.$$

4.- Cada un dels valors obtinguts se substitueix en l'altra equació, s'obtenen així els valors corresponents de l'altra incògnita:

Si $x = 3$, $y = 7 - 3 = 4$

Si $x = 4$, $y = 7 - 4 = 3$

Les solucions són **(3, 4)** i **(4, 3)**.

5.- *Comprovació*:

$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x+y=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^2+4^2=9+16=25 \\ 3+4=7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x+y=7 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 4^2+3^2=16+9=25 \\ 4+3=7 \end{cases}$$

Activitats proposades

33. Resol els següents sistemes no lineals:

a) $\begin{cases} x\cdot y+2=4x \\ y-x=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y^2-x^2=5 \\ 5x-3y=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y=7 \\ x\cdot y=12 \end{cases}$

34. Resol els següents sistemes i comprova gràficament les solucions:

a) $\begin{cases} x^2-y^2=3 \\ x+y=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y=1 \\ xy=2 \end{cases}$ c) $\left.\begin{matrix} x^2+y^2=81 \\ xy=4 \end{matrix}\right\}$

d) $\begin{cases} x^2+2y^2=17 \\ x+y=5 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x^2-y^2=5 \\ xy=6 \end{cases}$ f) $\left.\begin{matrix} x^2+y^2=18 \\ y=x \end{matrix}\right\}$

35. La trajectòria d'un projectil és una paràbola d'equació: $i = -x^2 + 5x$, i la trajectòria d'un avió és una recta d'equació: $y = 3x$. En quins punts coincideixen ambdues trajectòries? Representa gràficament la recta i la paràbola per a comprovar el resultat.

36. Resol els sistemes següents:

a) $\begin{cases} 3x^2 - 5y^2 = -2 \\ 2x^2 - 3y^2 = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x^2 + y^2 = 3 \\ 5x^2 - 2y^2 = 5 \end{cases}$ *Ajuda*: Utilitza el mètode de reducció:

c) $\begin{cases} xy = \frac{1}{2} \\ x + y = \frac{3}{2} \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 - 4y = -3 \\ xy = 1 \end{cases}$ e) $\left.\begin{matrix} x + y - \frac{y}{x} = 1 \\ x + y = 2 \end{matrix}\right\}$

5.3. Sistemes d'equacions lineals de més de dues incògnites

La millor forma de resoldre sistemes lineals de més de dues incògnites és anar substituint el sistema per un altre equivalent de manera que cada vegada s'aconseguisca que siguen zeros els coeficients de més incògnites. Aquest procediment es denomina **Mètode *de Gauss***.

Activitats resoltes

Per a resoldre el sistema: $\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ x + 2y + z = 4 \\ x + 4y - 2z = 3 \end{cases}$, deixem la primera equació sense modificar. Volem que la segona equació tinga un zero com a coeficient de la "*x*", per a això la multipliquem per 2 i li restem la primera. Perquè la tercera equació tinga un zero com a coeficient de la "*x*", la multipliquem per 2 i li restem la primera:

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ x + 2y + z = 4 \\ x + 4y - 2z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ 0 + 3y + 5z = 8 \\ 0 + 7y - z = 6 \end{cases}$$

Ara podem resoldre el sistema de dues equacions i dues incògnites format per les dues últimes equacions, o continuar amb el nostre procediment. Per a aconseguir que en la tercera equació el coeficient de la "y" siga un zero multipliquem la tercera equació per 3 i la segona per 7 i les restem:

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ 0 + 3y + 5z = 8 \\ 0 + 7y - z = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ 0 + 3y + 5z = 8 \\ 0 + 0 + 32z = 32 \end{cases}$$

i ara ja podem aïllar cada una de les incògnites de forma ordenada:

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ 0 + 3y + 5z = 8 \\ 0 + 0 + z = \frac{32}{32} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + (1) - 3(1) = 0 \\ 3y + 5(1) = 8 \to y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Activitats proposades

37. Resol els sistemes següents:

a) $\begin{cases} 2x + y - 3z = -2 \\ x + 2y + z = 0 \\ 3x + 4y - 2z = -3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y + 2z = 6 \\ x + 2y + 2z = 4 \\ 3x - 2y - 3z = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x + 2y - 2z = 5 \\ x - 2y + 2z = -1 \\ x - 2y - 3z = -6 \end{cases}$

3. RESOLUCIÓ DE PROBLEMES

3.1. Resolució de problemes mitjançant equacions de 2n grau

Per a resoldre problemes per mitjà d'equacions de 2n grau, primer haurem de passar a llenguatge algebraic l'enunciat del problema i després resoldre'l seguint els passos següents:

1.- Comprendre l'enunciat.

2.- Identificar la incògnita.

3.- Traduir l'enunciat al llenguatge algebraic.

4.- Plantejar l'equació i resoldre-la.

5.- Comprovar la solució obtinguda.

Activitats resoltes

Resoldrem el problema següent:

- *Quin és el nombre natural el quíntuple del qual augmentat en 6 unitats és igual al seu quadrat?*

Una vegada comprés l'enunciat, identifiquem la incògnita, que en aquest cas, és el nombre que estem buscant.

2.- Nombre buscat = $\boldsymbol{x}$

3.- Traduïm ara el problema al llenguatge algebraic:

$$5x + 6 = x^2$$

4.- Resolem l'equació:

$$5x + 6 = x^2 \Rightarrow x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2}$$

$$x_1 = \frac{5+7}{2} = 6 \quad ; \quad x_2 = \frac{5-7}{2} = -1$$

Solució: Com l'enunciat diu "nombre natural" el nombre buscat és el 6.

5.- *Comprovació*: En efecte 5·6 + 6 = 36 = 6^2.

Activitats proposades

38. Quin nombre multiplicat per 4 és 5 unitats menor que el seu quadrat?

39. En una classe decideixen que tots enviaran una carta a la resta de companys. Un diu: Escriurem 380 cartes! Calcula el nombre d'alumnes que hi ha a la classe.

40. Calcula tres nombres consecutius tals que la suma dels seus quadrats siga 365.

41. Una fotografia rectangular mesura 14 cm de base i 10 cm d'altura. Al voltant de la foto hi ha un marge de la mateixa amplària per a la base que per a l'altura. Troba l'ample del marge, sabent que l'àrea total de la foto i el marge és de 252 cm^2.

42. El triple del quadrat d'un nombre augmentat en el seu doble és 85. Quin és el nombre?

43. Un triangle isòsceles té un perímetre de 20 cm i la base mesura 4 cm, calcula els costats del triangle i la seua àrea.

44. Un full de paper quadrat es doblega per la meitat. El rectangle resultant té una àrea de 8 cm^2. Quin és perímetre del dit rectangle?

45. Un pare diu: "El producte de l'edat del meu fill fa 5 anys pel de la seua edat fa 3 anys és la meua edat actual, que són 39 anys". Calcula l'edat del fill.

46. Troba les dimensions de rectangle l'àrea del qual és 21 m^2, sabent que els seus costats es diferencien en 4 metres.

47. En un triangle rectangle el catet major mesura 3 cm menys que la hipotenusa i 4 cm més que l'altre catet. Quant mesuren els costats del triangle?

48. Troba dos nombres parells consecutius el producte dels quals siga 224.

49. Troba tres nombres imparells consecutius tals que si al quadrat del major se li resten els quadrats dels altres dos s'obté com resultat 15.

3.2. Resolució de problemes mitjançant sistemes d'equacions

Per a resoldre problemes per mitjà de sistemes d'equacions, primer haurem de passar a llenguatge algebraic l'enunciat del problema i després resoldre'l seguint els passos següents:

1.- Comprendre l'enunciat.

2.- Identificar les incògnites.

3.- Traduir l'enunciat al llenguatge algebraic.

4.- Plantejar el sistema i resoldre'l.

5.- Comprovar la solució obtinguda.

Activitats resoltes

Resoldrem el problema següent:

- *La suma de les edats d'un pare i el seu fill és 39 i la seua diferència 25. Quina és l'edat de cada un?*

Una vegada comprés l'enunciat, identifiquem les incògnites que, en aquest cas, són l'edat del pare i el fill

2.- Edat del pare = x

Edat del fill = y

3.- Passem l'enunciat a llenguatge algebraic:

La suma de les seues edats és 39:

$$x + y = 39$$

I la seua diferència 25:

$$x - y = 25$$

4.- Plantegem el sistema i el resolem pel mètode que ens resulte més senzill. En aquest cas, el fem per reducció:

$$\begin{cases} x + y = 39 \\ x - y = 25 \end{cases} \xrightarrow[\textit{sumem}]{} \begin{cases} x + y = 39 \\ 2x + 0 = 64 \end{cases} \Rightarrow x = 64/2 = 32$$

$x + y = 39 \Rightarrow 32 + y = 39 \Rightarrow y = 39 - 32 = 7$.

Solució: El pare té 32 anys i el fill té 7 anys.

5.- Comprovació*:* En efecte, la suma de les edats és 32 + 7 = 39 i la diferència és 32 – 7 = 25.

Activitats proposades

50. La suma de les edats de Maria i Alfons són 65 anys. L'edat d'Alfons menys la meitat de l'edat de Maria és igual a 74. Quina edat tenen cadascú?

51. La suma de les edats de Mariló i Xavier és 32 anys. D'ací a 7 anys, l'edat de Xavier serà igual a l'edat de Mariló més 20 anys. Quina edat té cada un en l'actualitat?

52. Troba dos nombres la diferència dels quals siga 24 i la seua suma siga 104.

53. Un hotel té 42 habitacions (individuals i dobles) i 62 llits, quantes habitacions té de cada tipus?

54. En un triangle rectangle la hipotenusa mesura 10 cm i les longituds dels seus dos catets sumen 14 cm. Calcula l'àrea del triangle.

55. Neus li pregunta a Miriam per les seues qualificacions en Matemàtiques i en Llengua. Miriam li diu "La suma de les meues qualificacions és 19 i el producte 90". Neus li dóna l'enhorabona. Quines qualificacions va obtindre?

56. D'un nombre de tres xifres se sap que sumen 12, que la suma dels seus quadrats és 62, i que la xifra de les desenes és igual a la de les centenes més 1. Quin nombre és?

57. Es tenen tres sucs compostos de la manera següent:

- El primer de 40 dl de taronja, 50 dl de llima i 90 dl de pomelo.
- El segon de 30 dl de taronja, 30 dl de llima i 50 dl de pomelo.
- El tercer de 20 dl de taronja, 40 dl de llima i 40 dl de pomelo.

Es demana quin volum haurà de prendre's de cada un dels sucs anteriors per a formar un nou suc de 34 dl de taronja, 46 dl de llima i 67 dl de pomelo.

58. Es venen tres espècies de cereals: blat, ordi i mill. Cada kg de blat es ven per 2 €, el de l'ordi per 1 € i el de mill per 0.5 €. Si es ven 200 kg en total i s'obté per la venda 150 €, quants volums de cada cereal s'han venut?

59. Es desitja mesclar farina de 2 €/kg amb farina d'1 €/kg per a obtindre una mescla de 1,2 €/kg. Quants kg haurem de posar de cada preu per a obtindre 300 kg de mescla?

60. En una botiga hi ha dos tipus de joguets, els de tipus A què utilitzen 2 piles i els de tipus B que utilitzen 5 piles. Si en total en la botiga hi ha 30 joguets i 120 piles, quants joguets hi ha de cada tipus?

61. Un vianant ix d'una ciutat A i es dirigeix a una ciutat B que està a 15 km de distància a una velocitat de 4 km/h, i al mateix moment ix un ciclista de la ciutat B a una velocitat de 16 km/h i es dirigeix cap a A, quant temps porta el vianant caminant al moment de la trobada? A quina distància de B s'encreuen?

CURIOSITATS. REVISTA

El nombre d'or està per tot arreu

Coneixes un nombre irracional la part decimal del qual siga igual a la del seu quadrat?

Per trobar-lo hem de resoldre l'equació: $x^2 = x + n$, on n siga un nombre enter. Imaginem que n siga igual a 1, aleshores:

$x^2 = x + 1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \begin{cases} 1{,}618033988749... \\ -0{,}618033988749... \end{cases}$

El nombre d'or!

Coneixes un nombre la part decimal del qual siga igual a la del seu invers?

Plantegem de nou l'equació: $1/x = x + n$, on n siga un nombre enter. Imaginem que n siga igual a –1, aleshores:

$1/x = x - 1 \Rightarrow 1 = x^2 - x \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$

Tenim la mateixa equació d'abans! La solució torna a ser el nombre d'or!

El nombre d'or, Φ, està per tot arreu! Ja l'haviem trobat en pintura, arquitectura, escultures, i a la pròpia natura. Ara el trobem a les equacions.

El bròcoli és un conegut exemple de fractal. Cada un dels seus trocets és sembant al complet, amb un canvi d'escala.

També està relacionat amb el nombre d'or i la successió de *Fibonacci*. Si contem les espirals que es formen són dos nombres successius de la succesión de *Fibonacci*, cap a la dreta són 8 i cap a l'esquerra són 13. Recorda la successió és: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13

¿Sabries calcular $x = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+...}}}}$?

Hi ha infinites arrels quadrades encadenades. Com si a infinit li sume 1 no canvia, una forma de trobar el seu valor es tornar a substituir x en la igualtat: $x = \sqrt{1+x}$ i resoldre l'equació:

$$x = \sqrt{1+x} \Rightarrow x^2 = 1 + x \Rightarrow$$

$$x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1+\sqrt{1+4}}{2} = \Phi$$

¿Sabries calcular $x = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+...}}}$? És una fracció continua. Hi ha infinites fraccions encadenades. calcular-la de nou substituïm x: $x = 1 + \frac{1}{x}$ i resolem

Obtenció de la fórmula per a resoldre equacions de segon grau.

$ax^2 + bx + c = 0$, amb $a \neq 0$

$\Downarrow$

$ax^2 + bx = -c$

$\Downarrow$ Multipliquem per $4a$

$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$

$\Downarrow$ Sumem b^2

$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = -4ac + b^2$

$\Downarrow$ Emplenem quadrats

$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$

$\Downarrow$ Fem l'arrel quadrada

$2ax + b =$

$\Downarrow$Aïllem la x

$\Downarrow$

Tres equacions de segon grau interessants

$x^2 = 2$

Aquesta equació ens apareix en aplicar el Teorema de Pitàgores a un triangle rectangle isòsceles de costats iguals a 1, o al calcular la diagonal d'un quadrat de costat 1. La seua solució és la longitud de la hipotenusa o de la diagonal. Té d'interessant que es demostra que la solució NO és un nombre racional, un nombre que es puga escriure com a quocient de dos nombres enters.

$x + 1 = x^2$

També es pot escriure com:

que és una proporció, on x pren el valor

$\approx$ 1,618… que és el nombre d'or,

altre nombre irracional.

$x^2 = -1$

La tercera equació no té solució real, cap nombre real en elevar-lo al quadrat pot donar un nombre negatiu, però si ampliem el camp real amb la seua arrel $\sqrt{-1}$ = i, resulta que ja totes les equacions de segon grau tenen solució, i als nombres a + b·i se'ls anomena **nombres complexos**.

Emmy Noether va ser una matemàtica alemanya d'origen jueu els treballs de la qual en Àlgebra van permetre resoldre el problema de la conservació de l'energia.

Problemes

Alguns problemes d’enginy que es resolen, (o no) per equacions o sistemes.

Els cocos

Tres mariners i una mona arrepleguen cocos. Abans de repartir-los s'adormen. A la nit un mariner reparteix el muntó de cocos en tres partes iguals, li sobra un que se'l dona a la mona, i es guarda la seua part. Un segon mariner fa la mateixa operació, li sobra també un i es guarda la seua part. El mateix fa el tercer mariner. Al matí següent reparteixen els cocos i ara el repartiment és exacte. Quants cocos hi havia?

La piscina

La piscina del poliesportiu municipal s'ha hagut que buidar per un problema de contaminació. Aquest procés s'ha realitzat en tres fases per a poder utilitzar l'aigua en la neteja de les instal·lacions, primer s'ha tret la tercera part, després la meitad de la resta i encara queden 150 m^3 d'aigua. Quina capacitat té la piscina?

Ajuda: No planteges una equació. Fes un diagrama.

Les perles del rajà

Un rajà va deixar a les seues filles un cert nombre de perles i va determinar que es fera de la manera següent: La filla major prendria una perla i un seté del que restara. La segona filla rebria dues perles i un seté del que restara. La tercera jove rebria tres perles i un seté del que restara. I així successivament. Feta la divisió cadascuna de les germanes va rebre el mateix nombre de perles. Quantes perles hi havia? Quantes filles tenia el rajà?

La invitació

Joan invita a Marta i a Elena a berenar. Prepara una llimonada i es disposa a servir-la. Marta la vol amb poca llima i Elena amb molta. Joan ha posat el suc de llima i l'aigua en gerres iguals i amb la mateixa quantitat. Per complaure a les seues invitades pren un got de la gerra amb llima i l'aboca en la de l'aigua, i a continuació pren un got de la mateixa grandària de la mescla i l'aboca en la de la llima. Hi haurà més llima en la gerra de l'aigua o aigua en la gerra de la llima?

Ajuda: Aquest problema és molt antic. Pareix d'equacions però així és molt difícil. Encara que pensant un poc, resulta molt senzill.

RESUM

		Exemples
Equació de segon grau	És una equació algebraica en què la major potència de la incògnita és 2. Té la forma: $ax^2 + bx + c = 0$ on *a, b i c* són nombres reals, amb $a \neq 0$.	$-4x^2 + 5x - 8/3 = 0$
Resolució d'equacions de segon grau completes	S'usa la fórmula: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x^2 - 7x + 10 = 0$: $x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2}$ $x_1 = 5, x_2 = 2$
Discriminant	$\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta = (-7)^2 - 4\cdot1\cdot10 = 49 - 40 = 9$
Nombre de solucions d'una equació de segon grau	Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, té dues solucions reals i distintes Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, té una solució doble. Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, l'equació no té solució	$x^2 - 3x - 4 = 0$: $\Delta = 25 > 0$, té dues solucions 4 i -1. $x^2 - 4x + 4 = 0$: $\Delta = 0$, té una arrel doble: $x = 2$. $x^2 + 3x + 8 = 0$: $\Delta = -23$. No té solució real
Resolució d'equacions de segon grau incompletes	Si $b = 0$, $ax^2 + c = 0$, aïllem la incògnita: $x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$ Si $c = 0$, $ax^2 + bx = 0$: $x = 0$ i $x = \frac{-b}{a}$	$2x^2 - 50 = 0$: $x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$ $3x^2 - 18x = 0 \Rightarrow 3x(x - 9) = 0 \Rightarrow$ $x_1 = 0$; $x_2 = 9$.
Suma i producte d'arrels	$x_1\, x_2 = \frac{c}{a}$; $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$	$x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow x_1 = 5$; $x_2 = 2$.
Sistema d'equacions lineals	$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$	$\begin{cases} 6x + 5y = 8 \\ 4x - 2y = -3 \end{cases}$
Clasificació	**Compatible determinat**: Una única solució, el punt d'intersecció. Les rectes són **secants**: $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ -2x - y = 1 \end{cases}$ **Compatible indeterminat**: Infinites solucions, per la qual cosa les rectes són **coincidents**: $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x - 4y = 6 \end{cases}$ **Incompatible**: No té solució, les rectes són **paral·leles**: $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x - 4y = 9 \end{cases}$	
Mètodes de resolució	**Substitució:** aïllar una incògnita i substituir en l'altra equació. **Igualació:** aïllar la mateixa incògnita de les dues equacions. **Reducció:** sumar les dues equacions, multiplicant-les per nombres adequats.	

EXERCICIS I PROBLEMES

Equacions de segon grau

1. Resol les següents equacions de 2n grau

a) $-x^2 - 7x - 12 = 0$ b) $x(-5 + x) = 3$ c) $3x^2 = 30x$

d) $3(x + 1) - x(5x + 2) = 7$ e) $3(7x - 2) + 3x(x - 4) = 1$ f) $4(x^2 - 4) - 5(3 + 2x) = -7$

g) $(3x + 2)\cdot(4x - 2) = -6x - 2$ h) $x\cdot(x + 5) = 168$ i) $2(3x^2 - 5x + 2) - 5x(6x - 3) = -2$

2. Resol les següents equacions de 2n grau amb denominadors:

a) $\frac{x^2-3}{2} - \frac{x+2}{4} = 5$ b) $\frac{x^2-5}{2} + \frac{2x^2-3x+7}{2} = 5$ c) $\frac{2x^2+1}{5} + \frac{x+3}{10} = 1$

d) $\frac{2-2x^2}{3} + \frac{4x-3}{2} = \frac{5}{6}$ e) $\frac{x^2-1}{3} - \frac{5x-9}{6} = 4x-3$ f) $\frac{2x+3x^2}{7} - \frac{3x-8}{14} = 1$

3. Resol mentalment les següents equacions de 2n grau:

a) $x^2 - 3x - 10 = 0$ b) $x^2 + 3x - 10 = 0$ c) $x^2 + 7x + 10 = 0$

d) $x^2 - 7x + 10 = 0$ e) $x(-1 + x) = 0$ f) $2x^2 = 50$

g) $x^2 - 5x + 6 = 0$ h) $x^2 - x - 6 = 0$ i) $x^2 + x - 6 = 0$

4. Factoritza les equacions del problema anterior. Així, si les solucions són 2 i 3, escriu:

$5x^2 - 25x + 30 = 0 \Leftrightarrow 5(x - 2)\cdot(x - 3) = 0$. Observa que si el coeficient de x^2 fóra diferent d'1 els factors han d'estar multiplicats pel dit coeficient.

5. Quan el coeficient b és parell ($b = 2B$), pots simplificar la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-2B \pm \sqrt{4B^2-4ac}}{2a} = \frac{-2B \pm 2\sqrt{B^2-ac}}{2a} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2-ac}}{a}$$

Així per resoldre $x^2 - 8x + 12 = 0$ basta dir $x = 4 \pm \sqrt{16-12} = 4 \pm 2$, per tant les seues solucions són 6 i 2.

Utilitza aqueixa expressió per a resoldre:

a) $x^2 - 2x + 8 = 0$ b) $x^2 - 6x - 10 = 0$ c) $x^2 + 4x + 9 = 0$

6. Resol mentalment les equacions següents, després desenvolupa les expressions i utilitza la fórmula general per a tornar a resoldre-les.

a) $(x - 2)\cdot(x - 5) = 0$ b) $(x + 1)\cdot(x - 6) = 0$ c) $(x - 3)\cdot(x - 5) = 0$

d) $(x - 4)\cdot(x + 7) = 0$ e) $(x + 8)\cdot(x - 9) = 0$ f) $(x - 2)\cdot(x + 3) = 0$

7. Determina el nombre de solucions reals que tenen les següents equacions de segon grau calculant el seu discriminant, i després resol-les.

a) $x^2 + 7x - 3 = 0$ b) $5x^2 + 7x - 8 = 0$ c) $2x^2 + 3x + 9 = 0$

d) $2x^2 - 2x + 7 = 0$ e) $3x^2 - 2x - 7 = 0$ f) $4x^2 + x - 5 = 0$

8. Escriu tres equacions de segon grau que no tinguen cap solució real. *Ajuda*: Utilitza el discriminant.

9. Escriu tres equacions de segon grau que tinguen una solució doble.

10. Escriu tres equacions de segon grau que tinguen dues solucions reals i distintes.

11. Escriu tres equacions de segon grau que no tinguen solució real.

12. Resol les següents equacions polinòmiques:

a) $x^5 - 37x^3 + 36x = 0$ b) $x^3 - 2x^2 - 5x = 0$ c) $2x^3 - x^2 - 4x = 0$

d) $x^4 - 5x^2 - 2 = 0$ e) $2x^4 = 32x^2 - 96$ f) $x(x - 3)(2x + 3)(3x - 5) = 0$

13. Resol les següents equacions aplicant un canvi de variable:

a) $x^8 + 81 = 82x^4$ b) $x^4 - 24x^2 + 144 = 0$ c) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$ d) $x^4 + 8x^2 - 9 = 0$

14. Resol les següents equacions racionals:

a) $3x+\frac{2}{x}=1$ b) $\frac{2}{3x}+\frac{5}{6x}=x$ c) $\frac{2}{x-5}+3=\frac{1}{x-2}$ d) $\frac{3x}{2-x}-4x=2$

e) $\frac{3}{x+2}=\frac{2(3x+1)}{x-2}+1$ f) $\frac{3x-1}{x+2}-\frac{5+2x}{2x}=4$ g) $\frac{5x-3}{x+1}-\frac{5+3x}{x-1}=2$

h) $\frac{4}{1-x}=\frac{3}{x}+\frac{1}{x-x^2}$ i) $\frac{5x}{x-2}-\frac{2x}{x^2-4}=\frac{x}{3}$ j) $\frac{1}{3}=\frac{x-4}{6-x}$

15. Resol les següents equacions irracionals:

a) $x=-2+\sqrt{5+4x^2}$ b) $\sqrt{16-x}=x-4$ c) $5+\sqrt{x^2-3x+2}=2x$

d) $\sqrt{x}-\sqrt{x-2}=5$ e) $\sqrt{1-x}-\sqrt{x+1}+2=0$ f) $\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}=3$

g) $5\sqrt{x-2}+1=\frac{2}{\sqrt{x+1}}$ h) $\sqrt{x-2}-\frac{1}{\sqrt{x-2}}=2$ i) $\sqrt{x+1}+\frac{1}{\sqrt{x-2}}=3$

16. Resol les equacions següents: a) $3^{2x}=\frac{1}{81}$ b) $2^{2x}=\frac{1}{1024}$

Sistemes lineals d'equacions

17. Resol els següents sistemes pel mètode de substitució:

a) $\begin{cases} 4x-3y=1 \\ 3x-y=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+4y=5 \\ 2x+5y=7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ x+y=2 \end{cases}$

18. Resol els següents sistemes pel mètode d'igualació:

a) $\begin{cases} -3x+2y=-1 \\ 3x-y=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x-2y=1 \\ 4x-y=2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 7x-4y=10 \\ -8x+3y=-13 \end{cases}$

19. Resol els següents sistemes pel mètode de reducció:

a) $\begin{cases} 7x-2y=5 \\ 3x+2y=5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+5y=20 \\ -x-6y=-14 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-6y=0 \\ -5x+2y=-9 \end{cases}$

20. Resol de forma gràfica els següents sistemes

a) $\begin{cases} x+y=6 \\ x-y=4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x+3y=5 \\ x-7y=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-y=1 \\ -7x+5y=3 \end{cases}$

21. Resol els sistemes següents:

a) $\begin{cases} \dfrac{x-2}{5}-\dfrac{3y-1}{2}=-1 \\ \dfrac{3x+1}{2}+\dfrac{3y-1}{4}=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{3}-\dfrac{5y+7}{6}=-2 \\ 4x+y=5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{5x+1}{2}+\dfrac{2y-5}{3}=4 \\ 3x-2y=1 \end{cases}$

22. Copia al teu quadern i completa els següents sistemes incomplets de manera que es complisca el que es demana en cada un:

Compatible indeterminat

a) $\begin{cases} (\ )x+2y=(\ ) \\ 3x-y=5 \end{cases}$

Incompatible

b) $\begin{cases} -3x+y=1 \\ (\ )x+y=6 \end{cases}$

La seua solució siga $x = 2$ i $y = 1$

c) $\begin{cases} 2x-3y=(\ ) \\ (\ )x+2y=8 \end{cases}$

Incompatible

d) $\begin{cases} 2x-3y=-4 \\ 6x+(\ )y=(\ ) \end{cases}$

La seua solució siga $x = -1$ i $y = 1$

e) $\begin{cases} 4x+(\ )y=-1 \\ (\ )x+y=5 \end{cases}$

Compatible indeterminat

f) $\begin{cases} (\ )x+8y=(\ ) \\ x+2y=-3 \end{cases}$

23. Escriu tres sistemes lineals que siguen incompatibles.

24. Escriu tres sistemes lineals que siguen compatibles indeterminats.

25. Escriu tres sistemes lineals que siguen compatibles determinats.

26. Resol els següents sistemes pel mètode d'igualació i comprova la solució gràficament. De quin tipus és cada sistema?

a) $\begin{cases} -2x+6y=4 \\ 7x-3y=4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y=-3 \\ 3x-3y=-9 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-y=4 \\ -x+3y=-5 \end{cases}$

Problemes

27. En una botiga lloguen bicicletes i tricicles. Si tenen 30 vehicles amb un total de 80 rodes, quantes bicicletes i quants tricicles tenen?

28. Quina és l'edat d'una persona si en multiplicar-la per 12 li falten 64 unitats per a completar el seu quadrat?

29. Descompon 12 en dos factors la suma dels quals siga 7.

30. El triple del quadrat d'un nombre augmentat en el seu doble és 616. Quin nombre és?

31. La suma dels quadrats de dos nombres imparells consecutius és 130. Determina els dits nombres.

32. Van carregats un ase i un mul. L'ase es queixava del pes que portava damunt. El mul li va contestar: Si jo portara un dels teus sacs, portaria el doble de càrrega que tu, però si tu prens un dels meus, els dos portarem la mateixa càrrega. Quants sacs porta cada un?

33. Quin nombre multiplicat per 3 és 28 unitats menor que el seu quadrat?

34. Calcula tres nombres consecutius la suma de quadrats dels quals és 110.

35. D'ací a 2 anys, l'edat de Raquel serà la meitat del quadrat de l'edat que tenia fa 10 anys. Quina edat té Raquel?

36. Dos nombres es diferencien en 3 unitats i la suma dels seus quadrats és 185. Quins són els dits nombres?

37. La suma de dos nombres és 2 i el seu producte és –80, de quins nombres es tracta?

38. Maria vol formar safates d'un quilogram amb caramels i bombons. Si els caramels li costen a 3 euros el quilo i els bombons a 7 euros el quilo, i vol que el preu de cada safata siga de 5 euros, quina quantitat haurà de posar de cada producte? Si vol formar 100 safates, quina quantitat de caramels i de bombons necessitarà?

39. Determina els catets d'un triangle rectangle la suma dels quals és 17 cm i la hipotenusa del dit triangle mesura 13 cm.

40. El producte de dos nombres és 6 i la suma dels seus quadrats 13. Calcula els dits nombres

41. La suma de dos nombres és 12. El doble del primer més el triple del segon és 31. De quins nombres es tracta?

42. A un garatge hi ha 30 vehicles entre cotxes i motos. Si en total hi ha 80 rodes, quants cotxes i motos hi ha al garatge?

43. L'edat actual de Lluis és el doble de la de Miriam. D'ací a 10 anys, les seues edats sumaran 50. Quants anys tenen actualment Lluis i Miriam?

44. A la meua classe hi ha 25 persones. Ens han regalat a cada xica 3 adhesius i a cada xic 2 xapes. Si en total hi havia 65 regals. Quants xics i xiques som a classe?

45. Entre el meu iaio i el meu germà tenen 80 anys. Si el meu iaio té 50 anys més que el meu germà, quina edat té cada un?

46. Tres entrepans i un refresc costen 8 €. Quatre entrepans i dos refrescos costen 12 €. Quin és el preu de l'entrepà i el refresc?

47. A una granja hi ha gallines i ovelles. Si es compten els caps, són 40. Si es compten les potes, són 100. Quants gallines i ovelles hi ha a la granja?

48. Un rectangle té un perímetre de 180 metres. Si el llarg és 10 metres major que l'ample, quines són les dimensions del rectangle?

49. A un portamonedes hi ha bitllets de 5 € i 10 €. Si en total hi ha 10 bitllets i 75 €, quants bitllets de cada valor hi ha al portamonedes?

50. A una baralla entre aranyes i vespes, hi ha 13 caps i 90 potes. Sabent que una aranya té 8 potes i una vespa 6, quantes vespes i aranyes hi ha a la baralla?

51. Una classe té 30 estudiants, i el nombre de xiques és doble que el de xics, quants xics i xiques hi ha?

52. Neus té 9 anys més que el seu germà Daniel, i sa mare té 50 anys. D'ací a 2 anys l'edat de la mare serà doble de la suma de les edats dels seus fills, quines edats tenen?

53. Es mesclen 18 kg d'arròs de 1,3 € el quilogram amb 24 kg d'arròs de preu desconegut, resultant el preu de la mescla de 1,7 € el kg. Quin preu tenia el segon arròs?

54. L'altura d'un trapezi isòsceles és de 3 cm, el perímetre, 28 cm, i els costats inclinats són iguals a la base menor. Calcula l'àrea del trapezi.

55. Dos autobusos ixen, un des de Madrid i l'altre des de Càceres a les 9 del matí. Un va a 80 km/h i l'altre a 100 km/h. A quina hora s'encreuen? A quants km de Madrid estaran?

56. En un concurs es guanyen 40 euros per cada resposta encertada i es perden 80 per cada fallada. Després de 10 preguntes, Carmela porta guanyats 280 euros. Quantes preguntes ha encertat?

57. Paco ha comprat 5 sucs i 4 batuts per 5,7 €, després ha comprat 7 sucs i 5 batuts i li han costat 5,9 €. Calcula els preus d'ambdues coses.

58. Quina fracció és igual a 1 quan es suma 1 al numerador i és igual a 1/2 si es suma 2 al denominador?

59. El quocient d'una divisió és 3 i el residu és 1. Si el divisor disminueix en 1 unitat, el quocient augmenta en 3 i el residu nou és 1. Trobar el dividend i el divisor.

60.

61. Dues amigues van anar a pescar. Al final del dia una va dir: "Si tu em dónes un dels teus peixos, llavors jo tindré el doble que tu". L'altra li va respondre: "Si tu em dónes un dels teus peixos, jo tindré el mateix nombre de peixos que tu". Quants peixos tenia cada una?

62. Calcula les dimensions d'un rectangle sabent que la seua àrea és 35 cm^2 i el perímetre del qual, 24 cm.

63. Un vianant ix d'una ciutat "A" a una velocitat de 4 km/h, i es dirigeix a una ciutat "B" que està a 20 km de la ciutat "A", 30 minuts després ix un ciclista de la ciutat "B" a una velocitat de 20 km/h i es dirigeix cap a "A", quant temps porta el vianant caminant en el moment de la trobada? A quina distància de "B" s'encreuen?

64. Es desitja mesclar oli de 2,7 €/l amb un altre oli de 3,6 €/l de manera que la mescla resulte a 3 €/l. Quants litres de cada classe han de mesclar-se per a obtindre 100 litres de la mescla?

65. En intercanviar les xifres d'un nombre de dues xifres s'obté un altre que és 45 unitats major. Troba el nombre inicial.

66. La diagonal d'un rectangle medeix 25 cm i el perímetre 70 cm. Troba els costats del rectangle.

67. Una tanca rodeja un terreny rectangular de 300 m^2. Si la tanca medeix 70 metres, calcula les dimensions del terreny.

68. Diversos amics faran un regal de bodes que costa 800 euros, que pagaran a parts iguals. A última hora s'apunten sis amics més, amb la qual cosa cada un toca a 30 euros menys. Quants amics eren inicialment? Quant pagarà al final cada un?

69. Les diagonals d'un rombe es diferencien en 2 cm i la seua àrea és de 24 cm^2. Calcula el seu perímetre.

70. Un tren ix de Barcelona cap a Madrid a una velocitat de 200 km/h. Una hora més tard ix un altre tren de Madrid cap a Barcelona a 220 km/h; la distància entre les dues ciutats és de 618 km. Al cap de quant temps s'encreuen els dos trens? A quina distància de Barcelona?

71. Un cotxe ix d'una ciutat "A" a una velocitat de 100 km/h i 30 minuts més tard un altre cotxe ix de "A" en la mateixa direcció i sentit a una velocitat de 120 km/h, quant temps tardarà el segon a atrapar al primer i a quina distància de "A" es produeix la trobada?

AUTOAVALUACIÓ

1. Les solucions de l'equació $2(x - 3) - 3(x^2 - 4) = 1$ són:

a) $x = 10/3 \wedge x = -2$ b) $x = 5/3 \wedge x = -1$ c) $x = 1 \wedge x = -2/3$ d) $x = 3/2 \wedge x = -7/6$

2. Les solucions de l'equació $80 = x(x - 2)$ són:

a) $x = 8 \wedge x = -10$ b) $x = 40 \wedge x = 2$ c) $x = 10 \wedge x = -8$ d) $x = 10 \wedge x = 8$

3. Les solucions de l'equació $\frac{3x-1}{2} - \frac{x+5}{6} = \frac{x^2}{3}$ són:

a) $x = 4 \wedge x = -2$ b) $x = 3 \wedge x = -2$ c) $x = 1/5 \wedge x = 2$ d) $x = 2 \wedge x = 2$

4. Les solucions de l'equació $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$ són:

a) 2, –2, 5, –5 b) 3, –3, 2, –2 c) 1, –1, 4, –4 d) 3, –3, 5, –5

5. Les rectes que formen el sistema $\begin{cases} 7x + 21y = 14 \\ 2x + 6y = 4 \end{cases}$ són:

a) Secants b) Paral·leles c) Coincidents d) S'encreuen

6. La solució del sistema $\begin{cases} 3x - 2y = -1 \\ -2x + 3y = 2 \end{cases}$ és:

a) $x = 2$ i $y = 1$ b) $x = 2$ i $y = 2$ c) $x = 3$ i $y = 2$ d) No té solució

7. La solució del sistema $\begin{cases} 3 + 2x = x - 1 + y \\ 2x - 9y = -43 \end{cases}$ és:

a) $x = 1$ i $y = 5$ b) $x = -2$ i $y = -5$ c) $x = -43/2$ i $y = 0$ d) $x = 3$ i $y = 4$

8. La solució del sistema $\begin{cases} 3x - 2y + z = 2 \\ -2x + 3y + z = 7 \\ 2x - 3y + 2z = 2 \end{cases}$ és:

a) $x = 3, y = 2, z = 1$ b) $x = 2, y = 1, z = 3$ c) $x = -1, y = -2, z = -3$ d) $x = 1, y = 2, z = 3$

9. A una granja, entre gallines i vaques hi ha 120 animals i 280 potes. Quants gallines i vaques hi ha a la granja?

a) 90 gallines i 30 vaques b) 100 gallines i 20 vaques c) 80 gallines i 40 vaques

10. Quina és l'edat d'una persona si en multiplicar-la per 5, li falten 234 unitats per a arribar al seu quadrat?

a) 18 anys b) 20 anys c) 25 anys d) 28 anys

Matemàtiques orientades a les ensenyances acadèmiques:

4tB ESO
Capítol 5:
Inequacions

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Ana Lorente

Revisora: María Molero

Il·lustracions: Paco Moya i Banc d'Imatges d'INTEF

Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

Índex

Resum

Moltes vegades vas a trobar-te amb inequacions. Si treballes amb intervals diràs $a < x < b$, per exemple. Altres vegades el teu problema serà que quelcom ha de ser menor que una certa quantitat. Imagina que volem construir una finestra en la paret d'una habitació de 4 metres de llarga i 2,3 metres d'alta. És impossible que la finestra tinga unes dimensions majors que les de la paret. Per a complicar-ho un poc, imagina ara que la longitud total dels perfils amb què construirem la finestra és de 10 metres. Si la finestra és rectangular i anomenem x a la longitud de la base i y a la de la altura, per ara sabem que $x \le 4$, $y \le 2,3$, $2x + 2y \le 10$. Per ara hi ha moltes solucions que resolen el problema. Però l'arquitecte desitja que la finestra tinga la major llum possible. Tu ja saps que l'àrea màxima l'aconsegueixes amb un quadrat, però… aquesta solució no et serveix perquè el costat hauria de mesurar 2,5 metres i ens eixiríem de la paret. Hem de jugar amb aqueixes desigualtats per a donar una solució al problema.

1. INTERVALS

Recorda que:

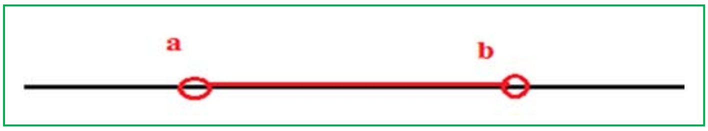
Un interval de nombres reals és el conjunt de nombres corresponents a una part de la recta numèrica, en conseqüència, un interval és un subconjunt del conjunt dels nombres reals.

1.1. Tipus d'intervals

Interval obert: és aquell en què els extrems no formen part del mateix, és a dir, tots els punts de la recta compresos entre els extrems formen part de l'interval, excepte els propis extrems.

En altres paraules $I = (a, b) = \{x \in \Re \mid a < x < b\}$, observa que es tracta de desigualtats estrictes.

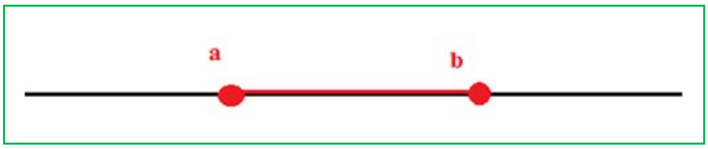
Gràficament, ho representem en la recta real de la manera següent:



Interval tancat: és aquell en què els extrems si formen part del mateix, és a dir, tots els punts de la recta compresos entre els extrems, inclosos aquests, formen part de l'interval.

En altres paraules $I = [a, b] = \{x \in \Re \mid a \le x \le b\}$, observa que ara no es tracta de desigualtats estrictes.

Gràficament:



Interval semiobert: és aquell en què només un dels extrems forma part del mateix, és a dir, tots els punts de la recta compresos entre els extrems, inclòs un d'aquests, formen part de l'interval.

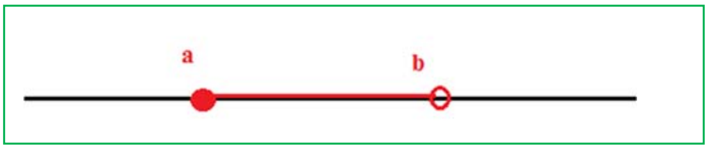
Interval semiobert per l'esquerra, l'extrem inferior no forma part de l'interval, però el superior si, en altres paraules:

$$I = (a, b] = \{x \in \Re \mid a < x \le b\},$$

observa que l'extrem que queda fora de l'interval va associat a una desigualtat estricta.

Interval semiobert per la dreta, l'extrem superior no forma part de l'interval, però l'inferior si, en altres paraules $I = [a, b) = \{x \in \Re \mid a \le x < b\}$, observa que l'extrem que queda fora de l'interval va associat a una desigualtat estricta.

Gràficament:



1.2. Semirectes reals

Semirecta dels nombres positius $S = (0, \infty)$, és a dir, des de zero fins a infinit.

Semirecta dels nombres negatius $S = (-\infty, 0)$, és a dir, des del menys infinit, l'infinit negatiu, fins a zero.

Amb el que tota la recta dels nombres reals és $\Re = (-\infty, \infty)$.

A una semirecta se la pot considerar com un interval infinit.

Activitats proposades

1. Escriu els següents intervals mitjançant conjunts i representa'ls en la recta real:

1. a) $[1, 7)$ b) $(-3, 5)$ c) $(2, 8]$ d) $(-\infty, 6)$

2. Representa en la recta real i escriu en forma d'interval:

2. a) $2 < x < 5$ b) $4 < x$ c) $3 \le x < 6$ d) $x \ge 7$

2. INEQUACIONS

Una desigualtat és una expressió numèrica o algebraica unida per un dels quatre signes de desigualtat: $<, >, \leq, \geq$

Per exemple:

- $-2 < 5$, $4 \geq x + 2$, $x^2 - 5 \geq x$, $x + y \geq 2$.

Una **inequació** és una desigualtat algebraica en què apareixen una o més incògnites.

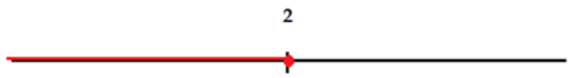
El **grau** d'una inequació és el major dels graus a què estan elevades les seues incògnites.

Així,

- $4 \geq x + 2$ i $x + y \geq 2$ són inequacions de primer grau, mentres que $x^2 - 5 \geq x$ és de segon grau.

Resoldre una inequació consisteix a trobar els valors que la verifiquen. Aquests es denominen **solucions** de la mateixa.

Per exemple:

- $3 \geq x + 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2] \Leftrightarrow$ 

2.1. Inequacions equivalents:

Dues inequacions són **equivalents** si tenen la mateixa solució.

De vegades, per a resoldre una inequació, resulta convenient trobar una altra equivalent més senzilla. Per a això, es poden realitzar les transformacions següents:

- Sumar o restar la mateixa expressió als dos membres de la inequació.

$$3x + 2 < 5 \Leftrightarrow 3x + 2 - 2 < 5 - 2 \Leftrightarrow 3x < 3$$

- Multiplicar o dividir ambdós membres per un nombre positiu.

$$3x < 3 \Leftrightarrow 3x : 3 < 3 : 3 \Leftrightarrow x < 1$$

- Multiplicar o dividir ambdós membres per un nombre negatiu i canviar l'orientació del signe de la desigualtat.

$-x < 2 \Leftrightarrow (-x) \cdot (-1) > 2 \cdot (-1) \Leftrightarrow x > -2 \Leftrightarrow (-2, +\infty) \Leftrightarrow$ 

Activitats proposades

3. Donada la següent inequació $2 + 3x < x + 1$, determina quins dels següents valors són solució de la mateixa:

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -4, 6, -7, 12, -15$$

4. Realitza les transformacions indicades de manera que s'obtinguen equacions equivalents:

a) Sumar 3: $x - 1 > 4$
b) Restar 5: $x - 3 > 7$
c) Multiplicar per 5: $-8x \geq 9$
d) Multiplicar per -5: $-3x \geq 7$
e) Dividir entre 2: $4x < 10$
f) Dividir entre -2: $4x \geq 10$

5. Escriu una inequació que siga certa per a $x = 3$ i falsa per a $x = 3{,}5$.

3. INEQUACIONS AMB UNA INCÒGNITA

3.1. Inequacions de primer grau

Una inequació de primer grau amb una incògnita pot escriure's de la forma:

$$ax > b,\ ax \geq b,\ ax < b \quad \text{o} \quad ax \leq b.$$

Per a resoldre la inequació en la majoria dels casos convé seguir el procediment següent:

1º) **Llevar denominadors**, si n'hi ha. Per a això, es multiplica els dos membres de l'equació pel m.c.m. dels denominadors.

2º) **Llevar els parèntesis**, si n'hi ha.

3º) **Traslladar** els termes amb *x* a un membre i els nombres a l'altre.

4º) **Reduir** termes semblants.

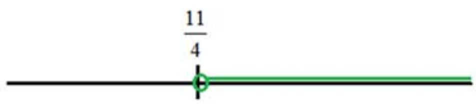
5º) **Aïllar** la *x*.

Exemple:

- $$\frac{x-3}{3}-\frac{(x-7)}{6}>\frac{4-x}{2} \Leftrightarrow \frac{2(x-3)-(x-7)}{6}>\frac{3(4-x)}{6} \Leftrightarrow 2(x-3)-(x-7)>3(4-x)$$

$$\Leftrightarrow 2x-6-x+7>12-3x \Leftrightarrow 2x-x+3x>6-7+12 \Leftrightarrow 4x>11 \Leftrightarrow x>\frac{11}{4}$$

$$x \in \left(\frac{11}{4},+\infty\right)$$



Activitats proposades

6. Resol les següents inequacions i representa la solució a la recta real:

a) $2 + 3x < x + 1$ b) $5 + 2x \leq 7x + 4$ c) $6 + 5x > 6x + 4$ d) $4 + 8x \geq 2x + 9$

7. Resol les següents inequacions i representa la solució a la recta real:

a) $3(2 + 3x) < -(x + 1)$ b) $5(1 + 2x) \leq 2(7x + 4)$ c) $2(6 + 5x) + 3(x - 1) > 2(6x + 4)$

8. Resol les següents inequacions i representa la solució a la recta real:

a) $3 + 4x < x/2 + 2$ b) $4 + 4x/3 \leq 7x/2 + 5$ c) $(5 + 7x)/3 > 8x + 2$ d) $(4 + 8x)5 + 3 \geq (2x + 9)/7$

9. Escriu una inequació la solució de la qual siga l'interval següent:

a) $[1, \infty)$ b) $(-\infty, 5)$ c) $(2, \infty)$ d) $(-\infty, 6)$

10. Calcula els valors de *x* perquè siga possible calcular les arrels següents:

a) $\sqrt{3x-5}$ b) $\sqrt{-x-12}$ c) $\sqrt{3-5x}$ d) $\sqrt{-3x+12}$

3.2. Inequacions de segon grau

Una inequació de segon grau amb una incògnita pot escriure's de la forma:

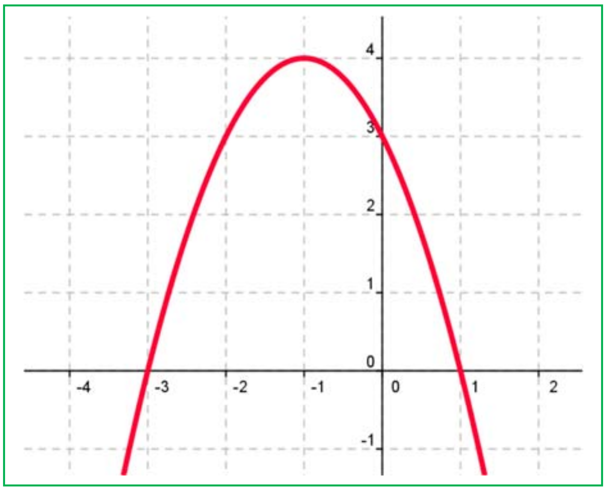
$$ax^2 + bx + c > 0,$$

emprant qualsevol dels quatre signes de desigualtat.

Per resoldre-la, calculem les solucions de l'equació associada, les representem sobre la recta real, quedant per tant la recta dividida en tres, dues o un interval, depenent de que l'equació tinga dos, una o cap solució.

En cada un d'ells, el signe del polinomi es manté constant, per la qual cosa bastarà de determinar el signe que té el dit polinomi per a un valor qualsevol de cada un dels intervals. Per a saber si les solucions de l'equació verifiquen la inequació, bastarà de substituir-la en la mateixa i comprovar-ho.

Exemple:



- Representa gràficament la paràbola $y = x^2 + 4x + 6$ i indica en quins intervals és $x^2 + 4x + 6 > 0$.

Observa en la gràfica que la paràbola pren valors positius entre –3 i 1. La solució de la inequació és:

$$x \in (-3, 1).$$

El punt –3 no és solució, ni tampoc el punt 1, perquè el problema té una desigualtat estricta, >. Si tinguera la desigualtat $\geq$, $x^2 + 4x + 6 \geq 0$ la solució seria:

$$x \in [-3, 1).$$

Si fóra $x^2 + 4x + 6 < 0$, la solució seria: $x \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$.

Si fóra $x^2 + 4x + 6 \leq 0$, la solució seria: $x \in (-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$.

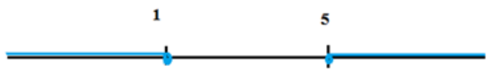
Exemple:

- $x^2 - 6x + 5 \geq 0$

$\Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$ les seues arrels són $x = 1$ i $x = 5$.

	$(-\infty,1)$	1	$(1,5)$	5	$(5,+\infty)$
Signe de $x^2 - 6x + 5$	+		–		+
$x^2 - 6x + 5 \geq 0$	si		no		si

Per tant, la solució és $x \in (-\infty, 1] \cup [5, \infty)$



Activitats proposades

11. Resol les següents inequacions de segon grau:

a) $x^2 – 1 \geq 0$ b) $x^2 – 4 \leq 0$ c) $x^2 – 9 > 0$ d) $x^2 + 4 \geq 0$
e) $2x^2 – 50 < 0$ f) $3x^2 +12 \leq 0$ g) $5x^2 – 45 > 0$ h) $x^2 + 1 \geq 0$

12. Resol les següents inequacions de segon grau:

3. a) $x^2 + x \leq 0$ b) $x^2 – 5x > 0$ c) $x^2 \leq 8x$
4. d) $x^2 \leq 3x$ e) $2x^2 – 3x > 0$ f) $5x^2 – 10x < 0$

13. Resol les següents inequacions de segon grau: $3x^2 – 5x \geq 0$

a) $3x^2 – 27 > 0$
b) $x^2 \leq 0$
c) $2x^2 > 4x$
d) $2x^2 – 8 > 0$
e) $5x^2 + 5x \geq 0$
f) $5x^2 – 5 \leq 0$
g) $x^2 – x > 0$
h)

14. Resol les següents inequacions de segon grau: x2 ⍰ 2x ⍰ 3 ≤ 0

a) $-x^2 – 2x + 8 \geq 0$
b) $x^2 + 9x + 14 > 0$
c) $x^2 – 6x + 9 \leq 0$
d) $–x^2 – 4x – 5 < 0$
e) $x^2 + 8x + 16 > 0$
f) $x^2 + x + 3 \geq 0$
g) $2x^2 – 3x – 5 \leq 0$

15. Resol les següents inequacions de segon grau:

α) ξ2 + ξ – 6 > 0
b) $x^2 – x – 12 \leq 0$
c) $x^2 – x – 20 < 0$
d) $x^2 + 5x – 14 \geq 0$
e) $–2x^2 + 3x + 2 > 0$
f) $3x^2 + 2x – 1 \leq 0$
g) $5x^2 – 7x – 6 \geq 0$
h) $2x^2 +x – 15 < 0$

16. Calcula els valors de x perquè seguisca possible obtindre els arrels següents:

a) $\sqrt{x^2-1}$ b) $\sqrt{-x^2+4}$ c) $\sqrt{x^2+5x+6}$ d) $\sqrt{x^2-5x+6}$

17. Resol les següents inequacions de segon grau:

5. a) $(2x + 5)(2x – 5) \leq 11$ b) $(2x – 5)(4x – 3) – (x – 10)(x – 2) \geq 51$ c) $\frac{3x-2}{x} \leq \frac{5-2x}{x+6}$

3.3. Sistemes d'inequacions

Un sistema d'inequacions de primer grau amb una incògnita és aquell en què l'única variable que intervé en totes les equacions està elevada a un exponent igual a la unitat.

Sistemes de dues equacions, tenen per expressió general:

$$\begin{cases} a_1 x < b_1 \\ a_2 x < b_2 \end{cases}$$, amb qualssevol dels signes <, >, $\leq$ o $\geq$.

Per a resoldre'ls, independentment del nombre d'inequacions que componguen el sistema, es resol cada inequació per separat, i al final es determina la solució com la intersecció de totes elles, és a dir, l'interval que verifiquen totes les inequacions.

Exemple:

$\begin{cases} 2x > 4 \\ x + 5 \geq 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x \leq 5 \end{cases}$, els intervals solució són $\begin{cases} (2,+\infty) \\ (-\infty,5] \end{cases} \Rightarrow (2,+\infty) \cap (-\infty,5] = (2,5]$

Després la solució comuna a ambdós està en la intersecció d'ambdós, és a dir, en $(2,5]$.

Gràficament pot veure's:

Activitats proposades

18. Resoldre els següents sistemes d'inequacions amb una incògnita:

6. a) $\begin{cases} 4x - 3 < 1 \\ x + 6 > 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 6 \leq 0 \\ x - 4 > -5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x + 1 \geq x + 9 \\ x + 5 \leq 2 - 3x \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x - 3 \leq 3x + 7 \\ \frac{2x}{5} - \frac{x}{4} \geq \frac{2}{3} \end{cases}$

19. Indica un nombre positiu que en sumar-li 5 siga menor que 7.

20. Expressa mitjançant una inequació l'àrea d'un quadrat sabent que el seu perímetre és major que el d'un rectangle de costats 3 i 7 cm.

21. Determina les possibles edats de Pepa i de la seua filla Xaro sabent que difereixen en més de 20 anys i que d'ací a 2 anys, la quarta part de l'edat de la mare és menor que l'edat de la filla.

3.4. Inequacions en valor absolut

Una inequació en valor absolut és aquella en què part de la inequació, o tota ella, ve afectada pel valor absolut de la mateixa.

L'expressió general és de la forma emprant $|ax+b| \le c$, qualsevol dels quatre signes de desigualtat.

Per resoldre-la, apliquem la definició de valor absolut d'una quantitat i passem a un sistema de dues equacions la solució del qual és la solució de la inequació.

$$|ax+b| \le c \text{ per definició } \begin{cases} ax+b \le c \\ -ax-b \le c \end{cases}$$

Exemple:

$$|2x-4| \le 12 \Rightarrow \begin{cases} 2x-4 \le 12 \\ -2x+4 \le 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \le 8 \\ x \ge -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-\infty, 8] \\ [-4, +\infty) \end{cases} \Rightarrow [-4, 8] \Rightarrow$$

$$|2x-6| > 10 \Rightarrow \begin{cases} 2x-6 > 10 \\ -2x+6 > 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 8 \\ x < -2 \end{cases}.$$

No hi ha cap x que al mateix temps siga menor que –2 i major que 8, però la solució són els valors que o bé pertanyen a un interval o bé a l'altre: $x \in (-\infty, -2) \cup (8, +\infty)$.

Comprova que, per exemple, $x = 10$ verifica que $2x - 6 = 20 - 6 = 14 > 10$, i que $x = -3$, també ja que $2x - 6 = -6 - 6 = -12$ el valor absolut del qual és major que 10.

Activitats proposades

22. Resol les inequacions següents:

a) $|x + 3| < 2$ b) $|2x + 5| > 1$ c) $|x - 6| \le 2$ d) $|x - 2| \ge 2$

4. INEQUACIONS AMB DUES INCÒGNITES

4.1. Inequacions de primer grau amb dues incògnites

És tota inequació del tipus: $ax + by > c$, amb qualssevol dels signes <, >, ≤ o ≥ . Per a resoldre-les:

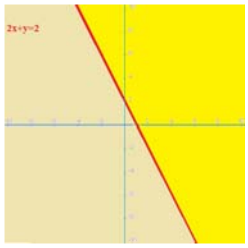
1º) **Representem gràficament** la funció lineal associada $ax + by = c$.

2º) La recta divideix al pla en **dos semiplans**. Utilitzant un punt obtenim qual és el semiplà solució.

3º) La **inclusió o no** en la dita solució de la frontera, depèn de si la desigualtat és estricta o no, respectivament.

Exemple:

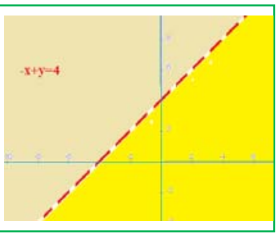
- $2x + y \geq 2$.



Es dibuixa la recta $2x + y = 2$. El punt (0, 0) no verifica la desigualtat, per tant el semiplà solució és l'altre.

El semiplà marcat en groc és la solució del sistema, incloent-hi la recta que es marca de forma contínua, perquè inclou tots els punts que verifiquen la inequació.

Exemple:



- $-x + y < 4$.

Dibuixem la recta $-x + y = 4$. El punt (0, 0) verifica la desigualtat.

El semiplà marcat en groc és la solució del sistema, excloent la recta que es marca de forma discontínua, perquè inclou tots els punts que verifiquen la inequació i els de la recta no ho fan.

Activitats proposades

23. Representa els semiplans següents: a) $x + y < 5$ b) $3x + 2y > 0$ c) $2x + y \leq 7$ d) $x - 3y \geq 5$

4.2. Sistemes d'inequacions de primer grau amb dues incògnites

És un conjunt d'inequacions de primer grau, totes amb les mateixes dues incògnites.

El conjunt solució està format per les solucions que verifiquen al mateix temps totes les inequacions. Al conjunt solució se l'anomena **regió factible**.

Exemple:

- $\begin{cases} x + y \leq 2 \\ x - y \geq -4 \end{cases}$. La superfície marcada en groc és la solució del sistema, incloent les semirectes roig i gris, ja que ambdues desigualtats són no estrictes. És el que es denomina regió *factible*.

Activitats proposades

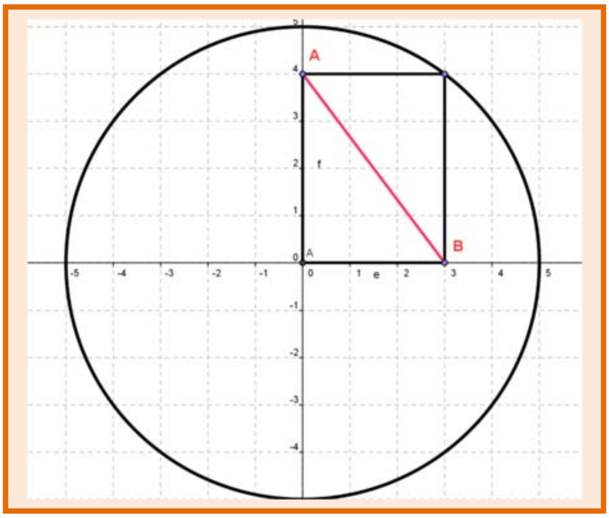
24. Representa la regió factible de cada un dels següents sistemes d'inequacions:

a) $\begin{cases} x - y < 1 \\ x + y \leq 2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x - y \geq 0 \\ y \leq 2 \end{cases}$

CURIOSITATS. REVISTA

Pensa!

Si un cub pesa mig quilo més la meitat del seu propi pes, quant pesa?



Tenim una circumferència de radi 5 cm. Recolzem en ella un rectangle com el de la figura. A tota velocitat, calcula la diagonal *AB* del rectangle.

Aquests acudits són de l'Exposició “*Ríete con las mates*” del grup d'innovació educativa *Pensamiento Matemático* de la Universitat Politècnica de Madrid.

Programació lineal

La **programació lineal** es fonamenta en sistemes d'inequacions i s'utilitza en microeconomia, en administració d'empreses per minimitzar les gastos i maximitzar els beneficis, en asignació de recursos, en planificació de campanyes de publicitat, per solucionar problemes de transport…

Raonament enganyós

Tot nombre més gran que 4, perquè per qualsevol valor de *x*, $(x-4)^2 \geq 0 \Rightarrow$

$(x-4) \cdot (x-4) \geq 0 \Rightarrow$

$x \cdot (x-4) - 4 \cdot (x-4) \geq 0 \Rightarrow$

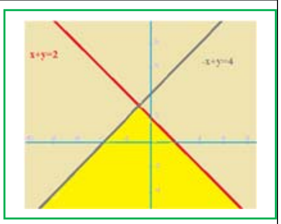
$x \cdot (x-4) \geq 4 \cdot (x-4) \Rightarrow$

$x \geq 4.$

On hem enganyat en aquest raonament?

Observa que hem dividit la desigualtat per $(x-4)$ que per a uns valors de *x* és positiva i no canvia el sentit de la desigualtat, però per a altres és negativa

RESUM

		Exemples
Inequació	Desigualtat algebraica en què apareixen una o més incògnites	$4 \geq x + 2$
Inequacions equivalents	Si tenen la mateixa solució	$4 \geq x + 2 \Leftrightarrow 2 \geq x$
Propietats de les desigualtats	• Sumar o restar la mateixa expressió als dos membres de la desigualtat: $a < b, \forall c \Rightarrow a + c < b + c$ • Multiplicar o dividir ambdós membres per un nombre positiu: $a < b, \forall c > 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$ • Multiplicar o dividir ambdós membres per un nombre negatiu i canviar l'orientació del signe de la desigualtat: $a < b, \forall c < 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$	• $3x + 2 < 5 \Leftrightarrow$ $3x + 2 - 2 < 5 - 2 \Leftrightarrow 3x < 3$ • $3x < 3$ $\Leftrightarrow 3x : 3 < 3 : 3 \Leftrightarrow x < 1$ • $-x < 2 \Leftrightarrow$ $(-x) \cdot (-1) > 2 \cdot (-1) \Leftrightarrow x > -2$ • $3 - x < 2 \Leftrightarrow$ $-x < -1 \Leftrightarrow x > 1$
Inequació de primer grau amb una incògnita	$ax > b,\ ax \geq b,\ ax < b,\ ax \leq b$	$x < 1$
Inequació de segon grau amb una incògnita	$ax^2 + bx + c > 0$	$x^2 - 1 \geq 0$ $\Re = (-\infty,-1] \cup [-1,1] \cup [1,\infty)$ Solució: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
Sistema d'inequacions de primer grau amb una incògnita	$\begin{cases} a_1 x < b_1 \\ a_2 x < b_2 \end{cases}$; $\begin{cases} x > 4 \\ x - 3 \geq 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x \leq -3 \end{cases}$. No hi ha solució	
Inequació en valor absolut	$\lvert ax + b \rvert \leq c$ per definició $\begin{cases} ax + b \leq c \\ -ax - b \leq c \end{cases}$	$\lvert x - 3 \rvert \leq 2 \Leftrightarrow$ $x - 3 \leq 2$ y $-(x - 3) \leq 2 \Leftrightarrow$ $x \leq 5$ y $x \geq 1 \Leftrightarrow [1, 5]$
Inequacions de primer grau amb dues incògnites	$ax + by > c$ Representem gràficament dos semiplans que separa la recta i decidim.	$-x + y < 4$ 
Sistemes d'inequacions de primer grau amb dues incògnites	Representem les regions angulars separades per les dues rectes i decidim quin o quines són solució. $\begin{cases} x + y \leq 2 \\ x - y \geq -4 \end{cases}$	

EXERCICIS I PROBLEMES

1. Representa en la recta real i escriu en forma d'interval:

a) $-\infty \le x \le \frac{3}{2}$

b) $-11 < x < 11$

c) $-2 < x \le \frac{1}{3}$

2. Escriu els següents intervals mitjançant conjunts i representa'ls en la recta real:

a) [2, 6)

b) (–7, 1)

c) (0, 9]

3. Donada la següent inequació $5 + 3x > 2x + 1$, determina si els següents valors són solució de la mateixa:

0, 1, –1, 2, –2, 3, –4, 6, –7, 12, –15

4. Realitza les transformacions indicades de manera que s'obtinguen equacions equivalents:

I. Sumar 4: $x - 2 > 5$

II. Restar 6: $x - 4 > 8$

III. Multiplicar per 6: $5x \ge 10$

IV. Multiplicar per –4: $-2x \ge 8$

V. Dividir entre 2: $6x < 12$

VI. Dividir entre –2: $20x \ge 60$

5. Resol les següents inequacions i representa la solució en la recta real:

a) $2x - 3 \le -5$

b) $x - 2 \le 3x - 5$

c) $12 - x \le -6$

d) $-5x - 3 \le -2x + 9$

e) $2(3x - 3) > 6$

f) $-3(3 - 2x) < -2(3 + x)$

g) $2(x + 3) + 3(x - 1) \le 2(x + 2)$

6. Ressol:

a) $\frac{x}{2} - 6 < 4$

Autora: Ana Lorente
Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

b) $\frac{2x}{3}-3\le -x$

c) $2(3x-2)>3-x$

d) $\frac{2(x+2)}{3}<2x$

e) $\frac{x-4}{4}+2>\frac{x+4}{8}$

f) $\frac{x}{2}-4<x-\frac{x+1}{7}$

7. Escriu una inequació la solució de la qual siga l'interval següent:

a) $(-\infty,-3]$

b) $[4,+\infty)$

c) $(-\infty,5)$

d) $(-2,+\infty)$

8. Calcula els valors de x perquè siga possible calcular les arrels següents:

a) $\sqrt{2x-6}$

b) $\sqrt{-x+5}$

c) $\sqrt{10-5x}$

d) $\sqrt{-6x-30}$

9. Resol les següents inequacions de segon grau:

a) $3x^2 - 75 < 0$

b) $-x^2 + 16 \le 0$

c) $-x^2 + 25 \ge 0$

d) $5x^2 - 80 \ge 0$

e) $4x^2 - 1 > 0$

f) $25x^2 - 4 < 0$

g) $9x^2 - 16 < 0$

h) $36x^2 + 16 \le 0$

10. Resol les següents inequacions de segon grau: $-4x^2 + 5x \le 0$

a) $3x^2 + 7x \ge 0$

b) $2x^2 < 8x$

c) $-3x^2 - 6x \geq 0$

d) $-x^2 + 3x < 0$

e) $-5x^2 - 10x \geq 0$

11. Resol les següents inequacions de segon grau :

a) $3x^2 \leq 0$

b) $8x^2 > 0$

c) $-5x^2 < 0$

d) $9x^2 \geq 0$

12. Resol les següents inequacions de segon grau:

a) $x^2 - 1 \leq 0$

b) $-x^2 - 4x \leq 0$

c) $x^2 + 1 \geq 0$

d) $-3x^2 > 30$

e) $-x^2 - 4 \leq 0$

f) $-3x^2 - 12x \geq 0$

g) $-5x^2 < 0$

h) $x^2 + 9 \geq 0$

13. Resol les següents inequacions de segon grau:

a) $x^2 - 2x > 0$

b) $3x^2 - 3 \leq 0$

c) $5x^2 - 20 \geq 0$

d) $x^2 + 4x > 0$

e) $2x(x - 3) + 1 \geq x - 2$

f) $(x - 2)(x + 3) - x + 5 \leq 2x - 1$

g) $x^2 + 5x + 2 < 2x + 12$

h) $2 - x(x + 3) + 2x \geq 2(x+1)$

14. Calcula els valors de *x* perquè siga possible obtindre les arrels següents: $\sqrt{2x^2+x-3}$

a) $\sqrt{x^2+2x+1}$

b) $\sqrt{-1+2x-x^2}$

c) $\sqrt{x^2+3x+5}$

d) $\sqrt{-x^2+12x-36}$

e) $\sqrt{x^2+6x-27}$

f) $\sqrt{1-4x^2}$

15. Resol les inequacions següents:

a) $2(x-1)^2 > 2$

b) $3(x+1)^2 \leq -12$

c) $-x^2 < 2$

d) $4(x-2)^2 > 1$

e) $-5(x+4)^2 \leq 0$

f) $9(x+1)^2 \leq 81$

16. Resol les inequacions següents: $x(2x-3) - 3(5-x) > 83$

a) $(2x+5)(2x-5) \leq 11$

b) $(7+x)^2 + (7-x)^2 > 130$

c) $(2x-3)(3x-4) - (x-13)(x-4) \geq 40$

d) $(3x-4)(4x-3) - (2x-7)(3x-2) < 214$

e) $8(2-x)^2 > 2(8-x)^2$

f) $\frac{x^2-6}{2} - \frac{x^2+4}{4} \geq 5$

g) $\frac{5x-3}{x} \leq \frac{7-x}{x+2}$

17. Resoldre els següents sistemes d'inequacions amb una incògnita:

a) $\begin{cases} 2x-3 > 0 \\ 5x+1 \leq 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x-4 < 4x+1 \\ -2x+3 < 4x-5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x-3 > x-2 \\ 3x-7 < x-1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{x}{5} < 8 \\ \frac{x}{2} - \frac{4x}{9} < 5 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \frac{x-1}{3} - \frac{x+3}{2} \leq x \\ \frac{4x-2}{4} - \frac{x-1}{3} \geq x \end{cases}$

18. Resol les inequacions següents:

a) $|2x+1| \leq 5$ b) $|-x+1| \geq 2$ c) $|-x+9| \leq 10$ d) $|2x-1| > 4$

e) $|-4x+12| < -6$ f) $\left|\frac{x+1}{2}\right| \leq 10$ g) $|-4x+8| < 3$

19. Representa gràficament la paràbola $y = x^2 - 5x + 6$ i indica en quins intervals és $x^2 - 5x + 6 > 0$, on $x^2 - 5x + 6 < 0$, on $x^2 - 5x + 6 \geq 0$, i on $x^2 - 5x + 6 \leq 0$.

20. Representa els semiplans següents:

a) $x < 0$ b) $y \geq 0$ c) $x + y < 0$ d) $x - y \leq 1$

e) $2x - y < 3$ f) $-x + y \geq -2$ g) $3x - y > 4$

21. Representa la regió factible de cada un dels següents sistemes d'inequacions:

a) $\begin{cases} 2x - y \geq 3 \\ 5x + y \leq 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - y \geq -3 \\ 5x + y \leq 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - y \geq 0 \\ 2x + y > 2 \end{cases}$

22. Quins són els nombres el triple dels quals és major o igual que el seu doble mes 30?

23. Esbrina qual és el menor nombre enter múltiple de 3 que verifica la inequació:

$x + 2 > -3x + 10$.

24. Un cotxe es desplaça per una carretera a una velocitat compresa entre 70 Km/h i 110 Km/h. Entre quins valors oscil·la la distància del cotxe al punt de partida al cap de 4 hores?

25. La tarifa de telefonia de l'empresa A és 25 euros fixos mensuals més 10 cèntims d'euro per minut de conversació, la de l'empresa B és 20 euros fixos més 20 cèntims per minut de conversació. A partir de quants minuts comença a ser més rendible la tarifa de l'empresa A?

26. Una fàbrica paga als seus comercials 20 € per article venut més una quantitat fixa de 600 €. Una altra fàbrica de la competència paga 40 € per article i 400 € fixos. Quants articles ha de vendre un comercial de la competència per a guanyar més diners que el primer?

27. A un venedor d'aspiradores li ofereixen 1000 euros de sou fix més 20 euros per aspiradora venuda. A un altre li ofereixen 800 euros de fixes més 25 euros per aspiradora venuda. Explica raonadament quin sou és millor a partir de quina quantitat d'aspiradores venudes.

28. L'àrea d'un quadrat és menor o igual que 64 $cm.^2$ Determina entre quins valors es troba la mida del costat.

29. El perímetre d'un quadrat és menor que 60 metres. Determina entre quins valors es troba la mida del costat.

30. Un forner fabrica barres i fogasses. La barra de pa porta 200 grams de farina i 5 grams de sal, mentres que la fogassa porta 500 grams de farina i 10 grams de sal. Si disposa de 200 kg de farina i 2 kg de sal, determina quants pans de cada tipus poden fer-se.

AUTOAVALUACIÓ

1. La desigualtat 2 < x < 7 es verifica per als valors:

a) 2, 3 i 6 b) 3, 4’7 i 6 c) 3, 5’2 i 7 d) 4, 5 i 8

2. Té com a solució x = 2 la inequació següent:

a) $x < 2$ b) $x > 2$ c) $x \leq 2$ d) $x + 3 < 5$

3. La solució de la inequació 3,4 + 5,2x – 8,1x < 9,4 + 7,3x és:

a) $x < -10/17$ b) $x > -3/5{,}1$ c) $x > -10/1{,}7$ d) $x < +6/10{,}2$

4. L'equació $x^2 \leq 4$ té de solucions:

a) $x \in (-2, 2)$ b) $x \in [-2, 2]$ c) $x \in (-\infty,-2) \cup (2, +\infty)$ d) $x \in (-\infty,-2] \cup [2, +\infty)$

5. La suma de les edats de dues persones és major de 40 anys i la seua diferència menor o igual que 8 anys. Quin dels següents sistemes d’inequacions ens permet calcular les seues edats?

a) $\begin{cases} x+y>40 \\ y-x\leq 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y\geq 40 \\ y-x<8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y>40 \\ x-y<8 \end{cases}$ *d)* $\begin{cases} x+y<40 \\ x-y\leq 8 \end{cases}$

6. El perímetre d’un rectangle és menor que 14 cm. Si la base és major que el doble de l’altura menys 3 cm, algun valor que verifica és sistema és:

a) base = 4 cm, altura = 1 cm b) base = 2 cm, altura = 3 cm c) base = 6, altura = 4cm

d) base = 9 cm, altura = 2 cm

7. La solució de la inequació $|-x+7| \leq 8$ és:

a) [–1, 15] b) $(-\infty, -1]$ c) (–1, 1) d) $[1, \infty)$

8. Les solucions possibles de $\sqrt{5x-9}$ són:

a) $x < 9/5$ b) $x > 9/5$ c) $x \leq 9/5$ d) $x \geq 9/5$

9. La solució de la inequació $\frac{2x-3}{x-2} < 1$ és:

a) (1, 2) b) $(-\infty, 1)$ c) $x < 1 \cup x > 2$ d) (–1, 2)

10. Una inequació la solució de la qual siga l’interval $(-\infty, 5)$ és:

7. a) $5x - 3x + 2 < 9x + 2$ b) $8x - 3x + 7 < 9x + 2$
8. c) $5x - 3x + 2 < 7x + 27$ d) $5x - 3x - 2 > 7x - 27$

Matemàtiques orientades a les ensenyances acadèmiques:

4t B ESO
Capítol 6: Percentatges

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Nieves Zuasti

Revisors: Javier Rodrigo i María Molero

Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF

Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

Índex

Resum

A la vida quotidiana és interessant saber manejar la proporcionalitat, per exemple per a calcular el descompte d'unes rebaixes, o l'interès que s'ha de pagar per un préstec. En multitud d'ocasions hem d'efectuar repartiments proporcionals, directes o inversos: premis de loteria, herències, mescles, aliatges…

El tant per cent i l'interès és un concepte que apareix constantment als Mitjans de comunicació i en la nostra pròpia economia. En aquest capítol farem una primera aproximació a la denominada "*economia financera*".

La proporcionalitat és una realitat amb la qual convivim al nostre voltant. Per a comprendre-la i utilitzar-la correctament, necessitem conèixer les seues regles. Reconeixerem la proporcionalitat directa o inversa, simple i composta, i realitzarem exercicis i problemes d'aplicació.

INTRODUCCIÓ

A Ester li agrada anar amb bicicleta a l'escola i ha comprovat que a fer aqueix recorregut tarda caminant quatre vegades més. Tenim ací tres magnituds: temps, distància i velocitat.

Recorda que:

Una **magnitud** és una propietat física que es pot mesurar.

A més velocitat es recorre més distància.

Són **magnituds directament proporcionals**.

A més velocitat es tarda menys temps.

Són **magnituds inversament proporcionals**.

Però, atenció, no totes les magnituds són proporcionals. Açò és una confusió molt freqüent. Perquè en créixer una magnitud, l'altra també cresca, encara no es pot assegurar que siguen directament proporcionals. Per exemple, Ester recorda que fa uns anys tardava més a recórrer el mateix camí, però l'edat no és directament proporcional al temps que es tarda. Anem a estudiar-ho amb detall per a aprendre a reconèixer-ho bé.

1. PROPORCIONALITAT DIRECTA

1.1. Magnituds directament proporcionals

Recorda que:

Dues magnituds són **directament proporcionals** quan en multiplicar o dividir la primera per un nombre, la segona queda multiplicada o dividida pel mateix nombre.

Exemple:

- Si tres bosses contenen 15 caramels, set bosses (iguals a les primeres) contindran 35 caramels, perquè:

$$3 \cdot \mathbf{5} = 15 \qquad 7 \cdot \mathbf{5} = 35$$

La **raó de proporcionalitat directa *k*** és el quocient de qualsevol dels valors d'una variable i els corresponents de l'altra:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} = k$$

Exemple:

- A l'exemple anterior la raó de proporcionalitat és 5, perquè: $\frac{15}{3} = \frac{35}{7} = 5$

Exemple:

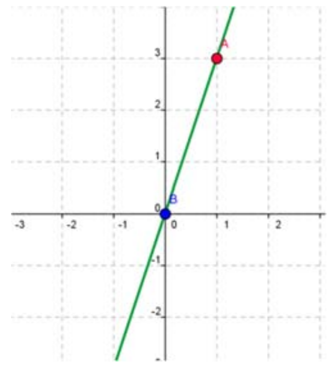
- Copia al teu quadern la següent taula, calcula la raó de proporcionalitat i completa els buits que falten sabent que és una taula de proporcionalitat directa:

Magnitud A	18	1,5	60	2,7	0,21
Magnitud B	6	0,5	20	0,9	0,07

La raó de proporcionalitat és $\boldsymbol{k} = \frac{18}{6} = 3$. Per tant tots els valors de la magnitud B són tres vegades menors que els de la magnitud A: $\frac{18}{6} = \frac{1,5}{0,5} = \frac{60}{20} = \frac{2,7}{0,9} = \frac{0,21}{0,07} = 3$.

Observa que:

Si es representen gràficament els punts d'una proporcionalitat directa, tots ells estan sobre una **recta** que passa per l'origen de coordenades. La raó de proporcionalitat és el **pendent** de la recta. La funció lineal y = *kx* es denomina també **funció de proporcionalitat directa**.



Recta y = 3x

Exemple:

- Equació de la recta de l'exemple anterior

L'equació de la recta és y=*3x*. Comprovem que tots els punts la verifiquen:

18 = 3·6; 1,5 = 3·0,5; 60 = 3·20; 2,7 = 3·0,9; 0,21 = 3·0,07.

Reducció a la unitat

Si hem d'usar la mateixa equació de la recta en distintes ocasions el problema pot simplificar-se amb la **reducció a la unitat**. Si *x* = 1 aleshores *y* = ***k***.

Exemple:

- Per a celebrar el seu aniversari Josep ha comprat 3 botelles de refresc que li han costat 4,5 €. Pensa que no seran suficients i decideix comprar 2 més. Calcula el preu de les 2 botelles utilitzant la reducció a la unitat.

  $y = \frac{4,5}{3}x \Rightarrow y = \frac{4,5}{3}\cdot 1 \Rightarrow$ k = 1,5 $\Rightarrow$ *y* = 1,5*x*. Ara podem calcular el preu de qualsevol nombre de botelles. En el nostre cas *x* = 2, per tant *y* = 1,5·2 = 3 €.

Activitats proposades

1. Copia al teu quadern i completa la taula de proporció directa. Calcula la raó de proporcionalitat. Representa gràficament els punts. Determina l'equació de la recta.

Litres	12	7,82		1		50
Euros	36		9,27		10	

2. Calcula els termes que falten per a completar les proporcions:

a) $\frac{24}{100} = \frac{30}{x}$ b) $\frac{x}{80} = \frac{46}{12}$ c) $\frac{3'6}{12'8} = \frac{x}{60}$

3. Si l'AVE tarda una hora i trenta-cinc minuts a arribar des de Madrid a València, que disten 350 quilòmetres, quant tardarà a recórrer 420 km?

1.2. Proporcionalitat simple directa

Acabem de veure que la proporcionalitat simple directa consisteix a trobar l'equació d'una recta que passa per l'origen: $y = kx$.

Exemple:

- Vint caixes pesen 400 kg, quants kg pesen 7 caixes?

Busquem l'equació de la recta: $y = kx \Rightarrow 400 = k20 \Rightarrow k = 400/20 = 20 \Rightarrow y = 20x$ Equació de la recta

Si $x = 7$ aleshores $y = 20 \cdot 7 = 140$ kg.

Activitats proposades

4. En una recepta ens diuen que per a fer una melmelada de fruites del bosc necessitem un quilogram de sucre per cada dos quilograms de fruita. Volem fer 7 quilograms de melmelada, quants quilograms de sucre i quants de fruita hem de posar?

5. L'altura d'una torre és proporcional a la seua ombra (a una mateixa hora). Una torre que medeix 12 m té una ombra de 25 m. Quina altura tindrà una altra torre l'ombra de la qual mesure 43 m?

6. Una font ompli una garrafa de 12 litres en 8 minuts. Quant temps tardarà a omplir un bidó de 135 litres?

7. Hem gastat 12 litres de gasolina per a recórrer 100 km. Quants litres necessitarem per a una distància de 1374 km?

8. El meu cotxe hi ha gasta 67 litres de gasolina a recórrer 1250 km, quants litres gastarà en un viatge de 5823 km?

9. Un llibre de 300 pàgines pesa 127 g. Quant pesarà un llibre de la mateixa col·lecció de 420 pàgines?

10. Dos pantalons ens van costar 28 €, quant pagarem per 7 pantalons?

1.3. Percentatges

El percentatge o tant per cent és la raó de proporcionalitat de major ús en la vida quotidiana.

El **tant per cent** és una raó amb denominador 100.

Exemple:

- 37 % = $\frac{37}{100}$. L'equació de la recta és: $y = \frac{37}{100}x$.

Els percentatges són proporcions directes.

Exemple:

- La població de Zarzalejo era en 2013 de 7380 habitants. En 2014 s'ha incrementat en un 5 %. Quina és la seua població a final de 2014?

$y = \frac{7380}{100}x$, pel que el 5 % de 7392 és $y = \frac{7380}{100} \cdot 5 = 369$ habitants. La població s'ha incrementat en 369 habitants, doncs al final de 2014 la població serà de: 7380 + 369 = 7749 habitants.

Activitats proposades

11. Expressa en tant per cent les proporcions següents:

a) $\frac{27}{100}$ b) "1 de cada 2" c) $\frac{52}{90}$

12. Si sabem que els alumnes rossos d'una classe són el 16 % i hi ha 4 alumnes rossos, quants alumnes hi ha en total?

13. Un dipòsit de 2000 litres de capacitat conté en aquest moment 1036 litres. Què tant per cent representa?

14. La proporció dels alumnes d'una classe de 4t d'ESO que han aprovat Matemàtiques va ser del 70 %. Sabent que a la classe hi ha 30 alumnes, quants han suspès?

1.4. Increment percentual. Descompte percentual. Percentatges encadenats

Increment percentual

Exemple:

- L'exemple anterior pot resoldre's mitjançant **increment percentual**: 100 + 5 = 105 %

$y = \frac{7380}{100}x$, per la qual cosa el 105 % de 7392 és $y = \frac{7380}{100} \cdot 105 = 7749$ habitants.

Descompte percentual

- A les rebaixes a tots els articles a la venda els apliquen un 30 % de descompte. Calcula el preu dels què apareixen a la taula:

Preu sense descompte	75 €	159 €	96 €	53 €
Preu en rebaixes	52,50 €	111,3 €	67,2 €	37,1 €

Ja que ens descompten el 30 %, pagarem el 70 %. Per tant: $k = \frac{70}{100} = 0,7$ és la raó directa de proporcionalitat que aplicarem als preus sense descompte per a calcular el preu rebaixat.

Per tant: $y = 0,7\,x$.

Percentatges encadenats

Moltes vegades cal calcular diversos increments percentuals i descomptes percentuals. Podem **encadenar-los**. En aquests casos el més senzill és calcular, per a cada cas, el tant per u, i anar-los multiplicant.

Exemple:

- En unes rebaixes s'aplica un descompte del 30 %, i l'IVA del 21 %. Quant ens costarà un article que sense rebaixar i sense aplicar-li l'IVA costava 159 euros? Quin és el verdader descompte?

En un descompte del 30 % hem de pagar un 70 % ((100 – 30) %), pel que el tant per u és de 0,7. Per l'increment del preu per l'IVA del 21 % ((100 + 21) %) el tant per u és de 1,21. Encadenant el descompte amb l'increment tindrem un índex o tant per u de 0,7 · 1,21 = 0,847, que apliquem al preu de l'article, 159 €, 0,847 · 159 = 134,673 € ≈ 134,67 €. Per tant ens han descomptat 24,33 euros.

Si estem pagant el 84,7 % el verdader descompte és el 15,3 %.

Exemple:

- Calcula el preu inicial d'un televisor, que després de pujar-lo un 20 % i rebaixar-lo un 20 % ens ha costat 432 €. Quin ha sigut el percentatge de variació?

En pujar el preu un 20 % estem pagant el 120 % i el tant per u és 1,2. En el descompte del 20 % estem pagant el 80 % i el tant per u és 0,8. En total amb les dues variacions successives el tant per u és de 0,8 · 1,2 = 0,96, i el preu inicial és 432 : 0,96 = 450 €. Preu inicial = 450 €.

El tant per u 0,96 és menor que 1 per tant hi ha hagut un descompte perquè hem pagat el 96 % del valor inicial i aquest descompte ha sigut del 4 %.

Activitats proposades

15. Una fàbrica ha passat de tindre 130 obrers a tindre 90. Expressa la disminució en percentatge.

16. Calcula el preu final d'un llavaplats que costava 520 € més un 21 % d'IVA, al què se li ha aplicat un descompte sobre el cost total del 18 %.

17. Còpia al teu quadern i completa:

a) D'una factura de 1340 € he pagat 1200 €. M'han aplicat un ……… % de descompte

b) M'han descomptat el 9 % d'una factura de .... € i he pagat 280 €.

c) Per pagar al comptat un moble m'han descomptat el 20 % i m'he estalviat 100 €. Quin era el preu del moble sense descompte?

18. El preu inicial d'un electrodomèstic era 500 euros. Primer va pujar un 10 % i després va abaixar un 30 %. Quin és el seu preu actual? Quin és el percentatge d'increment o descompte?

19. Una persona ha comprat accions de borsa al mes de gener per un valor de 10 000 €. De gener a febrer aquestes accions han augmentat un 8 %, però al mes de febrer han disminuït un 16 % Quin és el seu valor a finals de febrer? En quin percentatge han augmentat o disminuït?

20. El preu inicial d'una enciclopèdia era de 300 € i al llarg del temps ha patit variacions. Va pujar un 10%, després un 25 % i després va abaixar un 30 %. Quin és el seu preu actual? Calcula la variació percentual.

21. En una botiga de venda per Internet s'anuncien rebaixes del 25 %, però després carreguen en la factura un 20 % de gastos d'enviament. Quin és el percentatge d'increment o descompte? Quant haurem de pagar per un article que costava 30 euros? Quant costava un article pel qual hem pagat 36 euros?

1.7. Escales

En plans i mapes trobem anotades en la seua part inferior l'escala a la què estan dibuixats.

L'**escala** és la proporció entre les mesures del dibuix i les mesures a la realitat.

Exemple:

- S'expressa de la forma 1 : 2000 que significa que 1 cm del pla correspon a 2000 cm = 20 m a la realitat.

Principals calçades romanes

Per tant si *"y"* són les mesures a la realitat, i *"x"* ho són al pla, aquesta escala es pot escriure amb l'equació de la recta:

$$y = 2000x.$$

Les escales també es representen en forma gràfica, mitjançant una barra dividida en segments d'1 cm de longitud

Escalímetre

Exemple:

0 20 40 60 80 100 m

Aquesta escala identifica cada centímetre del mapa amb 20 m a la realitat és a dir 1 : 2000, $y = 2000x$.

En estudiar la semblança tornarem a insistir a les escales.

Un instrument senzill per a realitzar treballs a escala és el *pantògraf* que facilita copiar una imatge o reproduir-la a escala.

El pantògraf és un paral·lelogram articulat que, en variar la distància entre els punts d'articulació, permet obtindre diferents grandàries de dibuix sobre un model donat.

Activitats proposades

22. La distància real entre dos pobles és 28,6 km. Si al mapa estan a 7 cm de distància. A quina escala està dibuixat?

23. Quina alçària té un edifici si la seua maqueta construïda a escala 1 : 200 presenta una alçària de 8 cm?

24. Dibuixa l'escala gràfica corresponent a l'escala 1 : 60000.

25. Les dimensions d'una superfície rectangular al pla són 7 cm i 23 cm. Si està dibuixat a escala 1 : 50, calcula les seues mesures reals.

2. PROPORCIONALITAT INVERSA

2.1. Magnituds inversament proporcionals

Recorda que:

Dues magnituds són **inversament proporcionals** quan en multiplicar o dividir la primera per un nombre, la segona queda dividida o multiplicada pel mateix nombre.

Exemple:

- Quan un automòbil va a 90 km/h, tarda quatre hores a arribar al seu destí. Si fóra a 120 km/h tardaria 3 hores a fer el mateix recorregut.

$$90 \cdot 4 = 120 \cdot 3$$

La velocitat i el temps són magnituds inversament proporcionals.

La **raó de proporcionalitat inversa** k' és el producte de cada parell de magnituds: $k' = a \cdot b = a' \cdot b'$

Exemple:

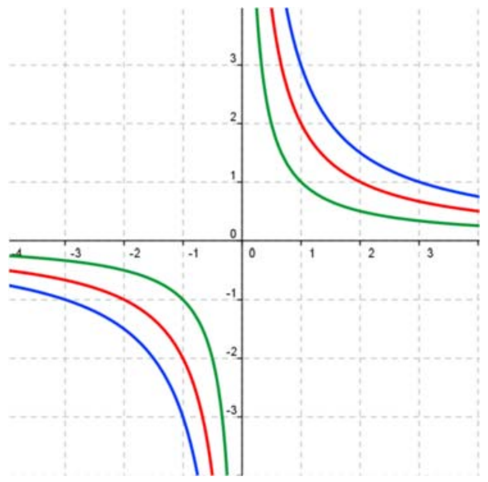
- Copia la taula al teu quadern, calcula la raó de proporcionalitat inversa i completa la taula de proporcionalitat inversa:

a	18	150	1,5	3600	100
b	50	6	600	0,25	9

$k' = 18 \cdot 50 = 900$. Comprova que totes les columnes donen aquest resultat.

Observa que:

Si es representen gràficament els punts d'una proporcionalitat inversa, tots ells estan sobre la gràfica d'una **hipèrbola** d'equació $y = \frac{k'}{x}$. La raó de proporcionalitat inversa és la **constant k'**. A aquesta hipèrbola $y = \frac{k'}{x}$ també se la denomina **funció de proporcionalitat inversa**.



Hipèrbola: $y = 3/x$; $y = 2/x$; $y = 1/x$

Exemple:

- Equació de la hipèrbola de l'exemple anterior

La hipèrbola és $y = \frac{900}{x}$. Comprovem que tots els punts verifiquen l'equació de la dita hipèrbola:

$y = \frac{900}{18} = 50$; $y = \frac{900}{150} = 6$; $y = \frac{900}{1,5} = 600$; $y = \frac{900}{3600} = 0,25$; $y = \frac{900}{100} = 9$.

Activitats proposades

26. Per a enrajolar un recinte, 7 obrers han dedicat 80 hores de treball. Completa al teu quadern la següent taula i determina la constant de proporcionalitat. Escriu l'equació de la hipèrbola.

Nombre d'obrers	1	5	7	12			60
Hores de treball			80		28	10	

2.2. Proporcionalitat simple inversa

Per a calcular el quart terme entre dues magnituds inversament proporcionals calculem la constant de proporcionalitat i escrivim l'equació de la hipèrbola

Exemple:

- Quatre persones realitzen un treball en 18 dies, quantes persones necessitarem per a realitzar el mateix treball en 8 dies?

$$k' = 4 \cdot 18 = 8 \cdot y \Rightarrow y = \frac{18}{8} \cdot 4 = 9 \text{ persones.}$$

Activitats proposades

27. En tallar una quantitat de fusta hem aconseguit 5 panells de 1,25 m de llarg. Quants panells aconseguirem si ara tenen 3 m de llarg?

28. En un hort ecològic s'utilitzen 5000 kg d'un tipus d'adob d'origen animal que se sap que té un 12 % de nitrats. Es canvia el tipus d'adob, que ara té un 15 % de nitrats, quants quilograms es necessitaran del nou adob perquè les plantes reben la mateixa quantitat de nitrats?

29. Aqueix mateix hort necessita 200 caixes per a envasar les seues albergines en caixes d'un quilogram. Quantes caixes necessitaria per a envasar-les en caixes de 1,7 quilograms? I per a envasar-les en caixes de 2,3 quilograms?

30. Per a envasar una certa quantitat de llet es necessiten 8 recipients de 100 litres de capacitat cada u. Volem envasar la mateixa quantitat de llet emprant 20 recipients. Quina haurà de ser la capacitat d'aqueixos recipients?

31. Copia al teu quadern la taula següent, calcula la raó de proporcionalitat i completa la taula de proporcionalitat inversa. Escriu l'equació de la hipèrbola.

Magnitud A	40	0,07		8	
Magnitud B	0,25		5		6,4

2.3. Proporcionalitat composta

Una proporció en què intervenen més de dues magnituds lligades entre si per relacions de proporcionalitat directa o inversa es denomina **proporció composta**.

Per a resoldre un problema de proporcionalitat composta, el reduirem a un problema simple de proporcionalitat directa o inversa.

Exemple:

- A l'institut 30 alumnes de 4t A d'ESO han anat a esquiar i han pagat 2700 € per 4 nits d'hotel; 25 alumnes de 4t B d'ESO han guanyat a la loteria 3375 € i decideixen anar al mateix hotel. Quantes nits d'allotjament poden pagar?

Tenim tres magnituds: el nombre d'alumnes, la quantitat en € què paguen per l'hotel i el nombre de nits d'hotel. Observa que a més alumnes es paga més diners, per tant aquestes magnituds són directament proporcionals. A més nits d'hotel es paga més diners, per la qual cosa aquestes altres dues magnituds són també directament proporcionals. Però per a una quantitat de diners fixa, a més alumnes poden anar menys nits, per tant el nombre d'alumnes és inversament proporcional al nombre de nits d'hotel.

El millor mètode és reduir-lo a un problema de proporcionalitat simple, per a això obtenim el preu del viatge per alumne.

Cada alumne de 4t A ha pagat 2700 : 30 = 90 € per 4 nits d'hotel. Per tant ha pagat per una nit 90/4 = 22,5 €. L'equació de proporcionalitat directa és: $y = 22{,}5x$, on "y" és el que paga cada alumne i "*x*" el nombre de nits.

Cada alumne de 4t B compta amb 3375 : 25 = 135 € per a passar *x* nits d'hotel, per la qual cosa 135 = 22,5x, per tant poden estar 6 nits.

Activitats proposades

32. Sis persones realitzen un viatge de 12 dies i paguen en total 40800 €. Quant pagaran 15 persones si el seu viatge dura 4 dies?

33. Si 16 peretes originen un gasto de 4500 €, estant enceses durant 30 dies, 5 hores diàries, quin gasto originarien 38 peretes en 45 dies, enceses durant 8 hores diàries?

34. Per a alimentar 6 vaques durant 17 dies es necessiten 240 quilos d'aliment. Quants quilos d'aliment es necessiten per a mantindre 29 vaques durant 53 dies?

35. Si 12 hòmens construeixen 40 m de tàpia en 4 dies treballant 8 hores diàries, quantes hores diàries han de treballar 20 hòmens per a construir 180 m en 15 dies?

36. Amb una quantitat de pinso podem donar de menjar a 24 animals durant 50 dies amb una ració d'1 kg per a cada u. Quants dies podrem alimentar a 100 animals si la ració és de 800 g?

37. Per a omplir un dipòsit s'obrin 5 aixetes que llancen 8 litres per minut i tarden 10 hores. Quant temps tardaran 7 aixetes semblants que llancen 10 litres per minut?

38. Si 4 màquines fabriquen 2400 peces funcionant 8 hores diàries. Quantes màquines s'han de posar a funcionar per a aconseguir 7000 peces durant 10 hores diàries?

3. REPARTIMENTS PROPORCIONALS

Quan es realitza un repartiment en parts desiguals s'ha d'establir prèviament si es tracta d'un repartiment proporcional directe o invers.

3.1. Repartiment proporcional directe

En un repartiment proporcional directe li correspondrà més a qui té més parts.

Activitat resolta

- Tres amics han de repartir-se els 400 € que han guanyat en una competició d'acord amb els punts que cada un ha obtingut. El primer va obtindre 10 punts, el segon 7 i el tercer 3 punts.

  El repartiment directament proporcional s'inicia sumant els punts: 10 + 7 + 3 = 20 punts.

  Calculem el premi per punt: 400 : 20 = 20 €.

  El primer obtindrà 20 · 10 = 200 €.

  El segon: 20 · 7 = 140 €.

  El tercer: 20 · 3 = 60 €.

  La suma de les tres quantitats és 200 + 140 + 60 = 400 €, la quantitat total a repartir.

Com es tracta d'una proporció, s'ha d'establir la regla següent:

Siga N (en l'exemple anterior 400) la quantitat a repartir entre quatre persones, a qui els correspondrà A, B, C, D de manera que N = A + B + C + D. Aquestes quantitats són proporcionals a la seua participació en el repartiment: *a, b, c, d*.

a + *b* + *c* + *d* = *n* és el nombre total de parts en què ha de distribuir-se N.
N : *n* = *k* que és la quantitat que correspon a cada part. En l'exemple anterior: *k* = 400 : 20 = 20.
El repartiment finalitza multiplicant *k* per *a*, *b*, *c* i *d*, obtenint-se així les quantitats corresponents A, B, C i D.

És a dir, ara l'equació de la recta és: $y = \frac{A+B+C+D}{a+b+c+d}x = \frac{N}{n}x$

Activitats proposades

39. Cinc persones comparteixen loteria, amb 10, 6, 12, 7 i 5 participacions respectivament. Si han obtingut un premi de 18000 € Quant correspon a cada un?

40. Tres socis han invertit 20000 €, 34000 € i 51000 € enguany en la seua empresa. Si els beneficis a repartir a final d'any ascendeixen a 31500€, quant correspon a cada un?

41. La Unió Europea ha concedit una subvenció de 48.000.000 € per a tres estats de 60, 45 i 10 milions d'habitants, com ha de repartir-se els diners, sabent que és directament proporcional al nombre d'habitants?

42. Es reparteix una quantitat de diners, entre tres persones, directament proporcional a 2, 5 i 8. Sabent que a la segona li correspon 675 €. Trobar el que li correspon a la primera i tercera.

43. Una iaia reparteix 100 € entre els seus tres néts de 12, 14 i 16 anys d'edat; proporcionalment a les seues edats. Quant correspon a cada un?

3.2. Repartiment proporcional invers

En un repartiment proporcional invers rep més qui menys parts té.

Siga N la quantitat a repartir i *a*, *b* i *c* les parts. En ser una proporció inversa, el repartiment es realitza als seus inversos 1/*a*, 1/*b*, 1/*c*.

Per a calcular les parts totals, reduïm les fraccions a comú denominador, per a tindre un patró comú, i prenem els numeradors que són les parts que corresponen a cada u.

Activitat resolta

- Repartir 4000 € de forma inversament proporcional a 12 i 20.

Calculem el total de les parts: 1/12 + 1/20 = **5**/60 + **3**/60 = **8**/60.

4000 : 8 = 500 € cada part.

500 · 5 = 2500 €.

500 · 3 = 1500 €.

En efecte, 2500 + 1500 = 4000.

Activitats proposades

44. En un concurs s'acumula puntuació de forma inversament proporcional al nombre d'errors. Els quatre finalistes, amb 10, 5, 2 i 1 error, han de repartir-se els 2500 punts. Quants punts rebrà cada un?

45. En el testament, el iaio estableix que vol repartir entre els seus néts 4500 €, de manera proporcional a les seues edats, 12, 15 i 18 anys, cuidant que la major quantitat siga per als néts menors, quant rebrà cada un?

46. Es reparteix diners inversament proporcionals a 5, 10 i 15; al menor li corresponen 3000 €. Quant correspon als altres dos?

47. Tres germans ajuden al manteniment familiar entregant anualment 6000 €. Si les seues edats són de 18, 20 i 25 anys i les aportacions són inversament proporcionals a l'edat, quant aporta cada un?

48. Un pare va amb els seus dos fills a una fira i en la tómbola guanya 50 € que els reparteix de forma inversament proporcional a les seues edats, que són 15 i 10 anys. Quants euros ha de donar a cada un?

3.3. Mescla i aliatges

Les **mescles** que estudiarem són el resultat final de combinar distintes quantitats de productes, de distints preus.

Activitat resolta

- Calcula el preu final del litre d'oli si mesclem 13 litres a 3,5 € el litre, 6 litres a 3,02 €/l i 1 litre a 3,9 €/l.

  Calculem el cost total dels distints olis:

  $$13 \cdot 3{,}5 + 6 \cdot 3{,}02 + 1 \cdot 3{,}9 = 67{,}52 \text{ €}.$$

  I el nombre total de litres: 13 + 6 + 1 = 20 l.

  El preu del litre de mescla valdrà 67,52 : 20 = 3,376 €/l.

Activitats proposades

Grans de cafè

49. Calcula el preu del quilo de mescla de dos tipus de cafè: 3,5 kg a 4,8 €/kg i 5,20 kg a 6 €/kg.

50. Quants litres de suc de pomelo de 2,40 €/l han de mesclar-se amb 4 litres de suc de taronja a 1,80 €/l per a obtindre una mescla a 2,13 €/l?

Un **aliatge** és una mescla de metalls per a aconseguir un determinat producte final amb millors propietats o aspecte.

Els aliatges es realitzen en joieria mesclant metalls preciosos, or, plata, platí, amb coure o rodi. Segons la proporció de metall preciós, es diu que una joia té més o menys llei**.**

La **llei** d'un aliatge és la relació entre el pes del metall més valuós i el pes total.

Exemple:

- Una joia de plata de 50 g de pes conté 36 g de plata pura. Quina és la seua llei?

$$\textbf{Llei} = \frac{pes\,metall\,preciós}{pes\,total} = \frac{36}{50} = 0{,}72$$

Una altra forma de mesurar el grau de puresa d'una joia és el **quirat**.

Un quirat d'un metall preciós és 1/24 de la massa total de l'aliatge.

Perquè una joia siga d'or pur ha de tindre 24 quirats.

Exemple:

Una joia d'or de 18 quirats pesa 62 g. Quina quantitat del seu pes és d'or pur?

$$\text{Pes en or} = \frac{62 \cdot 18}{24} = 46{,}5 \text{ g}.$$

El terme ***quirat*** ve de la paraula grega *"keration" (garrofa)***.** Aquesta planta, de llavors molt uniformes, s'utilitzava per a pesar joies i gemmes en l'antiguitat.

Activitats proposades

51. Calcula la llei d'una joia sabent que pesa 87 g i conté 69 g d'or pur.

Quants quirats té, aproximadament, la joia anterior?

4. INTERÉS

4.1. Càlcul d'interès simple

L'interès és el benefici que s'obté en dipositar un capital en una entitat financera a un determinat tant per cent durant un temps.

En **l'interès simple**, al capital *C* dipositat se li aplica un tant per cent o rèdit *r* anualment.

El càlcul de l'interès obtingut al cap de diversos anys es realitza mitjançant la fórmula:

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100}$$

Si el temps que es diposita el capital són mesos o dies, l'interès es calcula dividint l'expressió anterior entre 12 mesos o 360 dies (any comercial).

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{1200} \quad \text{temps en mesos} \qquad I = \frac{C \cdot r \cdot t}{36000} \quad \text{temps en dies}$$

Activitats resoltes

- Dipositem 4000 € al 2 % anual. Quants diners tindrem al cap de 30 mesos?

Calculem l'interès simple:

$$I = \frac{4000 \cdot 2 \cdot 30}{1200} = 200 \text{ €}$$

Sumem capital i interessos:

$$4000 + 200 = 4200 \text{ €}$$

Activitats proposades

52. Calcula l'interès simple que produeixen 10.000 € al 3 % durant 750 dies.

53. Quin capital cal dipositar al 1,80 % durant 6 anys per a obtindre un interès simple de 777,6 €?

4.2. Interès compost

Des d'un altre punt de vista, l'interès és el percentatge que s'aplica a un préstec al llarg d'un temps, incrementant la seua quantia a l'hora de tornar-lo.

Aquest tipus d'interès no es calcula com l'interès simple sinó que s'estableix el que s'anomena "*capitalització*".

L'interès compost s'aplica tant per a calcular el capital final d'una inversió, com la quantitat a tornar per a amortitzar un préstec.

Normalment els préstecs es tornen mitjançant quotes mensuals que s'han calculat a partir dels interessos generats pel préstec al tipus d'interès convingut.

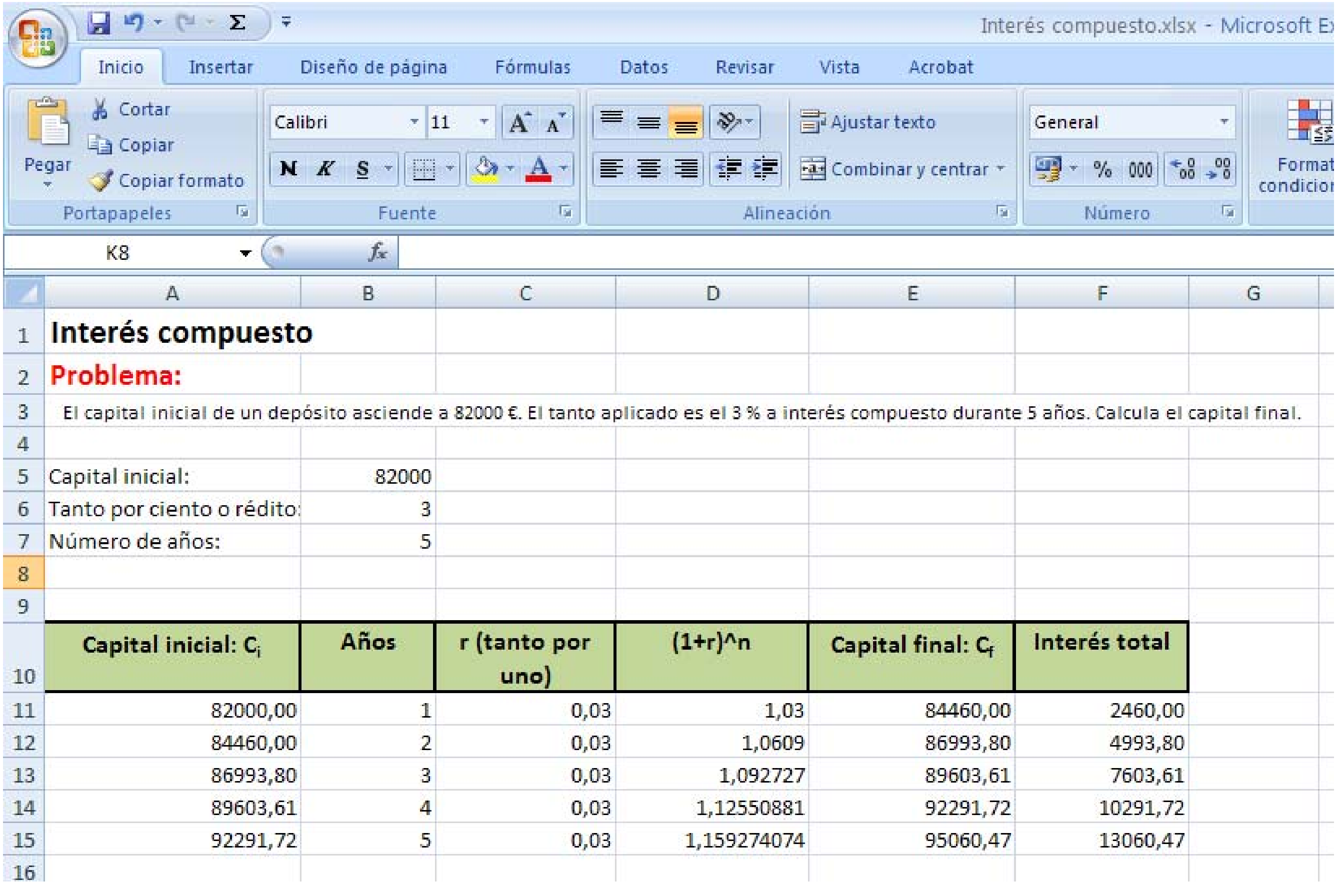
La capitalització composta planteja que, a mesura que es van generant interessos, passen a formar part del capital inicial, i aqueix nou capital produirà interessos als períodes successius.

Si es tracta d’un dipòsit bancari, el capital final es calcularà seguint el procediment següent:

C_i (capital inicial)	1 any	*i* (tant per u)	$C_f = C_i \cdot (1 + i)$
$C_i \cdot (1 + i)$	2 anys	$C_i \cdot (1 + i) \cdot (1 + i)$	$C_f = C_i \cdot (1 + i)^2$
$C_i \cdot (1 + i)^2$	3 anys	$C_i \cdot (1 + i)^2 \cdot (1 + i)$	$C_f = C_i \cdot (1 + i)^3$
…………..	……….	……………	…………….
	n anys		$C_f = C_i \cdot (1 + i)^n$

Al cap de *n* anys, el capital final serà $\mathbf{C_f = C_i \cdot (1 + i)^n}$.

Per a fer els càlculs pots utilitzar un “Full de càlcul”. Només en el full de càlcul adjunt modifiques les dades de les caselles B5 on està el “Capital inicial”, casella B6 on està el “Tant per u” i de la casella B7 on apareix el número de “Anys”, i arrossegues en la columna B fins que el número final d’anys coincidisca amb la dita casella.



	A	B	C	D	E	F
1	**Interés compuesto**					
2	**Problema:**					
3	El capital inicial de un depósito asciende a 82000 €. El tanto aplicado es el 3 % a interés compuesto durante 5 años. Calcula el capital final.					
4						
5	Capital inicial:	82000				
6	Tanto por ciento o rédito:	3				
7	Número de años:	5				
8						
9						
10	**Capital inicial: C_i**	**Años**	**r (tanto por uno)**	**(1+r)^n**	**Capital final: C_f**	**Interés total**
11	82000,00	1	0,03	1,03	84460,00	2460,00
12	84460,00	2	0,03	1,0609	86993,80	4993,80
13	86993,80	3	0,03	1,092727	89603,61	7603,61
14	89603,61	4	0,03	1,12550881	92291,72	10291,72
15	92291,72	5	0,03	1,159274074	95060,47	13060,47
16						

Activitats resoltes

- El capital inicial d’un dipòsit ascendeix a 82000 €. El tant per cent aplicat és el 3 % a interès compost durant 5 anys. Calcula el capital final.

$$C_f = C_i \cdot (1 + i)^n = 82000 \cdot (1 + 0{,}03)^5 = 82000 \cdot 1{,}159\ldots = 95060 \text{ €}$$

Activitats proposades

54. Al 5 % d'interès compost durant 12 anys, quin serà el capital final que obtindrem en dipositar 39500 €?

CURIOSITATS. REVISTA

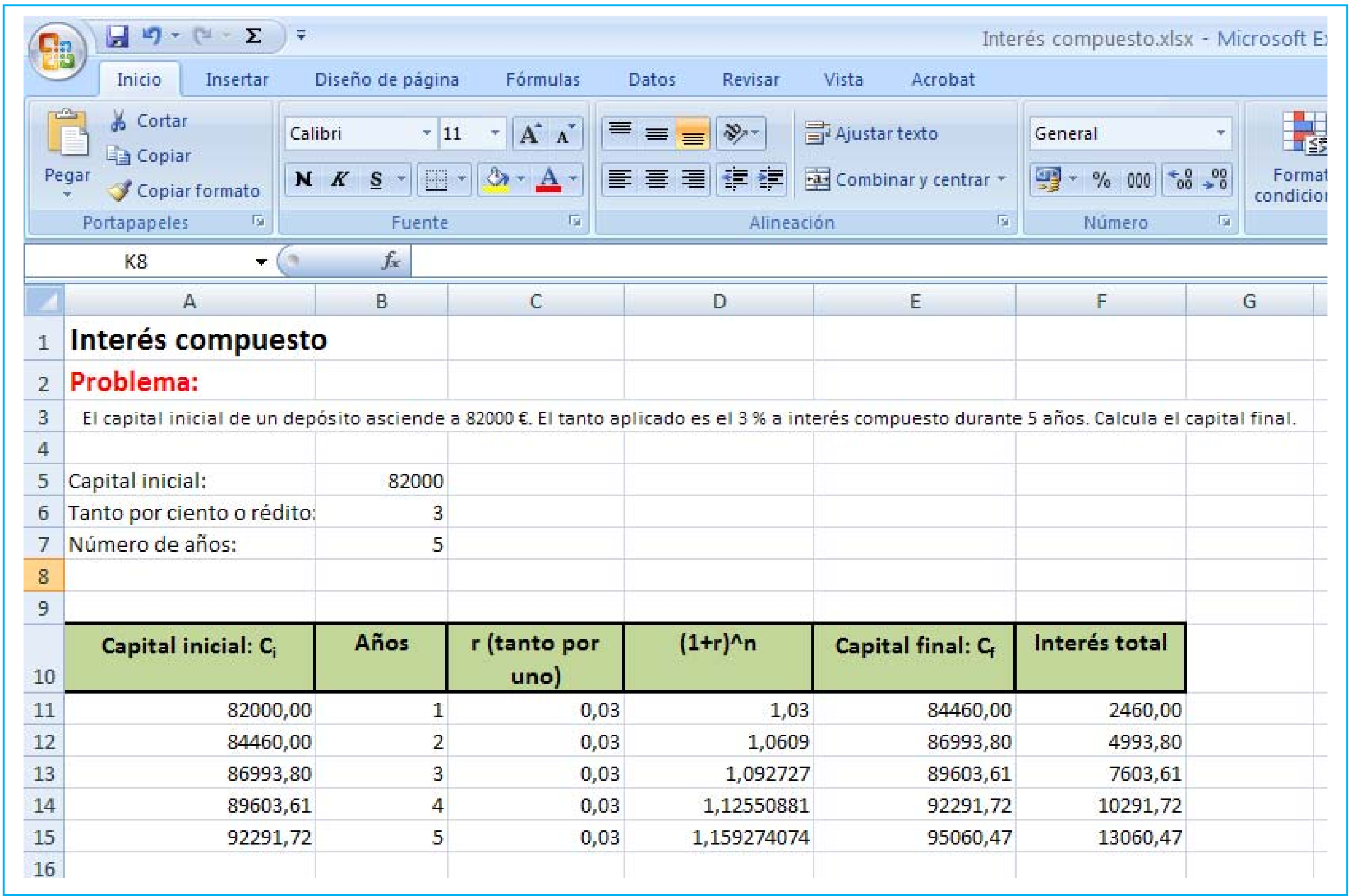
Confecciona el teu propi full de càlcul

Resoldrem el problema “El capital inicial d’un dipòsit ascendeix a 82000 €. El tant aplicat és el 3 % a interès compost durant 5 anys. Calcula el capital final” confeccionant un full de càlcul.

Obri Excel o qualsevol altre full de càlcul. Veuràs que els fulls estan formats per quadrícules, amb lletres en l’horitzontal i nombres en la vertical. Així cada quadrícula del full es pot designar per una lletra i un nombre: A1, B7, …

Deixarem les primeres 9 files per a posar títols, anotacions…

A la fila 10 escriurem els títols de les caselles. A la casella A10 escriu: Capital inicial. A la B10: Anys. A la C10: Tant per u. A la D10: $(1 + r)^n$. A la E10: capital final. A la F10: Interès total.



	A	B	C	D	E	F
1	Interés compuesto					
2	Problema:					
3	El capital inicial de un depósito asciende a 82000 €. El tanto aplicado es el 3 % a interés compuesto durante 5 años. Calcula el capital final.					
4						
5	Capital inicial:	82000				
6	Tanto por ciento o rédito:	3				
7	Número de años:	5				
8						
9						
10	Capital inicial: C_i	Años	r (tanto por uno)	(1+r)^n	Capital final: C_f	Interés total
11	82000,00	1	0,03	1,03	84460,00	2460,00
12	84460,00	2	0,03	1,0609	86993,80	4993,80
13	86993,80	3	0,03	1,092727	89603,61	7603,61
14	89603,61	4	0,03	1,12550881	92291,72	10291,72
15	92291,72	5	0,03	1,159274074	95060,47	13060,47
16						

A la fila 11 comencem els càlculs. A A11 anotem 82000, que és el capital inicial.

A la B11, escrivim 1, perquè estem l’any primer; a la B12, escrivim 2, i seleccionant les caselles B11 i B12 arrosseguem fins a B15, perquè ens demanen 5 anys.

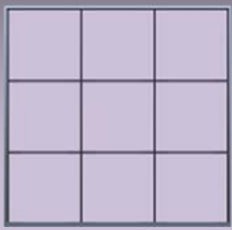
Com s’ha posat el capital al 3 %, el tant per u és 0,03, quantitat que copiem en C11 i arrosseguem fins a C15.

Per a calcular $(1 + r)^n$, podem fer-ho usant la funció POTÈNCIA. Per a això escrivim un signe = en la casella D11 i busquem la funció POTÈNCIA, en nombre escriurem 1+C11 i en exponent B11. T’haurà quedat: =POTÈNCIA(1+C11;B11). Ara, ho assenyales i ho arrossegues fins a D15.

Per a calcular $C \cdot (1 + r)^n$,en la columna E, només hem de multiplicar A11*D11. Volem deixar invariant el capital inicial, per a dir-se’l a Excel, que no ens el canvie, escrivim: =A11*D11 i arrosseguem fins a la fila E15.

Proporcionalitat en árees i volums

En augmentar l'àrea d'un quadrat al doble, la seua superfície queda multiplicada per 4. Al multiplicar per 3 el costat, l'àrea queda multiplicada per 9.



En augmentar el costat d'un cub al doble, el seu volum queda multiplicat per 8. En multiplicar per 3 el costat, el volum es multiplica per 27.

En general, si fem un canvi d'escala de factor de proporcionalitat k, l'àrea te un factor de proporcionalitat k^2, i el volum k^3.

Utilitza aquesta observació per a resoldre els problemes següents:

La torre Eiffel de París medeix 300 metres d'alçària i pesa uns 8 milions de quilos. Està construïda de ferro. Si encarreguem un model a escala de dita torre, també de ferro, que pese només un quilo, quina alçària tindrà? Serà major o menor que un llapis?

Abans de començar a calcular, dóna la teua opinió.

Ajuda: k^3 = 8 000 000/1 per tant k = 200. Si la Torre Eiffel medeix 300 metros d'alçària, la nostra torre mesurarà 300/200 = 1,5 m. Metre i mig! Molt més que un llapis!

En una pizzeria la pizza de 20 cm de diàmetre val 3 euros i la de 40 cm val 6 euros. Quina te millor preu?

Veiem al mercat un lluç de 40 cm que pesa un quilo. Ens pareix un poc xicotet i demanem un altre un poc més gran, que resulta pesar 2 quilos. Quant mesurarà?

En un dia fred un pare i un fill xicotet van exactament igual abrigats, Quin dels dos tindrà més fred?

RESUM

		Exemples
Proporcionalitat directa	Dues magnituds són **directament** proporcionals quan en multiplicar o dividir a la primera per un nombre, la segona queda multiplicada o dividida pel mateix nombre. La funció de proporcionalitat directa és una recta que passa per l'origen: y = *kx*. El pendent de la recta, ***k***, és la **raó de proporcionalitat directa**.	Per a empaperar 300 m^2 hem utilitzat 24 rotllos de paper, si ara la superfície és de 104 m^2, necessitarem 8,32 rotllos, perquè *k* = 300/24 = 12,5, *y* = 12,5*x*, per la qual cosa *x* = 104/12,5 = 8,32 rotllos.
Proporcionalitat inversa	Dues magnituds són **inversament** proporcionals quan en multiplicar o dividir a la primera per un nombre, la segona queda dividida o multiplicada pel mateix nombre. La funció de proporcionalitat inversa és la hipèrbola *y= k'/x*. Per tant la **raó de proporcionalitat inversa** *k´* és el producte de cada parella de magnituds: *k' = a · b = a´· b´*.	Dues persones pinten una vivenda en 4 dies. Per a pintar la mateixa vivenda, 4 persones tardaran: *k'* = 8, *y*=8/*x*, per la qual cosa tardaran 2 dies.
Percentatges	Raó amb denominador 100.	El 87 % de 2400 és $\frac{87 \cdot 2400}{100} = 2088$
Escales	L'escala és la proporció entre les mesures del dibuix i les mesures a la realitat.	A escala 1:50000, 35 cm son 17,5 km a la realitat.

Repartiment proporcional directe	**Repartiment proporcional invers**
Repartir directament a 6,10 i 14, 105000 € 6 + 10 + 14 = 30 105000 : 30 = 3500 6 · 3500 = 21000 € 10 ·3500 = 35000 € 14 · 3500 = 49000 €	Repartir 5670 inversament a 3,5 i 6 1/3 + 1/5 + 1/6 = $\frac{10+6+5}{30} = \frac{21}{30}$ 5670 : 21 = 270 270 · 10 = **2700** 270 · 6 = **1620** 270 · 5 = **1350**

Mescles i aliatges	Mesclar distintes quantitats de productes, de distints preus. La **llei** d'un **aliatge** és la relació entre el pes del metall més valuós i el pes total.	Una joia que pesa 245 g i conté 195 g de plata, la seua llei és: $\frac{195}{245} = 0{,}795$
Interès simple i compost	L'interès és el benefici que s'obté en dipositar un capital en una entitat financera a un determinat tant per cent durant un temps	C = 3600; r = 4,3 %; t = 8 anys I = $\frac{3600 \cdot 4{,}3 \cdot 8}{100} = 1238{,}4$ €

EXERCICIS I PROBLEMES

1. Copia al teu quadern, calcula la raó de proporcionalitat i completa la taula de proporcionalitat directa:

litres	8,35		0,75	1,5	
euros		14	2,25		8

2. Estima quantes persones caben de peu en un metre quadrat. Hi ha hagut una festa i s'ha omplit completament un local de 400 m^2, quantes persones estimes que han anat a aqueixa festa?
3. Cada setmana paguem 48 € en transport. Quant gastarem durant el mes de febrer?
4. Amb 85 € hem pagat 15 m de tela, quant ens costaran 23 m de la mateixa tela?

5. Per a entapissar cinc cadires he utilitzat 0,6 m de tela, quantes cadires podré entapissar amb la peça completa de 10 m?
6. Un camió ha transportat en 2 viatges 300 sacs de creïlles de 25 kg cada u. Quants viatges seran necessaris per a transportar 950 sacs de 30 kg cada un?
7. Una edició de 400 llibres de 300 pàgines cada un arriba a un pes total de 100 kg. Quants kg pesarà una altra edició de 700 llibres de 140 pàgines cada un?
8. Sabent que la raó de proporcionalitat directa és k = 1,8, copia al teu quadern i completa la taula següent:

Magnitud A	15,9			0,01	
Magnitud B		6	0,1		10

9. El model de telèfon mòbil que costava 285 € + IVA està ara amb un 15 % de descompte. Quin és el seu preu rebaixat? (IVA 21 %)
10. Per retardar-se en el pagament d'un deute de 1500 €, una persona ha de pagar un recàrrec del 12 %. Quant ha de tornar en total?
11. Si un litre de llet de 0,85 € augmenta el seu preu en un 12 %, quant val ara?
12. Què tant per cent de descompte s'ha aplicat en una factura de 1900 € si finalment es van pagar 1200 €?

13. Si unes sabatilles de 60 € es rebaixen un 15 %, quin és el valor final?
14. En comprar un televisor he obtingut un 22 % de descompte, per la qual cosa al final he pagat 483,60 €, quin era el preu del televisor sense descompte?
15. Lluís va comprar una camiseta que estava rebaixada un 20 % i va pagar per ella 20 €. Quin era el seu preu original?
16. Per liquidar un deute de 35000 € abans d'allò que s'ha previst, una persona paga finalment 30800 €, quin percentatge del seu deute s'ha estalviat?

17. El preu d'un viatge s'anuncia a 500 € IVA inclòs. Quin era el preu sense IVA? (IVA 21 %)

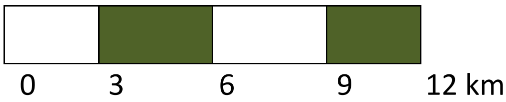
18. Què increment percentual s'ha efectuat sobre un article que abans valia 25 € i ara es paga a 29 €?

19. Un balneari va rebre 10 mil clients al mes de juliol i 12 mil a l'agost. Quin és l'increment percentual de clients de juliol a agost?

20. Un mapa està dibuixat a escala 1 : 800000. La distància real entre dues ciutats és 200 km. Quina és la seua distància al mapa?

21. La distància entre Oviedo i Corunya és de 340 km. Si al mapa estan a 12 cm, quina és l'escala a què està dibuixat?

22. Interpreta la següent escala gràfica i calcula la distància en la realitat per a 21 cm.



23. Copia al teu quadern i completa la taula següent:

Grandària al dibuix	Grandària real	Escala
20 cm llarg i 5 cm d'ample		1 : 25000
10 cm	15 km	
	450 m	1 : 30000

24. Copia al teu quadern, calcula la raó de proporcionalitat inversa i completa la taula:

Magnitud A	8	7,5		3,5	
Magnitud B		12	0,15		10

25. Determina si les següents magnituds es troben en proporció directa, inversa o en cap d'elles:

- **a)** Velocitat a què circula un cotxe i espai que recorre
- **b)** Diners que tens per a gastar i bosses d'ametles que pots comprar
- **c)** Talla de sabates i preu de les mateixes
- **d)** Nombre de membres d'una família i litres de llet que consumixen
- **e)** Nombre d'entrades venudes per a un concert i diners recaptats
- **f)** Nombres d'aixetes que omplin una piscina i temps que aquesta tarda a omplir-se
- **g)** Edat d'una persona i estatura que té
- **h)** Nombre de treballadors i temps que tarden a fer una tanca
- **i)** Edat d'una persona i nombre d'amics que té

26. Quina velocitat hauria de portar un automòbil per a recórrer en 4 hores una certa distància, si a 80 km/h ha tardat 5 hores i 15 minuts?

27. La raó de proporcionalitat inversa entre A i B és 5. Copia al teu quadern i completa la taula següent:

A	20		7		10,8
B		0,05		0,3	

28. A la granja es fa la comanda de farratge per a alimentar a 240 porcs durant 9 setmanes. Si ven 60 porcs, quantes setmanes li durarà el farratge? I si en compte de vendre, compra trenta porcs? I si decideix rebaixar la ració una quarta part amb els 240 porcs?

29. Un granger amb 65 gallines té dacsa per a alimentar-les 25 dies. Si ven 20 gallines, Quants dies podrà alimentar a les restants?

30. Amb 15 paquets de 4 kg cada un poden menjar 150 gallines diàriament. Si els paquets foren de 2,7 kg, quants necessitaríem per a donar de menjar a les mateixes gallines?

31. Determina si les dues magnituds són directa o inversament proporcionals i completa la taula al teu quadern:

A	24	8	0,4	6		50
B	3	9	180		20	

32. Si la jornada laboral és de 8 hores necessitem a 20 operaris per a realitzar un treball. Si rebaixem la jornada en mitja hora diària, quants operaris seran necessaris per a realitzar el mateix treball?

33. En un magatzem es guarden reserves de menjar per a 100 persones durant 20 dies amb 3 racions diàries, quants dies duraria el mateix menjar per a 75 persones amb 2 racions diàries?

34. Si 15 operaris instal·len 2500 m de tanca en 7 dies. Quants dies tardaran 12 operaris a instal·lar 5250 m de tanca?

35. En un concurs el premi de 168000 € es reparteix de forma directament proporcional als punts aconseguits. Els tres finalistes van aconseguir 120, 78 i 42 punts. Quants euros rebran cada un?

36. Repartir 336 en parts directament proporcionals a 160, 140, 120.

37. Un treball es paga a 3120 €. Tres operaris el realitzen aportant el primer 22 jornades, el segon 16 jornades i el tercer 14 jornades. Quant rebrà cada un?

38. Repartir 4350 en parts inversament proporcionals a 18, 30 i 45.

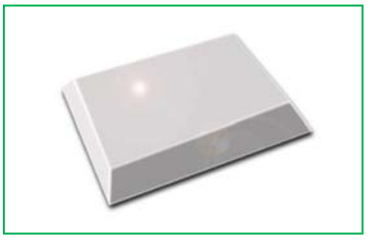
39. Mesclem 3 kg d'ametles a 14 €/kg, 1,5 kg d'anous a 6 €/kg, 1,75 kg de castanyes 8 €/kg. Calcula el preu final del paquet de 250 g de mescla de fruits secs.

40. Calcula el preu del litre de suc que s'aconsegueix mesclant 8 litres de suc de pinya a 2,5 €/l, 15 litres de suc de taronja a 1,6 €/l i 5 litres de suc de raïm a 1,2 €/l. A quant ha de vendre's una botella de litre i mig si se li aplica un augment del 40 % sobre el preu de cost?

41. Per a aconseguir un tipus de pintura es mesclen tres productes 5 kg del producte X a 18 €/kg, 19 kg del producte Y a 4,2 €/kg i 12 kg del producte Z a 8 €/kg. Calcula el preu del kg de mescla.

42. Cinc persones comparteixen un microbús per a realitzar distints trajectes. El cost total és de 157,5 € més 20 € de suplement per servei nocturn. Els quilòmetres recorreguts per cada passatger van ser 3, 5, 7, 8 i 12 respectivament. Quant ha d'abonar cada un?

43. S'ha decidit penalitzar a les empreses que més contaminen. Per a això es reparteixen 2350000 € per a subvencionar a tres empreses que presenten un 12 %, 9 % i 15 % de grau de contaminació. Quant rebrà cada una?



44. Un lingot d'or pesa 340 g i conté 280,5 g d'or pur. Quina és la seua llei?

45. Quants grams d'or conté una joia de 0,900 de llei, que s'ha format amb un aliatge de 60 g de 0,950 de llei i 20 g de 0,750 de llei?

46. Quin capital cal dipositar al 3,5 % de rèdit en 5 anys per a obtindre un interès simple de 810 €?

47. Quin és el capital final que es rebrà per dipositar 25400 € al 1,4 % en 10 anys?

48. Quants mesos ha de dipositar-se un capital de 74500 € al 3 % per a obtindre un interès de 2980 €?

49. Al 3 % d'interès compost, un capital s'ha convertit en 63338,5 €. De quin capital es tracta?

50. En la construcció d'un pont de 850 m s'han utilitzat 150 bigues, però l'enginyer no està molt segur i decideix reforçar l'obra afegint 50 bigues més. Si les bigues es col·loquen uniformement al llarg de tot el pont, a quina distància es col·locaran les bigues?

51. En un col·legi de primària es convoca un concurs d'ortografia en què es donen diversos premis. El total que es reparteix entre els premiats és 500 €. Els alumnes que no han comés cap falta reben 150 €, i la resta es distribueix de manera inversament proporcional al nombre de faltes. Hi ha dos alumnes que no han tingut cap falta, un ha tingut una falta, un altre dues faltes i l'últim ha tingut quatre faltes, quant rebrà cada un?

AUTOAVALUACIÓ

1. Els valors que completen la taula de proporcionalitat directa són:

A	10	0,25		0,1	100
B		50	5		

a) 612,5; 1000; 0,0005; 0,5 b) 1,25; 2,5; 125; 0,125 c) 62; 500; 0,005; 0,05

2. Amb 500 € paguem els gastos de gas durant 10 mesos. En 36 mesos pagarem:

a) 2000 € b) 1900 € c) 1800 € d) 1500 €.

3. Un article que costava 2000 € s'ha rebaixat a 1750 €. El percentatge de rebaixa aplicat és:

a) 10 % b) 12,5 % c) 15,625 % d) 11,75 %

4. Per a envasar 510 litres d'aigua utilitzem botelles de litre i mig. Quantes botelles necessitarem si volem utilitzar envasos de tres quarts de litre?

a) 590 botelles b) 700 botelles c) 650 botelles d) 680 botelles

5. Els valors que completen la taula de proporcionalitat inversa són:

A	5,5	10		11	
B	20		0,5		0,1

a) 40; 200; 11,5; 1000 b) 11; 200; 20; 300 c) 11; 220; 10; 1100 d) 40; 220; 10; 500

6. Tres agricultors es reparteixen els quilograms de la collita de forma proporcional a la grandària de les seues parcel·les. La major, que mesura 15 ha rebut 30 tones, la segona és de 12 ha i la tercera de 10 ha rebran:

a) 24 t i 20 t b) 20 t i 24 t c) 24 t i 18 t d) 25 t i 20 t

7. L'escala a la que s'ha dibuixat un mapa en què 2,7 cm equivalen a 0,81 km és:

a) 1 : 34000 b) 1 : 3000 c) 1 : 30000 d) 1 : 300

8. Amb 4 rotllos de paper de 5 m de llarg, puc forrar 32 llibres. Quants rotllos necessitarem per a forrar 16 llibres si ara els rotllos de paper són de 2 m de llarg?

a) 3 rotllos b) 5 rotllos c) 4 rotllos d) 2 rotllos

9. El preu final del kg de mescla de 5 kg de farina classe A, a 1,2 €/kg, 2,8 kg classe B a 0,85 €/kg i 4 kg classe C a 1 €/kg és:

a) 1,12€ b) 0,98 € c) 1,03€ d) 1,049€

10. La llei d'un aliatge és 0,855. Si el pes de la joia és 304 g, la quantitat de metall preciós és:

a) 259,92 g b) 255,4 g c) 248,9 g d) 306 g

Matemàtiques orientades a les ensenyances acadèmiques:

4t B ESO

Capítol 7: Semblança

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Jorge Muñoz

Revisora: Nieves Zuasti

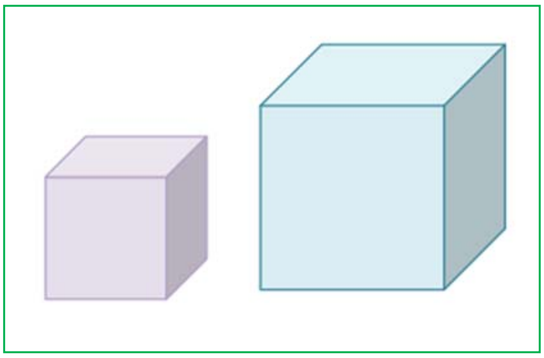
Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF i Jorge Muñoz

Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

Índex

Resum

Un dels problemes *històrics* de la Matemàtica és el de la **duplicació d'un cub**. A Atenes es va desenrotllar una tremenda pesta que assolava a la població. Inclús el seu governant, Pèricles va morir l'any 429 a. C. Consultat l'oracle d'Apol·lo aquest va dir que s'acabaria amb la pesta si es construïa un altar que fóra doble de què hi havia (que tenia forma de cub).



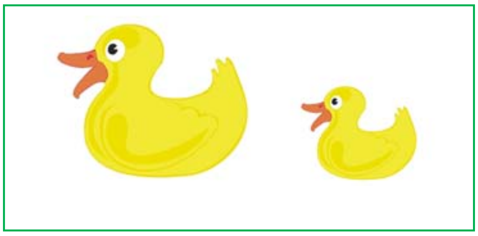
No es va aconseguir donar amb la solució. S'ha de buscar la raó de proporcionalitat entre els costats perquè el volum siga doble. La pesta es va acabar, però el problema es va quedar sense resoldre durant segles, però tu sabràs solucionar-lo quan estudies aquest capítol.

També estudiarem el teorema de Tales i la seua aplicació a reconèixer quan dos triangles són semblants. Són els criteris de semblança de triangles.

Utilitzant la semblança de triangles demostrarem dos teoremes, el teorema de l'altura i el del catet.

1. FIGURES SEMBLANTS

1.1. Figures semblants



Durant aquest capítol parlarem únicament de la proporcionalitat geomètrica, la semblança.

Dues figures semblants tenen *la mateixa forma*. És molt útil saber reconèixer la semblança per a poder estudiar una figura i inferir així propietats d'una figura semblant a ella que és més gran o inaccessible. La semblança conserva els angles i manté la proporció entre les distàncies.

Dos polígons són semblants si els seus costats són proporcionals i els seus angles són iguals.

1.2. Raó de semblança. Escala.

Dues figures són **semblants** si les longituds d'elements corresponents són proporcionals. Al coeficient de proporcionalitat se l'anomena **raó de semblança**. Quan representem quelcom mitjançant una figura (3D) o un pla (2D) la raó de semblança també s'anomena **escala**.

Al llenguatge matemàtic hi ha dues ferramentes fonamentals per a descriure una proporció: El producte i el quocient.

El producte indica quantes vegades major és la representació enfront del model. Se sol denotar mitjançant el signe de producte **"X"** (10X, 100X, etc.) indicant així la raó de semblança.

Exemple:

- *Una representació a escala* 100X d'una cèl·lula, indica que la representació és 100 vegades més gran que el model, o que 100 cèl·lules en fila tenen la mateixa longitud que la representació.

La divisió indica el camí contrari, o quant més xicotet és el model enfront de la seua representació. Se sol denotar mitjançant el símbol de divisió **":"** (1:100, 1:500, etc.) el que indica la raó de semblança.

Exemple:

- *Un pla de construcció d'un edifici d'escala* 1:100, indica que la representació és 100 vegades més xicoteta que el model. Si una distància en el pla és 10 cm, aqueixa mateixa distància a la realitat serà de 10 m.

Per a escriure una **raó de semblança** en llenguatge algebraic s'utilitzen dos operadors: el producte (x) i el quocient (:).

Quan parlem de semblança geomètrica, ens referim a proporcionalitat en tant a longituds, però també hi ha altres atributs en què podem trobar semblances entre un model i un semblant. En general, qualsevol magnitud que siga mesurable tant al model com al seu semblant, és apta per a establir una relació de semblança.

Sempre que es puguen comparar dues magnituds d'un atribut comú, és possible establir una **raó de semblança**.

Activitats resoltes

- *Si un microscopi té un augment de* 100X, quina grandària (aparent) penses que tindrà la imatge que es veja per l'objectiu si observem un cabell de 0,1 mm de grossària?

0,1 mm X 100 = 10 mm = 1 cm.

- *Esbrina l'altura d'una casa que medeix* 20 cm d'alt en un pla d'escala 1:100.

Si H és l'altura de la casa i h la grandària al pla, sabem que $h = H/100$, per tant, $H = 100 \cdot h$.

$H = 100 \cdot 20$ cm = 20 m. *Comprovació*: És una casa d'uns 7 pisos.

Activitats proposades

1. Mesura la teua altura en una foto i calcula el factor de semblança.

1.3. Semblança en longituds, àrees i volums

Longitud de figures semblants

A les figures semblants la forma no varia, únicament canvia la grandària. Les longituds són proporcionals. Al següent apartat demostrarem el teorema de Tales que és el fonament matemàtic de la semblança.

La **raó de semblança** s'aplica a totes les **longituds** del model per igual.

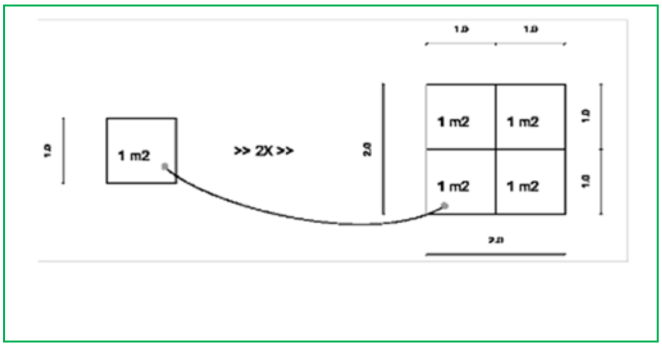
Quan les propietats d'una figura depenen de la longitud, com l'àrea i el volum, aquestes propietats també canvien en la figura semblant, encara que no de la mateixa manera que la longitud.

Exemple:

- *Si l'àrea del quadrat és* $A = L^2 = L \cdot L$, *l'àrea d'un quadrat semblant de raó* 2, *serà:*

  $A = 2 \cdot L \cdot 2 \cdot L = 2 \cdot 2 \cdot L \cdot L = 2^2 \cdot L^2 = 4 \cdot L^2$

Àrees de figures semblants



L'àrea d'una figura és una propietat que depèn de la longitud dels seus segments. En concret, la relació entre la longitud d'una figura i la seua àrea és quadràtica.

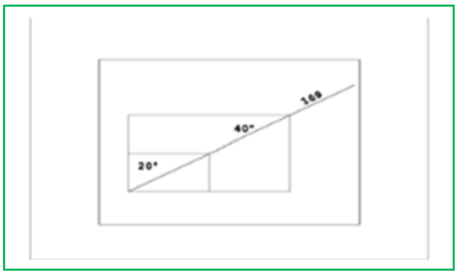
Quan s'aplica el factor de semblança, es conserva la relació quadràtica entre longitud i àrea, per la qual cosa en una figura plana (2D), provocarà un augment de la seua àrea proporcional al quadrat.

Si la raó de semblança entre les longituds d'una figura és k, la relació entre les seues àrees, A i A' *és*:

$A' = k \cdot L_1 \cdot k \cdot L_2 = k \cdot k \cdot L_1 \cdot L_2 = k^2 \cdot A$

Si la raó de semblança entre les longituds d'una figura és k, llavors la raó entre les seues àrees és $\boldsymbol{k^2}$.

Exemple:



- *Un televisor de* 40 polzades *costa aproximadament quatre vegades més que un de* 20. Per estrany que parega, l'augment de preu està justificat. La grandària del televisor, indica la longitud del seu diagonal en polzades. Una longitud doble, implica una àrea quatre vegades major i per tant necessita quatre vegades més components electrònics.

Exemple:

- *Observa la figura del marge.* Si multipliquem per 2 el costat

del quadrat xicotet, l'àrea del quadrat gran és $2^2 = 4$ vegades

la del xicotet.

Volums de figures semblants

El volum d'una figura és una propietat que depèn de la longitud dels seus segments. En aquest cas, la relació entre les longituds d'una figura i el seu volum és cúbica.

Quan s'aplica el factor de semblança, aquesta relació cúbica provocarà un augment del seu volum proporcional al cub (k^3). Si la raó de semblança entre les longituds d'una figura és k, i el volum de partida és $V = L_1 \cdot L_2 \cdot L_3$: en aplicar la semblança es té:

$$V_k = k \cdot L_1 \cdot k \cdot L_2 \cdot k \cdot L_3 = \mathrm{k \cdot k \cdot k} \cdot L_1 \cdot L_2 \cdot L_3 = k^3 \cdot L_1 \cdot L_2 \cdot L_3 = k^3 \cdot V$$

Si la raó de semblança entre les longituds d'una figura és ***k***, llavors entre els seus volums és ***k*³**.

Exemple:

- *Observa la figura del marge*. En multiplicar per 2 el

costat del cub xicotet s'obté el cub gran. El volum del cub gran és 8 (2^3) vegades el del cub xicotet.

Activitats resoltes

- *La torre Eiffel de París medeix 300 metres d'altura i pesa uns 8 milions de quilos. Està construïda de ferro. Si encarreguem un model a escala de la dita torre, també de ferro, que pese només un quilo, quina altura tindrà? Serà major o menor que un llapis?*

El pes està relacionat amb el volum. La torre Eiffel pesa 8 000 000 quilos, i volem construir una, exactament del mateix material que pese 1 quilo. Per tant $k^3 = 8000000/1 = 8\ 000\ 000$, i $k = 200$. La raó de proporcionalitat entre les longituds és de 200.

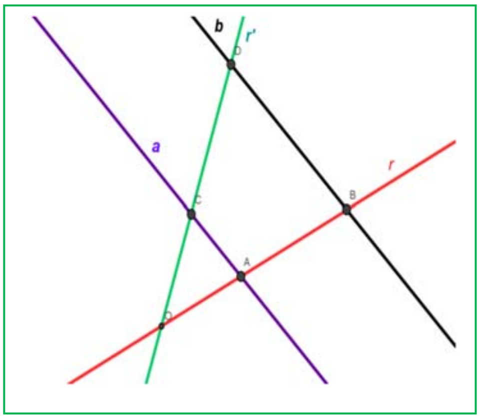
Si la Torre Eiffel mesura 300 *m* d'altura (mesura un poc més, 320 m), i anomenem x al que mesura la nostra tenim: $300/x = 200$. Aïllem x que resulta igual a $x = 1{,}5$ *m*. Medeix metre i mig! És molt major que un llapis!

Activitats proposades

1. El diàmetre d'una bresquilla és tres vegades major que el del seu os, i mesura 8 *cm*. Calcula el volum de la bresquilla, suposant que és esfèric, i el del seu os, també esfèric. Quina és la raó de proporcionalitat entre el volum de la bresquilla i el de l'os?
2. En la pizzeria tenen pizzes de diversos preus: 3 €, 6 € i 9 €. Els diàmetres d'aquestes pizzes són: 15 *cm*, 20 *cm* i 30 *cm*, quina resulta més econòmica? Calcula la relació entre les àrees i compara-la amb la relació entre els preus.
3. Una maqueta d'un dipòsit cilíndric de 1000 litres de capacitat i 5 metres d'altura, volem que tinga una capacitat d'1 litre. Quina altura ha de tindre la maqueta?

2. EL TEOREMA DE TALES

2.1. Teorema de Tales



Donades dues rectes, *r* i *r'*, que es tallen en el punt *O*, i dues rectes paral·leles entre si, *a* i *b*. La recta *a* talla a les rectes *r* i *r'* als punts *A* i *C*, i la recta *b* talla a les rectes *r* i *r'* als punts *B* i *D*. Aleshores el Teorema de Tales afirma que els segments són proporcionals:

$$\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{BD}=\frac{OA+OC+AC}{OB+OD+BD}$$

Es diu que els triangles *OAC* i *OBD* estan en posició de ***Tales***. Són **semblants**. Tenen un angle comú (coincident) i els costats proporcionals.

Activitats resoltes

- *Siguen OAC i OBD dos triangles en posició de Tales. El perímetre d'OBD és* 20 *cm, i OA medeix* 2 *cm, AC medeix* 5 *cm i OC medeix* 3 *cm. Calcula les longituds dels costats d'OBD.*

Utilitzem l'expressió: $\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{BD}=\frac{OA+OC+AC}{OB+OD+BD}$ substituint les dades:

$$\frac{2}{OB}=\frac{3}{OD}=\frac{5}{BD}=\frac{2+3+5}{20}=\frac{10}{20}=\frac{1}{2},$$

pel que aïllant, sabem que: *OB* = 2·2 = 4 cm; *OD* = 3·2 = 6 cm, i *BD* = 5·2 = 10 cm. En efecte: 4 + 6 + 10 = 20 cm, perímetre del triangle.

- *Conta la llegenda que Tales va mesurar l'altura de la piràmide de Keops comparant l'ombra de la piràmide amb l'ombra del seu bastó. Tenim un bastó que medeix* 1 *m, si l'ombra d'un arbre medeix* 12 *m, i la del bastó, (a la mateixa hora del dia i al mateix moment), medeix* 0,8 *m, quant medeix l'arbre?*

Les altures de l'arbre i del bastó són proporcionals a les seues ombres, (formen triangles en posició *Tales*), pel que, si anomenem *x* a l'altura de l'arbre podem dir:

$\frac{0,8}{1}=\frac{12}{x}$. Per tant *x* = 12/0,8 = 15 metres.

Activitats proposades

4. En una foto hi ha un xiquet, que sabem que medeix 1,5 m, i un edifici. Mesurem l'altura del xiquet i de l'edifici en la foto, i resulten ser: 2 cm i 10 cm. Quina altura té l'edifici? Comprovació: El resultat et pareix real? És possible que un edifici tinga aqueixa altura?

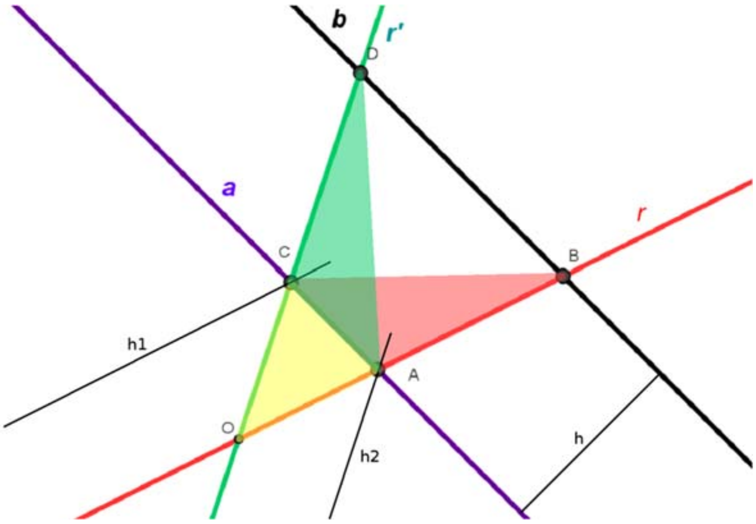
5. Es dibuixa un hexàgon regular. Es tracen les seues diagonals i s'obté un altre hexàgon regular. Indica la raó de semblança entre els costats d'ambdós hexàgons.

6. En un triangle regular ABC de costat 1 cm, tracem els punts mitjans, M i N, de dos dels seus costats. Tracem les rectes BN i CM que es tallen en un punt O. Són semblants els triangles MOS i COB? Quina és la raó de semblança? Quant mesura el costat MN?

7. Una piràmide regular hexagonal, de costat de la base 3 cm i altura 10 cm, es talla per un pla a una distància de 4 cm del vèrtex, amb la qual cosa s'obté una nova piràmide. Quant mesuren les seues dimensions?

2.2. Demostració del teorema de Tales

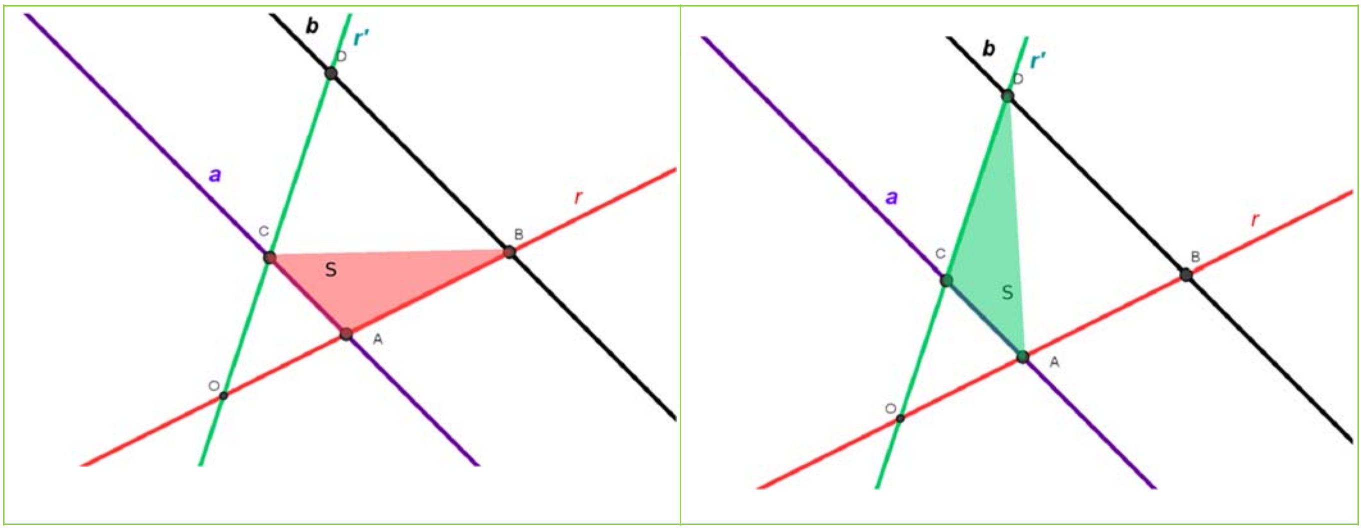
Per a la demostració s'utilitzen els triangles *ABC*, *ADC* i *OCA,* que es mostren a la figura.



Donarem diversos passos per a demostrar el teorema de Tales.

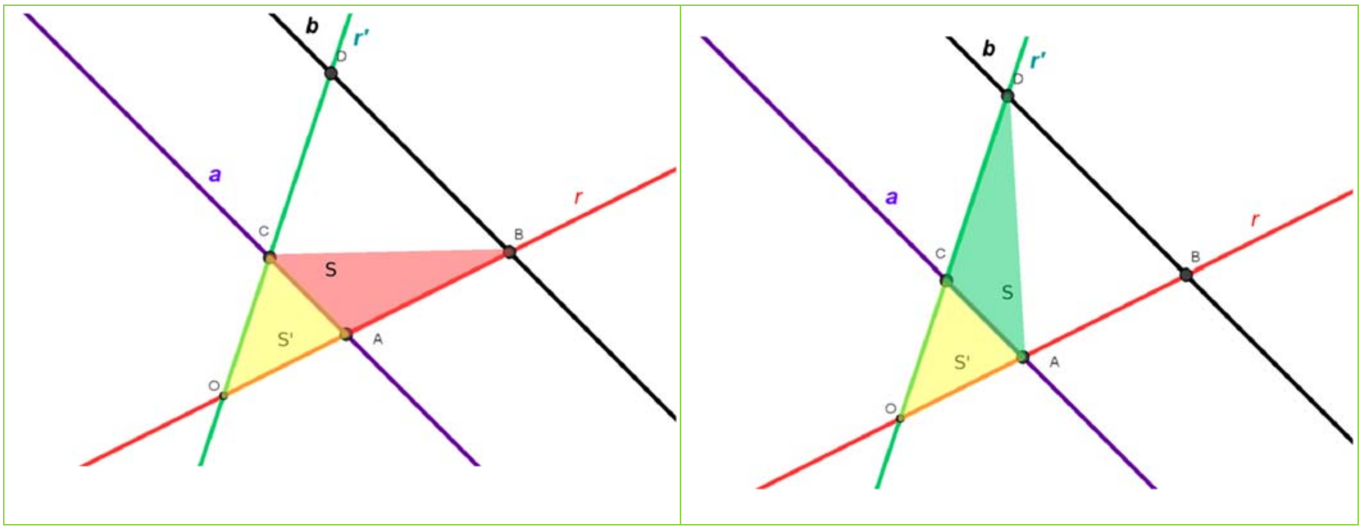
- L'àrea del triangle *ABC* és la mateixa que l'àrea del triangle *ADC* perquè tenen la mateixa base, (*AC),* i la mateixa altura (*h*), la distància entre les rectes paral·leles ***a*** i ***b***:

Àrea (*ABC*) = *Àrea* (*ADC*) = *CA* · *h*/2 = S



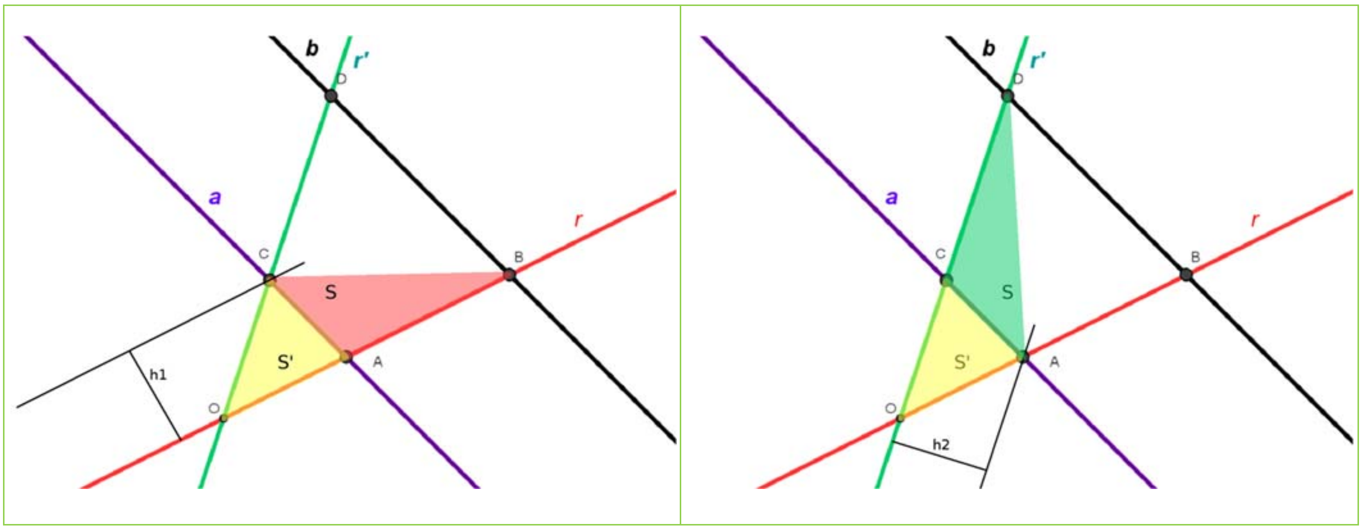
- L'àrea del triangle *OCB* és la mateixa que l'àrea del triangle *OAD* perquè hem sumat a les àrees dels triangles anteriors, l'àrea del triangle *OAC*:

Àrea (*OCB*) = *Àrea* (*OAD*) = S + S'



- Calculem el quocient entre les àrees dels triangles *OAC* i *OBC*. Per a calcular les àrees, prenem les bases que estan sobre la recta ***r***, llavors l'altura d'ambdós triangles és la mateixa perquè tenen el vèrtex *C* comú, per la qual cosa el quocient entre les seues àrees és igual al quocient entre les seues bases.
- De la mateixa manera calculem el quocient entre les àrees dels triangles *OAC* i *OAD* prenent ara les bases sobre la recta ***r'*** i l'altura, que és la mateixa, la del vèrtex comú *A*:

$$\frac{\grave{A}rea(OAC)}{\grave{A}rea(OBC)} = \frac{S'}{S+S'} = \frac{OA \cdot h_1/2}{OB \cdot h_1/2} = \frac{OA}{OB}\ \frac{\grave{A}rea(OAC)}{\grave{A}rea(OAD)} = \frac{S'}{S+S'} = \frac{OC \cdot h_2/2}{OD \cdot h_2/2} = \frac{OC}{OD}$$



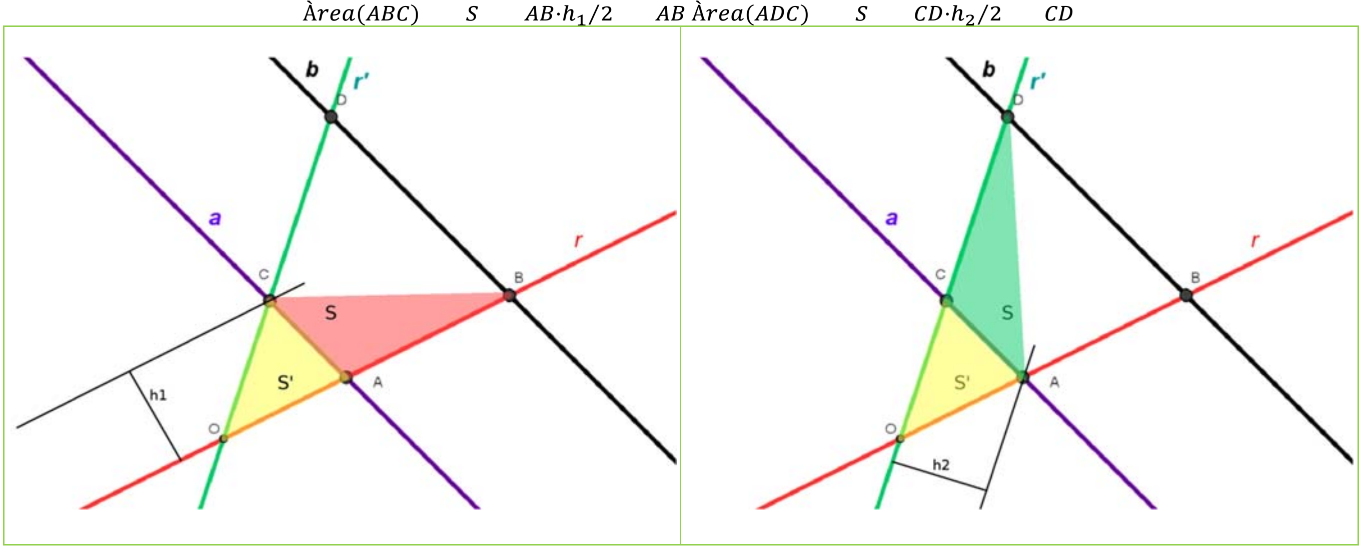
- Ja hem demostrat que *Àrea* (*OBC*) = *Àrea* (*OAD*) = S, substituint:

$$\frac{\grave{A}rea(OAC)}{\grave{A}rea(OBC)} = \frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} \Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}. \qquad (1)$$

- Per a obtindre l'altra relació de proporcionalitat utilitzem un raonament semblant. Calculem el quocient entre les àrees dels triangles *OAC* i *ABC* prenent les bases sobre la recta ***r*** i l'altura del vèrtex comú *C*.

- Després calculem el quocient entre les àrees dels triangles *OAC* i *ADC* prenent les bases sobre la recta ***r'*** i l'altura, que és la mateixa, des del vèrtex comú *A*, per la qual cosa aqueix quocient és proporcional a les bases *OC* i *CD*:

$$\frac{\grave{A}rea(OAC)}{\grave{A}rea(ABC)}=\frac{S'}{S}=\frac{OA\cdot h_1/2}{AB\cdot h_1/2}=\frac{OA}{AB}\frac{\grave{A}rea(OAC)}{\grave{A}rea(ADC)}=\frac{S'}{S}=\frac{OC\cdot h_2/2}{CD\cdot h_2/2}=\frac{OC}{CD}$$



- Però com les àrees *d'ABC* i *d'ADC* (S) són iguals s'obté:

$$\frac{\grave{A}rea(OAC)}{\grave{A}rea(ABC)}=\frac{OA}{AB}=\frac{OC}{CD}\Rightarrow\frac{OA}{OC}=\frac{AB}{CD}. \qquad (2)$$

Igualant les expressions (1) i (2) s'aconsegueix la primera afirmació del teorema de Tales:

$$\frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD}=\frac{AB}{CD}\Leftrightarrow\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{BD}$$

Activitats resoltes

- *Demostra que si* $\frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD}=\frac{AB}{CD}$ *aleshores* $\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{BD}=\frac{OA+OC+AC}{OB+OD+BD}$

En efecte, si diem que $\frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD}=\frac{AB}{CD}=k$ obtenim que:

$OA=k\cdot OC; OB=k\cdot OD; AB=k\cdot CD$ => $OA+OB+AB=k\cdot OC+k\cdot OD+k\cdot CD=k\cdot(OC+OD+CD)$

I aïllant *k* hem aconseguit provar que:

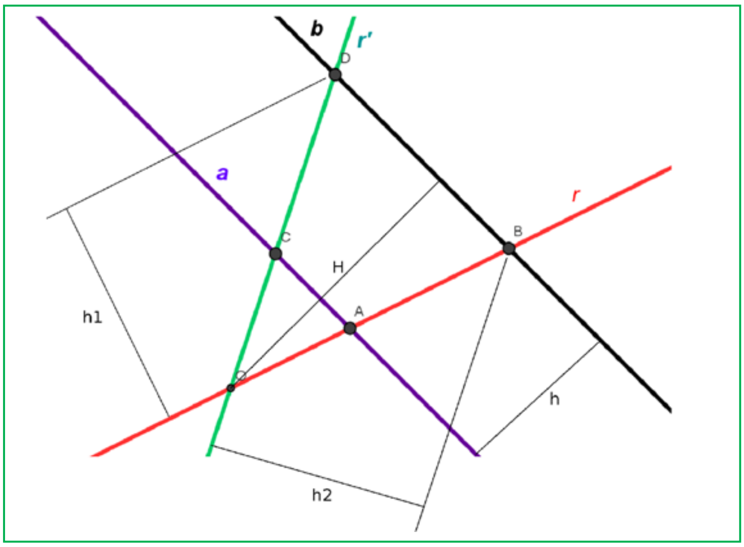
$$k=\frac{OA+OB+AB}{OC+OD+CD}$$ i per tant

$$\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{BD}=\frac{OA+OC+AC}{OB+OD+BD}$$, el teorema de Tales.

- *Siguen OAC i OBD dos triangles en posició Tales. El perímetre d'OAC és 50 cm, i OB mesura 12 cm, BD mesura 9 cm i OD mesura 9 cm. Calcula les longituds dels costats d'OAC.*

Utilitzem l'expressió del Teorema de Tales:

$$\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{BD}=\frac{OA+OC+AC}{OB+OD+BD}$$



substituint les dades:

$$\frac{OA}{12}=\frac{OC}{9}=\frac{AC}{9}=\frac{50}{12+9+9}=\frac{50}{30}=\frac{5}{3},$$

pel que aïllant, sabem que:

$OA = 12\frac{5}{3} = 20$ cm;

$OD = 9\frac{5}{3} = 15$ cm, i

$BD = 9\frac{5}{3} = 15$ cm.

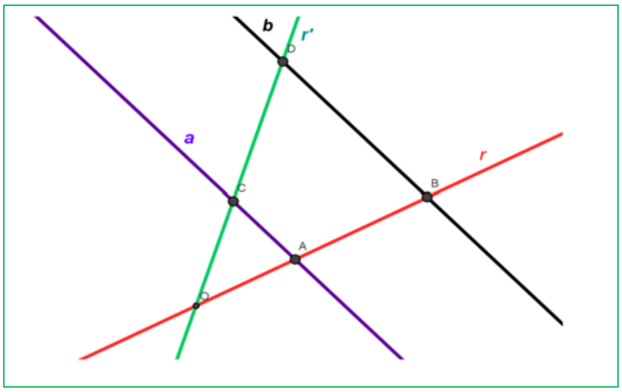
En efecte: 20 + 15 + 15 = 50 cm, perímetre del triangle.

Activitats proposades

8. Siguen *ABC* i *AED* dos triangles en posició Tales. Se sap que AB = 7 m, BC = 5 m, AC = 4 m i AD = 14 m. Calcula les dimensions d'AED i el seu perímetre.

9. Repte: Utilitza un full en blanc per a demostrar el teorema de Tales sense ajuda. No cal que utilitzes el mateix procediment que al llibre. Hi ha moltes maneres de demostrar el teorema.

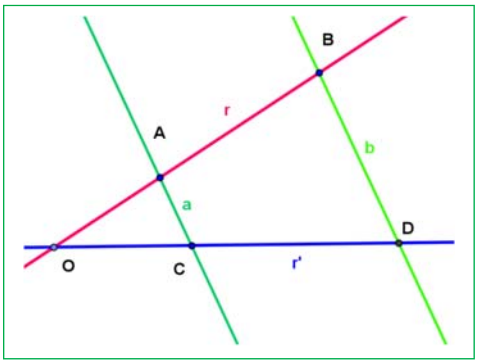
2.3. Recíproc del teorema de Tales



Donades dues rectes, ***r*** i ***r'***, que es tallen en el punt *O*, i dues rectes ***a*** i ***b*** tals que la recta ***a*** talla a les rectes ***r*** i ***r'*** als punts *A* i *C*, i la recta ***b*** talla a les rectes ***r*** i ***r'*** als punts *B* i *D*. Llavors el recíproc del Teorema de Tales afirma que si tots els segments formats pels punts *A, B, C* i *D són* proporcionals, llavors les rectes ***a*** i ***b*** són paral·leles entre sí.

Si $\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{BD}$ aleshores ***a*** i ***b*** són paral·leles.

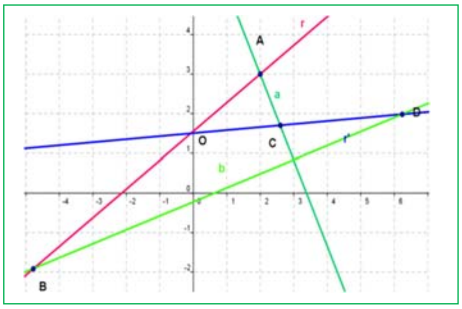
Activitats resoltes



- *A la figura adjunta se sap que OA* = 2 cm, *OC* = 2 cm, AC = 1 cm, *OB* = 5 cm, *OD* = 5 cm, BD = 2'5 cm. Com són les rectes ***a*** i ***b***?

Substituïm a l'expressió del teorema de Tales: $\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{BD}$, que es verifica ja que: $\frac{2}{5}=\frac{2}{5}=\frac{1}{2'5}$, per tant les rectes ***a*** i ***b*** són paral·leles, i el segment *AC* és paral·lel a *BD*.

- *A la figura adjunta se sap que OA* = *OC* = 2 cm, i que *OB* = 5 cm = *OD*. Les rectes ***a*** i ***b*** no són paral·leles, per què?



Perquè no verifica el teorema de Tales.

$\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}\neq\frac{AC}{BD}$ => $\frac{2}{5}=\frac{2}{5}\neq\frac{AC}{BD}$.

No basta amb què es verifique una de les igualtats, han de verificar-se les dues.

Comprovació: Mesura amb un regle els valors *d'AC* i *BD*.

Activitats proposades

10. Siguen *O*, *A* i *B* tres punts alineats i siguen *O*, *C*, *D* altres tres punts alineats en una recta diferent de l'anterior. Es verifica que $\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}$. Podem assegurar que el segment *AC* és paral·lel al segment *BD*? Raona la resposta.

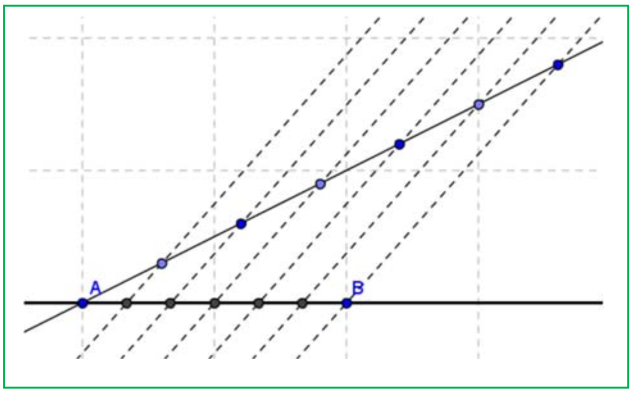
11. Siguen *O*, *A* i *B* tres punts alineats i siguen *O*, *C*, *D* altres tres punts alineats en una recta diferent de l'anterior. Es verifica que $\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{BD}$. Podem assegurar que el segment *AC* és paral·lel al segment *BD*? Raona la resposta.

2.4. Aplicacions del teorema de Tales

En estudiar la representació de nombres racionals a la recta numèrica vam aprendre a representar fraccions per al que era necessari dividir segments en parts iguals.

Recorda que:

Per a dividir un **segment *AB* en *n* parts iguals** es traça una semirecta *r* amb origen en *A* on s'assenyalen, amb ajuda d'un compàs, *n* segments consecutius de la mateixa longitud. L'extrem de l'últim segment s'uneix amb *B*, i es tracen paral·leles a aquest segment per cada un dels punts assenyalats a la semirecta.



Observa que la figura obtinguda és de triangles en posició Tales, i que els segments obtinguts en *AB* són tots de la mateixa longitud.

De la mateixa manera el teorema de Tales ens serveix per a **dividir un segment en parts que tinguen una proporció donada**. El procediment és el mateix que l'anterior. La diferència és que ara únicament ens interessa una de les divisions de la semirecta *r*.

El teorema de Tales també ens permet conèixer molt més sobre la **semblança de triangles**. Si dos triangles són semblants podrem aplicar un moviment a un d'ells (translació, gir o simetria) i col·locar-lo en posició Tales amb el segon, i a partir d'ací utilitzar el teorema de Tales. Açò ho veurem amb més deteniment als apartats següents.

Activitats resoltes

- *A la figura anterior hem dividit el segment AB* en 6 parts iguals. Identifica els 6 triangles en posició de Tales i calcula el factor de semblança respecte al primer.

Els triangles en posició de Tales són els que comparteixen el mateix angle del vèrtex A.
Si anomenem *d* a la distància entre dos talls sobre el segment *AB*, es pot calcular *d* = *AB*/6.
El factor de semblança es calcula mitjançant la proporció entre les seues longituds. En ser triangles en posició Tales, sabem que totes les proporcions són iguals per a tots els costats, per la qual cosa el factor de semblança coincideix amb la proporció entre qualsevol parell de costats, incloent-hi els que coincideixen amb el segment *AB*.

Tenim llavors que la base del primer triangle (el més xicotet) és *d*, i la base del segon triangle és 2 · *d*, així que la raó de semblança d'aquests dos triangles és 2.
De la mateixa manera, les raons de semblança dels altres triangles seran 3, 4, 5 i 6.

Activitats proposades

12. Busca altres relacions de semblança entre els triangles de l'activitat resolta anterior. Per exemple el sisé triangle és el doble que el tercer.

13. Dibuixa al teu quadern un segment i divideix-lo en 5 parts iguals utilitzant regle i compàs. Demostra que, utilitzant el teorema de Tales els segments obtinguts són, en efecte, iguals.

14. Dibuixa al teu quadern un segment de 7 cm de longitud, i divideix-lo en dos segments que estiguen en una proporció de 3/5.

15. Dibuixa al teu quadern una recta numèrica i representa en ella els fraccions següents:

a) 1/2 b) 5/7 c) –3/8 d) 5/3

3. SEMBLANÇA DE TRIANGLES

3.1. Criteris de semblança de triangles

Com se sap si dues figures són semblants?

Ja saps que:

Dues figures són semblants quan tenen la mateixa forma però distinta grandària. Encara que aquesta definició pot parèixer molt clara en llenguatge natural, no és útil en Matemàtiques, ja que no es pot escriure en llenguatge lògic.

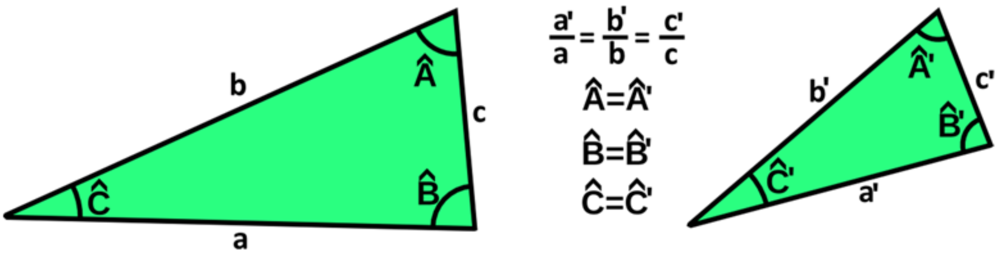
Treballarem la semblança amb la figura més simple que existeix: el **triangle**.

Les dues condicions per a la semblança són la forma i la grandària. Un triangle és una figura formada per tres costats i tres angles.

Dos triangles tenen la mateixa forma si els tres angles són iguals. Si un sol angle és distint tenen distinta forma, i es tracta de triangles no semblants.

Quan dos triangles tenen la mateixa forma, (els mateixos angles), podem parlar de triangles semblants. Si són semblants, la proporció entre els seus costats és constant, com afirma el teorema de Tales.

Dos triangles **semblants** tenen tots els angles iguals i els costats proporcionals.



Per a reconèixer dos triangles semblants no cal conèixer tots els costats i angles, és prou amb què es complisca algun dels següents **criteris de semblança.**

Criteris de semblança de triangles

Perquè dos triangles siguen semblants, han de tindre els seus tres angles iguals. Açò es compleix als següents tres casos.

Dos triangles són semblants sí:

Primer: Tenen dos angles iguals.

En tindre dos angles iguals i ser la suma dels angles d’un triangle igual a 180º, el tercer angle és necessàriament igual. Amb el que ambdós triangles es poden superposar i portar a la posició de triangles en posició Tales. Dos dels seus costats són llavors coincidents i el tercer és paral·lel.

Segon: Tenen els tres costats proporcionals.

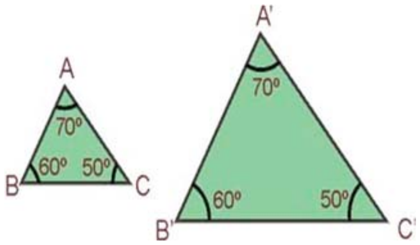
Si els seus tres costats són proporcionals, necessàriament són semblants pel teorema de Tales.

Tercer: Tenen dos costats proporcionals i l’angle que formen és igual.

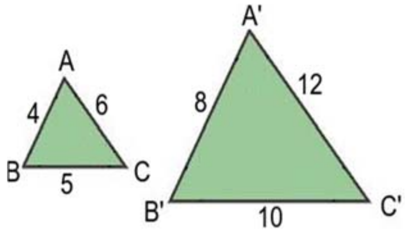
Com acabem de veure, la demostració dels criteris de semblança es basa en els criteris d'igualtat de triangles. Ja saps que dos triangles són iguals si tenen els seus tres costats iguals i els seus tres angles iguals, però no cal que es verifiquen aqueixes sis igualtats perquè ho siguen. Basta per exemple que tinguen un costat i dos angles iguals. Així, es pot construir un triangle igual a un dels donats en *posició Tales* amb el segon i deduir la semblança.

Exemple

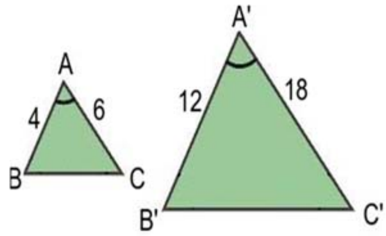
- *Els triangles de les il·lustracions són semblants. Cada una de les figures verifica un dels criteris de semblança de triangles.*



Primer criteri



Segon criteri



Tercer criteri

Activitats resoltes

- *Calcula els valors desconeguts b' i c'* perquè els triangles de dades *a* = 9 cm, *b* = 6 cm, *c* = 12 cm. *a*' = 6 cm siguen semblants:

Sabem que ha de verificar-se que: *a*/*a'* = *b*/*b'* = *c*/*c'*. En substituir es té: 9/6 = 6/*b'* = 12/*c'* i en aïllar: *b'* = 6·6/9 = 4 cm, *c'* = 12·6/9 = 8 cm.

Activitats proposades

16. Indica si són semblants els següents parells de triangles:

a) Un angle de 60º i un altre de 40º. Un angle de 80º i un altre de 60º.
b) Triangle isòsceles amb angle desigual de 80º. Triangle isòsceles amb angle igual de 50º.
c) *A* = 30º, *b* = 8 cm, *c* = 10 cm. *A'*= 30º, *b'* = 4 cm, *c'* = 5 cm
d) *a* = 7 cm, *b* = 8 cm, *c* = 12 cm. *a'* = 14 cm, *b'* = 16 cm, *c'* = 25 cm

17. Calcula el valor desconegut perquè els triangles siguen semblants:

a) *a* = 12 cm, *b* = 15 cm, *c* = 10 cm. *a*' = 5 cm, *b*', *c*'?

b) *A* = 37º, *b* = 10 cm, c = 12 cm. *A'* = 37º, *b*' = 10 cm, *c*'?

18. Un triangle té costats de 12 cm, 14 cm i 8 cm. Un triangle semblant a ell té un perímetre de 80 cm. Quant mesuren els seus costats?

3.2. Semblança de triangles rectangles: Teorema de l'altura i del catet

Els triangles rectangles tenen un angle de 90º, així que perquè dos triangles rectangles siguen semblants n'hi ha prou amb que tinguen un altre angle igual.

Si dos triangles rectangles tenen un angle, diferent del recte, igual, són semblants i els seus costats són proporcionals.

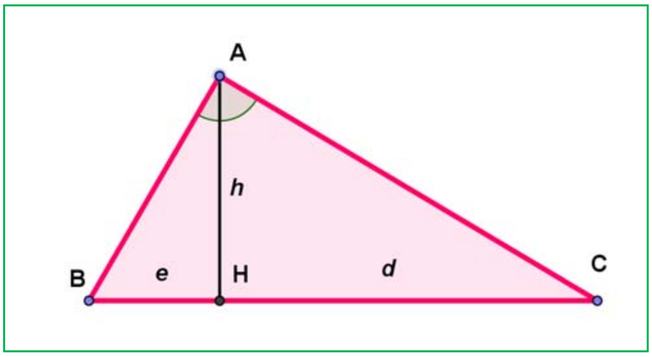
A causa d'açò, l'altura sobre la hipotenusa, divideix al triangle rectangle en dos nous triangles rectangles que són semblants, (perquè comparteixen un angle amb el triangle de partida).

Utilitzant ara que els costats són proporcionals podem escriure dos teoremes, el teorema de l'altura i el del catet.

Teorema de l'altura

A un triangle rectangle l'altura és mitja proporcional entre els segments en què divideix a la hipotenusa:

$$\frac{h}{e}=\frac{d}{h}.$$



En efecte, siguen les longituds de l'altura *AH* = *h*, del segment *BH* = *e*, i del segment *HC* = *d*, en ser el triangle *ABC* semblant al triangle *ABH* i al seu torn semblant al triangle *AHC*, aquests dos triangles són semblants, per la qual cosa els seus costats són proporcionals, per la qual cosa:

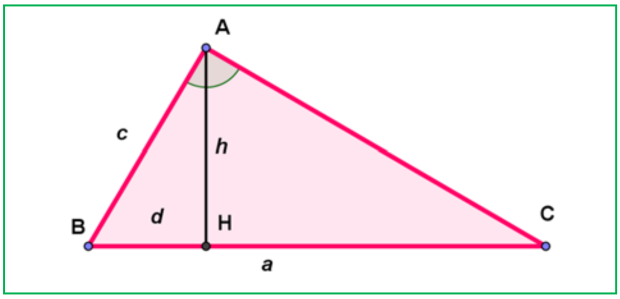
Catet menor de *AHC* / catet menor de *ABH* = Catet major de *AHC* / catet major de *ABH* $\Rightarrow$

$$\frac{h}{e}=\frac{d}{h},$$

o el que és el mateix:

$$h^2 = e \cdot d.$$

Teorema del catet



A un triangle rectangle un catet és mitja proporcional entre la hipotenusa i la seua projecció sobre ella:

$$\frac{a}{c}=\frac{c}{d}.$$

Per la semblança dels triangles *ABC* i *HBA* sabem que els costats corresponents són proporcionals, per la qual cosa:

hipotenusa del triangle gran *ABC* / hipotenusa del triangle xicotet *AHB* = catet menor del triangle gran *ABC* / catet menor del triangle xicotet *AHB*

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{d},$$

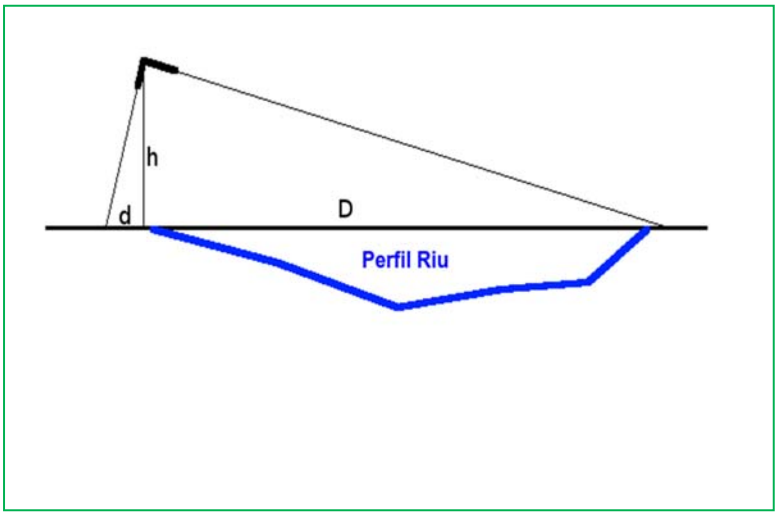
o el que és el mateix:

$$c^2 = a \cdot d.$$

Activitats resoltes

- *Ens han encarregat mesurar l'ample d'un riu en diversos punts del curs. En la majoria dels punts hem pogut mesurar-lo amb una corda, però hi ha un eixamplament en què no podem mesurar-lo així. Inventarem un mètode que aplica el teorema de l'altura que ens permeta mesurar-lo.*

Anem a una botiga i comprem dos punters làser. A continuació els unim formant un angle de 90º. Després anem a la part del riu que volem mesurar i enfoquem un d'ells cap a l'altra vora fins que vegem el punter. Ara busquem el punter de l'altre làser que havíem col·locat a 90º i marquem sobre el sòl.



Després de mesurar l'altura a què sostenim els punters i la distància de la base fins al segon punter, tenim les dades següents:

d = 5 cm i h = 150 cm.

Aplicant el teorema de l'altura, sabem que:

$h^2 = d \cdot D$, així que $D = h^2/d$.

Per tant $D = 150^2/5 = 4500$ cm = 45 metres.

Activitats proposades

19. Els catets d'un triangle rectangle mesuren 3 i 4 cm, quant mesura l'altura sobre la hipotenusa?

20. Els catets d'un triangle rectangle mesuren 3 i 4 cm, quant mesura la projecció sobre la hipotenusa de cada un d'aqueixos catets?

21. Dibuixa els tres triangles semblants per al triangle rectangle de catets 3 i 4 en posició de Tales.

22.

3.3. Aplicació informàtica per a la comprensió de la semblança

La semblança en un pentàgon regular

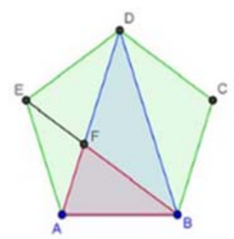
En aquesta activitat es va a utilitzar el programa *Geogebra* per a realitzar un estudi de la semblança de diferents triangles que podem dibuixar en un pentàgon regular calculant de forma aproximada la seua raó de semblança. També es comprova la relació que existeix entre la raó entre les àrees de dues figures semblants i la seua raó de semblança.

Activitats resoltes

- *Càlcul de la raó de semblança*

Obri una finestra de *Geogebra,* al menú **Visualitza** desactiva **Eixos** i **Quadrícula** i al menú **Opcions** tria en **Retolat** l'opció **Només els nous punts**.

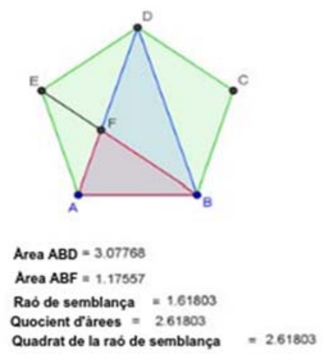
- Determina amb **Nou punt** els punts *A* i *B* i dibuixa amb polígon **regular** el pentàgon que té com a vèrtexs els punts *A* i *B*.
- Dibuixa amb **Polígon** el triangle *ABD, utilitza* **Segment** per a dibuixar la diagonal *BE* i defineix el punt *F* com a punt **d'intersecció de dos objectes** (les diagonals *AD* i *BE*), determina amb **polígon** el triangle *ABF*. És convenient canviar el color de cada un dels polígons dibuixats per a reconèixer-los en la finestra algebraica, per a açò utilitza l'opció **Propietats** del menú contextual en situar el curs sobre el polígon o sobre el seu nom en la finestra algebraica

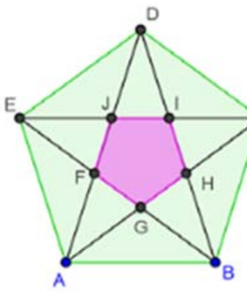


- Els triangles *ABD* i *ABF* són semblants. Saps demostrar per què?

Recorda que és prou demostrar que tenen dos angles iguals i com els angles interiors d'un pentàgon regular mesuren 108º, és evident que en el triangle isòsceles *ABD* l'angle desigual mesura 36º i els angles iguals 72º. En el triangle *ABF*, l'angle *ABF* mesura 36º i el *BAF,* 72º per tant els triangles són semblants i a més l'angle *BFA* també mesura 72º.

- Utilitza la ferramenta de *Geogebra* que permet mesurar angles per a comprovar aquests resultats.
- Per a trobar la raó de semblança calculem el quocient entre dos costats corresponents d'aquests triangles, per exemple, *BD* i *AD*, és a dir entre una diagonal i un costat del pentàgon. Per a fer-ho amb Geogebra definim en la línia d'entrada la variable **raódesemblança = f/a** (*f* és una diagonal i *a* un costat), observem en la finestra algebraica que aquest valor és 1,62, si augmentem el nombre de decimals en **Arrodoniment** del menú **Opcions** comprovem que aquest valor és una aproximació del nombre d'or.
  - *La raó de semblança i el quocient entre les àrees.*
- Defineix en la línia d'entrada la variable **quocientdeàrees =polígon2/polígon3**, sent el polígon2 el triangle *ABD* i el polígon3 *l'ABF*
- Defineix, també, en la línia d'entrada la variable **quadratraódesemblança = raódesemblança^2.** Observa com el quadrat de la raó de semblança coincideix amb el quocient entre les àrees. Augmenta el nombre de decimals per a comprovar que aquests valors coincideixen.
- Utilitza la ferramenta **Àrea** perquè aparega en la pantalla gràfica l'àrea dels triangles *ABD* i *ABF*, i **Inserir text** perquè apareguen els valors de la raó de semblança, el quocient entre les àrees i el quadrat de la raó de semblança.



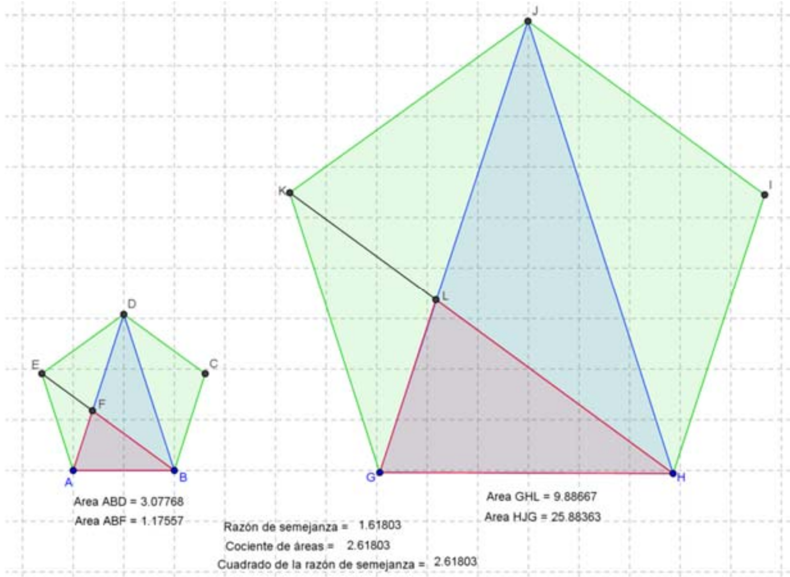


Activitats proposades

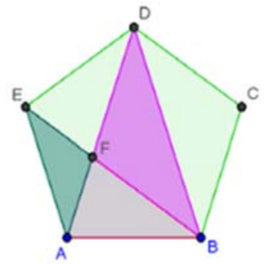
Comprova aquests resultats en un altre pentàgon

23. Dibuixa un pentàgon *GHIJK* de la mateixa manera que has construït l'ABCDE *amb* la condició que la longitud dels seus costats siga el triple de què ja està construït. Per a facilitar la tasca pots activar la **quadrícula** i moure els punts inicials.

a) Calcula les àrees dels triangles *HJG* i *GHL*, la seua raó de semblança, el quocient entre les seues àrees i el quadrat de la raó de semblança.



b) Comprova que la raó de semblança, el quocient entre les àrees i el quadrat de la raó de semblança dels triangles *GHJ* i *GHL* del pentàgon *GHIJK* coincideixen amb les dels triangles *ABD* i *ABF* del pentàgon *ABCDE.*

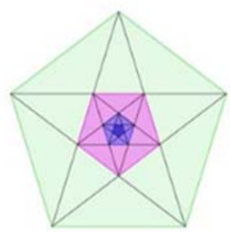


24. Calcula les àrees dels dos pentàgons i relaciona el seu quocient amb el quadrat de la raó de semblança.

25. *Altres triangles del pentàgon.* Investiga si els triangles *AFE* i *BDF són* semblants i si ho són calcula la seua raó de semblança, el quocient entre les seues àrees i compara aquest resultat amb el quadrat de la raó de semblança.

26. *Pentàgon dins d'un pentàgon.* Dibuixa el pentàgon *FGHIJ* que es forma en el pentàgon *ABCDE* en traçar les seues diagonals ambdós són semblants perquè són polígons regulars. Calcula la raó de semblança i el quocient entre les seues àrees. Observa els triangles AGF i ABD són semblants?

27. Observa els pentàgons regulars de la figura: a) Són tots semblants? b) Et pareix que el procés de dibuixar pentàgons dins de pentàgons és infinit Per què? c) Quina és la successió de les raons de semblança entre el pentàgon major i cada un dels següents?

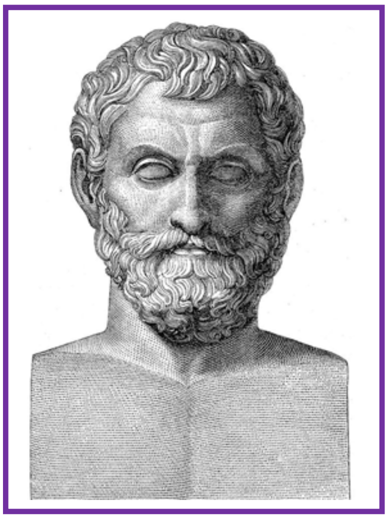


CURIOSITATS. REVISTA

Tales de Milet (ca. 624 – 548 a.C.)

Sobre la vida de Tales se sap molt poc. Els antics opinaven que era excepcionalment intel·ligent sent considerat un dels Set Savis de Grècia, i que havia viatjat i conegut els sabers d'Egipte i Babilònia.

Però no hi ha cap document que certifique cap cosa sobre la seua vida, i és probable que no deixara cap obra escrita a la seua mort. Eudemo de Rodes va escriure una història de les Matemàtiques, que es va perdre, però algú va fer un resum d'una part, que també es va perdre, i al segle V d.C. Proclo va incloure part del dit resum en un comentari sobre els elements d'Euclides. Això és el que sabem sobre Tales i la Matemàtica!



Hi ha moltes llegendes sobre la seua vida com que:

* Es va fer ric llogant unes almàsseres durant un any en què la collita d'oliva va ser abundant

* Va ser mercader de sal

*Va ser observador de les estreles. Un dia, per mirar les estreles va caure a un pou, i quan es reien d'això va dir que volia conéixer les coses del cel, però que el que estava als seus peus se li escapava.

* Va ser un home d'estat

* Va dirigir una escola de nàutica

A més de dir-se d'ell que:

* va predir un eclipsi,

* va construir un canal per a desviar les aigües d'un riu perquè el creuara un exèrcit

i també es diu que va utilitzar la semblança de triangles per a

* calcular l'altura de la piràmide de Keops,

* la distància d'un vaixell a la platja

¿Sabrías el teu resoldre aqueixos

Sobre matemàtiques se li atribueixen diversos teoremes, encara que alguns ja eren coneguts pels babilonis, però potser ell va utilitzar un raonament deductiu. Per exemple, es diu que va demostrar:

* Un angle inscrit en una semicircumferència és un angle recte

* Un diàmetre divideix a un cercle en dues parts iguals

* Un triangle isòsceles té dos angles iguals

* Dos triangles amb dos angles iguals i un costat igual, són iguals

* Els angles oposat pel vèrtex són iguals

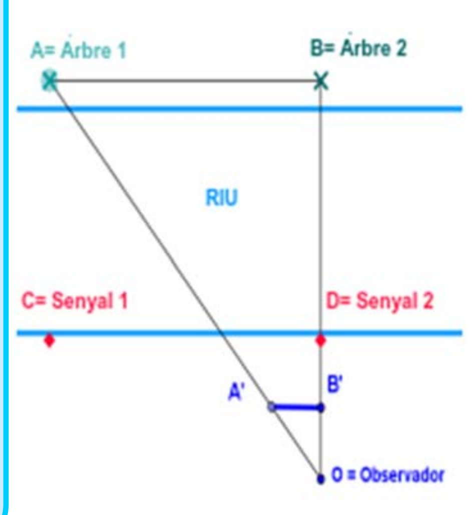
Alguns problemes

- Calcula l'altura de la Piràmide de Keops sabent que la seua ombra medeix 175,93 metres i que, al mateix temps l'ombra d'un bastó d'altura un metre, medeix 1,2 metres.

✗ Calcula l'altura d'un arbre sabent que la seua ombra medeix 15 metres i que, al mateix temps l'ombra d'un pal d'altura un metre, medeix 1,5 metres.

☑ * Uns exploradors troben un riu i volen construir una passarel·la per a creuar-lo, però, com conéixer l'amplària del riu, si no podem anar a l'altra vora? Pensa! Pensa! Segur que se t'acuden moltes bones idees, millors que la que t'anem a comentar a continuació.

*Busques a la vora oposada dos arbres, (o dues roques, o …), *A* i *B*. Col·locant-te a la teua vora perpendicular a ells, marques dos senyals, (Senyal 1 i Senyal 2), i mesures així la distància entre eixos dos arbres. Ara mesurant angles dibuixes dos triangles semblants. Un, a la teua vora, el pots mesurar, i per semblança de triangles calcules els costats de l'altre.



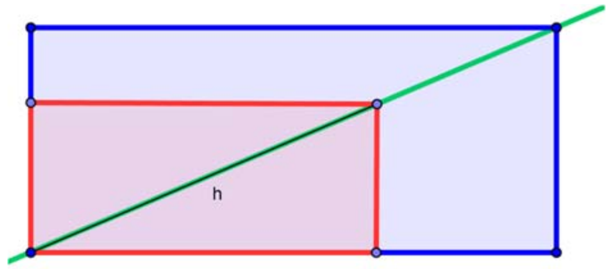
Imagina que la distància *CD* és de 10 metres, que *A’B’* medeix 2 metres i que *OB’* = 2,5 m. Quant mesura *OB*? Si *OD* medeix 5 metres, quant mesura l'amplària del riu?

Pensa! Pensa!

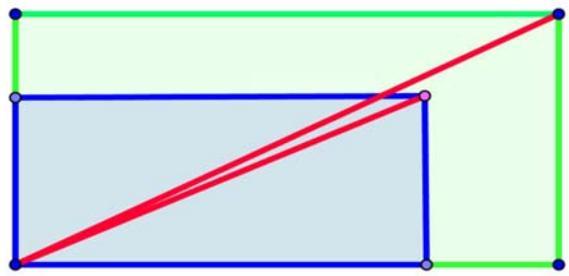
Com podries conéixer a quina distància de la costa està un vaixell?

Rectangles semblants

Per a saber si dos rectangles són semblants es col·loquen un sobre l'altre, amb dos costats comuns, i si tenen la mateixa diagonal, són semblants



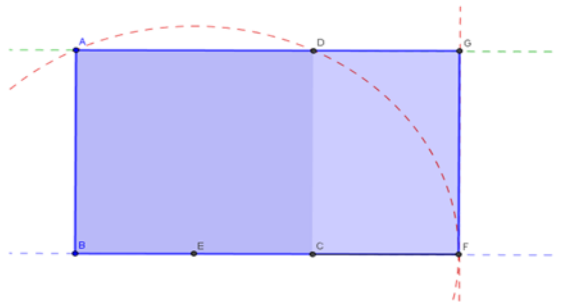
Rectangles semblants



No són semblants

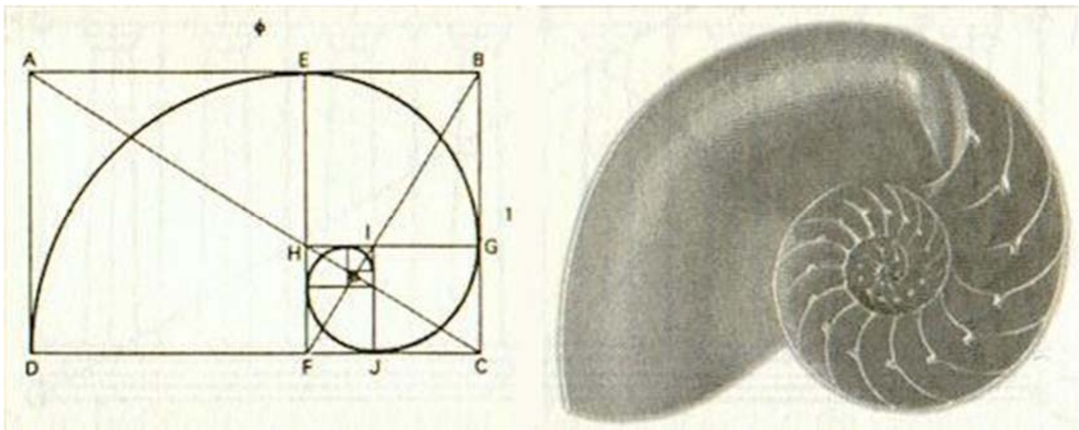
Rectangle auri

Un rectangle és auri si els seus costats estan en proporció àuria. Tots els rectangles auris són semblants.

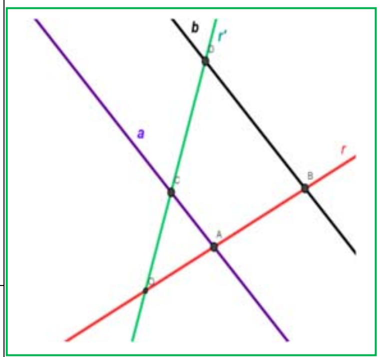
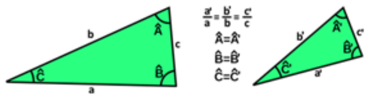
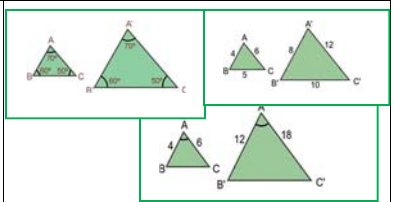
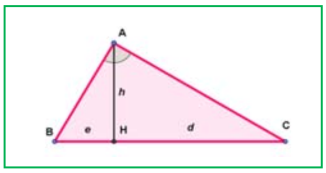
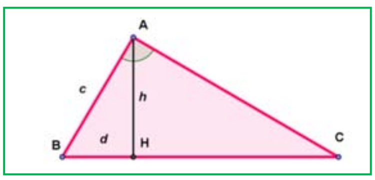


Si a un rectangle auri se li lleva (o afig) un quadrat, s'obté un rectangle semblant al de partida i per tant també auri.

Pots construir una espiral amb rectangles auris com indica la figura



RESUM

Figures semblants	Si les longituds d'elements corresponents són proporcionals.	
Raó de semblança	Coeficient de proporcionalitat	
Semblança en longituds, àrees i volums	Si la raó de semblança entre les longituds d'una figura és $\boldsymbol{k}$, llavors la raó entre les seues àrees és $\boldsymbol{k^2}$ i entre els seus volums és $\boldsymbol{k^3}$.	
Teorema de Tales	Donades dues rectes, *r* i *r'*, que es tallen al punt *O*, i dues rectes paral·leles entre si, *a* i *b*. La recta *a* talla a les rectes *r* i *r'* als punts *A* i *C*, i la recta *b* talla a les rectes *r* i *r'* als punts *B* i *D*. Llavors: $$\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{BD}$$	
Recíproc del teorema de Tales	Si $\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{BD}$ llavors ***a*** i ***b*** són paral·leles.	
Semblança de triangles	Dos triangles són **semblants** si tenen tots els angles iguals i els costats proporcionals.	
Criteris de semblança de triangles	Dos triangles són semblants sí: **Primer:** Tenen dos angles iguals. **Segon:** Tenen els tres costats proporcionals. **Tercer:** Tenen dos costats proporcionals i l'angle que formen és igual.	
Teorema de l'altura	En un triangle rectangle l'altura és mitja proporcional dels segments en què divideix a la hipotenusa: $\frac{h}{e}=\frac{d}{h}$	
Teorema del catet	En un triangle rectangle un catet és mitja proporcional entre la hipotenusa i la seua projecció sobre ella: $\frac{a}{c}=\frac{c}{d}$.	

EXERCICIS I PROBLEMES

Figures semblants

1. Busca fotografies, plans, fotocòpies, figures a escala, etc. pren mesures i determina les raons de semblança. Calcula les mesures reals i comprova que la raó de semblança obtinguda és correcta.
2. En un mapa de carretera d'escala 1:3000 la distància entre dues ciutats és de 2,7 cm. Calcula la distància real entre les dites ciutats.
3. Un microscopi té un augment de 500X, quina grandària té la imatge que es veu per l'objectiu si observem un parameci de 0,034 mm de diàmetre?
4. Pèricles va morir de pesta l'any 429 a. C. Consultat l'oracle d'Apol·lo havien de construir un altar en forma de cub el volum del qual duplicara exactament el que ja existia. Quin havia de ser la raó de proporcionalitat dels costats? És possible construir exactament un cub amb la dita raó?
5. En una fotografia una persona que sap que medeix 1,75 m té una alçària de 2,3 cm. Apareix un arbre que en la fotografia mesura 5,7 cm, quant medeix a la realitat?
6. Quant mesura el costat d'un icosaedre la superfície del qual és el triple del d'un altre icosaedre de costat 4 cm?
7. Suposem que una bresquilla és una esfera, i que el seu os té un diàmetre que és un terç del de la bresquilla. Quant és major la polpa de la bresquilla que el seu os?
8. Són semblants tots els quadrats? I tots els rombes? I tots els rectangles? Quan són semblants dos rombes? I dos rectangles?
9. L'àrea d'un rectangle és 10 cm^2, i un dels seus costats medeix 2 cm, quina àrea té un rectangle semblant a l'anterior en el que el costat corresponent medeix 1 cm? Quin perímetre té?
10. Són semblants totes les esferes? I els icosaedres? I els cubs? I els dodecaedres? Quan són semblants dos cilindres?
11. L'aresta d'un octaedre medeix 7,3 cm, i la d'un altre 2,8 cm. Quina relació de proporcionalitat hi ha entre les seues superfícies? I entre els seus volums?
12.
13. La mesura normalitzada A$ té la propietat que partim el rectangle per la mitat de la seua part més llarga, el rectangle que s'obté és semblant al primer. Duplicant, o dividint s'obtenen les dimensions dels rectangle A1, A2, A3, A4, A5…. El rectangle A4 medeix 29,7 cm x 21 cm. Determina les mesures d'A3 i de A5.
14. Dibuixa un pentàgon regular i traça les seues diagonals. Tens un nou pentàgon regular. Quina és la raó de semblança?
15. Dibuixa al teu quadern un pentàgon regular i traça les seues diagonals. Quant mesuren els angles del triangle format per un costat del pentàgon i les dues diagonals del vèrtex oposat? Aquest triangle es denomina *triangle auri*, perquè en dividir el costat major entre el menor s'obté el nombre d'or. En la figura que has traçat hi ha altres triangles semblants a l'auri, quina relació de proporcionalitat hi ha entre ells?
16. El mapa a escala 1:1500000 d'una regió té una àrea de 1600 cm^2, quant mesura la superfície verdadera de la dita regió?

17. Eratòstenes d'Alexandria (276 – 196 a. C.) va observar que a Siena la direcció dels rajos solars era perpendicular a la superfície de la Terra al solstici d'estiu. Va viatjar seguint el curs del Nil una distància de 790 km (5 mil estadis) i va mesurar la inclinació dels rajos del sol al solstici d'estiu a Alexandria que era de α = 7º 12'. Va utilitzar la proporcionalitat: $2\pi R/790 = 360º/\alpha$ per a determinar el radi de la Terra. Què va obtindre?

18. Tenim un conjunt de rectangles de costats: A: 4 i 7, B: 2 i 5, C: 8 i 14, D: 4 i 10, E: 3 i 7, F: 9 i 21. Indica quins són semblants. Dibuixa i retalla el rectangle A, i dibuixa la resta de rectangles. Superposa el rectangle A amb els altres rectangles i explica que observes amb el que és semblant. Quina longitud té l'altre costat d'un rectangle semblant a A el costat menor del qual mesure 10 cm?

El teorema de Tales

19. Divideix un segment qualsevol en 5 parts iguals utilitzant el teorema de Tales. Sabries fer-ho per un altre procediment exacte?

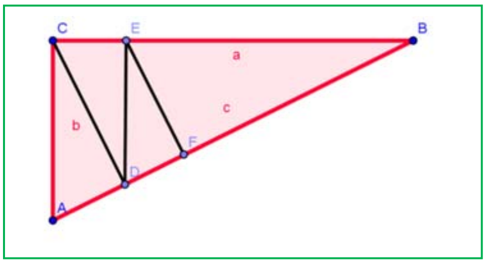
20. Divideix un segment qualsevol en 3 parts proporcionals a 2, 3, 5 utilitzant el teorema de Tales.

21. Si algú mesura 1'75 m i la seua ombra mesura 1 m, calcula l'altura de l'edifici l'ombra del qual mesura 25 m a la mateixa hora.

22. Un rectangle té una diagonal de 75 m. Calcula les seues dimensions sabent que és semblant a un altre rectangle de costats 36 m i 48 m.

23. Siguen *OAC* i *OBD* dos triangles en posició Tales. El perímetre *d'OBD* és 200 cm, i *OA* medeix 2 cm, *AC* medeix 8 cm i *OC* medeix 10 cm. Determina les longituds dels costats d'OBD.

24. Al museu de Bagdad es conserva una taula en què apareix dibuixat un triangle rectangle *ABC*, de costats *a* = 60, *b* = 45 i *c*= 75, subdividit en 4 triangles rectangles menors *ACD*, *CDE*, *DEF* i *EFB*, i l'escriba ha calculat la longitud del costat *AD*. Utilitza el teorema de Tales per a determinar les longituds dels segments *AD*, *CD*, *DE, DF, EB, BF* i *EF*. Calcula l'àrea del triangle *ABC* i dels triangles *ACD, CDE, DEF* i *EFB*.



Semblança de triangles

25. El triangle rectangle *ABC* té un angle de 54º i un altre triangle rectangle té un angle de 36º. Podem assegurar que són semblants? Raona la resposta.

26. La hipotenusa d'un triangle rectangle medeix 25 cm i l'altura sobre la hipotenusa medeix 10 cm, quant medeixen els catets?

27. Indica si són semblants els següents parells de triangles:

a) Un angle de 50º i un altre de 40º. Un angle de 90º i un altre de 40º.

b) Triangle isòsceles amb angle desigual de 40º. Triangle isòsceles amb un angle igual de 70º.

c) *A* = 72º, *b* = 10 cm, *c* = 12 cm. *A'*= 72º, *b'* = 5 cm, *c'* = 6 cm.

d) *a* = 7 cm, *b* = 5 cm, *c* = 8 cm. *a'* = 21 cm, *b'* = 15 cm, *c'* = 24 cm.

28. Calcula el valor desconegut perquè els triangles siguen semblants:

a) a = 12 cm, b = 9 cm, c = 15 cm. a' = 8 cm, b', c'?
b) A = 45º, b = 6 cm, c = 4 cm. A' = 45º, b' = 24 cm, a'?

29. Les longituds dels costats d'un triangle són 7 cm, 9 cm i 10 cm. Un triangle semblant a ell té un perímetre de 65 cm. Quant mesuren els seus costats?

30. L'ombra d'un edifici medeix 23 m, i la del primer pis 3 m. Sabem que l'altura d'aqueix primer pis és de 2,7 m, quant medeix l'edifici?

31. Demostra que en dos triangles semblants les bisectrius són proporcionals.

32. Un triangle rectangle isòsceles té la hipotenusa de longitud 9 cm, igual a un catet d'un altre triangle semblant al primer. Quant valen les àrees d'ambdós triangles?

33. Unint els punts mitjans dels costats d'un triangle s'obté un altre triangle. Són semblants? Quina relació hi ha entre els seus perímetres? I entre les seues àrees?

34. L'altura i la base d'un triangle isòsceles mesuren respectivament 7 i 5 cm; i és semblant a un altre de base 12 cm. Calcula l'altura del nou triangle i les àrees d'ambdós.

35. Els triangles següents són semblants. Esbrina la mesura dels angles que falten sabent que:

a) Són rectangles i un angle del primer triangle medeix 52º.

b) Dos angles del primer triangle medeixen 30º i 84º.

36. Els triangles següents són semblants. Esbrina les mesures que falten sabent que:

a) Els costats del primer triangle mesuren 10 m, 15 m i z m. Els del segon: x m, 9 m i 8 m.
b) Els costats del primer triangle mesuren 4 m, 6 m i 8 m. Els del segon: 6 m, x m i z m.
c) Un costat del primer triangle mesura 12 cm i l'altura sobre el dit costat 6 cm. El costat corresponent del segon mesura 9 cm, i l'altura x cm
d) Un triangle isòsceles té l'angle desigual de 35º i el costat igual de 20 cm i el desigual de 7 cm; l'altre té el costat igual de 5 cm. Quant mesuren els seus altres costats i angles?

37. Enuncia el primer criteri de semblança de triangles per a triangles rectangles.

38. Els egipcis usaven una corda amb nucs, tots a la mateixa distància, per a obtindre angles rectes. Formaven triangles de longitud 3, 4 i 5. Per què? Els indis i els xinesos usaven un procediment semblant encara que utilitzant cordes amb els nucs separats en 5, 12 i 13, i també 8, 15 i 17. Per què? Escriu les longituds dels costats de triangles semblants als indicats.

39. Es vol calcular l'altura d'un arbre per al que es mesura la seua ombra: 13 m, i l'ombra d'un pal de 1'2 m de longitud, 0,9 m. Quina altura té l'arbre?

40. Ara no podem usar el procediment de l'ombra perquè l'arbre és inaccessible (hi ha un riu al mig) però sabem que està a 30 m de nosaltres. Com ho faries? Josep ha agafat un llapis que mesura 10 cm i ho ha col·locat a 50 cm de distància. D'aquesta manera ha aconseguit veure alineat la base de l'arbre amb un extrem del llapis, i la punta de l'arbre amb l'altre. Quant mesura aquest arbre?

41. Arquimedes calculava la distància a què estava un vaixell de la costa. Amb una esquadra ABC alineava els vèrtexs BC amb el vaixell, C', i coneixia l'alçària del penya-segat fins al vèrtex B. Dibuixa la situació, determina quins triangles són semblants. Calcula la distància del vaixell si BB' = 50 m, BA=10 cm, AC = 7 cm.

AUTOAVALUACIÓ

1. En un mapa de carretera d'escala 1:1200 la distància entre dos pobles és de 5 cm. La distància real entre els dits pobles és de:

a) 60 m b) 60 km c) 240 km d) 240 cm

2. Si un microscopi té un augment de 1000X, quina grandària (aparent) penses que tindrà la imatge que es veja per l'objectiu si observem una cèl·lula de 0,01 mm de diàmetre

a) 1 cm b) 1 mm c) 0,1 cm d) 100 mm

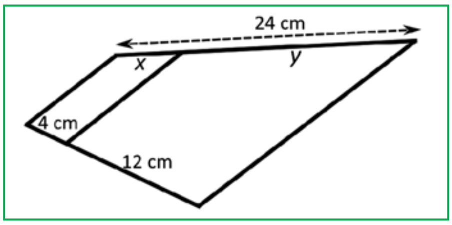
3. Volem construir un quadrat d'àrea doble d'un d'un metre de costat. El costat del nou quadrat ha de mesurar:

a) 2 metres b) $\sqrt{2}$ metres c) $\sqrt[3]{2}$ metres d) 1,7 metres

4. Siguen *OAC* i *OBD* dos triangles en posició *Tales*. El perímetre *d'OBD* és 50 cm, i *OA* medeix 1 cm, *AC* medeix 1,5 cm i OC medeix 2,5 cm. Les longituds dels costats *d'OBD* són:

a) *OB* = 10 cm, *OD* = 20 cm, *BD* = 30 cm b) *OB* = 25 cm, *OD* = 10 cm, *BD* = 15 cm

c) *OB* = 10 cm, *OD* = 15 cm, *BD* = 25 cm d) *OB* = 15 cm, *OD* = 25 cm, *BD* = 30 cm.



5. En la figura adjunta els valors de *x* i *y* són:

a) 6 i 12 cm b) 5 i 19 cm c) 6 i 18 cm d) 5 i 20 cm

6. Els triangles *ABC* i *DEF* són semblants. Els costats *d'ABC* medeixen 3, 5 i 7 cm, i el perímetre de *DEF* medeix 60 m. Els costats de *DEF* medeixen:

a) 6, 10 i 14 cm b) 12, 20 i 28 cm c) 9, 15 i 21 m d) 12, 20 i 28 m

7. Dos triangles rectangles són proporcionals si:

a) Tenen els catets proporcionals

b) Tenen un angle igual

c) Tenen un angle diferent del recte igual

d) Les seues àrees són proporcionals

8. Els triangles *ABC* i *DEF* són semblants. L'angle A medeix 30º, i B, 72º. Quant medeixen els angles *D*, *E* i *F*?

a) *D* = 72º, *E* = 78º i *F* = 30º b) *D* = 30º, *E* = 88º i *F* = 72º c) *D* = 30º, *E* = 72º i *F* = 68º

9. L'altura d'un triangle rectangle divideix a la hipotenusa en dos segments de longitud 5 i 4 cm, quant medeix l'altura?

a) 5,67 cm b) 4 cm c) 6 cm d) 5 cm

10. La projecció d'un catet sobre la hipotenusa d'un triangle rectangle medeix 4 cm, i la hipotenusa 9 cm, quant medeix el catet?

a) 7 cm b) 5 cm c) 5,67 cm d) 6 cm.

Matemàtiques orientades a les ensenyances acadèmiques:

4tB ESO
Capítol 8:
TRIGONOMETRIA

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Mª Fernanda Ramos Rodríguez y Mª Milagros Latasa Asso

Revisora: Nieves Zuasti

Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF, Mª Milagros Latasa y Fernanda Ramos

Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

Índex

Resum

Etimològicament *trigonometria* significa *mesurament de triangles*. El seu objectiu és establir les relacions matemàtiques entre les mesures dels costats d'un triangle amb les amplituds dels seus angles, de manera que resulte possible calcular les unes mitjançant les altres.

Els primers escrits relacionats amb ella que apareixen a la història es remunten a l'època babilònica de què es conserven uns llistons amb mesuraments de costats i angles de triangles rectangles. La trigonometria s'aplica des dels seus orígens en agrimensura, navegació i astronomia ja que permet calcular distàncies que és impossible obtindre per mesurament directe.

En aquest capítol estudiaràs les primeres definicions trigonomètriques i coneixeràs algunes de les seues aplicacions.

Inscripció babilònica. Museu Pèrgam de Berlín

Autores: Fernanda Ramos Rodríguez i Milagros Latasa Asso
Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

1. SISTEMES DE MESURA D'ANGLES

1.1. Sistema sexagesimal

Recordaràs que al sistema sexagesimal de mesura d'angles, la unitat és el **grau sexagesimal** que es defineix com la part de circumferència que queda en dividir per tres-cents seixanta un angle complet. Té dos divisors que són el **minut** que és dividir un grau en seixanta parts i el **segon** que és dividir un minut en seixanta parts. Recorda la notació que s'empra en aquest sistema:

1º = 1 grau sexagesimal; 1´ = 1 minut sexagesimal; 1´´ = 1 segon sexagesimal.

Com a conseqüència de la definició:

1 angle complet = 360 º; 1 º = 60 ´; 1 ´ = 60 ´´.

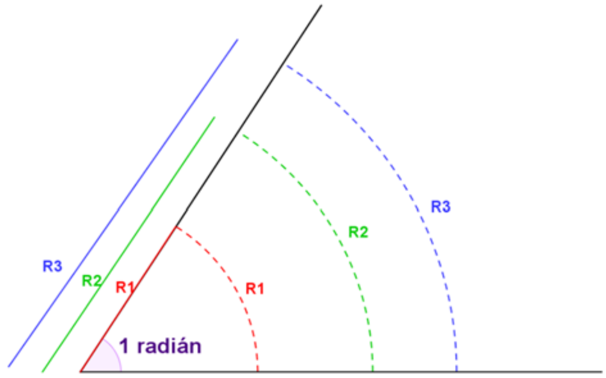
1.2. Sistema internacional

Al sistema internacional, la unitat de mesura d'angles és el **radian.**

El **radian** és un angle tal que qualsevol arc que se li associe mesura exactament el mateix que el radi utilitzat per a traçar-lo.

Es denota per **rad.**

A un angle complet li correspon un arc de longitud 2πR, a un radian un arc de longitud R, llavors:



Nr de radians d'un angle complet = $\frac{2\pi R}{R} = 2\pi$ **rad**

I la relació amb el sistema sexagesimal l'obtenim a partir de l'angle complet:

1 angle complet = 360 º = 2π rad ⇔ 1 angle pla = 180 º = π rad

Per aquesta relació s'obté que 1 rad ≅ 57, 216 º ≅ 57 º 12 ´ 58 ´´.

Activitats proposades

1. Expressa en radians les mesures següents: 45 º, 150 º, 210 º, 315 º.
2. Expressa en graus sexagesimals: $\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{5}$ i $\frac{3\pi}{8}$ radians.
3. Dos angles d'un triangle mesuren respectivament 40 º i $\frac{\pi}{3}$ radians. Calcula en radians el que mesura el tercer angle.
4. Un angle d'un triangle isòsceles mesura $\frac{5\pi}{6}$ radians. Calcula en radians la mesura dels altres dos.
5. Dibuixa un triangle rectangle isòsceles i expressa en radians la mesura de cada un dels seus angles.

Autores: Fernanda Ramos Rodríguez i Milagros Latasa Asso
Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

RAONS TRIGONOMÈTRIQUES D'UN ANGLE AGUT

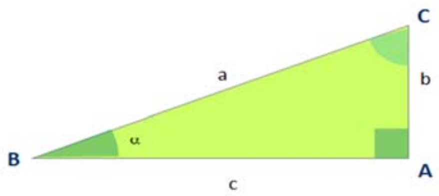
2.1. Raons trigonomètriques directes d'un angle agut

Comencem per considerar un angle agut qualsevol, utilitzarem una lletra grega α (alfa) per a denotar-lo.

És sempre possible construir un triangle rectangle de manera que α siga un dels seus angles. Siga $\overset{\Delta}{ABC}$ un d'aquests triangles i situem al vèrtex B, l'angle α.

Es defineixen les raons trigonomètriques directes de l'angle α: sinus, cosinus i tangent com:

$$sinusde\alpha = sin\alpha = sin\hat{B} = \frac{catetoposat}{hipotenusa} = \frac{b}{a}$$
$$cosinusde\alpha = \cos\alpha = \cos\hat{B} = \frac{catetadjacent}{hipotenusa} = \frac{c}{a}$$
$$tangentde\alpha = \tan\alpha = \tan\hat{B} = \frac{catetoposat}{catetadjacent} = \frac{b}{c}$$

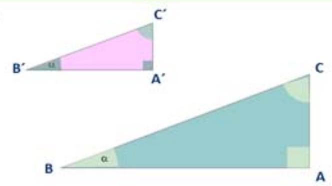


També s'utilitzen les expressions tg α i tag α com a símbols de la tangent de α.

Aquesta definició no depén del triangle triat. Anem a demostrar-ho. Per a això considerem un altre triangle rectangle $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ amb α al vèrtex B'.

Sovint s'anomenen els angles d'un triangle amb la mateixa lletra majúscula que el vèrtex corresponent.

Segons el segon criteri de semblança de triangles $\overset{\Delta}{ABC}$ i $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ són semblants perquè tenen dos angles iguals 90º i α. Per tant els costats d'ambdós són proporcionals:



$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} \Rightarrow \\ \frac{a}{a'} = \frac{c}{c'} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'} \Rightarrow \\ \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'} \Rightarrow \end{cases}$$

El sinus és indepent del triangle en què és mesure

El cosinus és indepent del triangle en què és mesure

La tangent és indepent del triangle en què és mesure

Activitats resoltes

- *Calcula les raons trigonomètriques dels angles aguts d'un triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ els catets de les quals mesuren b = 30 cm i c = 40 cm.*

- Calculem en primer lloc el valor de la hipotenusa $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 30^2 + 40^2 = 900 + 1600 = 2500 \Rightarrow$ $a = \sqrt{2500} = 50$ cm. $\sin\hat{B} = \frac{30}{50} = \frac{3}{5} = 0{,}6; \cos\hat{B} = \frac{40}{50} = \frac{4}{5} = 0{,}8$; $\tan\hat{B} = \frac{30}{40} = \frac{3}{4} = 0{,}75$.
  $\sin\hat{C} = \frac{40}{50} = \frac{4}{5} = 0{,}8$; $\cos\hat{C} = \frac{30}{50} = \frac{3}{5} = 0{,}6; \tan\hat{C} = \frac{40}{30} = \frac{4}{3}$.

Autores: Fernanda Ramos Rodríguez i Milagros Latasa Asso
Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

Textos Marea Verde

2.2. Relacions fonamentals

Si coneixem una de les raons trigonomètriques de l'angle α, és possible calcular les raons trigonomètriques restants, gràcies a les dues relacions trigonomètriques fonamentals següents:

PRIMERA RELACIÓ FONAMENTAL:

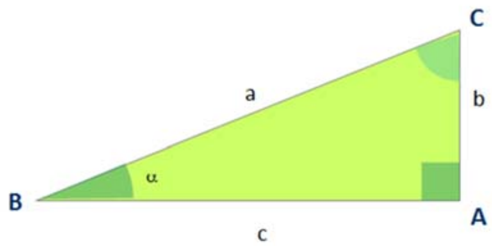
$$(sin\alpha)^2 + (cos\alpha)^2 = 1$$

que també veuràs escrita com a$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$atés que les potències de les raons trigonomètriques solen escriure's amb el seu exponent sobre la ultima lletra de la seua notació i a continuació el nom de l'angle

La demostració és senzilla. Tornem al triangle inicial del paràgraf anterior:

Pel teorema de Pitàgores $a^2 = b^2 + c^2$

Dividim a ambdós membres entre a^2:



$$\frac{a^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} sin\alpha = \dfrac{b}{a} \\ cos\alpha = \dfrac{c}{a} \end{array}\right\} \Rightarrow 1 = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} \Rightarrow 1 = (sin\alpha)^2 + (cos\alpha)^2$$

SEGONA RELACIÓ FONAMENTAL:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Al mateix triangle anterior:

$$\frac{sin\alpha}{cos\alpha} = \frac{b}{a} : \frac{c}{a} = \frac{b \cdot a}{c \cdot a} = \frac{b}{c} = tan\alpha$$

Activitats resoltes

- *Sabent que α és un angle agut, calcula les restants raons trigonomètriques de α als casos següents: a)$sin\alpha = \frac{1}{5}$ b)$tan\alpha = 3$*

a) $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \frac{1}{25} + cos^2\alpha = 1 \Rightarrow$ $cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25} \Rightarrow \quad cos\,\alpha = \sqrt{\frac{24}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$

b) $\left.\begin{array}{l} sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \\ tan\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha} = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \\ sin\alpha = 3cos\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow (3cos\alpha)^2 + cos^2\alpha = 1 \Rightarrow 10cos^2\alpha = 1 \Rightarrow cos^2\alpha =$

$$\Rightarrow cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

per tant:$sin\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

2.3. Altres raons trigonomètriques. Altres relacions

Altres raons trigonomètriques d'un angle α són la cosecant, la secant i la cotangent de α i les seues notacions són *cosec* α, *sec* α, *cotan* α.

$$\mathrm{cosec}\alpha = \frac{1}{sin\alpha};\mathrm{sec}\alpha = \frac{1}{cos\alpha};\ \mathrm{cotan}\alpha = \frac{1}{tan\alpha}.$$

Amb la seua definició, apareixen noves identitats trigonomètriques, entre les que destaquen:

a) $sin\alpha \cdot \mathrm{cosec}\alpha = 1$; $cos\alpha \cdot \mathrm{sec}\alpha = 1$; $tan\alpha \cdot \mathrm{cotan}\alpha = 1$.

b) $\mathrm{sec}^2\alpha = 1 + tan^2\alpha$

c) $\mathrm{cosec}^2\alpha = 1 + \mathrm{cotan}^2\alpha$

La primera d'elles és evident per definició. La segona i la tercera tenen una demostració molt pareguda per la qual cosa trobaràs només una de les dues i l'altra com a activitat proposada

Demostració b):

A partir de$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, dividim a ambdós membres entre $cos^2\alpha$:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$$

Activitats proposades

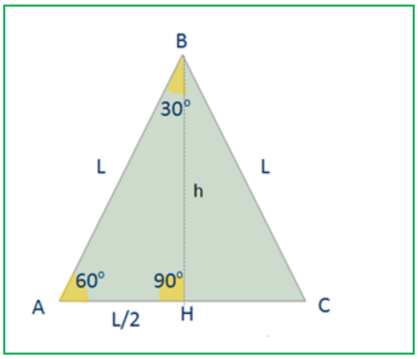
6. Sabent que $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, calcula els raons trigonomètriques secant, cosecant i cotangent de α.

7. Si *cotan* α = 2, calcula les cinc raons trigonomètriques de l'angle α.

8. Demostra que $cosec^2\alpha = 1 + cotan^2\alpha$

2.4. Raons trigonomètriques de 30º, 45º i 60º.

RAONS TRIGONOMÈTRIQUES DE 30º I 60 º



Considerem un triangle equilàter de costat *L.* Tracem l'altura corresponent al costat sobre el qual es recolza. Amb això queda dividit en dos triangles rectangles iguals els angles del qual mesuren 90 º, 30 º i 60 º. A més la hipotenusa mesura *L* i un dels seus catets L/2. Pel teorema de Pitàgores podem obtindre el que ens falta:

$$h=\sqrt{L^2-\left(\frac{L}{2}\right)^2}=\sqrt{L^2-\frac{L^2}{4}}=\sqrt{\frac{3L^2}{4}}=\frac{\sqrt{3}\,L}{2}$$

Calculem les raons trigonomètriques de 30º i 60 º al triangle $\overset{\Delta}{ABH}$:

$sin60º=\frac{h}{L}=\frac{\sqrt{3}L}{2}:L=\frac{\sqrt{3}L}{2L}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad sin30º=\frac{L}{2}:L=\frac{L}{2L}=\frac{1}{2}$

$cos60º=\frac{L}{2}:L=\frac{L}{2L}=\frac{1}{2}$ $\quad cos30º=\frac{h}{L}=\frac{\sqrt{3}L}{2}:L=\frac{\sqrt{3}L}{2L}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$tan60º=h:\frac{L}{2}=\frac{2h}{L}=\frac{2\sqrt{3}L}{2}:L=\frac{2\sqrt{3}L}{2L}=\sqrt{3}$ $tan30º=\frac{L}{2}:h=\frac{L}{2}:\frac{\sqrt{3}L}{2}=\frac{2L}{2\sqrt{3}L}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

RAONS TRIGONOMÈTRIQUES DE 45º

Ara treballarem amb un triangle rectangle isòsceles. Posem que els dos catets tenen una longitud *L*. Utilitzem novament el teorema de Pitàgores i obtenim el valor de la hipotenusa *x* en funció de *L*:

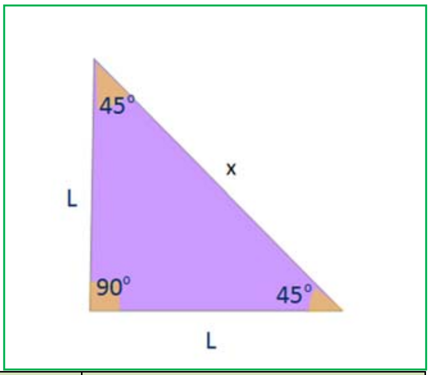
$$x=\sqrt{L^2+L^2}=\sqrt{2L^2}=L\sqrt{2}$$

Ara podem calcular ja les raons trigonomètriques de 45 º

$$sin45º=\frac{L}{x}=\frac{L}{L\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$cos45º=\frac{L}{x}=\frac{L}{L\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tan45º=\frac{L}{L}=1$$



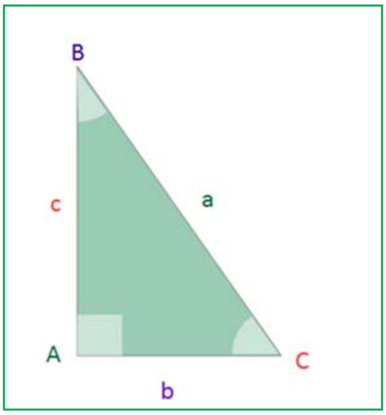
	Sinus	Cosinus	Tangent
30º	1/2	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
45º	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60º	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$

Autores: Fernanda Ramos Rodríguez i Milagros Latasa Asso
Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

2.5. Resolució de triangles rectangles.

- **Resoldre un triangle** és calcular les amplituds dels tres angles i les longituds dels tres costats.
- Al cas que el triangle seguisca rectangle podem considerar tres casos depenent de les hipòtesis o dades inicials. En cada un d'ells hi ha diverses formes d'obtindre la solució. Descriurem una en cada cas:

Primer cas: És coneixen un angle $\hat{B}$i la hipotenusa *a*:



- Com$\hat{A}$= 90º $\hat{C}$= 90º – $\hat{B}$
- Ara a partir dels raons trigonomètriques de$\hat{B}$o$\hat{C}$, obtenim els costats que ens falten. També podem utilitzar el teorema de Pitàgores quan coneguem un dels dos catets.

$$sin\widehat{B} = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a sin\widehat{B} cos\widehat{B} = \frac{c}{a} \Rightarrow c = a cos\widehat{B}$$

Segon cas: És coneixen un angle$\hat{B}$ i un catet *b*:

- Com $\hat{A} = 90º \hat{C} = 90º - \hat{B}$
- També en aquest cas les raons trigonomètriques de$\hat{B}o\hat{C}$serveixen per a obtindre almenys un dels costats i pot utilitzar-se el teorema de Pitàgores quan trobem el valor d'un costat mes. Una forma de resolució és:

$$tg\widehat{B} = \frac{b}{c} \Rightarrow c = \frac{b}{tg\widehat{B}} \qquad sin\widehat{B} = \frac{b}{a} \Rightarrow a = \frac{b}{sin\widehat{B}}$$

Tercer cas: És coneixen dos costats:

- En aquest cas utilitzarem en primer lloc el teorema de Pitàgores per a calcular el tercer costat, tant si el que falta és un catet com si és la hipotenusa. Seguint amb el triangle de la figura:
- $a^2 = b^2 + c^2$

Per a obtindre el primer dels angles aguts, calcularem en primer lloc una de les seues raons trigonomètriques, per exemple$sin\widehat{B} = \frac{b}{a}$i per a conéixer el valor de l'angle, aïllem escrivint:$\widehat{B} = \arcsin\frac{b}{a}$que vol dir "angle *el sinus del qual és*$\frac{b}{a}$" i que s'obté amb la calculadora activant el comandament ***sin^{-1}*** el que aconseguirem amb la seqüència 

$\frac{b}{a}$.

Anàlogament, si partim de $\cos\hat{B} = \frac{c}{a}$ o bé $tg\,\hat{B} = \frac{b}{c}$ l'angle *B* és $\hat{B} = arc\cos\frac{c}{a}$ o $\hat{B} = arc\tan\frac{b}{c}$

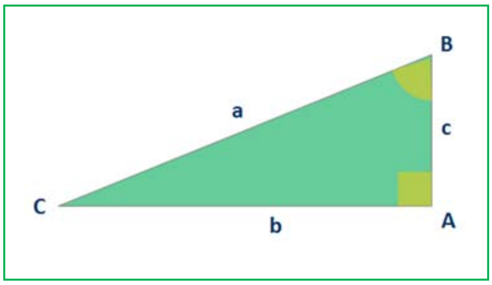
- que obtindrem amb els seqüències 

$\frac{c}{a}$ o bé 

$\frac{b}{c}$.

Activitats resoltes

- *Resoldre el triangle ABC amb angle recte en A als dos casos següents:*
- *a)* $\hat{B} = 42^o$ *i la hipotenusa a = 12 m.*
- *b) Els catets mesuren 12 dm i 5 dm.*



a) Càlcul dels angles: $\hat{A} = 90^o$; $\hat{B} = 42^o$; $\hat{C} = 90^o - 42^o = 48^o$

Càlcul dels costats: $sen\,42^o = \frac{b}{12} \Rightarrow b = 12\,sen\,42^o \approx$ 8,03 m.

Autores: Fernanda Ramos Rodríguez i Milagros Latasa Asso
Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

- $cos42^{o} = \frac{c}{12} \Rightarrow c = 12cos42^{o} \approx 8{,}92\text{m}$

b) Càlcul de la hipotenusa: $a^2 = b^2 + c^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169 \Rightarrow a = \sqrt{169} = 13$ dm

Càlcul dels angles: $\hat{A} = 90^o$; $\hat{B} = arc\tan\frac{12}{5} = 67^o\ 22'\ 48''$; $\hat{C} = 90^o - 67^o\ 22'\ 48'' = 22^o\ 37'\ 12''$.

2.6. Aplicacions de la resolució de triangles rectangles al càlcul de distàncies

Resolució de triangles rectangles

La resolució de triangles rectangles pot aplicar-se directament en alguns casos al càlcul de distàncies.

Activitats resoltes

- Calcular l'altura d'un arbre sabent que determina una ombra de 3,5 metres quan els rajos *de sol formen un angle de 30º amb el sòl.*

La raó trigonomètrica de 30º que relaciona el costat conegut i el que ens demanen és la tangent:

$$\tan 30^o = \frac{h}{3{,}5} \Rightarrow h = 3{,}5\tan 30^o = 3{,}5.\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 2{,}02 \text{ m.}$$

Tècnica de la doble observació

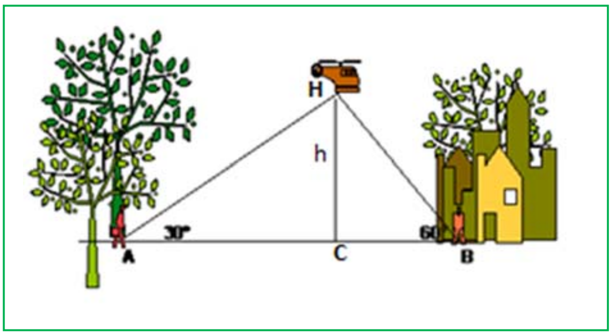
S'utilitza per a calcular altures d'objectes als què resulta difícil arribar com per exemple, edificis, muntanyes, objectes a l'extrem oposat d'un carrer, etc.…

Precisem d'un instrument per a mesurar angles. Habitualment s'utilitza l'anomenat **teodolit**. La tècnica consisteix a prendre la mesura de l'angle que forma una visual dirigida al punt més alt de l'objecte a mesurar amb l'horitzontal, des de dos punts distints i situats a una distància coneguda per a nosaltres.

Apareixen aleshores dos triangles rectangles amb un costat comú que és l'altura a mesurar. És possible plantejar un sistema d'equacions en el plantejament del qual és clau la definició de les raons trigonomètriques d'un angle agut. Vegem alguns exemples:

Activitats resoltes

- Dues persones, separades **30** metres veuen un helicòpter. La persona situada en A dirigeix una visual a la base del mateix que forma amb el sòl un angle de **30º**. També la persona situada en B dirigeix la seua vista al mateix punt obtenint un angle de **60º.** A quina altura vola l'helicòpter?



- Siga h aquesta altura. Les visuals i el sòl determinen dos triangles rectangles $\overset{\Delta}{AHC}$ i $\overset{\Delta}{BHC}$ als que:
- $AC + CB = 30 \Rightarrow CB = 30 - AC$ i si fem $AC = x$

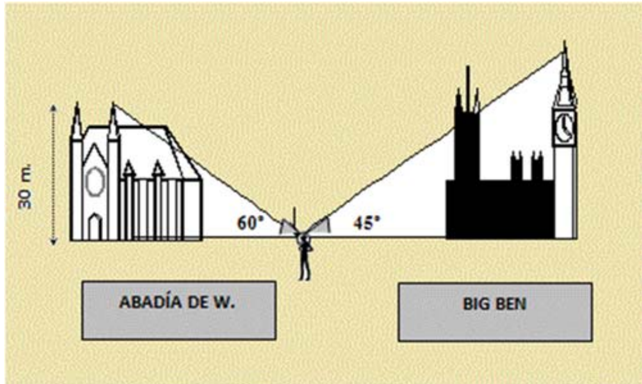
Autores: Fernanda Ramos Rodríguez i Milagros Latasa Asso
Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

- $\tan 30º = \frac{h}{x} \Rightarrow \quad h = x \tan 30º = \frac{\sqrt{3}}{3}x$
- $\tan 60º = \frac{h}{30-x} \Rightarrow \quad h = (30-x)\ \tan 60º = \sqrt{3}\,(30-x)$

$\Bigg\}\ x = \frac{(30-x).3}{} \Rightarrow 4x = 90 \Rightarrow$

- $\Rightarrow \quad x = \frac{90}{4} = \frac{45}{2} = 22{,}5\,m$. Substituint, arribem a la solució $h = \frac{\sqrt{3}}{3}x = \frac{\sqrt{3}}{3}.\frac{45}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{2} \approx 13\,m$

- En un viatge d'alumnes de 4º d'E.S.O. a Londres, alguns dels viatgers van fer pràctiques de trigonometria. (Ja saps, sempre hi ha un teodolit a mà).



En conéixer que les torres de l'Abadia de Westminster tenen **30** metres d'altura, van decidir aprofitar els seus coneixements per a calcular l'altura de la coneguda torre Big Ben. Des d'un punt intermedi entre ambdós edificis es veu el punt més alt de l'Abadia amb angle de **60º,** i el Big Ben amb un angle de **45º**. Si la distància entre les bases de les torres dels dos edificis és de **50** metres, quin va ser el resultat dels seus càlculs?, a quina distància és trobava de cada edifici? (Nota: Les dades son totalment ficticies)

Al triangle esquerre determinat per *l'Abadia*: $\tan 60º = \frac{30}{x} \Rightarrow \quad x = \frac{30}{\tan 60^o} = \frac{30}{\sqrt{3}} = \frac{30\sqrt{3}}{3} = 10\sqrt{3}\ m$

Al triangle que determina el *Big Ben*:

$\tan 45º = \frac{h}{50-10\sqrt{3}} \Rightarrow h = \left(50-10\sqrt{3}\right).\tan 45^o \Rightarrow$

$\Rightarrow h = 50 - 10\sqrt{3}\ \ m \approx 32{,}7\ \ m$

Autores: Fernanda Ramos Rodríguez i Milagros Latasa Asso
Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

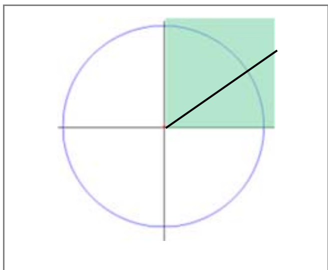
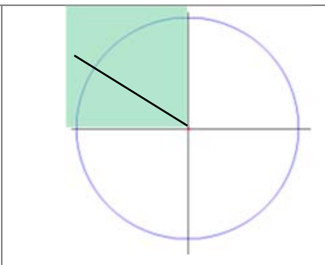
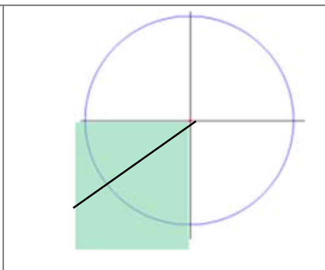
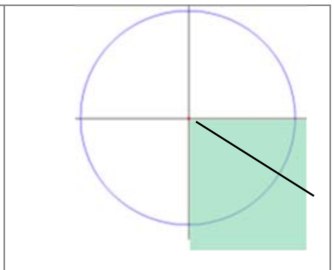
3. RAONS TRIGONOMÈTRIQUES D'UN ANGLE QUALSEVOL

3.1. Circumferència trigonomètrica. Quadrants

S'anomena **circumferència trigonomètrica** o **goniomètrica** a una circumferència de radi unitat centrada a l'origen de coordenades.

És possible representar qualsevol angle a la circumferència trigonomètrica. Per això sempre es pren un costat fix que és la semirecta definida per la part positiva de l'eix d'abscisses; el segon costat és la semirecta variable que corresponga segons la seua mesura. El sentit d'un angle es mesura *d'OX* + a la semirecta variable que determina la seua amplitud. S'entén que per a un angle negatiu coincideix amb el dels agulles d'un rellotge analògic i per a un angle positiu, el contrari.

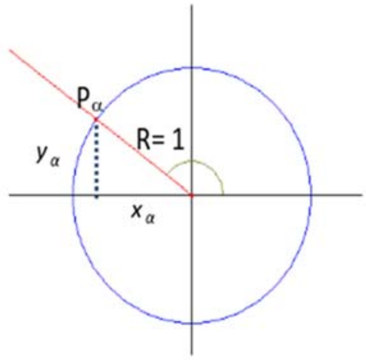
La circumferència trigonomètrica divideix al pla en quatre regions que es denominen quadrants.

			
PRIMER QUADRANT	SEGON QUADRANT	TERCER QUADRANT	QUART QUADRANT

3.2. Raons trigonomètriques d'un angle qualsevol

La semirecta variable que defineix un angle α a la circumferència trigonomètrica és clau per a la definició d'un angle qualsevol. La dita semirecta talla a la circumferència a un punt $P_\alpha\,(x_\alpha, y_\alpha)$ a partir del que és defineix:

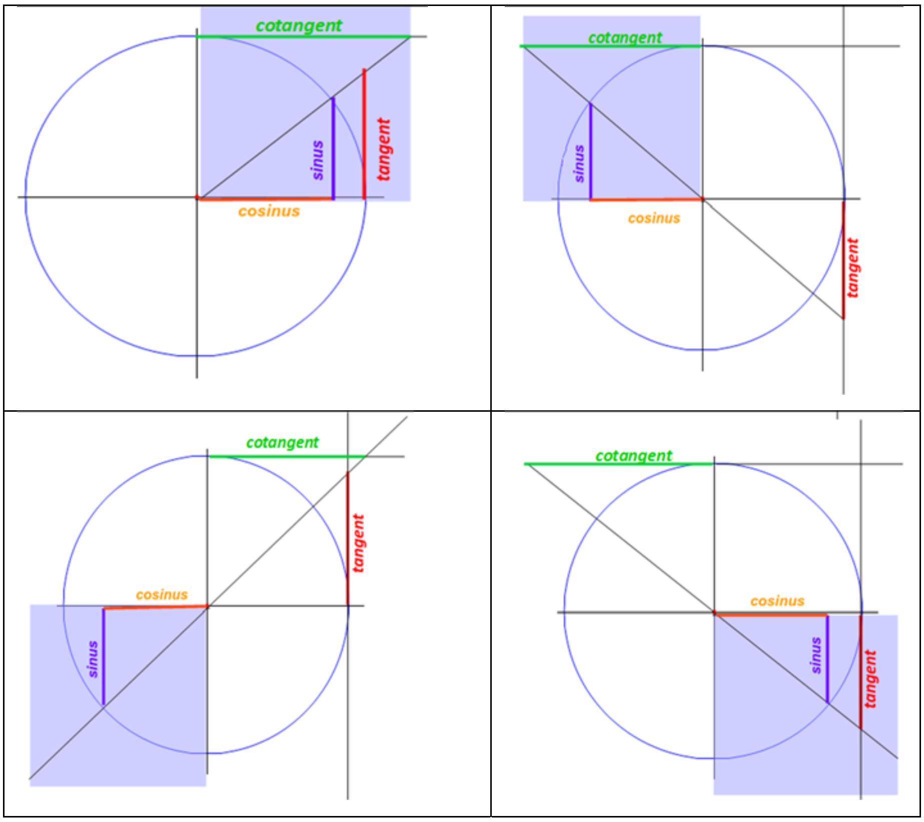
$$sin\alpha = \frac{y_\alpha}{R} = \frac{y_\alpha}{1} = y_\alpha;\ cos\alpha = \frac{x_\alpha}{R} = \frac{x_\alpha}{1} = x_\alpha; tag\alpha = \frac{y_\alpha}{x_\alpha}.$$



Es conserva la definició per a angles aguts que són angles del primer quadrant i s'amplia a angles de qualsevol signe i amplitud.

A més, aquesta definició permet tindre una representació geomètrica del sinus i el cosinus d'un angle que coincideix amb els segments y_α , x_α, ordenada i abscissa del punt P_α. Les rectes tangents a la circumferència goniomètrica als punts (1,0) i (0,1) proporcionen també representacions geomètriques de la tangent i cotangent que són els segments determinats per aquestes tangents geomètriques, l'eix *OX* i la semirecta corresponent a cada angle.

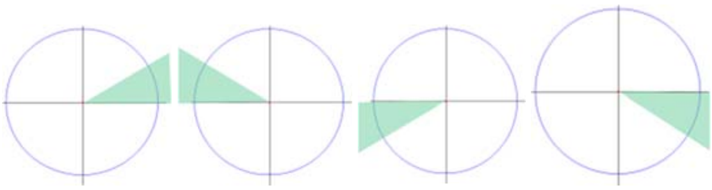
Autores: Fernanda Ramos Rodríguez i Milagros Latasa Asso
Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia



3.3. Reducció al primer quadrant

Els angles α dels quadrants segon, tercer o quart poden relacionar-se amb angles aguts β que podem situar al primer quadrant i que tenen raons trigonomètriques amb els mateixos valors absoluts que els angles α inicials.

Aquestes relacions permeten obtindre les raons trigonomètriques de qualsevol angle α en funció d'un del primer quadrant β. En cada cas calcularem l'amplitud de la zona ombrejada.



Als casos en què desitgem obtindre quins angles corresponen a una raó trigonomètrica donada, resulta especialment important ja que, encara que fem ús de la calculadora, aquesta ens tornarà un únic valor i, no obstant això, hi ha infinits angles solució d'aquest problema. Gràcies a allò què descriurem en aquest epígraf, podrem trobar-los sense dificultat.

Has de pensar que els angles d'aquests quadrants no sempre són positius ni tenen un valor absolut menor que 360º.

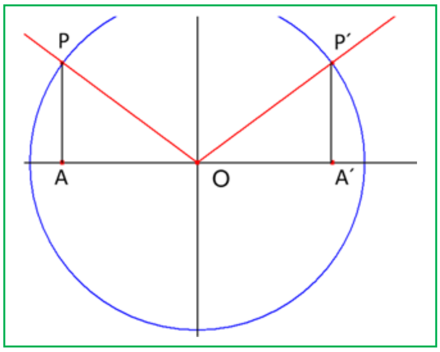
Observa que, si el seu valor absolut és major que 360º, equival al nombre de voltes que t'indique el quocient sencer de la divisió entre 360º més el residu de la divisió.

El signe d'un angle depén només de la forma de recórrer-lo (mesurat des de la part positiva de l'eix OX *cap a* la semirecta que el defineix).

Per a fer més còmoda l'explicació considerarem que a partir de P és mesuren les raons trigonomètriques de l'angle α i a partir de P´ les de l'angle β

Autores: Fernanda Ramos Rodríguez i Milagros Latasa Asso
Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

ANGLES DEL SEGON QUADRANT



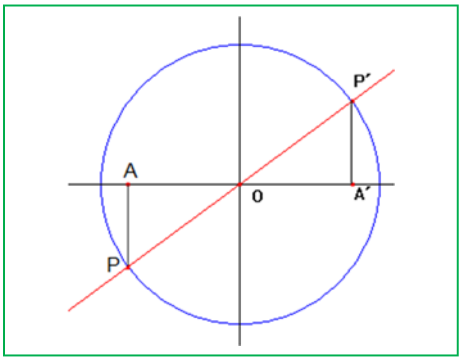
Construïm els triangles rectangles *OPA* i *OP´A´* iguals de manera que la hipotenusa seguisca en ambdós casos el radi de la circumferència goniomètrica i a més β = angle *AOP* = angle *A´OP´*

$$sin\alpha = \overline{AP} = \overline{A'P'} = sin\beta$$

$$cos\alpha = \overline{AO} = -\overline{A'O'} = -cos\beta$$

I dividint membre a membre, obtenim: $tan\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha} = \frac{sin\beta}{-cos\beta} = -tan\beta$

ANGLES DEL TERCER QUADRANT



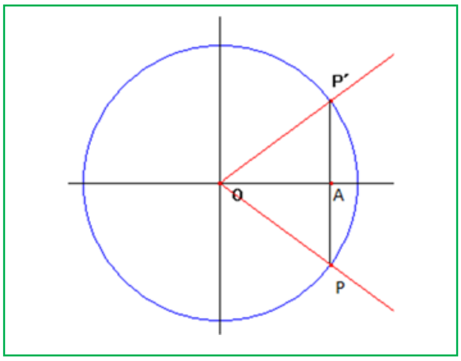
També en aquest cas els triangles rectangles *OPA* i *OP´A´* son iguals. La seua hipotenusa és el radi de la circumferència goniomètrica i els seus catets els segments determinats pels coordenades dels punts *P* i *P´*. La construcció és realitza a més de manera que β = angle *AOP* = angle *A´OP´*

$$sin\alpha = \overline{AP} = -\overline{A'P'} = -sin\beta$$

$$cos\alpha = \overline{AO} = -\overline{A'O'} = -cos\beta$$

I dividint membre a membre, obtenim: $tan\alpha = \frac{-sin\alpha}{-cos\alpha} = \frac{sin\beta}{cos\beta} = tan\beta$

ANGLES DEL QUART QUADRANT



Finalment construïm els triangles rectangles *OPA* i *OP´A* iguals de manera anàloga a allò que s'ha descrit als dos casos anteriors, observant que, en aquest cas *A* = *A´*.

$$sin\alpha = \overline{AP} = -\overline{AP'} = -sin\beta$$

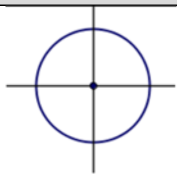
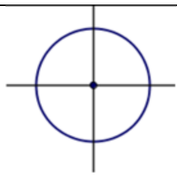
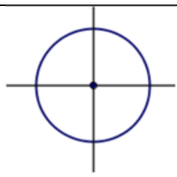
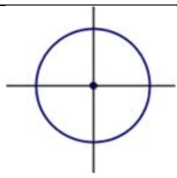
$$cos\alpha = \overline{AO} = cos\beta \text{ en ambdós casos}$$

I dividint membre a membre, obtenim:

$$tan\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha} = \frac{-sin\beta}{cos\beta} = -tan\beta$$

Activitats proposades

9. Situa al quadrant que corresponga i expressa en funció d'un angle agut, el sinus, cosinus i tangent dels angles següents:

Angle	*quadrant*	*sinus*	*cosinus*	*tangent*
165^o				
-230^o				
315^o				
3625^o				

10. Utilitza la calculadora i allò que s'ha aprés en aquest epígraf per a trobar tots els angles positius menors que 360º el sinus dels quals és de 0,4.

11. Ídem tots els angles negatius menors en valor absolut que 360º la tangent dels quals val 2.

12. Ídem tots els angles compresos entre 360º i 720º el cosinus dels quals val 0,5.

ANGLES DETERMINATS PELS SEMIEIXOS.

Els angles $0^o + 360^o n$; $90^o + 360^o n$; $180^o + 360^o n$; $270^o + 360^o n$ estan determinats per semieixos de coordenades i els seues raons trigonomètriques es mesuren a partir de punts dels eixos. Aquests punts són, respectivament $P_1\,(1,0)$, $P_2\,(0,1)$, $P_3\,(-1,0)$ i $P_4\,(0,-1)$ amb el que s'obté amb facilitat:

$sin(0º + 360º\text{n}) = 0; cos(0º + 360º\text{n}) = 1; tan(0º + 360º\text{n}) = 0$.

$sin(90º + 360º\text{n}) = 1; cos(90º + 360º\text{n}) = 0; tan(90º + 360º\text{n})$ no existeix

$sin(180º + 360º\text{n}) = 0; cos(180º + 360º\text{n}) = -1; tan(180º + 360º\text{n}) = 0$

$sin(270º + 360º\text{n}) = -1; cos(270º + 360º\text{n}) = 0; tan(270º + 360º\text{n})$no existeix

Autores: Fernanda Ramos Rodríguez i Milagros Latasa Asso
Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

4. RESOLUCIÓ DE TRIANGLES QUALSSEVOL

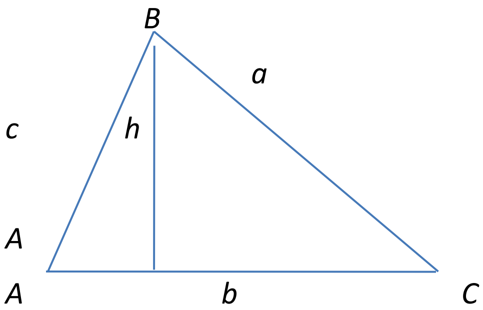
Les definicions de sinus, cosinus i tangent que hem aplicat en triangles rectangles no és poden aplicar en triangles no rectangles. Per a resoldre triangles no rectangles s'apliquen dos teoremes molt importants en trigonometria: el teorema del sinus i teorema del cosinus.

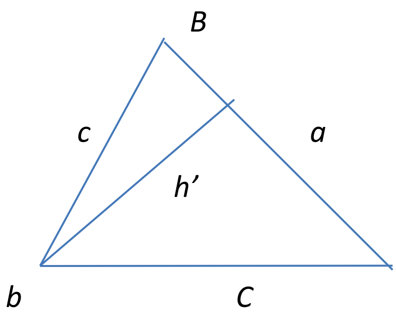
4.1. Teorema del sinus

El **teorema del sinus** afirma que en tot triangle és compleix que els costats son proporcionals als sinus dels angles oposats. És a dir,

$$\frac{a}{sen\hat{A}}=\frac{b}{sen\hat{B}}=\frac{c}{sen\hat{C}}$$

Considerem el triangle *ABC* i tracem dues altures qualssevol *h* i *h´* que divideixen al triangle no rectangle a dos triangles rectangles.





Aplicant la definició de sinus als triangles en què intervé *h*:

$$sin\hat{A}=\frac{h}{c}\longrightarrow h=c\,sin\hat{A}$$

$$sin\hat{C}=\frac{h}{a}\longrightarrow h=a\,sin\hat{C}$$

Per tant:

$$c\,sin\hat{A}=a\,sin\hat{C}\longrightarrow\frac{a}{sin\hat{A}}=\frac{c}{sin\hat{C}}$$

Aplicant la definició de sinus als triangles en què intervé *h'*:

$$sin\hat{B}=\frac{h'}{c}\longrightarrow h'=c\,sin\hat{B}$$

$$sin\hat{C}=\frac{h'}{b}\longrightarrow h'=b\,sin\hat{C}$$

Per tant:

$c\,sin\hat{B}=b\,sin\hat{C}\longrightarrow\frac{b}{sin\hat{B}}=\frac{c}{sin\hat{C}}$

Llavors, és dedueix que: $\frac{a}{sin\hat{A}}=\frac{b}{sin\hat{B}}=\frac{c}{sin\hat{C}}$

Notes

Si el triangle és obtusangle, un raonament anàleg ens porta a les mateixes formules.

Autores: Fernanda Ramos Rodríguez i Milagros Latasa Asso
Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

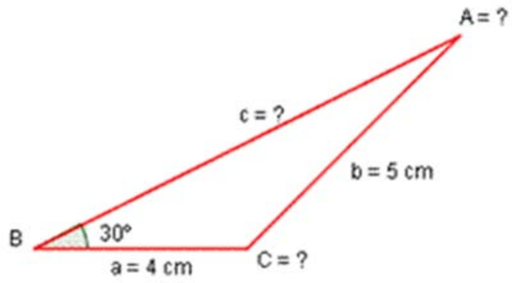
Podem resoldre fàcilment triangles utilitzant el teorema del sinus si coneixem:

a) dos angles (és a dir, tres angles) i un costat

b) dos costats i l'angle oposat a un d'ells.

Activitats resoltes

- *Resoldre el següent triangle B = 30º, a = 4 cm i b = 5 cm.:*



Coneixem dos costats i l'angle oposat a un d'ells, *b.*

$\frac{a}{sin\widehat{A}} = \frac{b}{sin\widehat{B}} \rightarrow \frac{4}{sin\widehat{A}} = \frac{5}{sin30º} \rightarrow sin\widehat{A} = \frac{4\cdot(1/2)}{5} = 0'4$

Per tant: $\hat{A}$ = *arcsin* 0,4 = 23,58º

L'angle $\hat{C}$ = 180º–(23'58º+30º)=126,42º.

Per a calcular el costat *c* tornem a aplicar el teorema del sinus:

$\frac{b}{sin\widehat{B}} = \frac{c}{sin\widehat{C}} \rightarrow \frac{5}{sin30º} = \frac{c}{sin126,42º}$

Llavors:$c = \frac{5\cdot sin126,42º}{sin30º} = 8,1\text{cm}$

4.2. Teorema del cosinus

El **teorema del cosinus** afirma que en un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ qualsevol és compleix que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos\hat{A}$$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2accos\hat{B}c^2 = a^2 + b^2 - 2abcos$L'any que ve estudiaràs la demostració d'aquest teorema. De moment només veurem algunes dels seues aplicacions.

Notes

- Si et fixes, el teorema del cosinus és una generalització **del teorema de Pitàgores**. És a dir, quan el triangle és rectangle, el teorema del cosinus i el teorema de Pitàgores és el mateix.
- Podem utilitzar el teorema del cosinus si en un triangle coneixem:

    a) els tres costats,

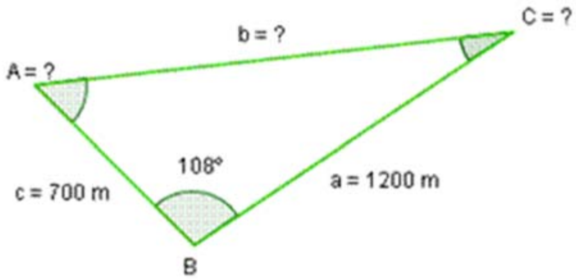
    b) dos costats i l'angle oposat a un d'ells

    c) dos costats i l'angle que formen.

Activitats resoltes

- *Resoldre el següent triangle del què coneixem B = 108º, c = 700 m i a = 1200 m:*

Autores: Fernanda Ramos Rodríguez i Milagros Latasa Asso
Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia



$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\hat{B}$ per tant $b=\sqrt{1200^2+700^2-2\cdot 700\cdot 1200\cdot \cos 108}$ → b = 1564,97 m.

Amb *a, b i c* coneguts, calculem l'angle *C*:

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\hat{C} \rightarrow \cos\hat{C}=\frac{c^2-a^2-b^2}{-2\cdot a\cdot b}=\frac{700^2-1200^2-1564{,}97^2}{-2\cdot 1200\cdot 1564{,}97}=0{,}9 \rightarrow \hat{C}=25{,}18º$$

L'angle $\hat{C}$ també es podria calcular utilitzant el teorema del sinus.

Per a calcular $\hat{A}$: $\hat{A}$= 180º – (108º + 25,18º) = 46'82º.

Activitats proposades

13. Calcula la longitud del costat *a* d'un triangle, sabent que *C* = 25º, *b* = 7 cm i *c* = 4 cm.

14. Calcula els angles del triangle de costats: *a* = 6, *b* = 8 i *c* = 5.

4.3. Resolució de triangles qualssevol

Els ferramentes bàsiques per a resoldre triangles qualssevol són els teoremes del sinus i el cosinus que s'han vist anteriorment. El pròxim curs s'ampliarà breument la resolució d'aquests triangles, estudiant casos en què no existirà solució o casos en què hi haja dues solucions.

També és plantejaran problemes de càlcul de distàncies entre punts inaccessibles.

CURIOSITATS. REVISTA

ELS NOSTRES SENTITS ENS ENGANYEN?

La foto mostra un tram de carretera cap a l'horitzó. Totes les línies són rectes, la fotografia no enganya, però els nostres sentits, sí. Segons la nostra percepció, aquestes línies es tallen a un punt de l'horitzó, encara que nosaltres, quan estem en aqueixa situació, sabem que no és així. Llavors, per què ho veiem així? Per dues raons: perquè la llum viatja en línia recta i perquè la nostra percepció visual es basa en els angles, la qual cosa fa que l'amplària de la carretera disminuïsca amb la distància.

Però ara, que coneixes les relacions entre angles i costats d'un triangle, sabràs raonar si els objectes disminueixen la seua dimensió de forma inversament proporcional a la distància a què es troben.

Sabies que...?

El teorema del sinus es va utilitzar al segle XIX per a mesurar de forma precisa el meridià de París i així poder definir el metre.

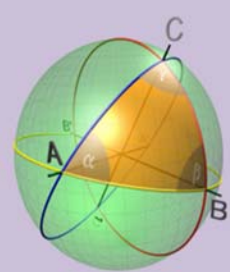
TRIGONOMETRIA ESFÈRICA

La trigonometria esfèrica estudia els triangles que es formen sobre una superfície esfèrica

En la trigonometria esfèrica la distància més curta entre dos punts no és una recta, sinó un arc.

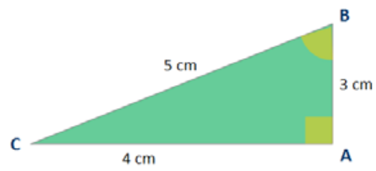
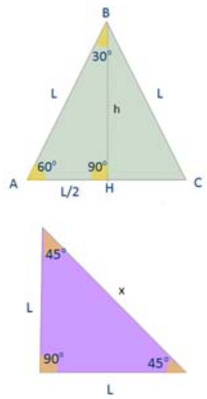
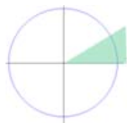
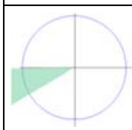
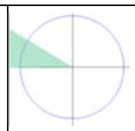
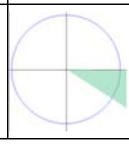
Els angles d'un triangle esfèric sumen més de 180º

És la base de la navegació i l'astronomia. Curiós, no?



Autores: Fernanda Ramos Rodríguez i Milagros Latasa Asso
Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

RESUM

<table>
<tr><td></td><td colspan="4"></td><td colspan="2">Exemples</td></tr>
<tr><td>Radian</td><td colspan="4">És un angle tal que qualsevol arc que se li associe mesura exactament el mateix que el radi utilitzat per a traçar-lo. És denota per rad.
Nr. de radians d'un angle complet = 2π rad</td><td colspan="2">90º són π/2 rad</td></tr>
<tr><td>Raons trigonomètriques d'un angle agut</td><td colspan="4">$sin\alpha = \frac{catetoposat}{hipotenusa} = \frac{b}{a}$
$cos\alpha = \frac{catetadjacent}{hipotenusa} = \frac{c}{a}$
$tan\alpha = \frac{catetoposat}{catetadjacent} = \frac{b}{c}$</td><td colspan="2">
$sinC = \frac{3}{5}, cosC = \frac{4}{5}$</td></tr>
<tr><td>Relacions fonamentals</td><td colspan="4">• $(sin\alpha)^2 + (cos\alpha)^2 = 1$
• $tan\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}$</td><td colspan="2">$(sin30º)^2 + (cos30º)^2 =$
$= (\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$</td></tr>
<tr><td>Altres raons trigonomètriques</td><td colspan="4">$cosec\alpha = \frac{1}{sin\alpha}$ $sec\alpha = \frac{1}{cos\alpha}$ $cotan\alpha = \frac{1}{tan\alpha}$</td><td colspan="2">cosec 90º =1
sec 90º No existeix
cotan 45º=1</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Raons trigonomètriques de 30º, 45º i 60º</td><td></td><td>sinus</td><td>cosinus</td><td>tangent</td><td colspan="2" rowspan="4"></td></tr>
<tr><td>30º</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>$\frac{\sqrt{3}}{2}$</td><td>$\frac{\sqrt{3}}{3}$</td></tr>
<tr><td>45 º</td><td>$\frac{\sqrt{2}}{2}$</td><td>$\frac{\sqrt{2}}{2}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>60º</td><td>$\frac{\sqrt{3}}{2}$</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>$\sqrt{3}$</td></tr>
<tr><td>Reducció al primer quadrant</td><td colspan="4">Les raons trigonomètriques de qualsevol angle α poden expressar-se en funció de les d'un angle agut β</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Reducció al primer quadrant</td><td>2n QUADRANT</td><td colspan="3">$sin\alpha = sin\beta cos\alpha = -cos\beta$</td><td colspan="2" rowspan="3">$sin135º = sin45º sin200º = -sin20º cos(-60º) = cos60º$</td></tr>
<tr><td>3r QUADRANT</td><td colspan="3">$sin\alpha = -sin\beta cos\alpha = -cos\beta$</td></tr>
<tr><td>4t QUADRANT</td><td colspan="3">$sin\alpha = -sin\beta cos\alpha = cos\beta$</td></tr>
</table>

Autores: Fernanda Ramos Rodríguez i Milagros Latasa Asso
Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

Resolució de triangles	Resoldre un triangle és calcular les mesures dels seus angles i dels seus costats. • Si el triangle és rectangle, usarem les definicions de les raons trigonomètriques, el teorema de Pitàgores i el resultat que afirma que la suma dels angles d'un triangle és 180º • Si el triangle no és rectangle, a més del resultat de que la suma dels angles d'un triangle és 180º, usarem els teoremes del sinus i el cosinus.	
Teorema del sinus	En un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ qualsevol: $$\frac{a}{sin\hat{A}}=\frac{b}{sin\hat{B}}=\frac{c}{sin\hat{C}}$$	
Teorema del cosinus	En un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ qualsevol: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos\hat{A}$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2accos\hat{B}$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2abcos\hat{C}$	

Autores: Fernanda Ramos Rodríguez i Milagros Latasa Asso
Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

EXERCICIS I PROBLEMES

1. Expressa les següents mesures d'angles en radians:
a) 30º b)60º c)100º d)330º

2. Quant mesura en graus sexagesimals un angle d'1 rad? Aproxima el resultat amb graus, minuts i segons.

3. Troba la mesura en graus dels següents angles expressats en radians:

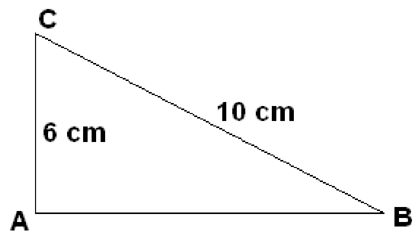
a) π b) $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{5\pi}{6}$ d) 2π

4. Usant la calculadora troba el sinus, el cosinus i la tangent de :

a) 28º b) 62º

Trobes alguna relació entre els raons trigonomètriques d'ambdós angles?

5. Troba el sinus i el cosinus dels angles *B* i *C* del dibuix. Quina relació trobes?



6. En un triangle rectangle *ABC* amb angle recte en *A*, si *tan B* = 1,2 i *b* = 3 cm, quant mesura *c*?

7. Treballant amb angles aguts, és cert que a major angle li correspon major sinus?

I per al cosinus?

8. Usant la calculadora troba el sinus, el cosinus i la tangent de 9º i 81º. Trobes alguna relació entre les raons trigonomètriques d'ambdós angles?

9. Si *a* és un angle agut i *cos a* = 0,1, quant valen els altres dues raons trigonomètriques?

10. Comprovar les relacions trigonomètriques fonamentals amb 30º, 45º i 60º sense utilitzar decimals ni calculadora.

11. Si *a* és un angle agut i *tan a* = 0,4, quant valen les altres dues raons trigonomètriques?

12. Completa al teu quadern la següent taula sabent que α és un angle agut.

sen α	cos α	tg α
	0,7	
1/3		
		2

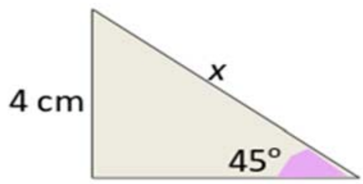
13. És rectangle un triangle els costats del qual mesuren 12, 13 i 5 cm? En cas afirmatiu determina el sinus, cosinus i tangent dels dos angles aguts.

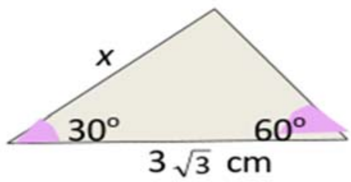
14. Els catets d'un triangle rectangle mesuren 5 i 12 cm. Calcula les raons trigonomètriques dels seus angles aguts. Quina amplitud tenen?

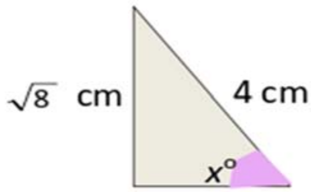
15. Si α és un angle agut tal que $sin\alpha = \frac{1}{3}$, calcula:

i. Les restants raons trigonomètriques de α
ii. Les raons trigonomètriques de 180º – α
iii. Les raons trigonomètriques de 180º + α
iv. Les raons trigonomètriques de 360º – α

16. Sense utilitzar calculadora, calcula el valor de *x* als següents triangles rectangles:



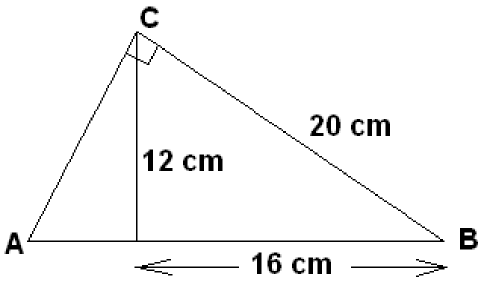




17. Beatriu subjecta un catxirulo amb una corda de 42 m. A quina altura es troba aquest al moment en què el cable tens forma un angle de 52º 17' amb el sòl?

Autores: Fernanda Ramos Rodríguez i Milagros Latasa Asso
Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

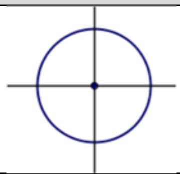
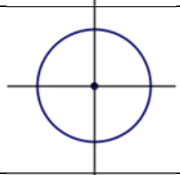
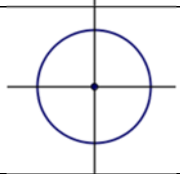
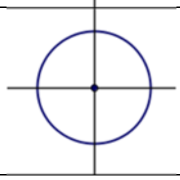
18. Calcula el sinus, cosinus i tangent de l'angle *A* al dibuix següent:



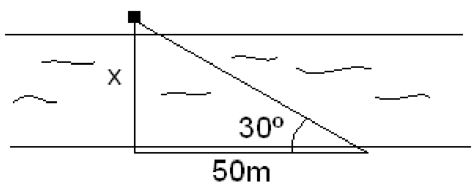
19. Si *a* és un angle del segon quadrant i *cos a* = –0,05, quant valen les altres dues raons trigonomètriques?

20. Si *a* és un angle obtús i sin *a* = 0,4, quant valen les altres dues raons trigonomètriques?

21. Dibuixa al teu quadern la taula següent i situa al quadrant que correspongui i expressa en funció d'un angle agut, el sinus, cosinus, tangent, secant, cosecant i cotangent dels següents angles. Si pots, calcula'ls:

Angle	*quadrant*	*sinus*	*cosinus*	*tangent*	*secant*	*cosecant*	*cotangent*
–225º							
150º							
–60º							
3645 e							

22. Calcula l'amplària del riu representat a la figura següent:

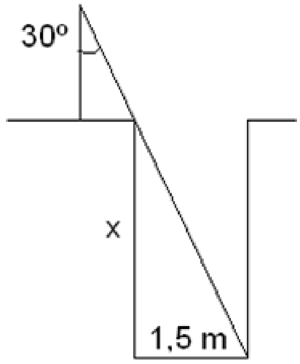


Autores: Fernanda Ramos Rodríguez i Milagros Latasa Asso
Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

23. Esbrina l'altura de la torre d'una església si a una distància de 80 m, i mesurat amb un teodolit d'altura 1,60 m, l'angle d'elevació del parallamps que està a la part alta de la torre és de 23º.

24. Troba l'àrea d'un hexàgon regular de costat 10 cm.

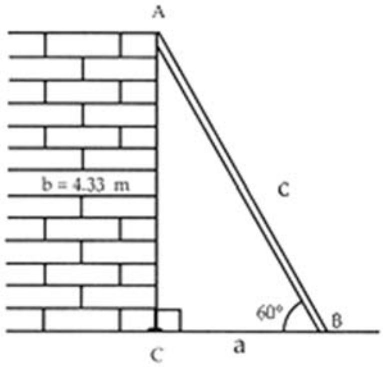
25. Calcula la profunditat d'un pou de 1,5 m de diàmetre sabent l'angle indicat a la figura de la dreta.



26. Quina és l'altura d'una muntanya el cim de la qual, si ens situem a una distància de 3000 m del peu de la seua vertical i mesurem amb un teodolit d'altura 1,50 m, presenta un angle d'inclinació de 49º.

27. Quin és l'angle d'inclinació dels rajos solars al moment en què un bloc de pisos de 25 m d'alçària projecta una ombra de 10 m de longitud?

28. Troba l'altura i l'àrea d'un triangle isòsceles la base del qual mesura 20 cm i l'angle desigual del qual val 26º.

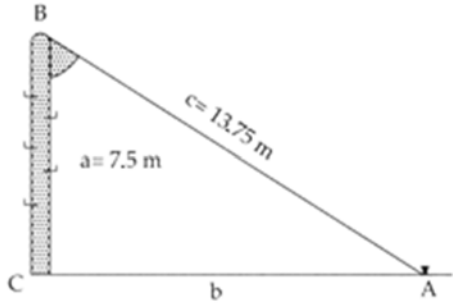


29. Troba l'àrea d'un dodecàgon regular de costat 16 cm.

30. Obtindre la longitud d'una escala recolzada en una paret de 4,33 m d'alçària que forma un angle de 60 º respecte al sòl

31. El fil d'un catxirulo totalment estés mesura 150 m, i forma un angle amb el sòl de 40º mentres el subjecte a 1,5 m del sòl. A quina altura del sòl està el catxirulo?

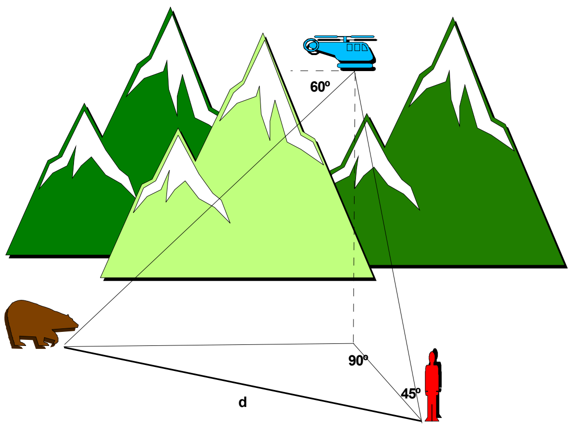
32. Per a mesurar l'altura d'un campanar a la base del qual no podem accedir, tendim una corda de 30 m de llarg des de l'alt de la torre fins a tensar-la al sòl, formant amb aquest un angle de 60º. Quina és l'altura del campanar?



33. Obtindre l'angle que forma un pal de 7.5 m d'alt amb un cable tirant que va, des de la punta del primer fins al pis, i que té un llarg de 13.75 m

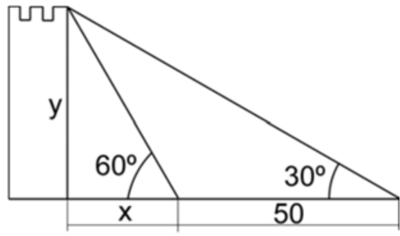
34. Dos amics observen des de sa casa un globus que està situat en la vertical de la línia que uneix les seues cases. La distància entre les seues cases és de 3 km. Els angles d'elevació mesurats pels amics són de 45º i 60º. Troba l'altura del globus i la distància d'ells al globus.

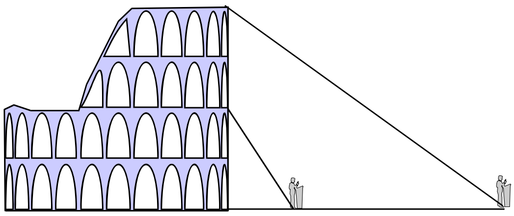
Autores: Fernanda Ramos Rodríguez i Milagros Latasa Asso
Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia



35. Un biòleg es troba al port de Somiedo fent un seguiment dels óssos terrosos. Compta amb l'ajuda d'un càmera i un pilot que volen en un helicòpter, mantenint-se a una altura constant de $40\sqrt{3}$m. Al moment que descriu la figura, el càmera veu des de l'helicòpter a l'ós amb un angle de depressió (angle que forma la seua visual amb l'horitzontal marcat al dibuix) de **60º**. El biòleg dirigeix una visual a l'helicòpter que forma amb el sòl un angle de **45º**. Calcular la distància entre el biòleg i l'ós.

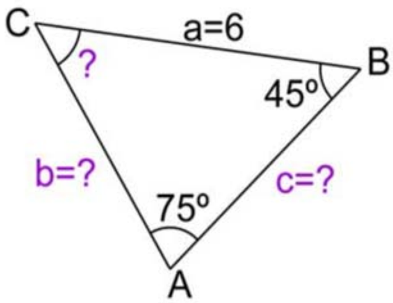
36. Des d'un cert lloc del sòl es veu el punt més alt d'una torre, formant la visual un angle de 30º amb l'horitzontal. Si ens acostem 50 m a la torre, aqueix angle és fa de 60º. Calcula l'alçària de la torre.





37. Amb un teodolit d'1 metre d'altura, dues persones pretenen mesurar l'altura del *Coliseu de Roma.* Una d'elles s'acosta a l'amfiteatre, separant-se **40 m**. de l'altra. Aquesta última obté que l'angle d'elevació del punt més alt és de **30º.** L'altra no divisa el Coliseu complet pel que mesura l'angle d'elevació al punt que marca la base del tercer pis , obtenint **60º** com resultat**.** Calcular l'altura del Coliseu i la distància dels dos observadors a la base del mateix.

38. Ressol el triangle: $a = 6$; $B = 45º$; $A = 75º$



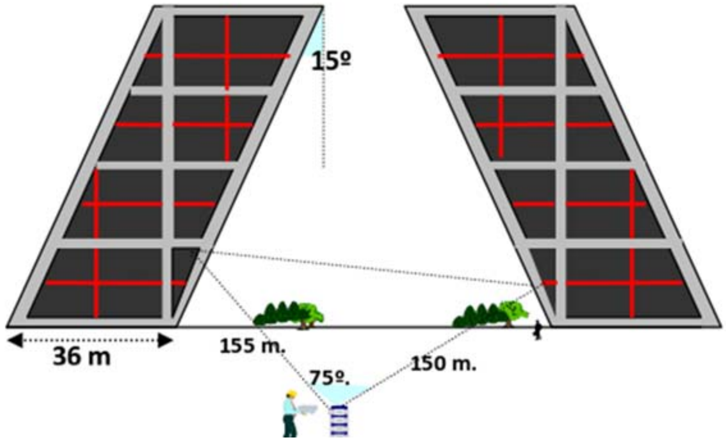
39. Els pares de Pere tenen una parcel·la al camp de forma triangular els costats de la qual mesuren 20, 22 i 30 m. Pere vol calcular els angles. Quins són aqueixos angles?

40. Estant situat a 100 m d'un arbre, veig la seua copa baix un angle de 30º. El meu amic veu el mateix arbre baix un angle de 60º. A quina distància està el meu amic de l'arbre?

41. Les conegudes *torres Kio* de Madrid són dues torres bessones que estan al Passeig de la Castellana, junt a la Plaça de Castella. Es caracteritzen per la seua inclinació i representen una porta cap a Europa.

a) Amb les dades que apareixen a la figura, determina la seua altura.

b) Des de dues oficines situades en torres distintes s'han estés dos cables fins a un mateix punt que mesuren 155 i 150 metres i que formen un angle de 75º al punt de trobada. Quina distància en línia recta hi ha entre ambdues?



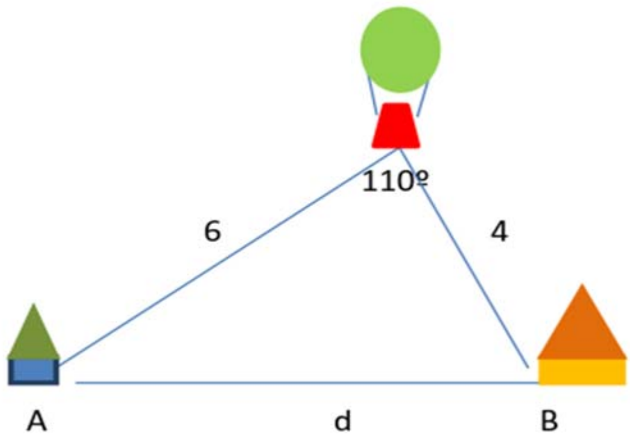
42. Tres pobles estan units per carreteres: *AB* = 10 km, *BC* = 12 km i l'angle format per *AB* i *BC* és de 120º. Quant disten *A* i *C?*

43. Han de construir un túnel del punt *A* al punt *B*. És pren com a referència una antena de telefonia (*C*) visible des d'ambdós punts. És mesura llavors la distància *AC* = 250 m. Sabent que l'angle en *A* és de 53º i l'angle *B* és de 45º calcula quina serà la longitud del túnel.

44. Calcula el costat d'un pentàgon regular inscrit en una circumferència de radi 6 m.

45. El punt mes alt d'un repetidor de televisió, situat a la cima d'una muntanya, es veu des d'un punt del sòl *P* baix un angle de 67º. Si ens acostem a la muntanya 30 m el veiem baix un angle de 70º i des d'aqueix mateix punt veiem la cima de la muntanya baix un angle de 66º. Calcular l'altura del repetidor.

46. Des de l'alt d'un globus s'observa un poble *A* amb un angle de 50º. Un altre poble, *B* situat al costat i en línia recta s'observa des d'un angle de 60º. El globus és troba a 6 km del poble *A* i a 4 km de B. Calcula la distància entre *A* i *B*.



47. Ressol els triangles:

a) a = 20 m; *B* = 45º; *C* = 65º

b) *c* = 6 m, *A* = 105º, *B* = 35º

c) *b* = 40 m; *c* = 30 m, *A* = 60º.

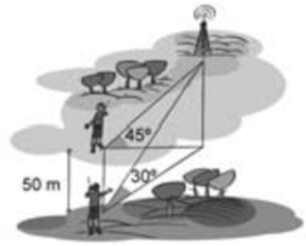
Autores: Fernanda Ramos Rodríguez i Milagros Latasa Asso
Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

48. Donat el triangle de vèrtexs A, B, C, i sabent que A = 60º, B = 45º i que b= 20 m. Resoldre'l i calcula la seua àrea.

49. Calcula la longitud dels costats d'un paral·lelogram les diagonals del qual són de 20 i 16 m. i les diagonals formen entre si un angle de 37º.

50. Un triangle isòsceles amb base 30 m té dos angles iguals de 80º. Quant mesuren els altres dos costats?

51. Tres amics es situen en un camp de futbol. Entre Àlvar i Bartolo hi ha 25 m i entre Bartolo i Cèsar, 12 metres. L'angle format al cantó de Cèsar és de 20º. Calcula la distància entre Àlvar i Cèsar.



52. Un home que està situat a l'oest d'una emissora de ràdio observa que el seu angle d'elevació és de 45°. Camina 50 m cap al sud i observa que l'angle d'elevació és ara de 30°. Troba l'altura de l'antena.

53. Els braços d'un compàs mesuren 12 cm i formen un angle de 60º. Quin és el radi de la circumferència que pot traçar-se amb aqueixa obertura?

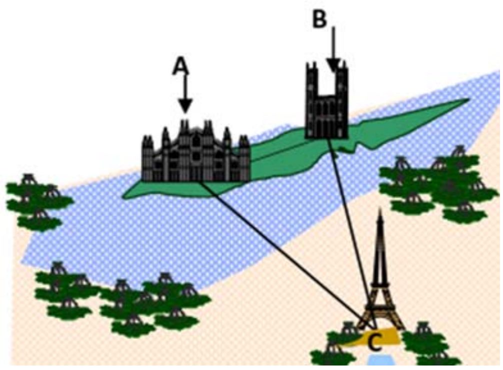
54. Escriu quatre angles amb el mateix sinus que 135°.

55. Troba dos angles que tinguen la tangent oposada a la de 340°.

56. Busca dos angles amb el mateix sinus que 36° i cosinus oposat.

57. Quins angles negatius, compresos entre –360° i 0° tenen el mateix sinus que 60°?

58. A París i en *l' Île de la Cité* és troben *Nôtre Dame* i *la Sainte Chapelle* a una distància de **200 metres**. Imaginem que un observador situat en *A* veu *B* i *C* amb un angle de **56º** i que un altre, situat en *B* veu *A* i *C* amb un angle de **117º.** Calcular les distàncies entre la torre *Eiffel* (*C*) i *Nôtre Dame* (*B*), així com entre la torre *Eiffel* (*C*) *i* la *Sainte Chapelle* (A).



AUTOAVALUACIÓ

1. L'expressióen radians de 65° és :

   a) 1,134 rad b) 1,134π rad c) 2,268 rad d) 2,268π rad

2. El valor de la hipotenusa en un triangle rectangle amb un angle de 25° i amb un dels catets de 3 cm és:

   a) 3,3 cm b) 7,1 cm c) 6,4 cm d) 2,2 cm

3. Si α és un angle agut i$sin\alpha = 0{,}8$, la tangent de α és:

   a) 0,6 b) –0,6 c) –1,33 d) 1,33

4. Selecciona l'opció correcta:

   a) $tan\,\hat{A} = \frac{2}{3}$ significa que$sin\hat{A} = 2$ i$cos\hat{A} = 3$

   b) La secant d'un angle sempre està compresa entre –1 i 1

   c) Al segon i quart quadrants la tangent i cotangent d'un angle tenen signe negatiu

   d) El sinus d'un angle és sempre menor que la seua tangent.

5. Si el sinus d'un angle del segon quadrant és$\frac{4}{5}$, llavors la seua tangent i secant són respectivament:

a) $-\frac{3}{5}$ i $-\frac{5}{3}$ b) $\frac{3}{5}$ i $\frac{5}{3}$ c) $-\frac{4}{3}$ i $-\frac{3}{4}$ d) $\frac{4}{3}$ i $\frac{3}{4}$

6. L'altura d'un edifici és de 50 m, la mesura de la seua ombra quan els rajos del sol tenen una inclinació de 30° amb l'horitzontal és de

   a) 25 m b) 100 m c) $50\sqrt{3}$ m d) $\frac{100\sqrt{3}}{3}$ m

7. L'angle de 420° és un angle que se situa a

   a) El primer quadrant b) El segon quadrant c) El tercer quadrant d) El quart quadrant

8. Si α és un angle agut i β és el seu suplementari, es compleix:

a) $sin\alpha = -sin\beta$ i $cos\alpha = cos\beta$ b) $sin\alpha = sin\beta$ i $cos\alpha = -cos\beta$

c) $sin\alpha = sin\beta$ i $cos\alpha = cos\beta$ d) $sin\alpha = -sin\beta$ i $cos\alpha = -cos\beta$

9. Per a calcular l'altura d'una muntanya es mesura amb un teodolit des d'*A* l'angle que forma la visual a la cima amb l'horitzontal, que és$\hat{A} = 30º$. Avançant 200 m, és torna a mesurar i l'angle resulta ser$\hat{B} = 35{,}2º$. L'altura de la muntanya és de:

a) 825 m b) 773 m c) 595 m d) 636 m

10. Si el radi d'un pentàgon regular és 8 cm, la seua àrea mesura

a) 305,86 cm² b) 340,10 cm² c) 275,97 cm² d) 152,05 cm²

Matemàtiques orientades a les ensenyances acadèmiques:

4tB ESO
Capítol 9: Geometria

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Milagros Latasa Asso i Fernanda Ramos Rodríguez

Revisors: Javier Rodrigo i David Hierro

Il·lustracions: Milagros Latasa i Banc d'Imatges d'INTEF

Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

Índex

Resum

La Geometria és una de les branques més antigues de les Matemàtiques i el seu estudi ens ajuda a interpretar millor la realitat que percebem. El seu nom significa “*mesura de la Terra*”. Mesurar és calcular longituds, àrees i volums. En aquest tema recordaràs les fórmules que vas estudiar ja l’any passat i aprofundiràs sobre les seues aplicacions a la vida real.

Ens movem a l’espai de dimensió tres, caminem sobre una esfera (que per ser gran, considerem plana), les cases són quasi sempre ortoedres. La informació que percebem per mitjà dels nostres sentits la interpretem en termes geomètrics. Precisem de les fórmules d’àrees i volums dels cossos geomètrics per a calcular les mesures dels mobles que caben al nostre saló, o per a fer un pressupost de la reforma de la nostra vivenda.

Moltes plantes distribueixen les seues fulles buscant el màxim d’il·luminació i les seues flors en forma esfèrica buscant un aprofitament òptim de l’espai. L’àtom de ferro disposa els seus electrons en forma de cub, els sistemes de cristal·lització dels minerals adopten formes polièdriques, les bresques de les abelles són prismes hexagonals. Aquests són alguns exemples de la presència de cossos geomètrics a la naturalesa.

ORIGEN DE LA IMATGE: WIKIPEDIA

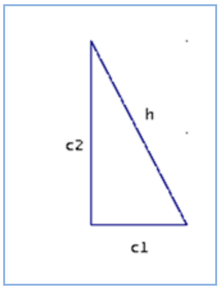
1. TEOREMA DE PITÀGORES I TEOREMA DE TALES

1.1. Teorema de Pitàgores

Teorema de Pitàgores al pla

Ja saps que:

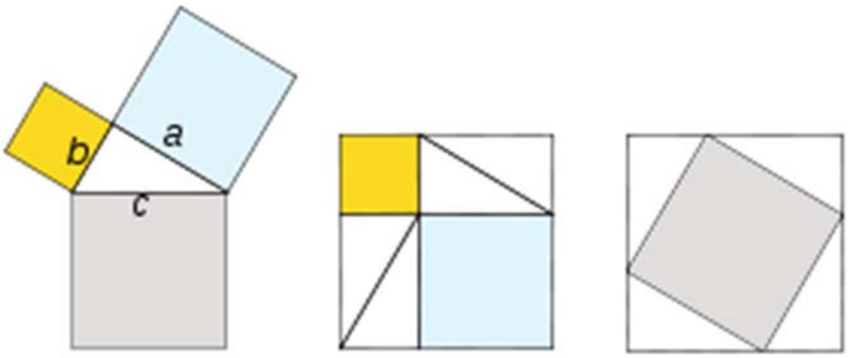
En un triangle rectangle anomenem **catets** als costats incidents amb l'angle recte i **hipotenusa** a l'altre costat.



En un triangle rectangle, la hipotenusa al quadrat és igual a la suma dels quadrats dels catets.

$$h^2 = c_1^2 + c_2^2$$

Demostració:



Exemple:

- Si els catets d'un triangle rectangle medeixen 6 *cm* i 8 *cm*, la seua hipotenusa val 10 *cm*, ja que:

$$h = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10 \, cm.$$

Activitats resoltes

- *Si la hipotenusa d'un triangle rectangle medeix 13 dm i un dels seus catets medeix 12 dm, troba la mida de l'altre catet:*

  Solució: Pel teorema de Pitàgores:

$$c = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{(13-12)\times(13+12)} = \sqrt{25} = 5 \ dm$$

Activitats proposades

1. És possible trobar un triangle rectangle els catets del qual medeixen 12 i 16 cm i la seua hipotenusa 30 cm? Si la teua resposta és negativa, troba la mida de la hipotenusa d'un triangle rectangle els catets de la qual mesuren 12 i 16 cm.

2. Calcula la longitud de la hipotenusa dels següents triangles rectangles de catets:

a) 4 *cm* i 3 *cm* b) 1 *m* i 7 *m*

c) 2 *dm* i 5 dm d) 23,5 *km* i 47,2 *km*.

Utilitza la calculadora si et resulta necessària.

3. Calcula la longitud del catet que falta als següents triangles rectangles d'hipotenusa i catet:

a) 8 *cm* i 3 *cm* b) 15 m i 9 *m*

c) 35 *dm* i 10 *dm* d) 21,2 *km* i 11,9 *km*

4. Calcula l'àrea d'un triangle equilàter de costat 5 m.

5. Calcula l'àrea d'un hexàgon regular de costat 7 *cm*.

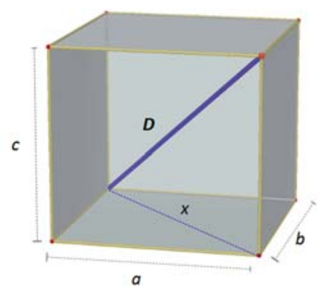
Teorema de Pitàgores a l'espai

Ja saps que:

La diagonal d'un ortoedre al quadrat coincideix amb la suma dels quadrats de les seues arestes.

Demostració:

Siguen *a, b* i *c* les arestes de l'ortoedre que suposem recolzat al rectangle de dimensions *a* , *b*.



Si *x* és la diagonal d'aquest rectangle, verifica que: $x^2 = a^2 + b^2$

El triangle de costats *D, x, a* és rectangle per tant: $D^2 = x^2 + c^2$

I tenint en compte la relació que verifica *x:*

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Activitats resoltes

- *Calcula la longitud de la diagonal d'un ortoedre d'arestes 7, 9 i 12 cm.*

  $D^2 = a^2 + b^2 + c^2 = 7^2 + 9^2 + 12^2 = 274$. $D \approx 16{,}55$ cm.

- *Les arestes de la base d'una caixa amb forma d'ortoedre medeixen 7 cm i 9 cm i la seua altura 12 cm. Estudia si pots guardar en ella tres barres de longituds 11 cm, 16 cm i 18 cm.*

El rectangle de la base té una diagonal *d* que medeix: $d = \sqrt{7^2 + 9^2} = \sqrt{130} \approx 11{,}4$ cm

Després la barra més curta cap recolzada a la base.

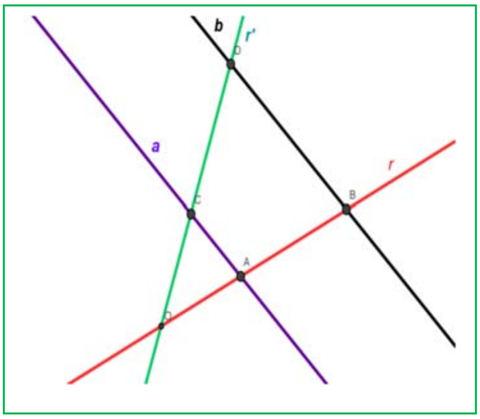
La diagonal de l'ortoedre vam veure en l'activitat anterior que medeix 16,55, per tant la segona barra si és possible, inclinada, però la tercera, no.

Activitats proposades

6. Una caixa té forma cúbica de 3 *cm* d'aresta. Quant medeix la seua diagonal?

7. Calcula la mida de la diagonal d'una sala que té 8 metres de llarg, 5 metres d'ample i 3 metres d'altura.

1.2. Teorema de Tales



Ja saps que:

Donades dues rectes, *r* i *r’*, que es tallen en el punt *O*, i dues rectes paral·leles entre si, *a* i *b*. La recta *a* talla a les rectes *r* i *r’* als punts *A* i *C*, i la recta *b* talla a les rectes *r* i *r’* als punts *B* i *D*. Aleshores el Teorema de Tales afirma que els segments són proporcionals:

$$\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{BD}$$

Es diu que els triangles *OAC* i *OBD* estan en posició *Tales*. Són **semblants**. Tenen un angle comú (coincident) i els costats proporcionals.

Activitats resoltes

- *Siguen OAC i OBD dos triangles en posició Tales. El perímetre d’OBD és 20 cm, i OA medeix 2 cm, AC medeix 5 cm i OC medeix 3 cm. Calcula les longituds dels costats d’OBD.*

Utilitzem l’expressió: $\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{BD}=\frac{OA+OC+AC}{OB+OD+BD}$ substituint les dades:

$\frac{2}{OB}=\frac{3}{OD}=\frac{5}{BD}=\frac{2+3+5}{20}=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$, pel que aïllant, sabem que: *OB* = 2·2 = 4 cm; *OD* = 3·2 = 6 cm, i *BD* = 5·2 = 10 cm. En efecte: 4 + 6 + 10 = 20 cm, perímetre del triangle.

- *Compte la llegenda que Tales va mesurar l’altura de la piràmide de Keops comparant l’ombra de la piràmide amb l’ombra del seu bastó. Tenim un bastó que mesura 1 m, si l’ombra d’un arbre medeix 12 m, i la del bastó, (a la mateixa hora del dia i al mateix moment), medeix 0,8 m, quant medeix l’arbre?*

Les altures de l’arbre i del bastó són proporcionals a les seues ombres, (formen triangles en posició *Tales*), pel que, si anomenem *x* a l’altura de l’arbre podem dir: $\frac{0,8}{1}=\frac{12}{x}$

Per tant *x* = 12/0,8 = 15 metres.

Activitats proposades

8. En una foto hi ha un xiquet, que sabem que medeix 1,5 *m*, i un edifici. Mesurem l’altura del xiquet i de l’edifici a la foto, i resulten ser: 0,2 cm i 10 cm. Quina altura té l’edifici?

9. Es dibuixa un hexàgon regular. Es tracen les seues diagonals i s’obté un altre hexàgon regular. Indica la raó de semblança entre els costats d’ambdós hexàgons.

10. En un triangle regular ABC de costat, 1 cm, tracem els punts mitjans, M i N, de dos dels seus costats. Tracem les rectes BN i CM que es tallen en un punt O. Són semblants els triangles MÀS i COB? Quina és la raó de semblança? Quant mesura el costat MN?

11. Una piràmide regular hexagonal de costat de la base 3 cm i altura 10 cm, es talla per un pla a una distància de 4 cm del vèrtex, amb la qual cosa s’obté una nova piràmide. Quant mesuren les seues dimensions?

1.3. Proporcionalitat en longituds, àrees i volums

Ja saps que:

Dues figures són **semblants** si les longituds d'elements corresponents són proporcionals. Al coeficient de proporcionalitat se l'anomena **raó de semblança**. En mapes, plans... la raó de semblança s'anomena **escala**.

Àrees de figures semblants

Si la raó de semblança entre les longituds d'una figura és k, llavors la raó entre les seues àrees és $\boldsymbol{k^2}$.

Exemple:

Observa la figura del marge. Si multipliquem per 2 el costat del

quadrat xicotet, l'àrea del quadrat gran és $2^2 = 4$ vegades

la del xicotet.

Volums de figures semblants

Si la raó de semblança entre les longituds d'una figura és k, llavors entre els seus volums és $\boldsymbol{k^3}$.

Exemple:

Observa la figura del marge. En multiplicar per 2 el costat

del cub xicotet s'obté el cub gran. El volum

del cub gran és 8 (2^3) el del cub xicotet.

Activitats resoltes

- *La torre Eiffel de París medeix 300 metres d'alçària i pesa uns 8 milions de quilos. Està construïda de ferro. Si encarreguem un model a escala de la dita torre, també de ferro, que pese només un quilo, quina altura tindrà? Serà major o menor que un llapis?*

El pes està relacionat amb el volum. La torre Eiffel pesa 8 000 000 quilos, i volem construir una, exactament del mateix material que pese 1 quilo. Per tant $k^3 = 8000000/1 = 8\ 000\ 000$, i $k = 200$. La raó de proporcionalitat entre les longituds és de 200.

Si la Torre Eiffel mesura 300 m, i anomenem x al que mesura la nostra tenim: $300/x = 200$. Aïllem x que resulta igual a $x = 1{,}5$ m. Medeix metre i mig! És molt major que un llapis!

Activitats proposades

12. El diàmetre d'una bresquilla és tres vegades major que el del seu os, i mesura 8 cm. Calcula el volum de la bresquilla, suposant que és esfèrica, i el del seu os, també esfèric. Quina és la raó de proporcionalitat entre el volum de la bresquilla i el de l'os?

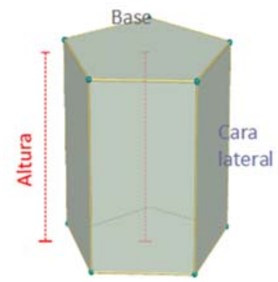
13. A la pizzeria tenen pizzes de diversos preus: 1 €, 2 € i 3 €. Els diàmetres d'aquestes pizzes són: 15 cm, 20 cm i 30 cm, quina resulta més econòmica? Calcula la relació entre les àrees i compara-la amb la relació entre els preus.

14. Una maqueta d'un dipòsit cilíndric de 1000 litres de capacitat i 5 metres d'alçària, volem que tinga una capacitat d'1 litre. Quina alçària ha de tindre la maqueta?

2. LONGITUDS, ÀREES I VOLUMS

2.1. Longituds, àrees i volums en prismes i cilindres

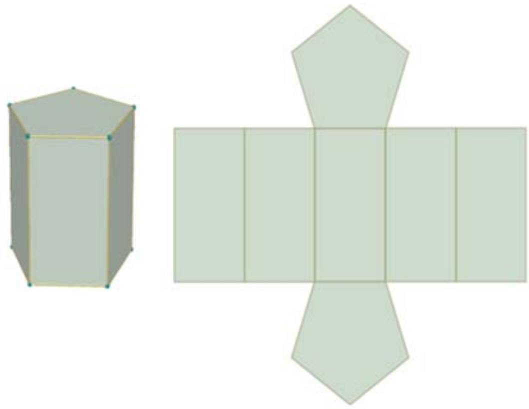
Recorda que:



Prismes

Un ***prisma*** és un poliedre determinat per dues cares paral·leles que són polígons iguals i tantes cares laterals, que són paral·lelograms, com a costats tenen les bases.

Àrees lateral i total d'un prisma



L'**àrea lateral** d'un prisma és la suma de les àrees de les cares laterals.

Com les cares laterals són paral·lelograms de la mateixa altura, que és l'altura del prisma, podem escriure:

Àrea lateral = Suma de les àrees de les cares laterals =

Perímetre de la base · altura del prisma.

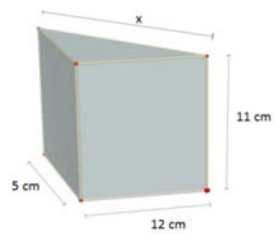
Si denotem per h l'altura i per P_B el perímetre de la base:

$$\text{Àrea lateral} = A_L = P_B \cdot h$$

L'àrea total d'un prisma és l'àrea lateral més el doble de la suma de l'àrea de la base :

$$\text{Àrea total} = A_T = A_L + 2 \cdot A_B$$

Activitats resoltes



- *Calcula les àrees lateral i total d'un prisma triangular recte d'11 cm d'altura si la seua base és un triangle rectangle de catets 12 cm i 5 cm.*

Calculem en primer lloc la hipotenusa del triangle de la base:

$$x^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169 \Rightarrow x = \sqrt{169} = 13 \text{ cm}$$

$P_B = 12 + 5 + 13 = 30$ *cm*; $A_B = \dfrac{12 \cdot 5}{2} = 30$ *cm*^{2}

$A_L = P_B \cdot h = 30 \cdot 11 = 330$ *cm*^{2} $\quad A_T = A_L + 2 \cdot A_B = 330 + 60 = 390$ *cm*^{2}

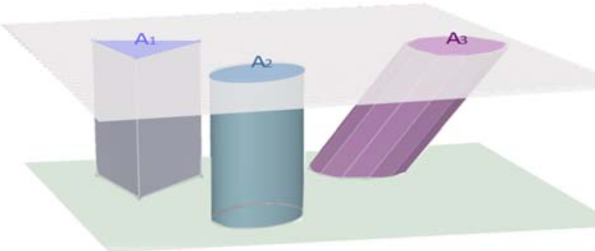
Volum d'un cos geomètric. Principi de *Cavalieri*

Recorda que:

Bonaventura Cavalieri, matemàtic del segle XVII va enunciar el principi que porta el seu nom i que afirma:

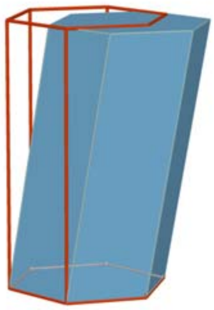
"Si dos cossos tenen la mateixa altura i en tallar-los per plans paral·lels a les seues bases, s'obtenen seccions amb la mateixa àrea, aleshores els volums dels dos cossos són iguals"

Exemple:



A la figura adjunta les àrees de les seccions A_1, A_2, A_3, produïdes per un pla paral·lel a les bases, són iguals, aleshores, segons aquest principi els volums dels tres cossos són també iguals.

Volum d'un prisma i d'un cilindre



El volum d'un prisma recte és el producte de l'àrea de la base per l'altura. A més, segons el principi de *Cavalieri*, el volum d'un prisma oblic coincideix amb el volum d'un prisma recte amb la mateixa base i altura. Si denotem per *V* aquest volum, A_B l'àrea de la base i *h* l'altura:

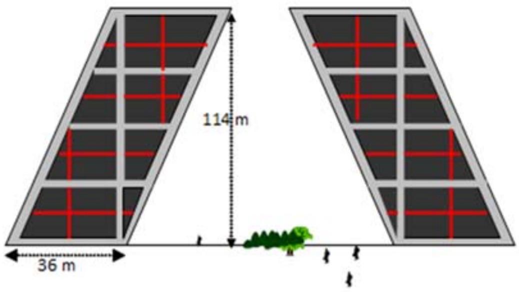
Volum prisma = $V = A_B \cdot h$

També el volum d'un cilindre, recte o oblic és àrea de la base per altura. Si anomenem *R* al radi de la base, A_B *l'àrea* de la base i *h* l'altura, el volum s'escriu:

Volum cilindre = $V = A_B \cdot h \ = \ \pi R^2 \cdot h$

Activitats resoltes

- Les conegudes torres Kio de Madrid són dues torres bessones que estan al Passeig de la Castellana, junt amb la Plaça de Castella. Es caracteritzen per la seua inclinació i representen una porta cap a Europa.



Cada una d'elles és un prisma oblic la base del qual és un quadrat de 36 metres de costat i tenen una altura de 114 metres. El volum interior de cada torre pot calcular-se amb la fórmula anterior:

$$V = A_B \cdot h = 36^2 \cdot 114 = 147\,744\ m^3$$

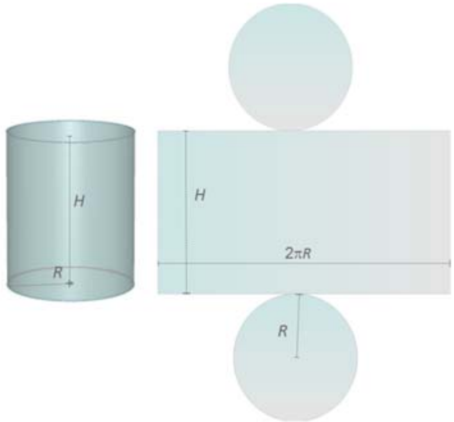
Activitats proposades

15. Calcula el volum d'un prisma recte de 20 *dm* d'altura la base del qual és un hexàgon de 6 dm de costat.

16. Calcula la quantitat d'aigua que hi ha en un recipient amb forma de cilindre sabent que la seua base té 10 cm de diàmetre i que l'aigua arriba 12 dm d'altura.

Àrees lateral i total d'un cilindre

El cilindre és un cos geomètric desenrotllable. Si retallem un cilindre recte al llarg d'una generatriu, i l'estenem en un pla, obtenim dos cercles i una regió rectangular. D'aquesta manera s'obté el seu desenrotllament.



A partir d'aquest, podem veure que l'àrea **lateral de cilindre està** determinada per l'àrea del rectangle que té com a dimensions la longitud de la circumferència de la base i l'altura del cilindre.

Suposarem que l'altura del cilindre és H i que R és el radi de la base amb el que l'àrea lateral A L'és:

$$A_L = \text{Longitud de la base} \cdot \text{Altura} = (2\pi\ R)\cdot H = 2\pi RH$$

Si a l'expressió anterior li sumem l'àrea dels dos cercles que constitueixen les bases, obtenim l'àrea **total del cilindre.**

$$A_T = A_L + \pi R^2 + \pi R^2 = 2\pi RH + 2\pi R^2$$

2.2. Longituds, àrees i volums en piràmides i cons

Recorda que:

Àrees lateral i total d'una piràmide i d'un tronc de piràmide regulars

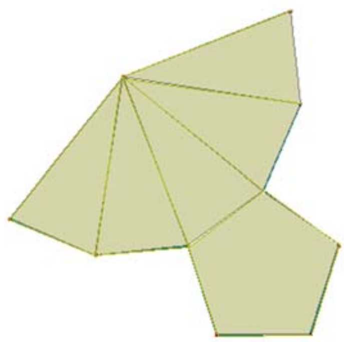
Una **piràmide** és un poliedre determinat per una cara poligonal denominada base i tantes cares triangulars amb un vèrtex comú com a costats té la base.

L'àrea lateral d'una piràmide regular és la suma de les àrees de les cares laterals.

Són triangles isòsceles iguals pel que, si l'aresta de la base mesura b, l'apotema de la piràmide és Ap i la base té n costats, aquest àrea lateral és:

$$\text{Àrea lateral} = A_L = n\cdot\frac{b\cdot Ap}{2} = \frac{n\cdot b\cdot Ap}{2}$$

Desenrotllament de piràmide pentagonal regular



i com $n \cdot b$ = Perímetre de la base

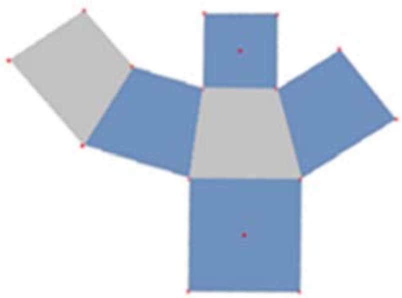
$$A_L = \frac{Perímetredelabase \cdot Apotemadelapiràmide}{2} = \frac{Perímetredelabase}{2}\cdot Apotema$$

L'àrea lateral d'una piràmide és igual al semi-perímetre per l'apotema. L'àrea total d'una piràmide és l'àrea lateral més l'àrea de la base :

$$\text{Àrea total} = A_T = A_L + A_B$$

Un tronc de piràmide regular és un cos geomètric desenrotllable. Al seu desenrotllament apareixen tantes cares laterals com a costats tenen les bases. Totes elles són trapezis isòsceles.

Desenrotllament de tronc de piràmide quadrangular



Si B és el costat del polígon de la base major, b el costat de la base menor, n el nombre de costats de les bases i Ap és l'altura d'una cara lateral

$$\text{Àrea lateral} = A_L = n \cdot \frac{(B+b) \cdot Ap}{2} = \frac{(P_B + P_b) \cdot Ap}{2} =$$
$$= \frac{Suma de perímetre de les bases \cdot Apotema del tronc}{2}$$

L'àrea total d'un tronc de piràmide regular és l'àrea lateral més la suma d'àrees de les bases:

$$\text{Àrea total} = A_T = A_L + A_B + A_b$$

Activitats resoltes

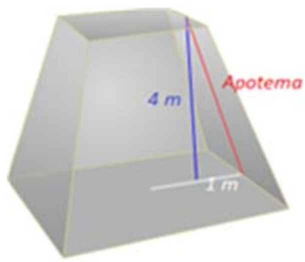
- *Calculem l'àrea total d'un tronc de piràmide regular de 4 m d'altura si sabem que les bases paral·leles són quadrats de 4 m i de 2 m de costat.*

En primer lloc calculem el valor de l'apotema. Tenint en compte que el tronc és regular i que les bases són quadrades es forma un triangle rectangle en què es compleix:

$$Ap^2 = 4^2 + 1^2 = 17 \Rightarrow Ap = \sqrt{17} \approx 4{,}12\ m$$

$$A_L = \frac{(P_B + P_b) \cdot Ap}{2} = \frac{(16+8) \cdot 4{,}12}{2} = 49{,}44\ m^2$$

$$A_T = A_L + A_B + A_b = 49{,}44 + 16 + 4 = 69{,}44\ m^2$$



Activitats proposades

17. Calcula les àrees lateral i total d'un prisma hexagonal regular sabent que les arestes de les bases mesuren 3 cm i cada aresta lateral 2 dm.

18. L'àrea lateral d'un prisma regular de base quadrada és 16 m2 i té 10 m d'altura. Calcula el perímetre de la base.

19. El costat de la base d'una piràmide triangular regular és de 7 cm i l'altura de la piràmide 15 cm. Calcula l'apotema de la piràmide i la seua àrea total.

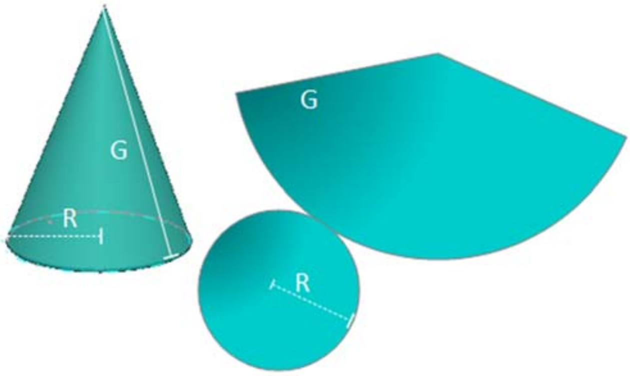
20. Calcula l'àrea lateral d'un tronc de piràmide regular, sabent que les seues bases són dos octògons regulars de costats 3 i 8 dm i que l'altura de cada cara lateral és de 9 dm.

21. Si l'àrea lateral d'una piràmide quadrangular regular és 104 cm^2, calcula l'apotema de la piràmide i la seua altura.

Àrees lateral i total d'un con

Recorda que:

També el con és un cos geomètric desenrotllable. En retallar seguint una línia generatriu i la circumferència de la base, obtenim un cercle i un sector circular amb radi igual a la generatriu i longitud d'arc igual a la longitud de la circumferència de la base.



Anomenem ara *R* al radi de la base i *G* a la generatriu. L'àrea lateral del con és l'àrea de sector circular obtingut. Per a calcular-la pensem que aquesta àrea ha de ser directament proporcional a la longitud d'arc que al seu torn ha de coincidir amb la longitud de la circumferència de la base. Podem escriure aleshores:

$$\frac{ALateraldelcon}{Longitudd'arccorresponentalsector} = \frac{AtotaldelcerclederadiG}{LongituddelacircumferènciaderadiG}$$

És a dir: $\frac{A_L}{2\pi R} = \frac{\pi\ G^2}{2\pi G}$ i aïllant: A_L *tenim*:

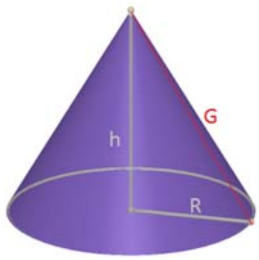
$$A_L = \frac{2\pi R\ \pi\ G^2}{2\pi G} = \pi RG$$

Si a l'expressió anterior li sumem l'àrea del cercle de la base, obtenim l'àrea **total del con.**

$$A_T = A_L + \pi \cdot R^2 = \pi \cdot R \cdot G + \pi \cdot R^2$$

Activitats resoltes

- *Calcula l'àrea total d'un con de 12 dm d'altura, sabent que la circumferència de la base medeix 18,84 dm .(Pren 3,14 com a valor de π)*



Calculem en primer lloc el radi *R* de la base:

$$2\pi R = 18{,}84 \Rightarrow \quad R = \frac{18{,}84}{2\pi} \approx \frac{18{,}84}{6{,}28} = 3$$ *dm.*

Calculem ara la generatriu *G*:

$$G = \sqrt{R^2 + h^2} \Rightarrow \quad G = \sqrt{3^2 + 12^2} = \sqrt{153} \approx 12{,}37$$ *dm.*

Aleshores $A_T = A_L + \pi \cdot R^2 = \pi \cdot R \cdot G + \pi \cdot R^2 = 3{,}14 \cdot 3 \cdot 12{,}37 + 3{,}14 \cdot 3^2 \approx 144{,}79\ dm^2$.

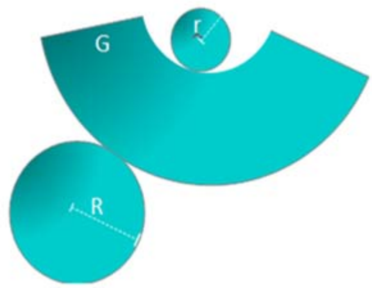
Àrees lateral i total d'un tronc de con

Recorda que:

En tallar un con per un pla paral·lel a la base, s'obté un tronc de con. Igual que el tronc de piràmide, és un cos desenrotllable i el seu desenrotllament el constitueixen els dos cercles de les bases junt amb un trapezi circular, les bases del qual són corbes que mesuren el mateix que les circumferències de les bases.

Anomenant *R i r* als radis de les bases i *G* a la generatriu resulta:

$$A_L = \frac{(2\pi R + 2\pi r)G}{2} = \frac{2(\pi R + \pi r)G}{2} = (\pi R + \pi r)G$$



Si a l'expressió anterior li sumem les àrees dels cercles de les bases, obtenim l'àrea **total del tronc de con:**

$$A_T = A_L + \pi \cdot R^2 + \pi \cdot r^2$$

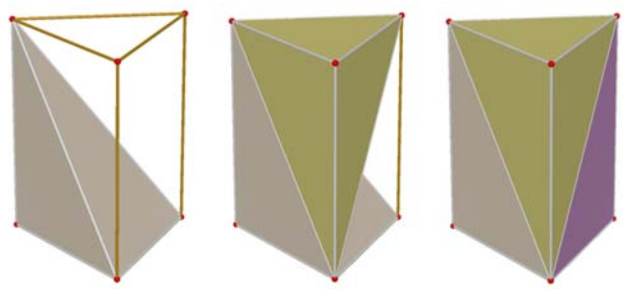
Volum d'una piràmide i d'un con

Recorda que:

També als casos d'una piràmide o con, les fórmules del volum coincideixen en cossos rectes i oblics.

El volum d'una piràmide és la tercera part del volum d'un prisma que té la mateixa base i altura.

Volum piràmide = $V = \dfrac{A_B \cdot h}{3}$



Si comparem con i cilindre amb la mateixa base i altura, concloem un resultat anàleg

Volum con = $V = \dfrac{A_B \cdot h}{3} = \dfrac{\pi R^2 \cdot h}{3}$

Autores: Milagros Latasa Asso i Fernanda Ramos Rodríguez
Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

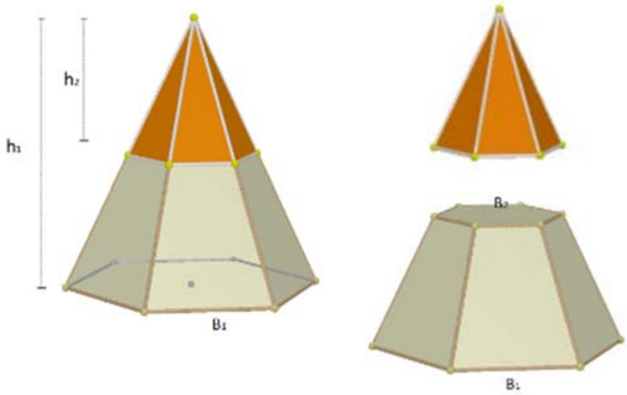

Volum d'un tronc de piràmide i d'un tronc de con

Hi ha una fórmula per a calcular el volum d'un tronc de piràmide regular però l'evitarem. Resulta més senzill obtindre el volum d'un tronc de piràmide regular restant els volums de les dues piràmides a partir de les que s'obté.

Si representem per A_{B1} i A_{B2} *les* àrees de les bases i per h_1 i h_2 les altures de les piràmides esmentades, el volum del tronc de piràmide és:

Volum tronc de piràmide =

$$V = \frac{A_{B1} \cdot h_1}{3} - \frac{A_{B2} \cdot h_2}{3}$$



El volum del tronc de con s'obté de manera semblant. Si R_1 i R_2 són els radis de les bases dels cons que originen el tronc i h_1 i h_2 les seues altures, el volum del tronc de con resulta:

$$Volumtroncdecon V = \frac{\pi \cdot R_1^2 \cdot h_1}{3} - \frac{\pi \cdot R_2^2 \cdot h_2}{3}$$

Activitats resoltes

- *Calcula el volum d'un tronc de piràmide regular de 10 cm d'altura si les seues bases són dos hexàgons regulars de costats 8 cm i 3 cm.*

Primer pas: calculem les apotemes dels hexàgons de les bases:

Per a cada un d'aquests hexàgons:

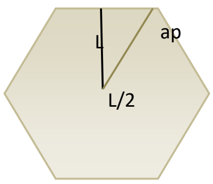


Figura 1

$L^2 = ap^2 + (L/2)^2 \Rightarrow ap^2 = L^2 - \frac{L^2}{4} = \frac{3L^2}{4} \Rightarrow ap = \frac{\sqrt{3}\,L}{2}$

Per tant les apotemes buscades mesuren: $ap_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2{,}6\ cm$; $ap_2 = \frac{7\sqrt{3}}{2} \approx 6{,}1\ cm$

Com a segon pas, calculem l'apotema del tronc de piràmide

$$A^2 = 10^2 + 3{,}5^2 \Rightarrow$$

$$A = \sqrt{112{,}25} \approx 10{,}6\ cm$$

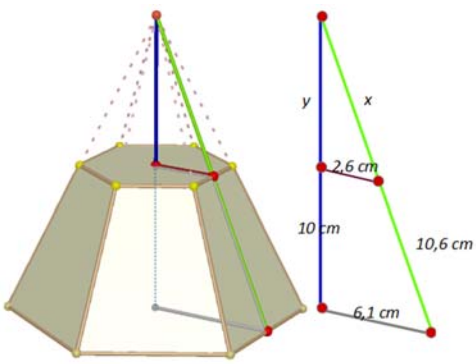


Figura 3

En tercer lloc, calculem el valor dels segments *x, y* de la figura 3 que ens serviran per a obtindre les altures i apotemes de les piràmides que generen el tronc amb què treballem:

Pel teorema de *Tales*: $\frac{x}{2{,}6} = \frac{10{,}6 + x}{6{,}1} \Rightarrow 6{,}1\,x = (10{,}6 + x)2{,}6 \Rightarrow$

$$6{,}1\,x - 2{,}6x = 27{,}56 \Rightarrow x = \frac{27{,}56}{3{,}5} \approx 7{,}9\,cm$$

Aleshores l'apotema de la piràmide gran és 10,6 + 7,9=18,5 cm i el de la xicoteta 7,9 *cm*. I aplicant el teorema de *Pitàgores*:

$$y^2 = x^2 - 2{,}6^2 = 7{,}9^2 - 2{,}6^2 = 55{,}65 \Rightarrow y = \sqrt{55{,}65} \approx 7{,}5 \; cm$$

Per tant les altures de les piràmides generadores del tronc mesuren 10 + 7,5 = 17,5 *cm* i 7,5 *cm.*

Finalment calculem el volum del tronc de piràmide:

$$V = \frac{A_{B1} \cdot h_1}{3} - \frac{A_{B2} \cdot h_2}{3} = \frac{1}{3} . \frac{48 \cdot 18{,}5 \cdot 17{,}5}{2} - \frac{1}{3} . \frac{18 \cdot 7{,}9 \cdot 7{,}5}{2} = \frac{15540}{6} - \frac{1066.5}{6} = 2412{,}25\,cm^3$$

Activitats proposades

22. Una columna cilíndrica té 35 *cm* de diàmetre i 5 *m* d'altura. Quina és la seua àrea lateral?

23. El radi de la base d'un cilindre és de 7 cm i l'altura és el triple del diàmetre. Calcula la seua àrea total.

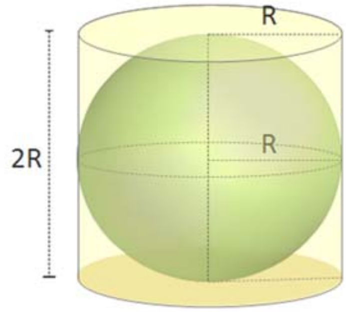
24. Calcula l'àrea lateral d'un con recte sabent que la seua generatriu mesura 25 dm i el radi de la seua base 6 dm.

25. La circumferència de la base d'un con mesura 6,25 m i la seua generatriu 12 *m*. Calcula l'àrea total.

2.3. Longituds, àrees i volums en l'esfera

Recorda que:

Àrea d'una esfera.



L'esfera **no** és un cos geomètric desenrotllable, per la qual cosa és més complicat que als casos anteriors trobar una fórmula per a calcular la seua àrea.

Arquimedes va demostrar que l'àrea d'una esfera és igual que l'àrea lateral d'un cilindre circumscrit a l'esfera, és a dir un cilindre amb el mateix radi de la base que el radi de l'esfera i l'altura del qual és el diàmetre de l'esfera.

Si anomenem *R* al radi de l'esfera:

$$A_T = (2\pi R) \cdot (2R) = 4\pi R^2$$

L'àrea d'una esfera equival a l'àrea de quatre cercles màxims.

Activitats proposades

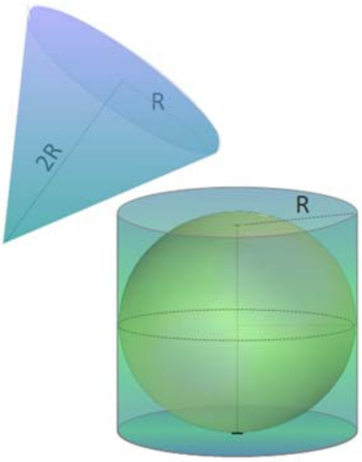
26. Una esfera té 4 *m* de radi. Calcula:

a) La longitud de la circumferència màxima;

b) L'àrea de l'esfera.

Volum de l'esfera

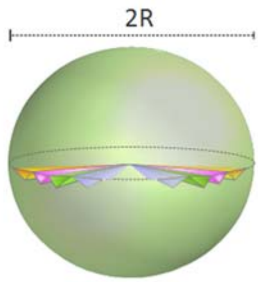
Tornem a pensar en una esfera de radi *R* i en el cilindre que la circumscriu. Per a omplir amb aigua l'espai que queda entre el cilindre i l'esfera, es necessita una quantitat d'aigua igual a un terç del volum total del cilindre circumscrit.



Es dedueix aleshores que la suma dels volums de l'esfera de radi *R* i del con d'altura *2R* i radi de la base *R*, coincideix amb el volum del cilindre circumscrit a l'esfera de radi *R*. Per tant:

$$\text{Volum}_{\text{esfera}} = \text{Volum}_{\text{cilindre}} - \text{Volum}_{\text{con}} \Rightarrow$$

$$\text{Volum}_{\text{esfera}} = \pi R^2(2R) - \frac{\pi R^2(2R)}{3} = \frac{6\pi R^3 - 2\pi R^3}{3} = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3$$



Hi ha demostracions més rigoroses que avalen aquest resultat experimental que hem descrit. Així per exemple, el volum de l'esfera es pot obtindre com a suma dels volums de piràmides que la recobreixen, totes elles de base triangular sobre la superfície de l'esfera i amb vèrtex al centre de la mateixa.

Activitats proposades

27. (CDI Madrid 2008) El dipòsit de gasoil de la casa d'Irene és un cilindre d'1 *m* d'altura i 2 *m* de diàmetre. Irene ha telefonat al subministrador de gasoil perquè al dipòsit només queden 140 litres.

a) Quin és, en dm^3, el volum del dipòsit? (Utilitza 3,14 com a valor de π).

b) Si el preu del gasoil és de 0,80 € cada litre, quant haurà de pagar la mare d'Irene per omplir el dipòsit?

28. Comprova que el volum de l'esfera de radi 4 *dm* sumat amb el volum d'un con del mateix radi de la base i 8 *dm* d'altura, coincideix amb el volum d'un cilindre que té 8 *dm* d'altura i 4 *dm* de radi de la base.

2.4. Longituds, àrees i volums de poliedres regulars

Recorda que:

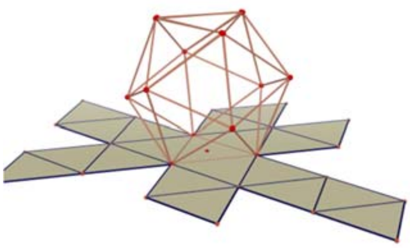
Un poliedre regular és un poliedre en què totes les seues cares són polígons regulars iguals i en el que els seus angles poliedres són iguals.

Hi ha cinc poliedres regulars: tetràedre, octàedre, icosàedre, cub i dodecàedre.

Àrea total d'un poliedre regular.

Com les cares dels poliedres regulars són iguals, el càlcul de l'àrea total d'un poliedre regular es redueix a calcular l'àrea d'una cara i després multiplicar-la pel nombre de cares.

Activitats resoltes



- *Calcula l'àrea total d'un icosàedre de 2 cm d'aresta.*

Totes les seues cares són triangles equilàters de 2 *cm* de base. Calculem l'altura *h* que divideix a la base en dos segments iguals

$$h^2 + 1^2 = 2^2 \Rightarrow h^2 = 4 - 1 = 3 \Rightarrow h = \sqrt{3}\ cm$$

Per tant l'àrea d'una cara és:

$A_{triangle} = \frac{b\,.\,h}{2} = \frac{2\,.\,\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ cm^2 i per tant Àrea icosàedre = 20 $\sqrt{3} cm^2$

Autores: Milagros Latasa Asso i Fernanda Ramos Rodríguez
Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

3. INICIACIÓ A LA GEOMETRIA ANALÍTICA

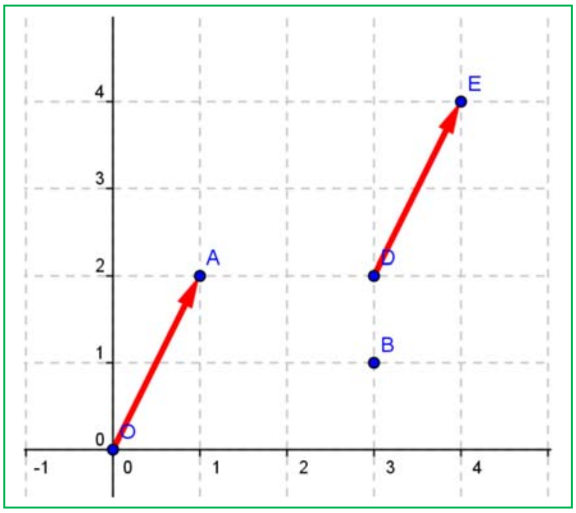
3.1. Punts i vectors

Al pla

Ja saps que

Un conjunt format per **l'origen** *O*, els dos **eixos de coordenades** i la **unitat de mesura** és un **sistema de referència cartesià**.

Les **coordenades d'un punt** *A* són un parell ordenat de nombres reals **(*x*, y), sent "x" la primera coordenada o abscissa i "y"** la segona coordenada o **ordenada**.



Donats dos punts, $D(d_1, d_2)$ i $E(e_1, e_2)$,les components del vector d'origen *D* i extrem *E*, ***DE***, vénen donades per

$\boldsymbol{DE} = (e_1 – d_1, e_2 – d_2)$.

Exemple:

Les coordenades dels punts, de la figura són:

O(0, 0), *A*(1, 2), *B*(3, 1), *D*(3, 2) i *E*(4, 4)

Les components del vector ***DE*** són

$$\boldsymbol{DE} = (4 – 3, 4 – 2) = (1, 2)$$

Les components del vector ***OA*** són:

$$\boldsymbol{OA} = (1 – 0, 2 – 0) = (1, 2).$$

DE i ***OA*** són representants del mateix vector lliure de components (1, 2).

Al espai de dimensió tres

Les **coordenades d'un punt** *A* són una terna ordenada de nombres reals **(*x*, y, *z*)**, sent "***z***" l'altura sobre el pla *OXY*.

Donats dos punts, $D(d_1, d_2, d_3)$ i $E(e_1, e_2, e_3)$, les components del vector d'origen *D* i extrem *E*, ***DE***, vénen donades per $\boldsymbol{DE} = (e_1 – d_1, e_2 – d_2, e_3 – d_3)$.

Exemple:

Les coordenades de punts a l'espai són:

O(0, 0, 0), *A*(1, 2, 3), *B*(3, 1, 7), *D*(3, 2, 1) i *E*(4, 4, 4)

Les components del vector ***DE*** són: ***DE*** = (4 – 3, 4 – 2, 4 – 1) = (1, 2, 3)

Les components del vector ***OA*** són: ***OA*** = (1 – 0, 2 – 0, 3 – 0) = (1, 2, 3).

DE i ***OA*** són representants del mateix vector lliure de components (1, 2, 3)

Activitats proposades

29. Representa en un sistema de referència a l'espai de dimensió tres els punts:

O(0, 0, 0), *A*(1, 2, 3), *B*(3, 1, 7), *D*(3, 2, 1) i *E*(4, 4, 4) i els vectors: ***DE*** i ***OA***.

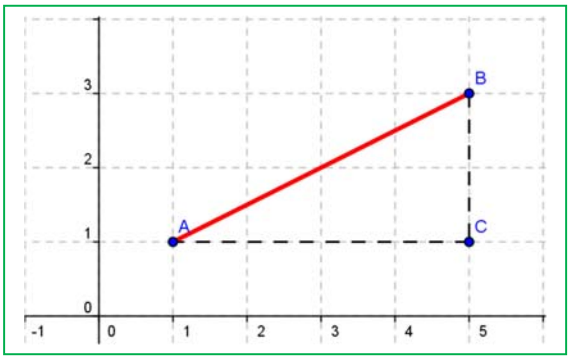
30. El vector de components ***u*** = (2, 3) i origen *A* = (1, 1), quin extrem té?

3.2. Distància entre dos punts

Al pla

La distància entre dos punts $A(a_1, a_2)$ i $B(b_1, b_2)$ és:

$$D = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$



Exemple:

Pel Teorema de *Pitàgores* sabem que la distància al quadrat entre els punts $A = (1, 1)$ i $B = (5, 3)$ és igual a:

$$D^2 = (5 – 1)^2 + (3 – 1)^2 = 4^2 + 2^2 = 20$$

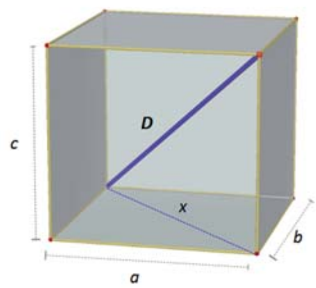
ja que el triangle *ABC* és rectangle de catets 4 i 2.

Per tant $D \approx 4{,}47$.

A l'espai de dimensió tres

La distància entre dos punts $A(a_1, a_2, a_3)$ i $B(b_1, b_2, b_3)$ és igual a:

$$D = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$



Exemple:

La distància al quadrat entre els punts $A = (1, 1, 2)$ i $B = (5, 3, 8)$ és igual, pel Teorema de *Pitàgores* a l'espai, a

$D^2 = (5 – 1)^2 + (3 – 1)^2 + (8 – 2)^2 = 4^2 + 2^2 + 6^2 = 16 + 4 + 36 = 56$.

Per tant $D \approx 7{,}5$.

Activitats proposades

31. Calcula la distància entre els punts A(6, 2) i B(3, 9).

32. Calcula la distància entre els punts A(6, 2, 5) i B(3, 9, 7).

33. Calcula la longitud del vector de components u = (3, 4)

34. Calcula la longitud del vector de components u = (3, 4, 1).

35. Dibuixa un quadrat de diagonal el punt O(0, 0) i A(3, 3). Quines coordenades tenen els altres vèrtexs del quadrat? Calcula la longitud del costat i de la diagonal del dit quadrat.

36. Dibuixa un cub de diagonal O(0, 0, 0) i A(3, 3, 3). Quines coordenades tenen els altres vèrtexs del cub? Ja saps, són 8 vèrtexs. Calcula la longitud de l'aresta, de la diagonal d'una cara i de la diagonal del cub.

37. Siga X(x, y) un punt genèric del pla, i O(0, 0) l'origen de coordenades, escriu l'expressió de tots els punts X que disten de O una distància D.

38. Siga X(x, y, z) un punt genèric a l'espai, i O(0, 0, 0) l'origen de coordenades, escriu l'expressió de tots els punts X que disten de O una distància *D*.

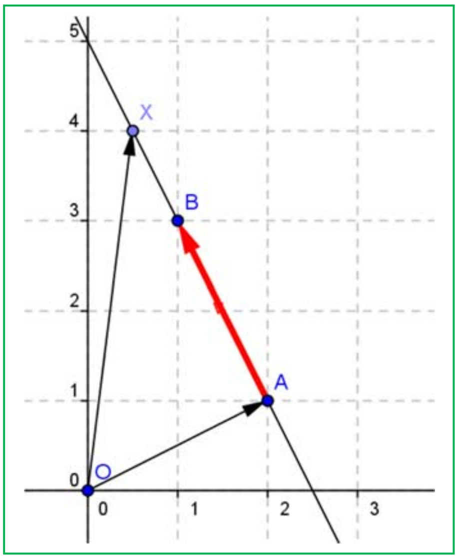
Autores: Milagros Latasa Asso i Fernanda Ramos Rodríguez
Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

3.3. Equacions i rectes i plans

Equacions de la recta en el pla.

Ja saps que **l'equació d'una recta** al pla és: y = *mx* + *n*. És l'expressió d'una recta com a funció. Aquesta equació es denomina **equació explícita** de la recta.

Si passem tot al primer membre de l'equació, ens queda una equació: *ax* + *by* + *c* = 0, que es denomina **equació implícita** de la recta.



Equació vectorial: També una recta queda determinada si coneixem un punt: $A(a_1, a_2)$ i un vector de direcció $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$. Observa que el vector ***OX*** pot escriure's com a suma del vector ***OA*** i d'un vector de la mateixa direcció que ***v***, *t**v***. És a dir:

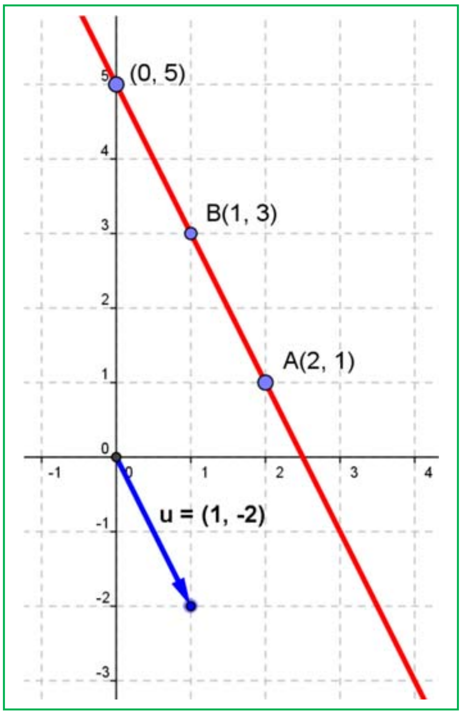
$$\boldsymbol{OX} = \boldsymbol{OA} + t\boldsymbol{v},$$

on a *t* se li denomina paràmetre. Per a cada valor de *t*, es té un punt diferent de la recta. Amb coordenades quedaria:

$$\begin{cases} x = a_1 + tv_1 \\ y = a_2 + tv_2 \end{cases}$$

que és **l'equació paramètrica** de la recta.

Paral·lelisme: Dues rectes $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ són paral·leles si $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ i dues rectes *r*: $\boldsymbol{OX} = \boldsymbol{OA} + t\boldsymbol{v}$ ***i*** *r*: $\boldsymbol{OX} = \boldsymbol{OB} + t\boldsymbol{w}$ són paral·leles si $\boldsymbol{v} = k\boldsymbol{w}$ perquè en ambdós casos, així tenen la mateixa direcció.



Perpendicularitat: Dues rectes $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ són perpendiculars si $a \cdot a' + b \cdot b' = 0$, i dues rectes *r*: $\boldsymbol{OX} = \boldsymbol{OA} + t\boldsymbol{v}$ i *r*: $\boldsymbol{OX} = \boldsymbol{OB} + t\boldsymbol{w}$ són perpendiculars si $v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 = 0$, perquè en eixos casos pots comprovar gràficament que les seues direccions són ortogonals.

Activitats resoltes

- *De la recta d'equació explícita y* = –2*x* + 5, coneixem el pendent, –2, i l'ordenada a l'origen, 5. El pendent ens dóna un vector de direcció de la recta, en general (1, *m*), i en aquest exemple: (1, –2). L'ordenada en l'origen ens proporciona un punt, en general, el (0, *n*), i en aquest exemple, (0, 5). L'equació paramètrica d'aquesta recta és:

$$\begin{cases} x = 0 + t \\ y = 5 - 2t \end{cases}$$

La seua equació implícita és: –2*x* – *y* + 5 = 0.

- *Escriu l'equació paramètrica de la recta* que passa pel punt *A*(2, 1) i té com a vector de direcció ***v*** = (1, 2).

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$$

- *Escriu l'equació de la recta* que passa pels punts *A*(2, 1) i *B*(1, 3). Podem prendre com a vector de direcció el vector ***AB*** = (1 – 2, 3 – 1) = (–1, 2), i escriure la seua equació paramètrica:

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$$

La recta és, als tres exemples, la mateixa, la de la figura. Amb això podem observar que una recta pot tindre moltes equacions paramètriques depenent del punt i del vector de direcció que es prenga. Però eliminant el paràmetre i aïllant "y" arribem a una única equació explícita.

Activitats proposades

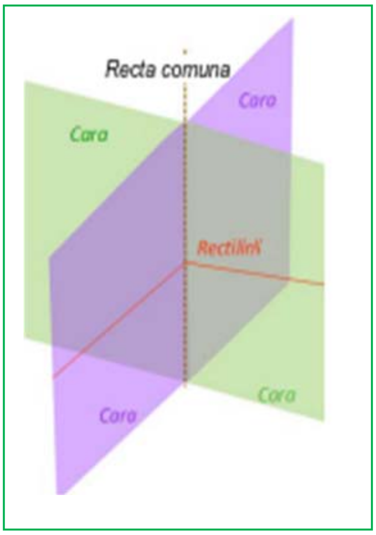
39. Escriu l'equació de la recta que passa pels punts A(6, 2) i B(3, 9), de forma explícita, implícita i paramètrica. Representa-la gràficament.

40. Representa gràficament la recta r: 2x y + 5 = 0. Comprova que el vector (2, 1) és perpendicular a la recta. Representa gràficament la recta s: x 2y = 0 i comprova que és perpendicular a r.

41. Representa gràficament la recta r: 2x y + 5 = 0. Representa gràficament les rectes: 2x y = 0, 2x y = 1, i comprova que són paral·leles a *r*.

Equacions de la recta i el pla a l'espai.

L'equació ***implícita* d'un pla** és :ax + *by* + *cz* + *d* = 0. Observa que és pareguda a l'equació implícita de la recta però amb una component més.



L'equació **vectorial d'una recta** a l'espai és : **OX=** ***OA*** + ***tv,*** aparentment igual a l'equació vectorial d'una recta al pla, però en escriure les coordenades, ara punts i vectors tenen tres components :

$$\begin{cases} x = a_1 + tv_1 \\ y = a_2 + tv_2 \\ z = a_3 + tv_3 \end{cases}$$

Una recta també pot vindre donada com a intersecció de dos plans:

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

Dos punts determinen una recta i tres punts determinen un pla.

Activitats resoltes

- *Escriu l'equació de la recta a l'espai que passa pels punts A(1, 2, 3) i B(3, 7, 1).*

Prenem com a vector de direcció de la recta el vector ***AB*** = (3 – 1, 7 – 2, 1 – 3) = (2, 5, –2) i com a punt, per exemple el *A*, aleshores:

$$\begin{cases} x = 1 + t2 \\ y = 2 + t5 \\ z = 3 - t2 \end{cases}$$

Podem trobar les equacions de dos plans que es tallen en dita recta, eliminant *t* en dues equacions. Per exemple, sumant la primera amb la tercera es té: $x + z = 4$. Multiplicant la primera equació per 5, la segona per 2 i restant, es té: $5x - 2y = 1$. Per tant una altra equació de la recta, com a intersecció de dos plans és:

$$\begin{cases} x + z = 4 \\ 5x - 2y = 1 \end{cases}$$

- *Escriu l'equació del pla que passa pels punts A i B de l'activitat anterior, i C(2, 6, 2).*

Imposem a l'equació $ax + by + cz + d = 0$ que passe pels punts donats:

$a + 2b + 3c + d = 0$

$3a + 7b + c + d = 0$

$2a + 6b + 2c + d = 0$.

Restem a la segona equació la primera, i a la tercera, també la primera:

$a + 2b + 3c + d = 0$

$2a + 5b - 2c = 0$

$a + 4b - c = 0$

Multipliquem per 2 la tercera equació i li restem la segona:

$a + 2b + 3c + d = 0$

$a + 4b - c = 0$

$3b = 0$

Ja coneixem un coeficient, $b = 0$. El substituïm a les equacions:

$a + 3c + d = 0$

$a \; - c = 0$

Veiem que $a = c$, que substituït a la primera: $4c + d = 0$. Sempre, en tindre 3 equacions i 4 coeficients, tindrem una situació com l'actual, en que ho podem resoldre excepte per un factor de proporcionalitat. Si $c = 1$, aleshores $d = -4$. Per tant $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$ i $d = -4$. És el pla d'equació:

$$x + z = 4$$

pla que ja havíem obtingut a l'activitat anterior.

Activitats proposades

42. Escriu l'equació de la recta que passa pels punts A(6, 2, 5) i B(3, 9, 7), de forma explícita, i com a intersecció de dos plans.

43. Escriu les equacions dels tres plans coordenats.

44. Escriu les equacions dels tres eixos coordenats a l'espai.

45. En el cub de diagonal O(0, 0, 0) i A(6, 6, 6) escriu les equacions dels plans que formen les seues cares. Escriu les equacions de totes les seues arestes, i les coordenades dels seus vèrtexs.

3.4. Algunes equacions

Activitats resoltes

- Quins punts verifiquen l'equació $x^2 + y^2 = 1$?

Depèn! Depèn de si estem en un pla o a l'espai.

Al pla, podem veure l'equació com que el quadrat de la distància d'un punt genèric $X(x, y)$ a l'origen $O(0,0)$ és sempre igual a 1:

$$D^2 = (x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 1^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

El lloc de tots els punts del pla que disten 1 de l'origen és la circumferència de centre $O(0, 0)$ i radi 1.

A l'espai el punt genèric $X(x, y, z)$ té tres coordenades, i $O(0, 0, 0)$, també. No és una circumferència, ni una esfera. I què és? El que està clar és que si tallem pel pla *OXY*, ($z = 0$) tenim la circumferència anterior. I si tallem pel pla $z = 3$? També una circumferència. És un cilindre. El cilindre d'eix, l'eix vertical, i de radi de la base 1.

- Quins punts verifiquen l'equació $x^2 + y^2 + z^2 = 1$?

Ara sí. Sí que podem aplicar la distància d'un punt genèric $X(x, y, z)$ a l'origen $O(0, 0, 0)$,

$$D^2 = (x - 0)^2 + (y - 0)^2 + (z - 0)^2 = 1^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

És l'equació de la superfície esfèrica de centre l'origen i radi 1.

Activitats proposades

46. Escriu l'equació del cilindre d'eix l'eix OZ i radi 2.

47. Escriu l'equació de l'esfera de centre l'origen de coordenades i radi 2.

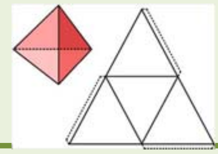
48. Escriu l'equació del cilindre d'eix, la recta $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$ i radi 1.

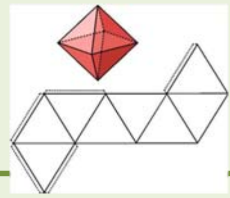
49. Escriu l'equació de la circumferència al pla de centre A(2, 5) i radi 2.

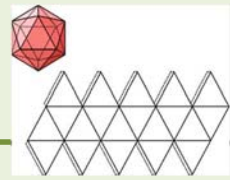
50. En tallar a un cert cilindre per un pla horitzontal es té la circumferència de l'exercici anterior. Escriu l'equació del cilindre

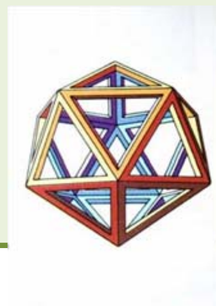
CURIOSITATS. REVISTA

Problemes, problemes, problemes…









Deltaedres

A la trama de triangles dibuixa tots els diamantes-dos possibles, tots els diamantes-tres possibles i tots els diamantes-quatre possibles. Amb quins puc construir un cos a l'espai? A aquests cossos de cares triangulars anem a anomenar-los **DELTAEDRES**. Investiga i construeix tots els deltaedres possibles. Quants hi ha?.

(Podem restringir la busca a deltaedres convexos)

Quins són també poliedres regulars? Quin orde tenen els seus vèrtexs?

Hi ha deltaedres amb menys de quatre cares? Hi ha deltaedres convexos amb un nombre imparell de cares? Hi ha deltaedres amb més de vint cares?

Fes un quadre amb els resultats obtinguts: NÚM. cares, NÚM. vèrtexs, NÚM. arestes, NÚM. vèrtexs d'orde tres, d'orde quatre, d'orde cinc, descripció dels

2. Estudia les maneres de dividir un quadrat en quatre parts iguals en forma i en àrea.

3. Construeix figures de cartolina que mitjançant un sol tall es puguen dividir en quatre trossos iguals.

4. El radi de la Terra és de 6.240 km aproximadament.

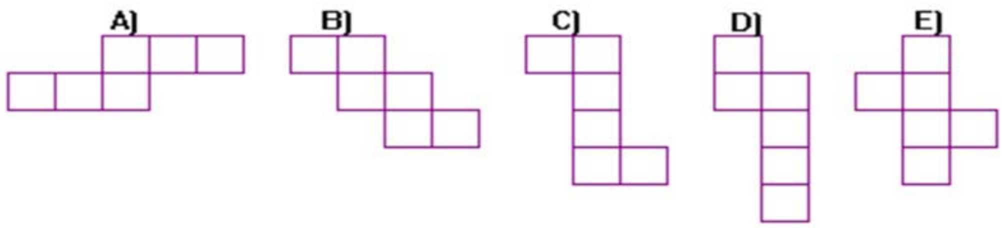
Rodegem la Terra amb un cable. Quant hauríem d'augmentar la longitud del cable perquè se separara per l'equador una distància de dos metres? Menys de 15 m? Més de 15 m i menys de 15 km? Més de 15 km?

Per a començar fes-ho més fàcil. Pensa en la Terra com una poma que té un radi de 3 cm.

5. Com podem construir quatre triangles equilàters iguals amb sis furgadents amb la condició que el costat de cada triangle siga la longitud del furgadents?

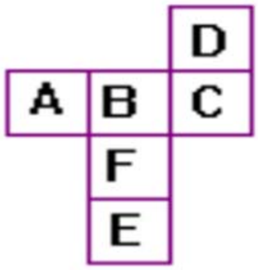
Autores: Milagros Latasa Asso i Fernanda Ramos Rodríguez
Traducció: Pedro Podadera. Institut Juan de Garay de Valencia

6. Quina de les següents figures no representa el desenrotllament de un cub?

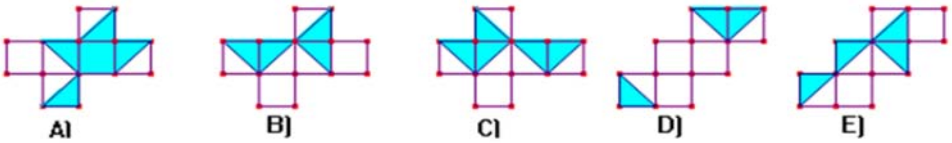


7. Utilitza una trama de quadrats o paper quadriculat, i busca tots els dissenys de sis quadrats que se t'acudisquen. Decideix quins poden servir per a construir un cub.

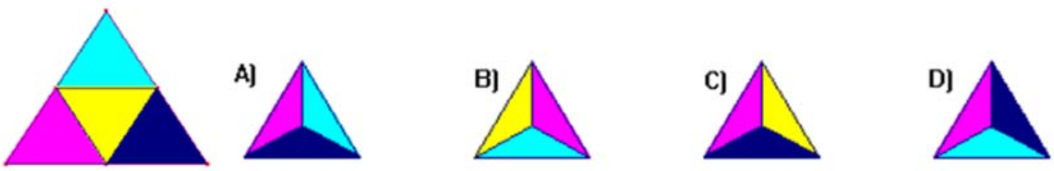
8. Al formar un cub amb el desenrotllament de la figura, quina serà la lletra oposada a F?



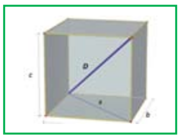
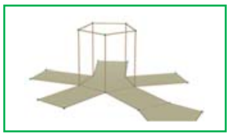
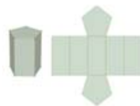
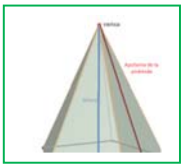
9. A partir d'un d'aquests desenrotllaments bicolors, es pot fabricar un cub, de manera que els colors siguen els mateixos a les dues parts de cada una de les arestes. Quin d'ells ho verifica?



10. El triangle de la figura s'ha plegat per a obtindre un tetràedre. Tenint en compte que el triangle no està pintat per darrere. Quina de les següents vistes en perspectiva del tetràedre és falsa?



RESUM

		Exemples
Teorema de Pitàgores a l'espai	$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$ 	$a= 2$, $b = 3$, $c = 4$, aleshores $D^2 = 4 + 9 + 16 = 29$ D = $\sqrt{29}$ = 5,4.
Teorema de Tales:	Donades dues rectes, *r* i *r'*, que es tallen al punt *O*, i dues rectes paral·leles entre si, *a* i *b*. Si la recta *a* talla a les rectes *r* i *r'* als punts *A* i *C*, i la recta *b* talla a les rectes *r* i *r'* als punts *B* i *D*, aleshores els segments corresponents són proporcionals.	
Poliedres regulars	Un poliedre regular és un poliedre en el què totes les seues cares són polígons regulars iguals i en el que els seus angles poliedres són iguals. Hi ha cinc poliedres regulars: tetràedre, octàedre, icosàedre, cub i dodecàedre	
Prismes	 $A_{Lateral} = Perímetre_{Base} \cdot Altura$ $A_{total} = Àrea_{Lateral} + 2Àrea_{Base}$ $Volum = Àrea_{base} \cdot Altura$	
Piràmides	 $A_{Lateral} = \frac{Perímetre_{base} \cdot Apotema_{Piràmide}}{2}$ $A_{total} = Àrea_{Lateral} + Àrea_{Base}$ $Volum = \frac{Àrea_{Base} \cdot Altura}{3}$	
Cilindre	 $A_{Lateral} = 2\pi R H$; $A_{total} = 2\pi R H + 2\pi R^2$ $Volum = Àrea_{base} \cdot Altura$	
Con	$A_{Lateral} = \pi R G$; $A_{total} = \pi R G + \pi R^2$ $Volum = \frac{Àrea_{base} \cdot Altura}{3}$	
Esfera	$A_{total} = 4\pi R^2$; $Volum = \frac{4}{3}\pi R^3$	
Equacions de la recta al pla	**Equació explícita:** $y = mx + n$. **Equació implícita:** $ax + by + c = 0$ **Equació paramètrica:** $\begin{cases} x = a_1 + tv_1 \\ y = a_2 + tv_2 \end{cases}$	
Equacions de la recta i el pla a l'espai.	**Equació implícita d'un pla**: $ax + by + cz + d = 0$ **Equació paramètrica d'una recta:** $\begin{cases} x = a_1 + tv_1 \\ y = a_2 + tv_2 \\ z = a_3 + tv_3 \end{cases}$	

Autores: Milagros Latasa Asso i Fernanda Ramos Rodríguez
Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

EXERCICIS I PROBLEMES

Teorema de *Pitàgores* i teorema de *Tales*

1. Calcula el volum d'un tetràedre regular de costat 7 *cm*.
2. Calcula la longitud de la diagonal d'un quadrat de costat 1 *m*.
3. Calcula la longitud de la diagonal d'un rectangle de base 15 *cm* i altura 6 *cm*.
4. Dibuixa un paral·lelepípede les arestes del qual mesuren 4 *cm*, 5 *cm* i 6 *cm* que no siga un ortoedre. Dibuixa també el seu desenrotllament.
5. Si el paral·lelepípede anterior fóra un ortoedre, quant mesuraria la seua diagonal?

6. Un got d'11 *cm* d'altura té forma de tronc de con en el que els radis de les bases són de 5 i 3 *cm*. Quant ha de mesurar com a mínim una cullereta perquè sobreïsca del got almenys 2 *cm*?
7. És possible guardar en una caixa amb forma d'ortoedre d'arestes 4 *cm*, 3 *cm* i 12 *cm* un bolígraf de 13 *cm* de longitud?
8. Calcula la diagonal d'un prisma recte de base quadrada sabent que el costat de la base mesura 6 *cm* i l'altura del prisma 8 *cm*.
9. Si un ascensor medeix 1,2 *m* d'ample, 1,6 *m* de llarg i 2,3 *m* d'altura, és possible introduir en ell una escala de 3 *m* d'altura?
10. Quin és la major distància que es pot mesurar en línia recta en una habitació que té 6 *m* d'ample, 8 *m* de llarg i 4 *m* d'altura?
11. Calcula la longitud de l'aresta d'un cub sabent que la seua diagonal mesura 3,46 *cm*.
12. Calcula la distància màxima entre dos punts d'un tronc de con les bases del qual tenen radis 5 *cm* i 2 *cm*, i altura 10 *cm*.
13. En una pizzeria la pizza de 15 *cm* de diàmetre val 2 € i la de 40 *cm* val 5 €. Quina té millor preu?
14. Veiem al mercat un lluç de 30 *cm* que pesa un quilo. Ens pareix un poc xicotet i demanem un altre un poc major, que resulta pesar 2 quilos. Quant mesurarà?
15. En un dia fred un pare i un fill xicotet van exactament igual abrigats, Quin dels dos tindrà més fred?

Longituds, àrees i volums

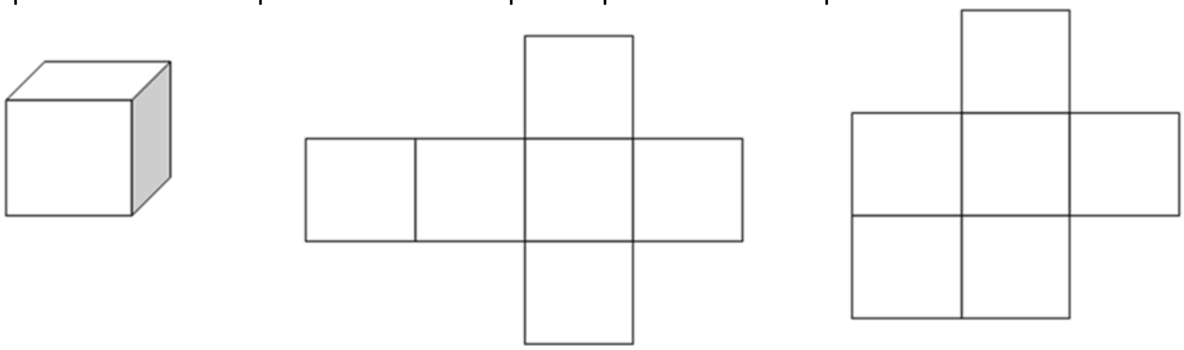
16. Identifica a quin cos geomètric pertanyen els desenrotllaments següents:

17. Podrà existir un poliedre regular les cares del qual siguen hexagonals? Raona la resposta.

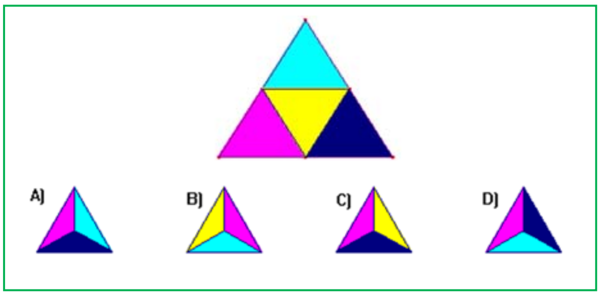
18. Quantes diagonals pots traçar en un cub? I en un octàedre?

19. Pots trobar dues arestes paral·leles en un tetràedre? I en cada un dels restants poliedres regulars?

20. Utilitza una trama de quadrats o paper quadriculat, i busca tots els dissenys de sis quadrats que se t'acudisquen. Decideix quins poden servir per a construir un cub



21. El triangle de la figura s'ha plegat per a obtindre un tetràedre. Tenint en compte que el triangle no està pintat per darrere, quina de les següents vistes en perspectiva del tetràedre és falsa?



22. Un prisma de 8 *dm* d'altura té com a base un triangle rectangle de catets 3 *dm* i 4 *dm*. Calcula les àrees lateral i total del prisma.

23. Dibuixa un prisma hexagonal regular que tinga 3 *cm* d'aresta basal i 0.9 *dm* d'altura i calcula les àrees de la base i total.

24. Un prisma pentagonal regular de 15 *cm* d'altura té una base de 30 cm^2 d'àrea. Calcula el seu volum.

25. Calcula l'àrea total d'un ortoedre de dimensions 2,7 *dm*, 6,2 *dm* i 80 *cm*.

26. Calcula la superfície total i el volum d'un cilindre que té 7 *m* d'altura i 3 *cm* de radi de la base.

27. Calcula l'àrea total d'una esfera de 7 *cm* de radi.

28. Calcula l'apotema d'una piràmide regular sabent que la seua àrea lateral és de 150 cm^2 i la seua base és un hexàgon de 4 *cm* de costat.

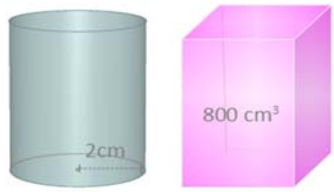
29. Calcula l'apotema d'una piràmide hexagonal regular sabent que el perímetre de la base és de 36 *dm* i l'altura de la piràmide és de 6 *dm*. Calcula també l'àrea total i el volum d'aquesta piràmide.

30. Un triangle rectangle de catets 12 *cm* i 16 *cm* gira al voltant del seu catet menor generant un con. Calcula l'àrea lateral, l'àrea total i el volum.

31. Tres boles de metall de radis 15 *dm*, 0,4 m i 2 *m* es fonen en una sola, quin serà el diàmetre de l'esfera resultant?

32. Quina és la capacitat d'un pou cilíndric de 1,50 *m* de diàmetre i 30 *m* de profunditat?

33. Quant cartó necessitem per a construir una piràmide quadrangular regular si volem que el costat de la base mesure 12 *cm* i que la seua altura siga de 15 *cm*?



34. Calcula el volum d'un cilindre que té 2 *cm* de radi de la base i la mateixa altura que un prisma la base del qual és un quadrat de 4 *cm* de costat i 800 cm^3 de volum.

35. Quina és l'àrea de la base d'un cilindre de 1,50 *m* d'alt i 135 dm^3 de volum?

36. L'aigua d'un brollador es condueix fins a uns dipòsits cilíndrics que mesuren 10 m de radi de la base i 20 m d'altura. Després s'embotella en bidons de 2,5 litres. Quants envasos s'omplin amb cada dipòsit?

37. Calcula la quantitat de cartolina necessària per a construir un anell de 10 tetraedres cada un dels quals té un centímetre d'aresta.

38. En fer el desenrotllament d'un prisma triangular regular de 5 *dm* d'altura, va resultar un rectangle d'un metre de diagonal com a superfície lateral. Calcula l'àrea total.

39. Determina la superfície mínima de paper necessària per a embolicar un prisma hexagonal regular de 2 *cm* de costat de la base i 5 *cm* d'altura.

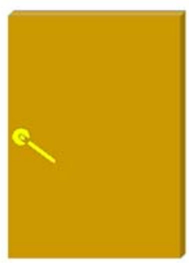
40. L'ajuntament de Madrid ha col·locat unes jardineres de pedra als seus carrers que tenen forma de prisma hexagonal regular. La cavitat interior, on es diposita la terra, té 80 *cm* de profunditat i el costat de l'hexàgon interior és de 60 *cm*. Calcula el volum de terra que ompliria una jardinera per complet.

41. Una habitació té forma d'ortoedre i les seues dimensions són directament proporcionals als nombres 2, 4 i 8. Calcula l'àrea total i el volum si a més se sap que la diagonal medeix 17,3 *m*.

42. Un ortoedre té 0,7 *dm* d'altura i 8 dm^2 d'àrea total. La seua longitud és el doble de la seua amplària, quin és el seu volum?

43. Si el volum d'un cilindre de 15 *cm* d'altura és de 424 cm^3, calcula el radi de la base del cilindre.

44. (**CDI Madrid 2011**) Han instal·lat a casa de Joan un dipòsit d'aigua de forma cilíndrica. El diàmetre de la base mesura 2 metres i l'altura és de 3 metres. a) Calcula el volum del dipòsit en m^3. b) Quants litres d'aigua caben al dipòsit?



45. (**CDI Madrid 2012**) Un envàs d'un litre de llet té forma de prisma, la base és un quadrat que té 10 *cm* de costat. a) Quin és, en cm^3, el volum de l'envàs? b) Calcula l'altura de l'envàs en cm.

46. Una circumferència de longitud 18,84 *cm* gira al voltant d'un dels seus diàmetres generant una esfera. Calcula el seu volum.

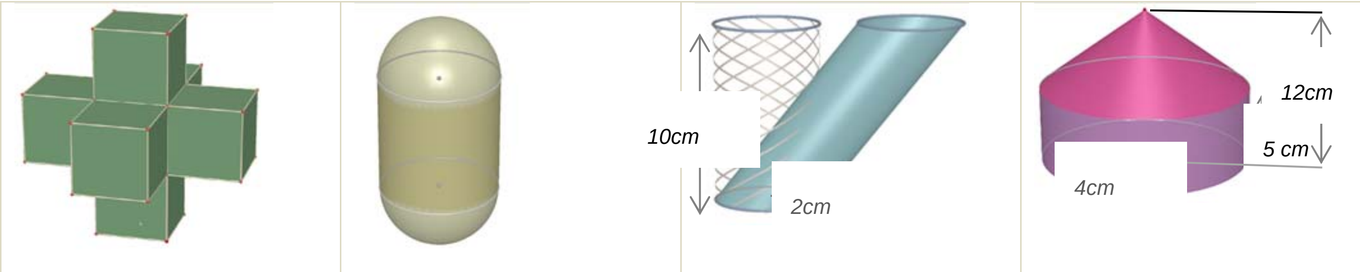
47. Una porta medeix 1,8 *m* d'alt, 70 *cm* d'ample i 3 *cm* de grossària. El preu d'instal·lació és de 100 € i es cobra 5 € per m^2 en concepte d'envernissat, a més del cost de la fusta, que és de 280 € cada m^3. Calcula el cost de la porta si només es realitza l'envernissat de les dues cares principals.

48. L'aigua continguda en un recipient cònic de 21 *cm* d'altura i 15 *cm* de diàmetre de la base s'aboca en un got cilíndric de 15 *cm* de diàmetre de la base. Fins a quina altura arribarà l'aigua?

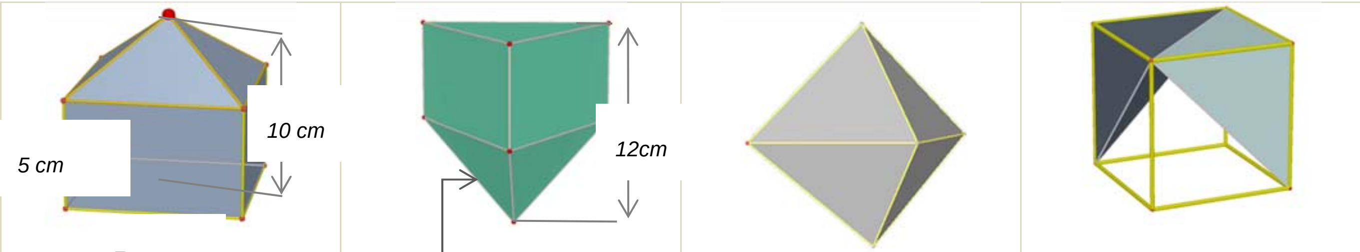
49. Segons Arquimedes, quines dimensions té el cilindre circumscrit a una esfera de 7 *cm* de radi que té la seua mateixa àrea? Calcula aquesta àrea.

50. Quin és el volum d'una esfera en què la longitud d'una circumferència màxima és 251,2 *m*?

51. Calcula l'àrea lateral i el volum dels següents cossos geomètrics:



52. Calcula l'àrea lateral i el volum dels següents cossos geomètrics:



Tetràedre de 5cm d'aresta

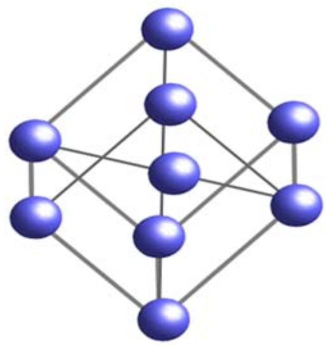
Octàedre de 6cm d'aresta

Piràmides construïdes en l'interior d'una estructura cúbica de 5 dm d'aresta.

53. En la construcció d'un globus aerostàtic esfèric d'un metre de radi s'empra lona que té un cost de 300 €/m^2. Calcula l'import de la lona necessària per a la seua construcció.

54. Calcula el radi d'una esfera que té 33,51 dm^3 de volum.

55. L'Atomium és un monument de Brussel·les que reprodueix una molècula de ferro. Consta de 9 esferes d'acer de 18 m de diàmetre que ocupen els vèrtexs i el centre d'una estructura cúbica de 103 m de diagonal, realitzada amb cilindres de 2 metres de diàmetre. Si utilitzem una escala 1:100 i tant les esferes com els cilindres són massissos, quina quantitat de material necessitarem?



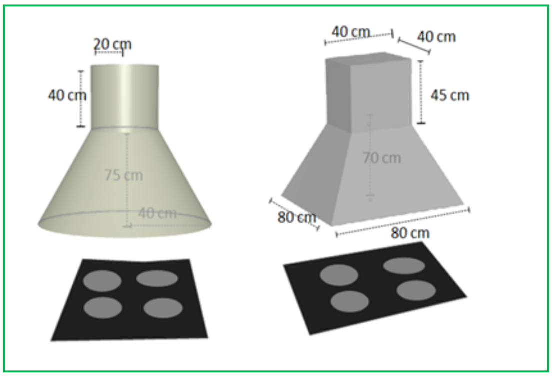
56. S'ha pintat per dins i per fora un dipòsit sense tapadora de 8 dm d'alt i 3 dm de radi. Tenint en compte que la base només es pot pintar per dins, i que s'ha utilitzat pintura de 2€/dm^2, quants diners ha costat en total?

57. Una piscina mesura 20 m de llarg, 5 m d'ample i 2 m d'alt.

a. Quants litres d'aigua són necessaris per a omplir-la?

Autores: Milagros Latasa Asso i Fernanda Ramos Rodríguez
Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

b. Quant costarà recobrir el sòl i les parets amb PVC si el preu és de 20 €/ m²?



58. Quina de les dues campanes extractores de la figura esquerra té un cost d'acer inoxidable menor?

59. En un contenidor cilíndric de 3 *m* de diàmetre i que conté aigua, s'introdueix una bola. Quin és el seu volum si després de la immersió puja 0,5 *m* el nivell de l'aigua?

60. El preu de les teules és de 12,6 €/m^2 Quant costarà reparar una vivenda la teulada de la qual té forma de piràmide quadrangular regular de 1,5 *m* d'altura i 15 m de costat de la base?

61. S'enrotlla una cartolina rectangular de costats 40 *cm* i 26 *cm* formant cilindres de les dues formes possibles, fent coincidir costats oposats. Quin dels dos cilindres resultants té major volum?

62. Cada un dels cubs de la figura té 2 *cm* d'aresta. Quants cal afegir per a formar un cub de 216 cm^3 de volum?

63. Un tub d'assaig té forma de cilindre obert en la part superior i rematat per una semiesfera en la inferior. Si el radi de la base és d'1 *cm* i l'altura total és de 12 *cm*, calcula quants centilitres de líquid caben en ell.

64. El costat de la base de la piràmide de Keops medeix 230 *m*, i la seua altura 146 *m*. Quin volum tanca?

65. La densitat d'un tap de suro és de 0,24, quant pesen mil taps si els diàmetres de les seues bases mesuren 2,5 *cm* i 1,2 *cm*, i la seua altura 3 *cm*?

66. Comprova que el volum d'una esfera és igual al del seu cilindre circumscrit menys el del con de la mateixa base i altura.

67. Calcula el volum d'un octàedre regular d'aresta 2 *cm*.

68. Construeix en cartolina un prisma quadrangular regular de volum 240 cm^3, i d'àrea lateral 240 cm^2.

69. El vidre d'un fanal té forma de tronc de con de 40 *cm* d'altura i bases de radis 20 i 10 *cm*. Calcula la seua superfície.

70. Un pot cilíndric de 15 *cm* de radi i 30 *cm* d'altura té al seu interior quatre pilotes de radi 3,5 *cm*. Calcula l'espai lliure que hi ha al seu interior.

71. Un embut cònic de 15 *cm* de diàmetre té un litre de capacitat, quina és la seua altura?

72. En un dipòsit amb forma de cilindre de 30 *dm* de radi, una aixeta aboca 15 litres d'aigua cada minut. Quant augmentarà l'altura de l'aigua després de mitja hora?

73. La lona d'una ombrel·la oberta té forma de piràmide octogonal regular de 0,5 *m* d'altura i 40 *cm* de costat de la base. Es fixa un pal al sòl en què s'encaixa i el vèrtex de la piràmide queda a una distància del sòl de 1,80 *m*. Al moment en què els rajos de sol són verticals, quina àrea té l'espai d'ombra que determina?

74. Una peixera amb forma de prisma recte i base rectangular s'ompli amb 65 litres d'aigua. Si té 65 *cm* de llarg i 20 *cm* d'ample, quina és la seua profunditat?

75. En un gelat de cucurutxo la galeta té 12 *cm* d'altura i 4 *cm* diàmetre. Quina és la seua superfície? Si el cucurutxo està completament ple de gelat i sobreïx una semiesfera perfecta, quants cm^3 de gelat conté?

Iniciació a la Geometria Analítica

76. Calcula la distància entre els punts $A(7, 3)$ i $B(2, 5)$.

77. Calcula la distància entre els punts $A(7, 3, 4)$ i $B(2, 5, 8)$.

78. Calcula la longitud del vector de components $\boldsymbol{u} = (4, 5)$.

79. Calcula la longitud del vector de components $\boldsymbol{u} = (4, 5, 0)$.

80. El vector $\boldsymbol{u} = (4, 5)$ té l'origen al punt $A(3, 7)$. Quines són les coordenades del seu punt extrem?

81. El vector $\boldsymbol{u} = (4, 5, 2)$ té l'origen al punt $A(3, 7, 5)$. Quines són les coordenades del seu punt extrem?

82. Dibuixa un quadrat de diagonal el punt $A(2, 3)$ i $C(5, 6)$. Quines coordenades tenen els altres vèrtexs del quadrat? Calcula la longitud del costat i de la diagonal del dit quadrat.

83. Dibuixa un cub de diagonal $A(1, 1, 1)$ i $B(4, 4, 4)$. Quines coordenades tenen els altres vèrtexs del cub? Ja saps, són 8 vèrtexs. Calcula la longitud de l'aresta, de la diagonal d'una cara i de la diagonal del cub.

84. Siga $X(x, y)$ un punt del pla, i $A(2, 4)$, escriu l'expressió de tots els punts X que disten de A una distància 3.

85. Siga $X(x, y, z)$ un punt de l'espai, i $A(2, 4, 3)$, escriu l'expressió de tots els punts X que disten de A una distància 3.

86. Escriu l'equació paramètrica de la recta que passa pel punt $A(2, 7)$ i té com a vector de direcció $\boldsymbol{u} = (4, 5)$. Representa-la gràficament.

87. Escriu l'equació de la recta que passa pels punts $A(2, 7)$ i $B(4, 6)$, de forma explícita, implícita i paramètrica. Representa-la gràficament.

88. Escriu l'equació de la recta que passa pels punts $A(2, 4, 6)$ i $B(5, 2, 8)$, de forma explícita, i com a intersecció de dos plans.

89. En el cub de diagonal $A(1, 1, 1)$ i $B(5, 5, 5)$ escriu les equacions dels plans que formen les seues cares. Escriu també les equacions de totes les seues arestes, i les coordenades dels seus vèrtexs.

90. Escriu l'equació del cilindre d'eix $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ i radi 3.

91. Escriu l'equació de l'esfera de centre $A(2, 7, 3)$ i radi 4.

92. Escriu l'equació del cilindre d'eix, la recta $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$ i radi 2.

93. Escriu l'equació de la circumferència al pla de centre $A(3, 7)$ i radi 3.

94. En tallar a un cert cilindre per un pla horitzontal es té la circumferència de l'exercici anterior. Escriu l'equació del cilindre.

Autores: Milagros Latasa Asso i Fernanda Ramos Rodríguez
Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

AUTOAVALUACIÓ

1. Les longituds dels costats del triangle de vèrtexs $A(2, 2)$ $B(1, 4)$ i $C(0, 3)$ són:

a) 2, 5, 5 b) $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$ c) $\sqrt{5}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ d) $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$

2. En el triangle rectangle de catets 3 i 4 *cm* es multipliquen per 10 totes les seues longituds. L'àrea del nou triangle és:

a) 6 m^2 b) 6 dm^2 c) 60 cm^2 d) 0,6 m^2

3. L'altura d'un prisma de base quadrada és 20 *cm* i el costat de la base és 5 *cm*, la seua àrea total és:

a) 450 cm^2 b) 45 dm^2 c) 425 cm^2 d) 0,45 m^2

4. Un dipòsit d'aigua té forma de prisma hexagonal regular de 5 *m* d'altura i costat de la base 1 *m*. El volum d'aigua que hi ha en ell és:

a) $60\sqrt{2}$ m^3 b) $45\sqrt{2}$ m^3 c) $30000\sqrt{2}$ dm^3 d) $90\sqrt{2}$ m^3

5. La teulada d'una caseta té forma de piràmide quadrangular regular de 0,5 *m* d'altura i 1000 *cm* de costat de la base. Si es necessiten 15 teules per metre quadrat per a recobrir la teulada, s'utilitzen un total de:

a) 1051 teules. b) 150 teules. c) 245 teules. d) 105 teules.

6. Una caixa de dimensions 30, 20 i 15 *cm*, està plena de cubs d'1 *cm* d'aresta. Si s'utilitzen tots per a construir un prisma recte de base quadrada de 10 *cm* de costat, l'altura mesurarà:

a) 55 *cm* b) 65 *cm* c) 75 *cm* d) 90 *cm*

7. El radi d'una esfera que té el mateix volum que un con de 5 *dm* de radi de la base i 120 *cm* d'altura és:

a) $5\sqrt{3}$ *dm* b) $\sqrt[3]{75}$ *dm* c) 150 *cm* d) $\sqrt[3]{2250}$ *cm*

8. Es distribueixen 42,39 litres de dissolvent en llandes cilíndriques de 15 *cm* d'altura i 3 *cm* de radi de la base. El nombre d'envasos necessari és:

a) 100 b) 10 c) 42 d) 45

9. L'equació d'una recta al pla que passa pels punts $A(2, 5)$ i $B(1, 3)$ és:

a) $y = -2x + 1$ b) $3y -2x = 1$ c) $y = 2x + 1$ d) $y = -2x + 9$.

10. L'equació de l'esfera de centre A(2, 3, 5) i radi 3 és:

a) $x^2 - 2x + y^2 - 3y + z^2 - 5z + 29 = 0$ b) $x^2 - 4x + 3y^2 - 6y + 5z^2 - 10z + 29 = 0$

c) $x^2 - 4x + y^2 - 6y + z^2 - 10z + 38 = 0$ d) $x^2 - 4x + y^2 - 6y + z^2 - 10z + 29 = 0$

Matemàtiques orientades a les ensenyances acadèmiques:

4t B d'ESO

Capítol 10:

Funcions i gràfiques

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Andrés García i Javier Sánchez

Revisores: Javier Rodrigo i José Gallegos

Il·lustracions: Andrés García i Javier Sánchez

Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

Índex

Resum

Un dels conceptes més importants que apareixen a les Matemàtiques és la idea de *funció*. Intuïtivament, una funció és qualsevol procés pel qual es transforma un nombre en un altre. Més formalment, una funció *f és* una correspondència que a un nombre x li assigna un únic nombre y, tal que $y = f(x)$.

No és difícil trobar exemples de funcions. L'espai recorregut en funció del temps, el pes d'una persona en funció de la seua altura, el que paguem de telèfon en funció dels minuts que parlem.

En aquest capítol aprendrem com tractar de manera rigorosa la idea intuïtiva de funció i com estudiar les funcions. Veurem com descriure les seues característiques i estudiarem la manera de fer un model matemàtic d'algunes situacions de la vida real que ens ajude a prendre millors decisions. Pràcticament qualsevol situació real pot ser estudiada amb ajuda de funcions. Tenim per tant molt camp…

Autors: Andrés García i Javier Sánchez

Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

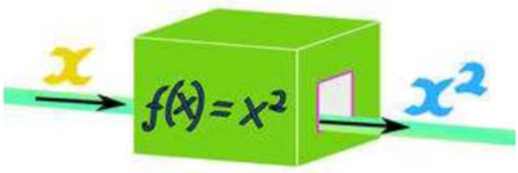
1. FUNCIONS REALS

1.1. Concepte de funció

Una ***funció*** és una relació o correspondència entre dues magnituds, tals que a cada valor de la variable independent, *x*, li correspon ***un sol*** valor de la dependent, *y*.

Per a indicar que la variable (*y*) depén o és funció d'una altra, (*x*), s'usa la notació **y = *f*(*x*),** que es llig *"y és funció de x"*.

Les funcions són com a màquines a les què se'ls fica un element, *x*, i torna un altre valor, $y = f(x)$. Per exemple, en la funció $f(x) = x^2$, s'introdueix valors de *x*, i ens torna els seus quadrats.



És MOLT IMPORTANT que tinguem un sol valor de *y* (variable dependent) per a cada valor de *x* (variable independent). En cas contrari no tenim una funció.
Les funcions es van introduir per a estudiar processos. Si fent el mateix ens poden eixir coses distintes, no es pot estudiar de la mateixa manera.

Exemples:

- *Pensem en la factura de telèfon. Si sabem quants minuts hem parlat (suposant, clar, que costen el mateix tots) també sabem quant ens toca pagar. Els diners que paguem és funció del temps.*
- *Anem al casino i apostem a roig o negre. Si apostem un euro, podem guanyar dues o no guanyar res. Si diem quant apostem no sabem quant guanyarem. Per tant, els guanys en un casino NO són una funció de l'aposta.*

Activitats resoltes

- Indica si les següents situacions representen una funció o no
  a. L'espai recorregut per un cotxe i el temps.
  b. Els guanys en la Borsa en funció del que inverteix.
  c. El quadrat d'un nombre.

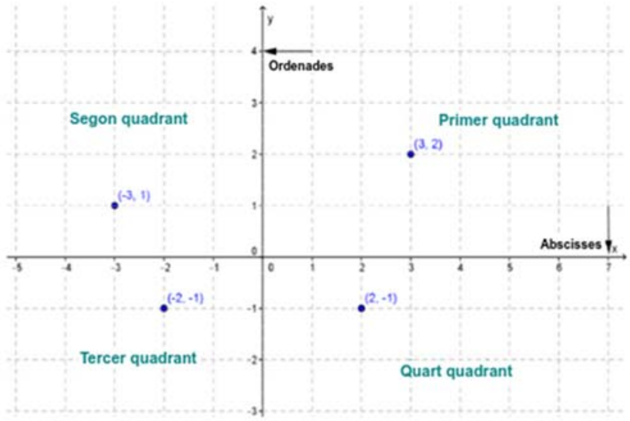
Solució:
Són funcions la a) i la c). La b) no ho és perquè no sabem quant guanyem.

1.2. Gràfica d'una funció

Moltes vegades, la manera més senzilla de veure com es comporta una funció és dibuixar-la al pla cartesià. Recordarem molt breument què era el pla cartesià (cartesià, ve de *Cartesio*, que era el nom amb què firmava el seu inventor, *Renè Descartes*).

Un **sistema de referència cartesià** consisteix en dues rectes numèriques perpendiculars, anomenades **eixos**. El punt en què es tallen els eixos és l'origen del sistema, també anomenat **origen de coordenades.**

Normalment el representem amb un eix vertical i l'altre horitzontal. A l'eix horitzontal el denominem **eix d'abscisses** o també eix X i al vertical **eix d'ordenades** o eix Y.



Sistema de referència cartesià

En tallar-se els dos eixos, el pla queda dividit en quatre zones, que es coneixen com a **quadrants**:

-Primer quadrant: Zona superior dreta

-Segon quadrant: Zona superior esquerra

-Tercer quadrant: Zona inferior esquerra

-Quart quadrant: Zona inferior dreta.

Per a representar punts, només cal recordar que la primera component (o abscissa) és x, per la qual cosa ha d'anar a l'eix X (eix d'abscisses). La segona component (o ordenada) és y, per tant va a l'eix Y (eix d'ordenades).

El sentit positiu és a la dreta i amunt. Si alguna de les components és negativa, aleshores es col·loca en sentit contrari.

Per a representar una gràfica, el que hem de fer és simplement prendre valors (x, y) o, el que és el mateix (x, $f(x)$) ja que $y = f(x)$. Després els unim, bé amb línies rectes, bé ajustant "a ull" una línia corba. Naturalment, ara ens apareixen dues qüestions:

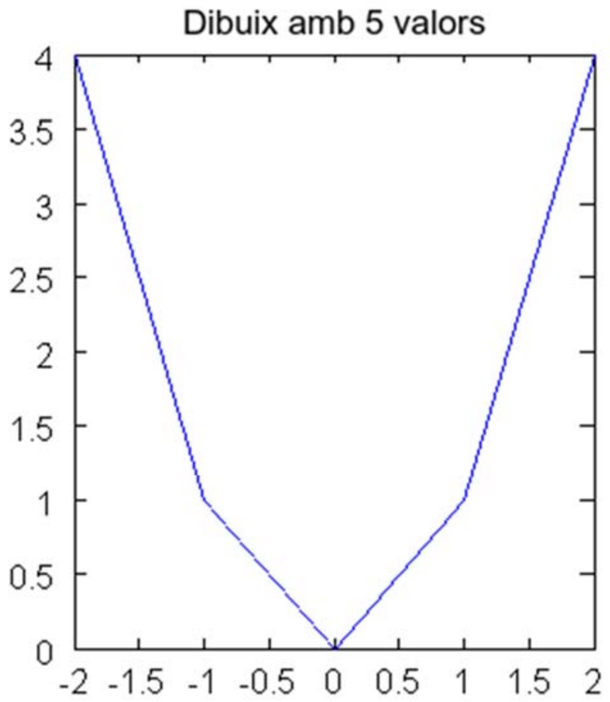
- Quants valors cal donar?
- Quins valors li donem?

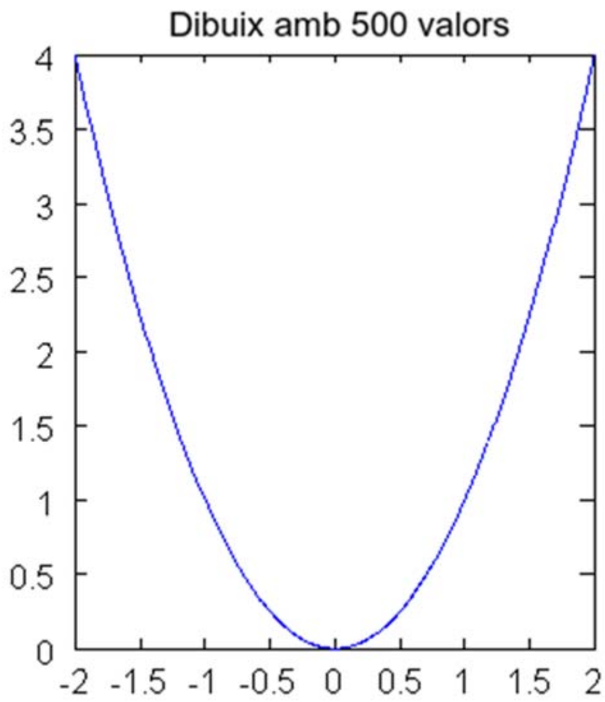
En general, no hi ha una resposta clara a aqueixes preguntes, a part de l'òbvia "quant més, millor". Si una gràfica es dibuixa amb ordinador, normalment se li dóna un interval i el nombre de valors que volem que represente. Típicament, un ordinador dóna MOLTS valors: 500, 1000, ….

Exemple:

- *Dibuixem la funció* $y = x^2$ a l'interval [–2, 2] amb un ordinador (aquest dibuix està fet amb el programa *Octave*, que és codi obert i pots descarregar lliurement).

Fem dues gràfiques, una donant 5 valors i l'altra 500. Observa la diferència entre els dos dibuixos. Observa també que l'ordinador uneix els punts amb segments de rectes.



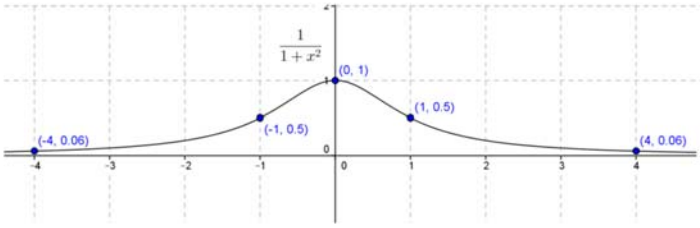


Activitat resolta

- *Dibuixar la funció* $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$.

Més tard indicarem els valors que és recomanable prendre. De moment, ens limitarem a donar uns pocs i unir punts. Per cap raó en especial, prenem –4, –1, 0, 1 i 4. Recordem que en substituir s'usen SEMPRE parèntesi. Així $\dfrac{1}{(-4)^2+1}=\dfrac{1}{16+1}=\dfrac{1}{17}=0'06$. Obtenim aleshores la taula de valors i basta unir els punts (donant-los "a ull" un poc de corba)

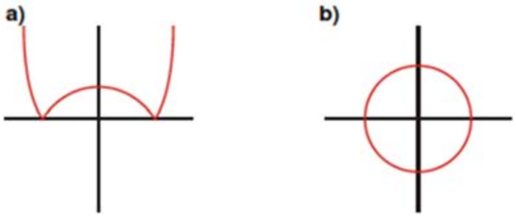
–4	0'06
–1	0'5
0	1
1	0'5
4	0'06



Una qüestió a ressenyar de les gràfiques és el fet de que, directament a partir d'un dibuix podem veure si correspon a una funció o no. Per a veure-ho, basta fixar-se en si hi ha algun valor de *x* que corresponga a més d'un valor de *y*. Si NO n'hi ha, és una funció. Observem que l'exemple anterior és una funció.

Activitat resolta

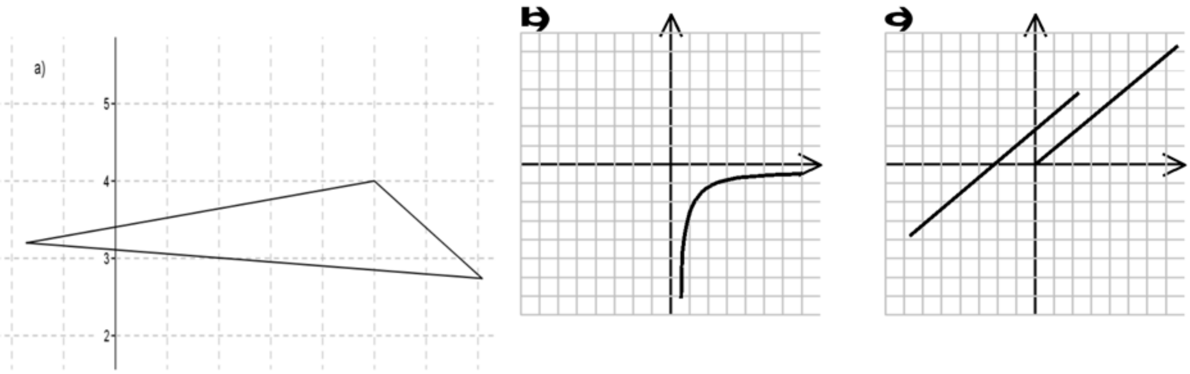
- *Indica quins de les següents representacions corresponen a la gràfica d'una funció:*



La gràfica a) és una funció. La gràfica b) NO ho és perquè, per exemple el punt *x*=0 té dos valors de *y*.

Activitat proposada

1. De les següents gràfiques indica quines d'elles corresponen a funcions.



1.3. Diferents maneres d'expressar una funció

Recordem, una vegada més, que una funció és la descripció de com es relacionen dues magnituds. Així doncs, aquesta descripció la podem saber de diverses maneres.

Funcions donades per taules

Probablement, la manera més senzilla en la que es pot donar una funció és amb una taula de valors. És a més la manera més experimental: observem un procés i mesurem les quantitats que ens ixen. Així tenim una idea de com es relacionen.

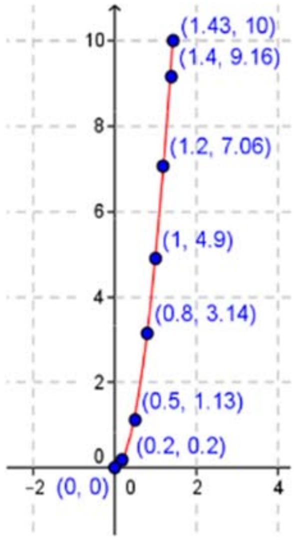
Dibuixar la seua gràfica no pot ser més senzill. Basta posar els punts i, si és el cas, unir-los.

Exemple:

- *Soltem una pilota des de 10 m d'altura i mesurem l'espai recorregut (en segons). Obtenim aleshores la taula següent:*

Espai (m)	0	0,2	0,5	0,8	1	1,2	1,4	1,43
Temps (s)	0	0,2	1,13	3,14	4,9	7,06	9,16	10,00

És molt senzill dibuixar la seua gràfica. Basta representar els punts i unir-los (aquesta gràfica està feta amb el programa *Geogebra*, també de codi obert):



Dona't compte que té sentit *"omplir"* l'espai entre punts. Encara que no l'hagem mesurat, la pilota no pot teletransportar-se, per la qual cosa segur es pot parlar d'on està en l'instant 0'7, per exemple. I òbviament, l'espai recorregut estarà entre 1'13 (que correspon a 0'5 segons) i 3'14 (que correspon a 0'8 segons).

La qüestió que ens plantegem és la següent: és sempre així? Pot haver-hi funcions on NO TINGA SENTIT posar valors intermedis?

Per poc que penses, et donaràs compte que sí n'hi ha. Vegem un exemple:

Exemple:

- *En una llibreria, han posat la següent taula amb el preu de les fotocòpies, depenent del nombre de còpies:*

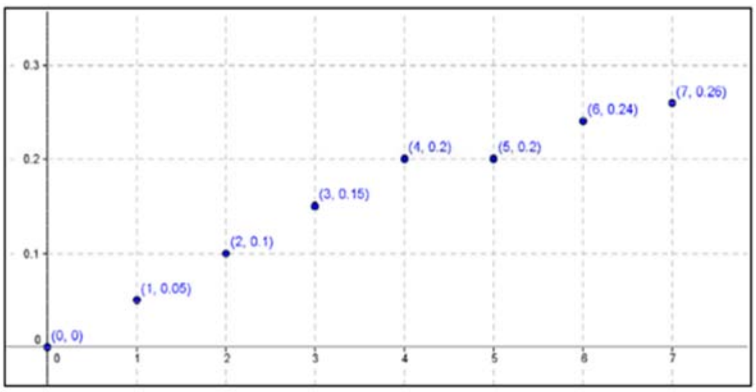
N de còpies	0	1	2	3	4	5	6	7
Preu (euros)	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,2	0,24	0,28

Es pot construir la representació gràfica dibuixant aquests punts.

La qüestió de si podem dibuixar punts intermedis entre els anteriors es respon per si sola.

No es poden fer 1'5 còpies. Només pots fer un nombre enter de còpies.

Per tant, no té sentit plantejar-se tan sols donar valors intermedis ni dibuixar-los.

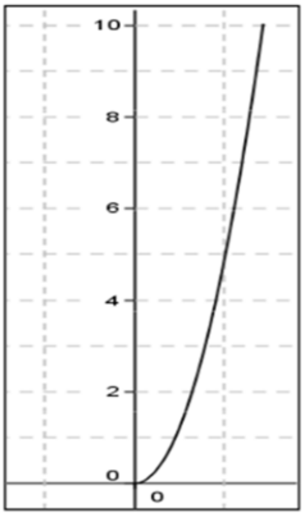


Funcions donades per una expressió

En moltíssimes ocasions, sabem prou de la relació entre dues magnituds com per a conèixer exactament una expressió que les relaciona. Començarem amb un exemple.

Exemple:

- *Tornem al cas que vam veure abans, on soltàvem una pilota.*



No necessitem mesurar els temps i els espais. És un cos en caiguda lliure i per tant el que en Física s'anomena moviment uniformement accelerat. En aquest cas $e = \frac{1}{2}at^2$ on *e* és l'espai, *t* és el temps i *a* és l'acceleració. A més, *a* és coneguda perquè és la gravetat, és a dir 9'8 m/s^2.

Per tant, les dues magnituds, espai i temps, estan relacionades per l'equació $e = \frac{1}{2}9'8\,t^2$. En Matemàtiques és més usual posar *x* e *y*, per la qual cosa seria $y = \frac{1}{2}9'8x^2$ però és exactament el mateix.

I, com tenim tots els punts que vulguem, podem dibuixar la funció sense cap problema amb els seus punts intermedis. O indicar-li a un ordinador que la dibuixe.

El resultat, naturalment, és el mateix.

Activitats proposades

2. Un ciclista beu 1/2 litre d'aigua cada 10 km de recorregut. Si en el cotxe d'equip porten un bidó de 40 litres, fes una taula que indique la seua variació i escriu la funció que la representa.

3. Un ciclista participa en una carrera recorrent 3 km cada minut. Tenint en compte que no va partir de l'origen sinó 2 km per darrere representa en una taula el recorregut durant els tres primers minuts. Escriu la funció que expressa els quilòmetres en funció del temps en minuts i dibuixa-la.

Funcions definides a trossos

- *Pensa en la següent situació per a la tarifa d'un telèfon mòbil. Es paga un fix de 10 € al mes i amb això són gratis els 500 primers minuts. A partir d'allí, es paga a 5 cèntims per minut.*

És evident que és diferent el comportament abans de 500 minuts i després.

Una **funció definida a trossos** és aquella que ve donada per una expressió distinta per a diferents intervals.

A l'exemple anterior, és fàcil veure que $f(x)=\begin{cases}10+0'05(x-500) & x>500\\ 10, & x\le 500\end{cases}$.

Vegem breument per què. Per a valors menors que 500, el gasto és sempre 10 €. Per a valors majors, els minuts que gastem PER DAMUNT DE 500 són (x – 500) i per tant el que paguem pels minuts és 0'05(x – 500) perquè ho mesurem en euros. Cal sumar-li els 10 € que paguem de fix.

Activitats proposades

4. Representa les següents funcions a trossos. S'indiquen els punts que has de calcular.

a. $f(x)=\begin{cases} x-1, & si\ \ x<-3\\ -x+1, & si\ \ -3\le x<0\\ 3, & si\ \ 0\le x<\infty\end{cases}$ Punts: –5, –3'1, –3, –1, –0'1, 0, 1.

b. $g(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}, & si\ \ x<-2\\ 3, & si\ \ -2\le x<1\\ \sqrt{x}, & si\ \ 1\le x\end{cases}$ Punts: –3, –2'1, –2, 0, 0'9, 1, 4, 9.

1.4. Domini i recorregut d'una funció

Fins ara, no ens hem preocupat de quins valors poden tindre la x i la y. Però és evident que no sempre poden prendre tots els valors de la recta real. Per exemple, si una funció ens dóna l'altura amb respecte del pes no podrem tindre valors negatius. Per a això existeixen els conceptes de domini i recorregut.

El **domini** d'una funció és el conjunt de valors que la variable independent (x) pot prendre. S'escriu *Domf* o *Dom*(*f*).

El **recorregut** o **rang** d'una funció és el conjunt de valors que la variable dependent (y) pot prendre. S'escriu *Rgf* o *Rg*(*f*).

Normalment, el recorregut és més directe de calcular. Simplement, mirem la gràfica i veiem quins valors pot prendre la variable dependent (y).

El domini sol ser un assumpte prou més complicat. En general, hi ha dues raons per les quals un valor de x NO pertanga al domini.

1. La funció no té sentit per a eixos valors. Per exemple, si tenim una funció que represente el consum d’electricitat a cada hora del dia, és evident que *x* ha d’estar entre 0 i 24. Un dia té 24 hores!! De cap manera podem parlar tan sols del que hem gastat l’hora 25.

2. L'operació que ens dóna *f*(*x*) no pot fer-se. Per exemple, no es pot dividir entre 0, per la qual cosa la funció $f(x)=\frac{1}{x}$ té com a domini el conjunt $\{x \in \Re; x \neq 0\}$, és a dir $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

El primer cas ve donat per l’aplicació pràctica i el nostre sentit comú. El segon és el que té més dificultat i per això anem a dedicar-li un poc més de temps.

Càlcul de dominis

Hi ha dues operacions que NO estan permeses.

a. Dividir entre 0.

b. Fer arrels quadrades o d’índex parell de nombres negatius. Tin en compte que l’arrel quadrada de 0 SÍ QUE està definida (val 0).

En capítols futurs veurem alguna operació més, però per ara, només aqueixes dues operacions. Veurem un mètode sistemàtic per a calcular el domini.

Mètode per a calcular el domini

1. Quadricula TOTES les operacions problemàtiques.
2. Per a TOTES aqueixes operacions, planteja una equació igualant-la a 0. Resol la dita equació.
3. Representa en una recta totes les solucions de totes les equacions.
4. Dóna valors a la funció. Un valor en cada interval i els valors límit. Si l’operació es pot fer, és que el punt o l’interval pertany al domini. Si no, doncs no. Pots veure si una operació val, o no, fent-la amb la calculadora. Si ix error, és que no es pot. Marca amb un X els valors que no valen i amb un tick (V) si es poden fer.
5. Representa la solució amb intervals. Si el punt de l’extrem està, és un claudàtor com [] i si no, un parèntesi.

Així vist, pot parèixer un poc complicat. Veurem un parell d’exemples.

Activitats resoltes

- *Calcula el domini de les funcions següents:*

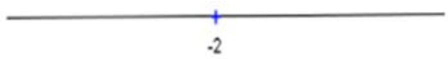
a. $x+\sqrt{2x+4}$

b. $\dfrac{1}{\sqrt{x+2}-1}$

Apartat a

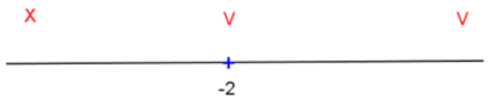
Seguirem el procediment fil per randa. L'únic possible problema és l'arrel quadrada de 2x +4

1. Igualem a 0 i resolem: $2x+4=0 \Rightarrow 2x=-4 \Rightarrow x=-2$
2. Representem a la recta els valors.



3. Hem de donar un valor a l'esquerra de –2, el valor –2 i un valor a la dreta. Per exemple, el –3, el –2 i el 0. Els marquem a la recta

X	–3	–2	0
És vàlid?	NO	SÍ	SÍ



4. El domini és $[-2,+\infty)$(l'infinit SEMPRE és obert, mai arribem).

Apartat b

1. Tenim dos possibles problemes. L'arrel quadrada de$x+2$ i el denominador$\sqrt{x+2}-1$.
2. Hem d'igualar ELS DOS a zero. $x+2=0 \Rightarrow x=-2$.

D'altra banda $\sqrt{x+2}-1=0 \Rightarrow \sqrt{x+2}=1$. Elevant al quadrat $x+2=1^2 \Rightarrow x=-1$.

3. Representem a la recta els valors.

4. Hem de donar un valor a l'esquerra de –2, el valor –2, un valor entre –2 i –1, el valor –1 i un valor a la dreta del -1. Per exemple, el –3, el –2, el –1'5, el -1 i el 0. Els marquem a la recta

X	–3	–2	–1'5	–1	0
És vàlid?	NO	SÍ	SÍ	NO	SÍ

El domini és $[-2,-1)\cup(-1,+\infty)$.

Activitats proposades

5. Indica el domini de les funcions següents:

a) $\frac{1}{\sqrt{x^2-4}}$ **b)** $\sqrt{x+\frac{1}{x+2}}$

6. Indica el domini i el recorregut de les funcions següents:

a) $y = 14x + 2$ **b)** $y=\frac{1}{x-1}$ **c)** $y=\sqrt{2+x}$

7. Representa les següents funcions i indica el seu domini i recorregut:

a) $f(x)=\begin{cases} x, \text{si } x\in[-3,0) \\ 2, \text{si } x\in[0,2] \end{cases}$ **b)** $g(x)=\begin{cases} -x, \text{ si } x\in[-2,1] \\ x, \text{ si } x\in(1,2] \end{cases}$

2. CARACTERÍSTIQUES D'UNA FUNCIÓ

Recorda que:

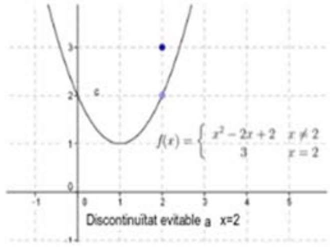
En tercer ja vas estudiar les característiques d'una funció. És molt important. Per la qual cosa insistirem en això.

2.1. Continuïtat

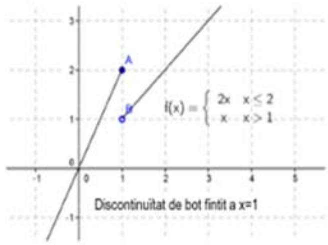
Intuïtivament, una funció és contínua si la seua gràfica es pot dibuixar sense alçar el llapis del paper. En cas contrari, es produeixen "bots" o "salts" en determinats valors de la variable independent que reben el nom de discontinuïtats.

Una discontinuïtat pot ser de tres tipus:

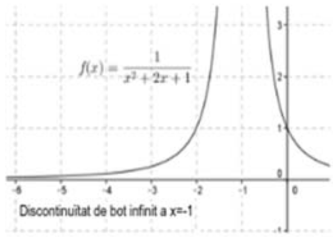
1. **Evitable**: En la funció només "no val" a un punt, en que "no està on hauria d'estar". Més formalment, si ens aproximem al punt per la dreta i per l'esquerra, ens aproximem a un valor que no és el de la funció. En aquest cas, la funció seria contínua sense més que canviar la definició de la funció al punt que ens dóna problemes.



2. **De salt finit:** En un punt, la funció té dues branques diferents de dreta i esquerra del punt. Aquestes branques s'aproximen a valors distints (però finits) per a cada costat. El punt de discontinuïtat pot estar en una qualsevol de les branques o inclús fora d'elles. Dóna el mateix, la discontinuïtat continua sent de salt finit.

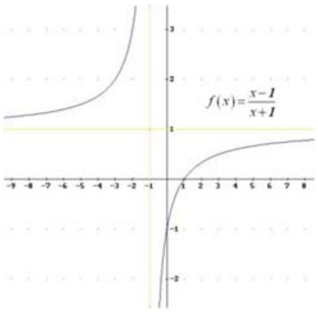


3. **De salt infinit:** Com a salt finit, en un punt la funció té dues branques diferents. Però en aquest cas, almenys una de les dues branques (possiblement les dos) es fa immensament gran o immensament negativa (en termes més informals "se'n va a infinit").

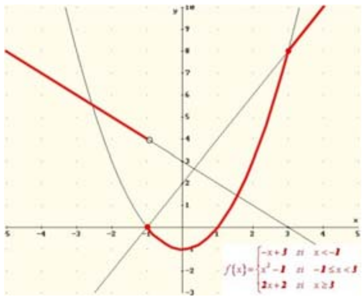


Activitats resoltes

- *Indica en aquestes funcions el/els valor/s de la variable independent on es produeix la discontinuïtat i indica el tipus de discontinuïtat.*



Salt infinit en x = –1



Salt finit en x = –1

2.2. Monotonia: Creixement i decreixement, màxims i mínims

Les següents definicions potser et resulten conegudes de 3º d'ESO.

Una funció és constant en un interval quan prenga el valor que prenga la variable independent, la dependent pren sempre el mateix valor. En símbols, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$, per a tot x_1 i x_2.

Una funció és **estrictament creixent** en un interval quan en augmentar el valor de la variable independent augmenta també el de la dependent. En símbols $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, per a tot x_1 i x_2.

Una funció és **creixent (en sentit ampli)** en un interval si és estrictament creixent o constant. En símbols $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$, per a tot x_1 i x_2. Pot també dir-se que, en augmentar el valor de la variable independent, el valor de la dependent NO disminueix.

Una funció és **estrictament decreixent** en un interval quan en augmentar el valor de la variable independent disminueix també el de la dependent. En símbols $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, per a tot x_1 i x_2.

Una funció és **decreixent (en sentit ampli)** en un interval si és estrictament decreixent o constant. En símbols $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$, per a tot x_1 i x_2. Pot també dir-se que, en augmentar el valor de la variable independent, el valor de la dependent NO augmenta.

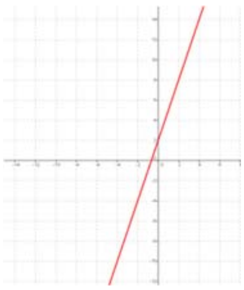
Una funció és **estrictament monòtona** en un interval quan és estrictament creixent o decreixent al dit interval.

Una funció és **monòtona (en sentit ampli)** en un interval quan és creixent o decreixent (en sentit ampli) al dit interval.

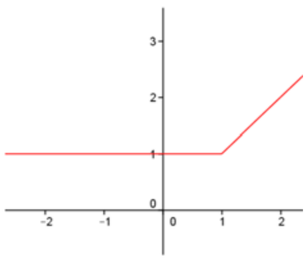
Com indiquen les definicions, la monotonia o no d'una funció es dóna en un interval, és a dir, per a un conjunt de nombres reals. Per tant, una funció pot ser creixent per a una sèrie de valors, per a altres ser decreixent o constant, després pot tornar a ser creixent o decreixent o constant…

Exemples:

- *En les funcions següents estudia el creixement i el decreixement.*



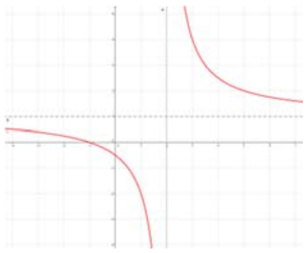
CREIXENT sempre



CONSTANT fins a x = 1

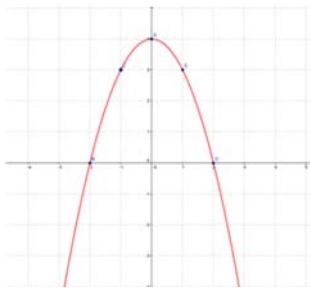
CREIXENT des de x = 1

CREIXENT(EN SENTIT AMPLI) sempre



DECREIXENT fins a x = 2

DECREIXENT des de x =2



CREIXENT fins a x=0

DECREIXENT des de x = 0

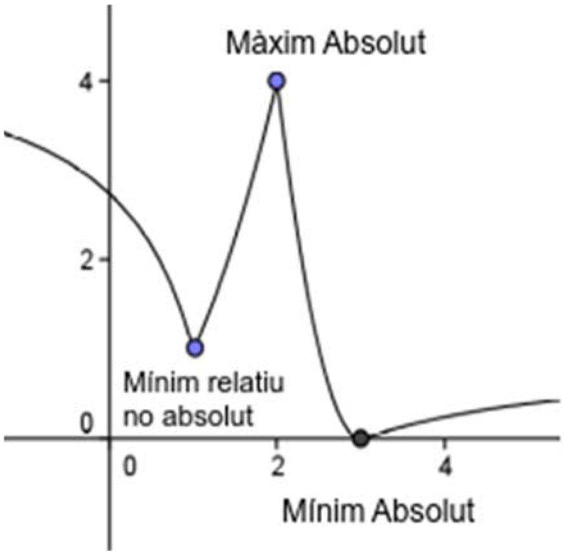
Extrems: màxims i mínims

Una funció presenta un **màxim relatiu** en un punt quan la imatge de la funció al dit punt és major que en qualsevol dels valors que estan al seu voltant (al seu *entorn*). Si, a més, la imatge és major que en qualsevol altre punt de la funció, es diu que la funció aconsegueix un **màxim absolut** a ell.

Una funció presenta un **mínim relatiu** en un punt quan la imatge de la funció al dit punt és menor que en qualsevol dels valors que estan al seu voltant (al seu *entorn*). Si, a més, la imatge és menor que en qualsevol altre punt de la funció, es diu que la funció aconsegueix un **mínim absolut** a ell.

Si una funció presenta un màxim o un mínim en un punt, es diu que té un **extrem** en el dit punt, que podrà ser relatiu o absolut.

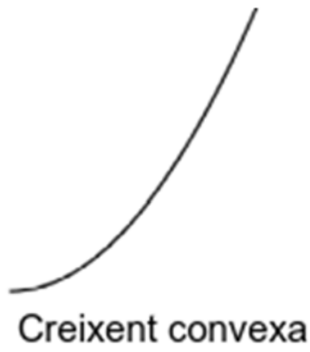
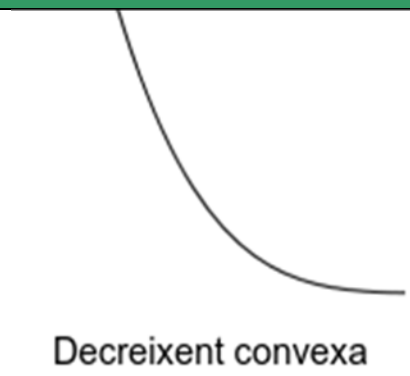
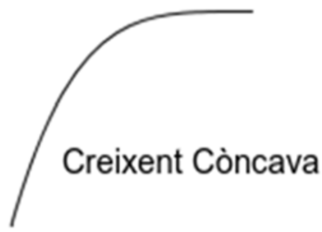
Exemple:



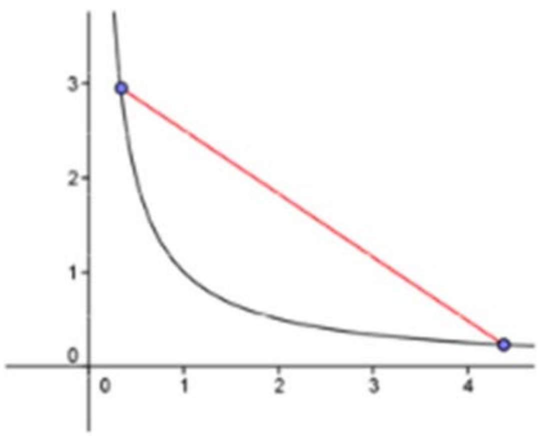
2.3. Curvatura: concavitat, convexitat i punts d'inflexió

Una funció és **convexa** si en unir dos punts de la seua gràfica el segment queda per damunt de dita gràfica. Es diu **còncava** si en fer la mateixa operació queda per davall. Un punt on es canvia de còncava a convexa o viceversa s'anomena **punt d'inflexió**.

Una imatge val més que mil paraules. Així que dibuixarem els quatre tipus de funcions que tenim:

	Creixent	**Decreixent**
Convexa		
Còncava		

Pots comprovar fàcilment que es compleix la definició. Si uneixes dos punts, el segment que formen està per damunt o per davall de la gràfica, segons correspon. Ací a la dreta pots veure un exemple amb un tram decreixent i convex. Observa com el segment queda per damunt de la gràfica de la funció.



2.4. Simetries

Una **funció parell** és aquella en què s'obté el mateix en substituir un nombre i el seu oposat:

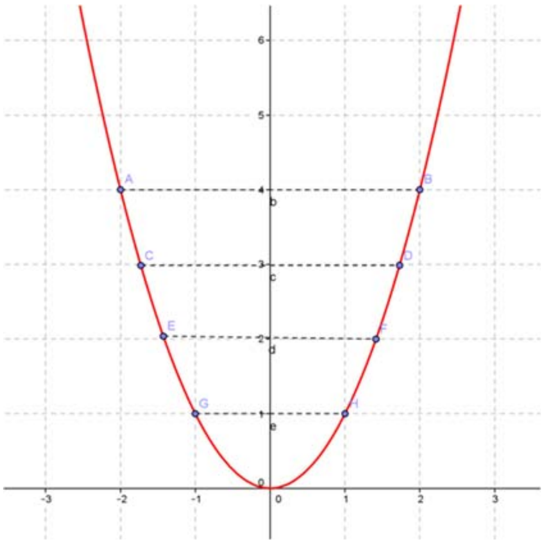
$$f(-x) = f(x)$$

Aquesta propietat es tradueix en que la funció és simètrica respecte a l'eix d'ordenades, és a dir, si dobleguem el paper pel dit eix, la gràfica de la funció coincideix en ambdós costats.

Exemple:

- *La funció quadràtica* $f(x) = x^2$ *és parell:*

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$



Una **funció imparella** és aquella en què s'obté el contrari en substituir un nombre i el seu oposat:

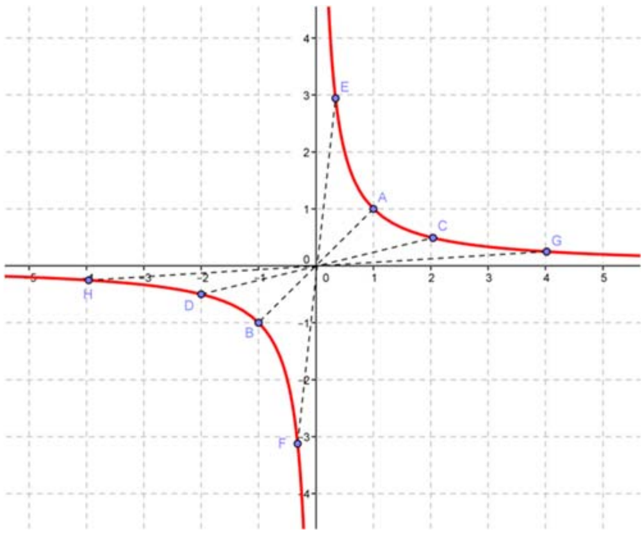
$$f(-x) = -f(x)$$

Aquesta propietat es tradueix en que la funció és simètrica respecte a l'origen de coordenades, és a dir, si tracem un segment que part de qualsevol punt de la gràfica i passa per l'origen de coordenades, en prolongar-lo cap a l'altre costat trobarem un altre punt de la gràfica a la mateixa distància.

Exemple:

La funció de proporcionalitat inversa $f(x) = \frac{1}{x}$ és imparella perquè:

$$f(-x) = \frac{1}{(-x)} = \frac{-1}{x} = -f(x)$$

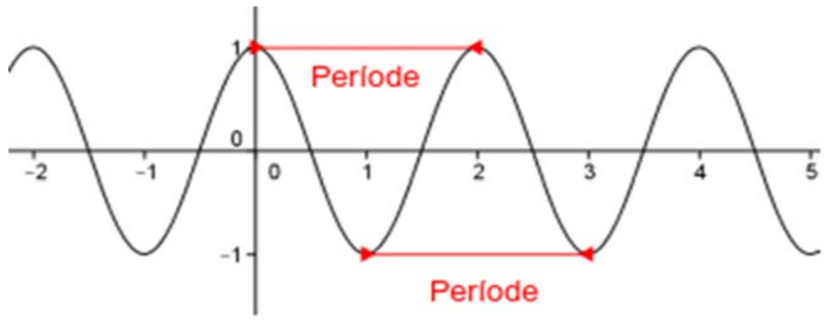


2.5. Periodicitat

Una **funció periòdica** és aquella en què les imatges de la funció es repeteixen conforme se li afig a la variable independent una quantitat fixa, anomenada *període.*

Exemple:

És molt clar que la següent funció és periòdica de període 2. Observa que el període es pot mesurar entre dos "pics" o entre dos "valls". De fet es pot mesurar entre dos punts equivalents qualssevol.



2.6. Comportament a l'infinit

L'infinit és, per pròpia definició, inabastable. Però ens diu molt d'una funció saber com és per a valors molt grans. Per això, es recomana, en dibuixar una gràfica, donar un valor (o diversos) positiu molt gran i un valor (o diversos) molt negatiu.

En algunes funcions simplement ocorre que obtenim valors molt grans i "ens eixim de la taula". Açò simplement ens dóna una idea de cap a on va la funció.

Però en altres, i açò és l'interessant, ens aproximem a un nombre finit. Això significa que, per a valors molt grans de *x*, la funció és aproximadament una recta horitzontal. Aquesta recta s'anomena asímptota.

Activitat resolta

- *Dibuixa la funció* $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x^2+1}$ *donant valors molt grans i molt negatius.*

Donem valors molt grans i veiem que ens aproximem a 1:

$$f(10)=\frac{10^2+2}{10^2+1}=1'0099,\quad f(100)=\frac{100^2+2}{100^2+1}=1'0001,\quad f(1000)=\frac{1000^2+2}{1000^2+1}=1'000001$$

Si donem valors molt negatius, passa el mateix:

$$f(-10)=\frac{(-10)^2+2}{(-10)^2+1}=1'0099 \quad , \quad f(-100)=\frac{(-100)^2+2}{(-100)^2+1}=1'0001 \quad ,$$

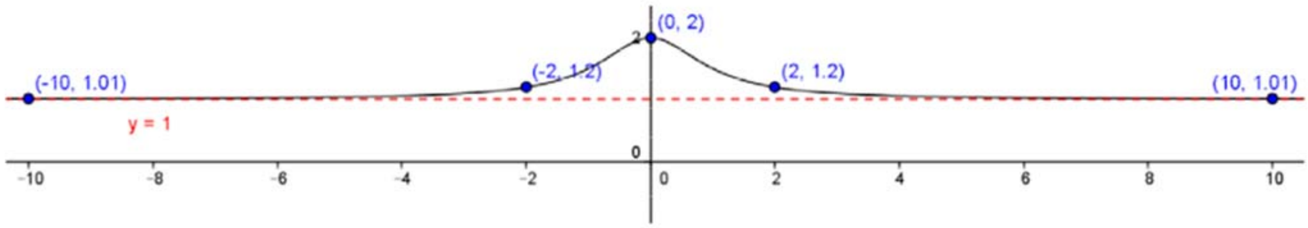
$$f(-1000)=\frac{(-1000)^2+2}{(-1000)^2+1}=1'000001$$

Podríem haver vist directament que els valors serien els mateixos perquè la funció és clarament parell $f(-x)=f(x)$ i per tant $f(-10)=f(10)$, $f(-100)=f(100)$ etc.

Això ens dóna una idea que la recta a què ens aproximem (asímptota) és la recta horitzontal y = 1.

Donarem uns valors més i dibuixem la funció. Els valors negatius són iguals que els positius. Hem arrodonit 1'0099 a 1'01

x	–10	–2	0	2	10
y	1'01	1'2	2	1'2	1'01



Observa la línia horitzontal que és l'asímptota dibuixada en roig a traços.

2.7. Recopilatori

Repassarem el que hem vist fins ara i com utilitzar-ho per a les dues qüestions més importants d'aquest capítol.

Com dibuixar una funció

Dibuixar una funció és essencialment unir punts. Anem, de totes les maneres, a repassar els diferents casos.

1. El primer lloc, mirem si la funció està definida per una taula o per una expressió. Si és una taula no hi ha res a fer més que dibuixar i (si tenen sentit els valors intermedis) unir els punts que ens donen i hem acabat. Passem en aqueix cas al pas 2.
2. Si està definida a trossos, donem el punt o punts on canvia la definició i alguns punts pròxims. Típicament el punt crític +0'1 i –0'1. Per exemple, si canvia en 1, donaríem 1, 0'9 i 1'1.
3. En general, intentem donar un valor molt gran i un altre negatiu, molt gran en valor absolut. Si veiem que s'estabilitza, els posem, és una asímptota.
4. Donem dues o tres punts més qualssevol.
5. Unim els punts (si tenen sentit els valors intermedis).

Activitats proposades

8. Indica el domini i recorregut de les següents funcions i dibuixa-les:

a. $\frac{1}{2x+6}$ b. $x+\frac{1}{3x-6}$ c. x^3-3x

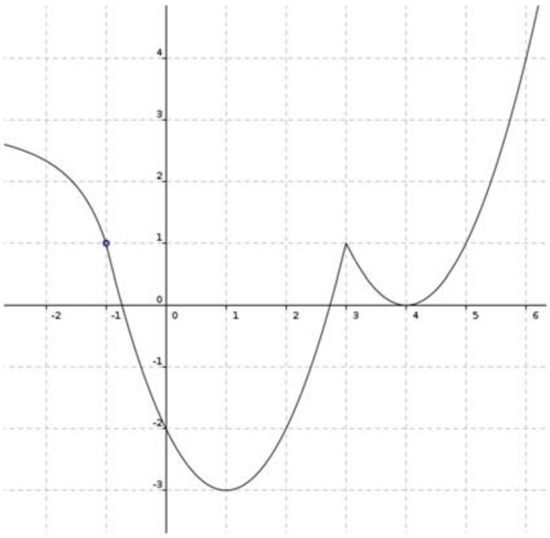
Com descriure una funció

Si ens donen la gràfica d'una funció i ens demanen descriure-la, és senzill:

1. Mirem els valors de *x on* canvia el comportament.
2. Descrivim cada un dels trams
3. Descrivim els màxims i mínims indicant si són relatius o absoluts.

Activitat resolta

- *Descriure la funció*



El primer, la funció és contínua. Els punts on "passa quelcom" són $x = -1$, $x = 1$, $x = 3$ i $x = 4$. Passem a descriure els trams:

A $(-\infty, -1)$ decreixent còncau. A $(-1, 1)$ decreixent convex. A $(1, 3)$ creixent convex. A l'interval $(3, 4)$ decreixent convex. A $(4, +\infty)$ creixent convex.

De vegades es posa separat el creixement i la curvatura:

Creixent a $(1, 3) \cup (4, +\infty)$

Decreixent a $(-\infty, 1) \cup (3, 4)$

Còncava a $(-\infty,-1)$. Convexa a $(-1, 3) \cup (3, +\infty)$

Finalment hi ha un màxim relatiu en $x = 3$. Hi ha mínims relatius en $x = 1$ i $x = 4$. No hi ha màxim absolut i en $x = 1$ hi ha un mínim absolut.

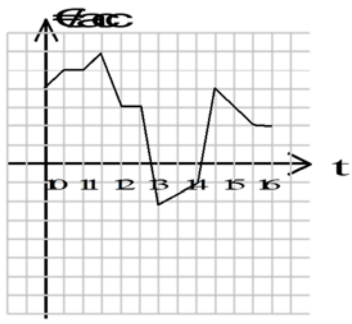
No hi ha asímptotes. Quan *x* es fa molt gran la *y* tendeix a $+\infty$, i quan la *x* s'acosta a $-\infty$ la *y* tendeix també a $+\infty$.

Activitats proposades

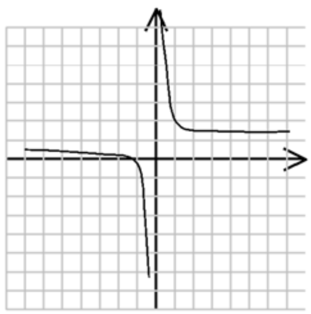
9. Dibuixa les següents funcions i indica els seus intervals de creixement i decreixement.

a) $i = x^3$ b) $\mathbf{i} = x^5$ c) $y = \dfrac{1}{x^2}$

10. La gràfica que es dóna a continuació indica l'evolució d'un valor de la borsa (a l'eix vertical en milers d'euros per acció) durant una jornada. Estudia el seu domini, recorregut, punts de tall, simetria, periodicitat, creixement, continuïtat, màxims i mínims.



11. Estudia la següent gràfica, indicant: domini, recorregut, punts de tall amb els eixos, simetria, periodicitat, creixement, continuïtat, màxims i mínims.



12. La gràfica que es dóna a continuació representa el volum de combustible en el dipòsit d'una gasolinera al cap d'un dia. Estudia el seu domini, recorregut, punts de tall, simetria, periodicitat, creixement, continuïtat, màxims i mínims.

2.8. Ampliació: Translacions

Amb el que hem vist anteriorment, ja podem dibuixar qualsevol funció. El que descriurem ara és una manera d'estalviar-nos treball en algunes ocasions.

De vegades, hem dibuixat una funció i ens demanen dibuixar una altra de similar. Per exemple, si estudiem un cos en caiguda lliure, l'espai recorregut és $y=\frac{1}{2}9'8x^2$. Però, si el cos ja havia recorregut un espai de 10 m, seria $y=10+\frac{1}{2}9'8x^2$. Si la volem dibuixar, en principi hauríem de tornar a donar tots els valors. Però, no podrem evitar-nos esforços i aprofitar la gràfica que JA tenim?

Sí, podem. Anem a veure-ho ara.

Translacions verticals.

Traslladar verticalment K unitats una funció *f*(*x*) és sumar-li a la variable dependent *y* = *f*(*x*) la constant K. En altres paraules, movem la funció cap amunt o baix.

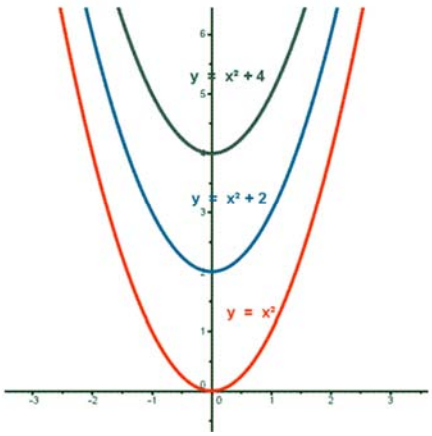
S'obté la funció: ***y* = *f*(*x*) + K**

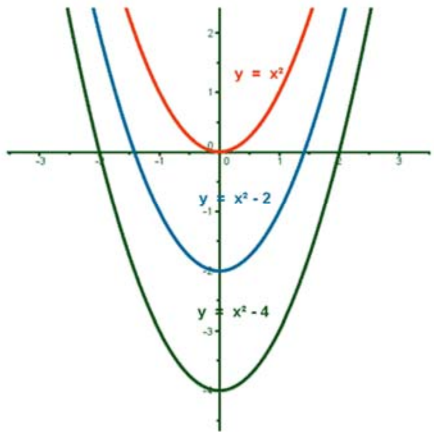
-Si K > 0 la funció es trasllada **cap amunt**.

-Si K < 0 la funció es trasllada **cap avall**.

Exemple:

Representa, mitjançant la realització prèvia d'una taula de valors, la funció $f(x)=x^2$. A continuació, mitjançant translació, la de les funcions $f(x)=x^2+2$, $f(x)=x^2+4$, $f(x)=x^2-2$ i $f(x)=x^2-4$.





Translacions horitzontals.

Traslladar horitzontalment K unitats una funció *f*(*x*) és sumar-li a la variable independent *x* la constant K.

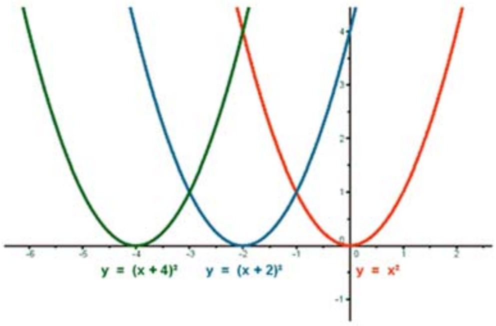
S'obté la funció *y* = *f*(*x* + K)

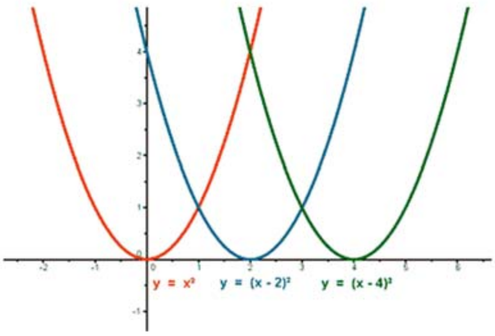
-Si K > 0 la funció es trasllada **cap a l'esquerra**.

-Si K < 0 la funció es trasllada **cap a la dreta.**

Exemple:

- *Representa les funcions* $f(x)=x^2$, $f(x)=(x+2)^2$, $f(x)=(x+4)^2$, $f(x)=(x-2)^2$ *i* $f(x)=(x-4)^2$.





Activitats proposades

13. Representa la funció $y=10+\frac{1}{2}9'8x^2$ que posàvem com a exemple i interpreta el seu sentit físic.

14. Representa gràficament les funcions següents:

a) $y=x^2+2$ b) $y=2-x^2$ c) $y=2x^2$ d) $y=-2x^2$

15. Representa gràficament les funcions següents:

a) $y=\frac{1}{x}+5$ b) $y=\frac{5}{x}$ c) $y=\frac{1}{x}-2$ d) $y=\frac{2}{x}+3$

16. Representa la funció $f(x) = 4 - x^2$ i, a partir d'ella, dibuixa les gràfiques de les funcions:

a) y = $f(x) - 3$ b) y = $f(x) + 3$ c) y = $f(x - 3)$ d) y = $f(x + 3)$

3. VALORS ASSOCIATS A LES FUNCIONS

Moltes vegades, ens interessa el comportament d'una funció en un valor concret i alguna mesura sobre ella. Per exemple, si considerem l'espai que recorre un cotxe, la qual cosa ens pot interessar no és tot el recorregut, sinó només la velocitat en passar junt amb un radar. Les mesures més importants anem a descriure-les ara.

3.1. Taxa de variació i taxa de variació mitjana (velocitat)

La **taxa de variació** d'una funció entre dos punts *a* i *b* és la diferència entre el valor de la funció per a *x=a* i el valor per a *x = b*. En símbols:

$$TV\,[a,b] = f(b) - f(a)$$

La **taxa de variació mitjana** (**velocitat mitjana**) d'una funció entre dos punts *a* i *b* és el quocient entre la taxa de variació entre els mateixos i la diferència *a* i *b*. En símbols:

$$TVM[a,b] = \frac{TVM[a,b]}{b-a} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Aquests conceptes poden parèixer estranys al principi. Però realment són coses que s'apliquen molt a la vida diària. Pensem en un cotxe que es mou. L'espai que recorre entre dos moments de temps és la taxa de variació. La velocitat mitjana al que els ha recorregut és la taxa de variació mitjana.

Activitat resolta

- *El cotxe en què circulem recorre 100 Km a 50 Km/h i després altres 100 Km a 100 Km/h. En conseqüència, l'espai recorregut ve donat per la funció* $f(t) = \begin{cases} 50t, & t \le 2 \\ 100 + 100(t-2), & t > 2 \end{cases}$. *Es demana:*

1. Justificar la funció que dóna l'espai recorregut.
2. Calcular i interpretar les taxes de variació TV[0, 3], TV[1, 2], TV[2'5, 3]
3. Calcular i interpretar les taxes de variació mitjanes TVM[0, 3], TVM[1, 2], TVM[2'5, 3]
4. Per què la velocitat mitjana NO han sigut 75 Km/h, que és la mitjana de les velocitats?

Apartat 1.

Per a justificar la funció, només hem de recordar la superconeguda fórmula $e = vt$. L'única cosa que cal veure és quan canvia la velocitat.

Si el cotxe va a 50 km/h, òbviament en 2 h arriba als 100 km i canvia la velocitat. Fins aleshores, l'espai recorregut és 50*t* (velocitat per temps). A partir d'allí, seria 100(*t* – 2) ja que comptem el temps des de l'instant 2. A això se li ha de sumar l'espai ja recorregut, que són 100.

Apartat 2. La taxa de variació no és més que l'espai recorregut. N'hi ha prou amb aplicar la definició. Com ja hem dit abans, no ens ha de donar cap por les funcions definides a trossos. Simplement substituïm on corresponga i punt.

$TV\,[0,3] = f(3) - f(0) = [100 + 100\cdot(3-2)] - 50\cdot 0 = 200$. Entre 0 i 3 hores hem recorregut 200 Km.

$TV[1,2] = f(2) - f(1) = 50 \cdot 2 - 50 \cdot 1 = 50$. Entre 1 i 2 hores hem recorregut 50 Km.

$TV[2'5,3] = f(3) - f(2'5) = [100 + 100 \cdot (3-2)] - [100 + 100 \cdot (2'5-2)] = 100 \cdot (3 - 2'5) = 50$. Hem recorregut 50 Km entre les 2'5 hores i les 3.

Apartat 3. La taxa de variació mitjana és el que en el llenguatge del carrer s'anomena velocitat (mitja). I per a calcular-la es divideix l'espai entre el temps, sense més.

Km/h. Entre 0 i 3 hores la nostra velocitat mitjana ha sigut de 66'67 Km/h, una mitja (ajustada pel temps) de les velocitats.

$TVM[1,2] = \frac{f(2) - f(1)}{2-1} = \frac{50}{2-1} = 50$. Entre 1 i 2 hores la nostra velocitat ha sigut de 50 Km/h, com plantejava de fet el problema.

$TVM[2'5,3] = \frac{f(3) - f(2'5)}{3-2'5} = \frac{50}{3-2'5} = 100$. Entre 2'5 i 3 hores la nostra velocitat ha sigut, com era d'esperar, de 100 Km/h

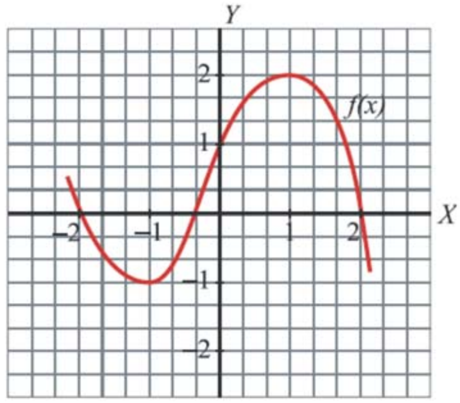
Apartat 4. Ja que hem passat més temps circulant a 50 Km/h que a 100 Km/h i per tant la nostra velocitat mitjana ha d'estar més prop de 50 que de 100.

Activitats proposades

17. Donada la funció $f(x) = (x-1)^3$, calcula la taxa de variació mitjana a l'interval [0, 1]. És creixent o decreixent la funció al dit interval?

18. Donada la funció $f(x) = \frac{3}{x}$, calcula la taxa de variació mitjana a l'interval [–3, –1]. És creixent o decreixent la funció al dit interval?

19. Calcula la TVM d'aquesta funció *f*(*x*) als intervals següents: a) [–1, 0] i b) [1, 2].



20. Considerem la funció $f(x) = \frac{x^2 - 1}{2}$. Troba la taxa de variació mitjana a l'interval [0, 2] i indica si és creixent o decreixent a aqueix interval.

21. Troba la taxa de variació mitjana de la funció $f(x) = 2x^2 - 3x$ a l'interval [1, 2] i indica si *f*(*x*) creix o decreix a aqueix interval.

3.2. Taxa de creixement

"… l'afiliació al Règim General de la Seguretat Social, on hi ha 13,1 milions de treballadors, a penes va repuntar en 16.852 persones respecte a febrer del 2013, un 0,13 % més" (Diari El Món, edició digital, 04/03/2014).

Segur que has llegit (o vist a la tele) notícies com aquesta un muntó de vegades. La mesura que estan utilitzant és el que es coneix com la taxa de creixement. Procedirem a definir-la.

La **taxa de creixement** d'una funció entre dos punts *a* i *b* és el quocient entre la taxa de variació i el valor de la funció en $x = a$. En símbols: $T_{Crec}[a,b]=\frac{f(b)-f(a)}{f(a)}$ o bé $T_{Crec}[a,b]=\frac{TV[a,b]}{f(a)}$.

Se sol expressar en tant per cent, per la qual cosa normalment es multiplica per 100. Les fórmules passen a ser llavors $T_{Crec}[a,b]=\frac{f(b)-f(a)}{f(a)}\cdot 100$ o $T_{Crec}[a,b]=\frac{TV[a,b]}{f(a)}\cdot 100$

Si $f(a) = 0$ la taxa de creixement **no està definida**. NO ES POT DIVIDIR ENTRE 0.

Observa que la taxa de creixement pot ser negativa, indicant una disminució. Créixer al –5 % significa haver perdut el 5 %.

Exemple:

- *Comprovarem que en el periòdic han calculat bé la taxa de creixement.*

Els instants del temps no són importants. A l'instant inicial és $f(a)=13.100.000$ treballadors. A l'instant final cal sumar-li l'augment $f(b)=13100000\ +16852$ = 13.116.852.

Aplicant la fórmula $T_{Crec}[a,b]=\frac{f(b)-f(a)}{f(a)}\cdot 100=\frac{13.116.852-13.100.000}{13.100.000}\cdot 100=0'1286\ \%$

que s'arrodoneix al 0'13 %. Està ben calculat.

Observa que la taxa de variació és 16852 per tant la podíem haver calculat directament amb l'altra fórmula:

$$T_{Crec}[a,b]=\frac{TV[a,b]}{f(a)}\cdot 100=\frac{16852}{13.100.000}\cdot 100=0'1286\ \%$$

i, òbviament, ix el mateix.

Activitats proposades

22. Donada la funció $f(x)=(x+1)^3$, calcula la taxa de creixement a l'interval [0, 1].

23. La funció $f(x)=1000\cdot(1'03)^x$ representa el resultat d'ingressar 1000 € en el banc ($x = 0$ és l'estat inicial i, naturalment, val 1000 €). Calcula la seua taxa de creixement entre 0 i 1, entre 1 i 2 i entre 2 i 3. Quina relació hi ha entre elles? Pots donar una explicació de per què?

24. La següent taula representa la població mundial (estimada) en milions de persones. Calcula la taxa de creixement per a cada interval de 5 anys. Què observes?

Any	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000	2005	2010
Població	3692	4068	4435	4831	5264	5674	6071	6456	6916

25. Podries donar un exemple d'una funció la taxa de creixement del qual siga constantment 2?

CURIOSITATS. REVISTA

Diu el premi Nobel de 1963 EUGENE WIGNER:

“L'enorme utilitat de les Matemàtiques a les ciències naturals és quelcom que frega el misteri, i no hi ha explicació per a allò. No és en absolut natural que existisquen "lleis de la naturalesa", i molt menys que l'ésser humà siga capaç de descobrir-les. El miracle de com resulta d’apropiat el llenguatge de les Matemàtiques per a la formulació de lleis de la Física és un regal meravellós que no comprenem ni ens mereixem”.

Les funcions s’han utilitzat per a fer models matemàtics de les situacions reals més diverses. Abans de l’època dels ordinadors les funcions que solien utilitzar-se eren les funcions lineals (que ja coneixes però que estudiaràs detingudament al pròxim capítol). Es *linealizaban* els fenòmens. En usar altres funcions, com per exemple paràboles poden complicar-se molt les coses. Inclús pot aparéixer el caos.

Saps què és el caos?

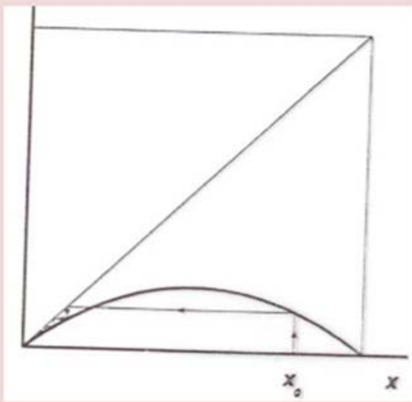
Estudiarem un exemple en què apareix el caos: **L’equació logística**. És un model matemàtic proposat per P. F. Verhulst en 1845 per a l’estudi de la dinàmica d’una població. Explica el creixement d’una espècie que es reprodueix en un entorn tancat sense cap tipus d’influència externa. Es consideren valors x entre 0 i 1 de la població. .

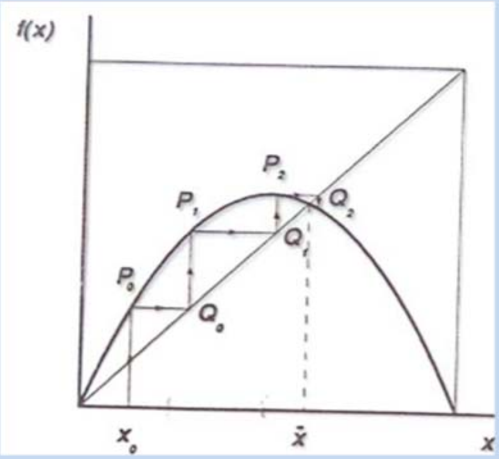
$$y = r(x(1 - x))$$

Si ens quedem amb el primer terme, $y = rx$ seria un model lineal, i ens indica el creixement de la població, però té un terme de segon grau que fa que siga un polinomi de segon grau. Si en algun moment $y = x$ la població es mantindrà sempre estable per a aqueix valor. Per exemple, si $x = 0$ llavors $y = 0$, i sempre hi haurà una població de grandària 0. Aquests valors que fan que $y = x$ es denominen **punts fixos**.

El comportament és distint segons els valors que prenga r. Per exemple, per a $r < 1$, s’extingeix l’espècie.

Dibuixem la paràbola per a $r = 0,9$. Imaginem que a l'instant inicial hi ha una població x_0. Busquem, tallant verticalment a la paràbola, el valor de y. Per a transformar-lo en el nou x, tallem a la diagonal del primer quadrant. Observa que la població cada vegada és menor i que va cap a l'extinció. Observa detingudament eixe procés de anar tallant a la paràbola i a la diagonal, per a tornar a tallar a la paràbola i així successivament.





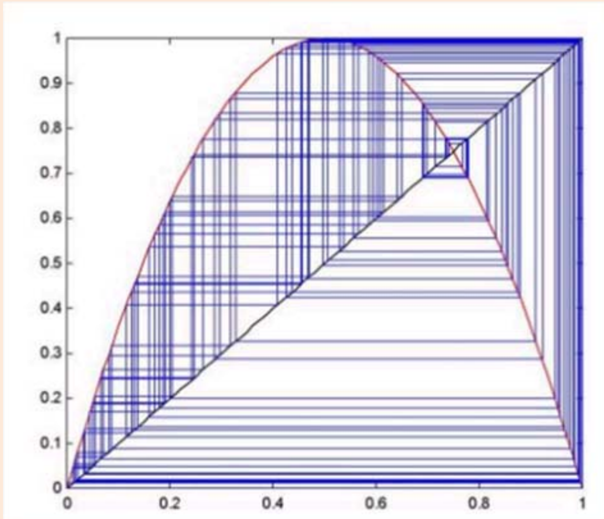
Per a valors de r compresos entre 1 i 3: $1 < r < 3$, aleshores la població s'estabilitza, tendeix a un punt fix.

Hem dibuixat la paràbola per a $r = 2{,}5$, i igual que abans partim d'un valor inicial qualsevol, en aquest cas x_0, que es converteix en $y = P_0$. Eixe valor el prenem com abscissa: $x = Q_0$, i calculem el nou valor de $y = P_1$… Observa com la població s'estabilitza cap a el valor d'intersecció de la parábola amb la diagonal.

Per a valors entre 3 i 3,56994546 les coses comencen a complicar-se, fins que …

Per a r major o igual a 3,56994546 tenim sensibilitat extrema a les condicions inicials, tenim **caos**.

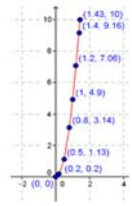
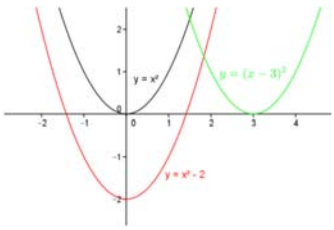
No sabem què pot ocòrrer. La població canvia constantment. I eixe comportament tan erràtic és per a una funció polinòmica de segon grau!



El terme **caòtic** va a indicar que punts pròxims a l'instant inicial poden tindre comportaments diferents al futur.

El meteoròleg americà *Edward N. Lorenz* va utilitzar el terme d'efecte **palometa** per a explicar per què el temps atmosfèric no és predicible a llarg termini, és a dir per a explicar que hi ha una dependència sensible a les condicions inicials: *"L'aleteig d'una **palometa** a Brasil pot provocar un tornado a Texas?"*
Ho havies sentit?

RESUM

Funció	Una relació o correspondència entre dues magnituds, tals que a cada valor de la variable independent, *x*, li correspon ***un sol*** valor de la dependent, *y*.	*y* = 2*x* + 3, $y = \frac{1}{x^2+1}$
Gràfica d'una funció	Són els (normalment infinits) punts pels quals passa. És a dir, tots els valors $(x, f(x))$ ja que *y* = *f*(*x*).	
Maneres de descriure una funció.	- **Donant una taula de valors.** Com en la columna del costat - **Donant una expressió**. $y = 2^x$ - **A trossos**: Diverses expressions. $y = \begin{cases} x+1, x > 2 \\ x, \ x \le 2 \end{cases}$	*X* | *Y* –3 | 2 –2 | 0 2 | 3
Domini i recorregut.	- **Domini.** Són els valors de "*x*" on la funció tinga sentit. - **Recorregut**. Són els valors de "y" que s'aconsegueixen.	El domini de la funció $\sqrt{2-x}$ és $(-\infty, 2)$ i el seu recorregut $[0, +\infty)$
Característiques d'una funció	Hem d'estudiar la seua continuïtat, creixement, màxims i mínims, curvatura, simetries i comportament en l'infinit.	$y = x^2 + 2$ és contínua, creixent en $(-\infty, 0)$, decreixent en $(0, \infty)$, té un mínim absolut en 0 i és sempre convexa
Translacions	- **Vertical. y** = *f*(*x*) + K. En sentit de K: Si K és positiu cap amunt, si no cap avall. - **Horitzontal**. *y* = *f*(*x* + *K*). En sentit **contrari** de K: Si K és positiu cap a l'esquerra, si no cap a la dreta.	
Valors associats	- **Taxa de variació (TV):** $f(b) - f(a)$ - **Taxa de variació mitjana (TVM):** $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ - **Taxa de creixement T_{crec}:** $\frac{f(b)-f(a)}{f(a)}$	$y = x + 2$ $TV[3,5] = 2$ $TVM[3,5] = \frac{2}{5-3} = 1$ $T_{crec}[3,5] = \frac{2}{5} = 40\%$

EXERCICIS I PROBLEMES

1. Pau va eixir de sa casa a les 8 del matí per a anar a l'institut. Al pati, va haver de tornar a sa casa per a anar amb son pare al metge. La següent gràfica reflecteix la situació:

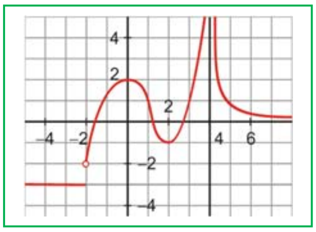
a. A quina hora comencen les classes i a quina hora comença el pati?

b. A quina distància de sa casa està l'institut? Quina velocitat porta quan va a classe?

c. A quina distància de sa casa està el consultori mèdic? Quina velocitat porten quan es dirigeixen allí?

d. Quant temps ha estat en classe? I al consultori mèdic?

2. Donada la funció a través de la següent gràfica:



a) Indica quin és el seu domini de definició.

b) És contínua? Si no ho és, indica els punts de discontinuïtat.

c) Quins són els intervals de creixement i quins els de decreixement de la funció? Què ocorre a l'interval $(-\infty, -2]$?

3. Dibuixa les gràfiques d'aquestes hipèrboles i determina els seus dominis, calcula les seues asímptotes i els punts de tall amb els eixos de coordenades:

a. $y = \frac{2x}{x-2}$ b. $y = \frac{2x-3}{x-2}$ c. $y = \frac{4x}{2x+1}$

4. Dibuixa la gràfica de $f(x) = \begin{cases} 1-x & si \quad x \le 1 \\ x^2 - 4x & si \quad 1 < x \end{cases}$ i explica si és contínua en $x = 1$.

5. Tres quilos de peres ens han costat 4,5 €; i, per set quilos, hauríem pagat 10,5 €. Troba l'equació de la recta que ens dóna el preu total, "y", en funció dels quilos que comprem, "x". Representa-la gràficament.

6. Descriu les següents funcions quadràtiques i fes un esbós de la seua gràfica:

a. $y = 4x^2 + 8x - 5$ b. $y = x^2 + 3x - 4$ c. $y = 8 - 2x - x^2$

7. Calcula els punts de tall amb els eixos i el vèrtex de les següents paràboles i utilitza aquestes dades per a representar-les gràficament.

a. $y = x^2 + 5x + 6$ b. $y = -x^2 + 4x + 5$

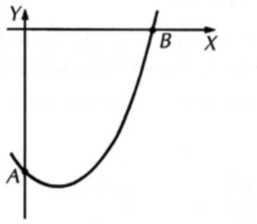
8. L'altura sobre el sòl d'un projectil llançat des de l'alt d'una muralla ve donada, en funció del temps, per $h(t) = -5t^2 + 15t + 20$, on *t* s'expressa en segons, i *h*, en metres. Dibuixa la gràfica d'aquesta funció i calcula:

a. L'altura de la muralla.

b. L'altura màxima aconseguida pel projectil i el temps que tarda a aconseguir-la.

c. El temps que tarda a impactar contra el sòl.

9. La gràfica mostra el dibuix aproximat de la corba $y = x^2 - 2x - 8$. Calcula:



a. Les coordenades dels punts A i B.

b. L'equació d'una recta que passe pels punts A i B.

10. Representa les funcions següents:

a. $y = 3/x$ b. $y = 4/x - 5$ c. $y = \sqrt{x+4}$

d. $y = \sqrt{x-2}$ e. $y = \begin{cases} x+3 & si \quad x < -1 \\ 2 & si \quad -1 \le x < 4 \\ x^2 - 10 & si \quad 4 \le x \end{cases}$

11. El cost diari de fabricació, en euros, de *x* articles s'expressa amb la igualtat $C = 40x + 250$, i l'ingrés diari de la seua venda, mitjançant $V = -2x^2 + 100x$. Quina quantitat d'articles s'han de fabricar al dia perquè la seua venda report un benefici màxim? *Nota*: el benefici és la diferència entre l'ingrés i el cost.

12. La base i l'altura d'un triangle sumen 4 centímetres. Quina longitud han de tindre ambdós perquè l'àrea del triangle siga màxima?

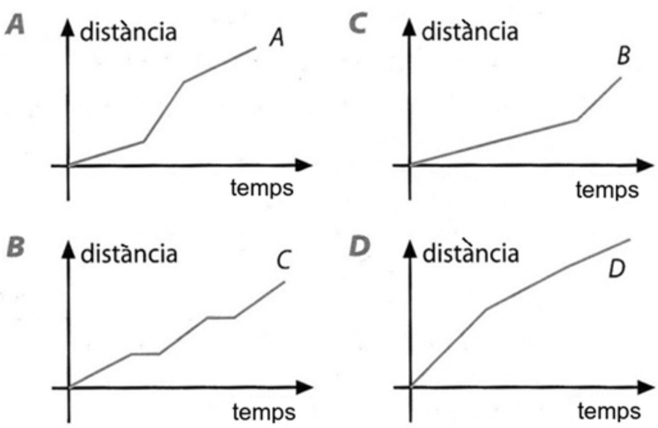
13. Assigna les gràfiques al recorregut efectuat pels següents estudiants en el seu camí diari a l'Institut:

a) Emili és el que viu més lluny de l'Institut.

b) Anna ha d'arreplegar a dues amigues per el camí i sempre li toca esperar.

c) Felip és el que menys temps tarda.

d) Isabel és dormilega; sempre li toca córrer en l'últim tram, encara que és la que viu més prop de l'Institut.



14. Un rectangle té un perímetre de 14 cm. Suposant que la base del mateix té una longitud de *x* cm,

a. Provar que l'àrea del mateix *A* està donada per la funció $A(x)=x(7-x)$.

b. Dibuixa la gràfica corresponent a aquesta funció, prenent per a això valors de *x* de 0 a 7. Utilitzant la gràfica, calcula els següents apartats.

c. L'àrea del rectangle quan x = 2,25 c m.

d. Les dimensions del rectangle quan la seua àrea és 9 cm^2.

e. L'àrea màxima del rectangle.

f. Les dimensions del rectangle corresponents a aqueixa àrea màxima.

15. La velocitat *v* en m/s d'un míssil *t* segons després del seu llançament ve donada per l'equació $v = 54t - 2t^3$. Utilitzant la gràfica d'aquesta funció, calcula:

a. La màxima velocitat que aconsegueix el míssil.

b. El temps que necessita per a accelerar fins a aconseguir una velocitat de 52 m/s.

c. L'interval (aproximat, resol gràficament) de temps en el qual el míssil vola a més de 100 m/s.

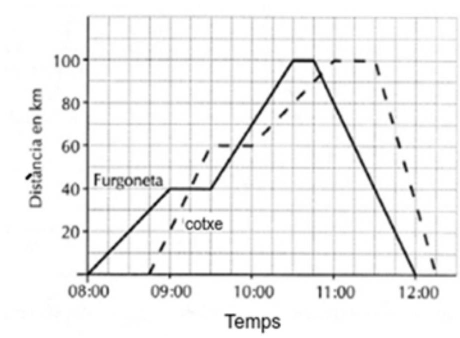
16. El preu del viatge de fi de curs d'un grup d'alumnes és de 200 euros per persona si van 30 alumnes o menys. En canvi, si viatgen més de 30 i menys de 40, rebaixen un 5 % per cada alumne que sobrepasse el nombre de 30, i si viatgen 40 o més, el preu per persona és de 100 euros. Troba l'expressió i dibuixa la gràfica de la funció que fa correspondre al nombre de viatgers el preu del viatge.

17. Troba el domini de les funcions següents:

a. $y = \frac{5x-3}{4x-1}$ c. $y = \sqrt{3x+6}$ e. $y = \frac{4x^2-3x}{1+5x-6x^2}$

b. $y = 2x^4 - 3x^2 + 1$ d. $y = 2 - \frac{3}{x^2-3x}$ f. $y = \sqrt[3]{x^2+2x}$

18. La següent gràfica mostra els viatges fets per una furgoneta i un cotxe eixint des de Terol cap a la població d'Alcanyís, anada i tornada.



a. Quant temps es va detindre la camioneta durant el trajecte?

b. A quina hora va avançar el cotxe a la furgoneta?

c. Quina velocitat portava la furgoneta entre les 9:30 i les 10:00?

d. Quin va ser la major velocitat aconseguida pel cotxe durant el viatge?

e. Quina va ser la velocitat mitjana del cotxe en el viatge complet?

19. Representa gràficament la funció següent:

. Una vegada representada estudia les zones de creixement i decreixement, els extrems (màxims-mínims) i la seua continuïtat.

20. Representa gràficament una funció, *f*, que complisca les condicions següents:

a. Dom (*f*) = [–5, 6]

b. Creix als intervals (–5, –3) i (0, 6); decreix a l'interval (–3, 0).

c. És contínua al seu domini.

d. Talla a l'eix X als punts (–5, 0), (–1, 0) i (4, 0).

e. Té un mínim a (0, –2) i màxims a (–3, 3) i (6, 3).

21. Construeix una gràfica que represente l'audiència d'una determinada cadena de televisió durant un dia, sabent que:

a. A les 0 hores hi havia, aproximadament, 0'5 milions d'espectadors.

b. Aquest nombre es va mantindre pràcticament igual fins a les 6 del matí.

c. A les 7 del matí va aconseguir la xifra de 1'5 milions d'espectadors.

d. L'audiència va descendir novament fins que, a les 13 hores , hi havia 1 milió d'espectadors.

e. Va anar augmentant fins a les 21 hores, moment en què va aconseguir el màxim: 6'5 milions d'espectadors.

f. A partir d'aqueix moment, l'audiència va ser descendint fins a les 0 hores, que torna a haver-hi, aproximadament, 0'5 milions d'espectadors.

AUTOAVALUACIÓ

1. Indica quina de les següents expressions algebraiques és una funció real:

a) $x^2 + y^2 = 1$ b) $y = -2x^5 + x^4 - x^3 + 5x - 1$ c) $y = 5 \cdot \sqrt{2} \cdot x \cdot y^2 \cdot z$ d) $y^2 = x + 1$

2. Estem confeccionant una taula de valors de la funció $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$. Indica quin punt no hauria d'estar a la taula:

a) (0, 1) b) (1/2, 2) c) (2, 1/5) d) (1, 0)

3. El domini de la funció $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ és:

a) La recta real b) $\{x \in \Re \mid x < 1\}$ c) $\{x \in \Re \mid x \geq 1\}$ d) $\{x \in \Re \mid x \geq 0\}$

4. Indica que tipus de discontinuïtat o continuïtat presenta la funció $f(x) = \begin{cases} -x, & si\ x \in [-2,1] \\ x, & si\ x \in (1,2] \end{cases}$ al punt $x = 1$:

a) És contínua b) Té una discontinuïtat evitable

c) Té un salt finit de grandària 2 d) Té un salt infinit

5. Assenyala la funció que té simetria parell:

a) $y = x$ b) $y = x^2 + 3$ c) $f(x) = \frac{1}{x+1}$ d) $f(x) = \begin{cases} -x, & si\ x \in [-2,1] \\ x, & si\ x \in (1,2] \end{cases}$

6. Assenyala la funció que té com a asímptota horitzontal a la recta y = 1:

a) $y = x$ b) $y = x^2 + 3$ c) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ d) $f(x) = \begin{cases} -x, & si\ x \in [-2,1] \\ x, & si\ x \in (1,2] \end{cases}$

7. La taxa de variació de la funció $f(x) = \begin{cases} -x, & si\ x \in [-2,1] \\ x, & si\ x \in (1,2] \end{cases}$ entre –1 i 2 és igual a:

a) TV[–1, 2] = 1 b) TV[–1, 2] = 2 c) TV[–1, 2] = 3 d) TV[–1, 2] = 0

8. La taxa de variació mitjana de la funció $f(x) = \begin{cases} -x, & si\ x \in [-2,1] \\ x, & si\ x \in (1,2] \end{cases}$ entre –1 i 2 és igual a:

a) TV[–1, 2] = 1/3 b) TV[–1, 2] = 2/3 c) TV[–1, 2] = 1 d) TV[–1, 2] = 3

9. La taxa de creixement de la funció $f(x) = \begin{cases} -x, & si\ x \in [-2,1] \\ x, & si\ x \in (1,2] \end{cases}$ entre –1 i 2 és igual a:

a) T_{crec} [–1, 2] = 3 b) T_{crec} [–1, 2] = 2 c) T_{crec} [–1, 2] = 0 d) T_{crec} [–1, 2] = 1

10. La funció $y = x^2 + 3$ té un mínim absolut al punt:

a) (1, 4) b) (0, 0) c) (0, 3) d) (3, 0)

Matemàtiques orientades a les ensenyances acadèmiques:

4tB ESO. Capítol 11

Funcions polinòmiques, definides a trossos i de proporcionalitat inversa

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: David Miranda Suárez

Revisora: María Molero

Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF

Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

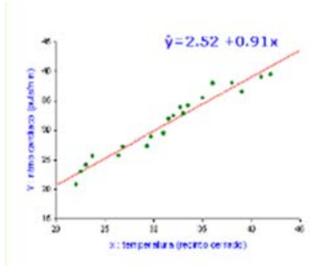
Índex

Resum

A la nostra vida diària fem ús contínuament de les relacions de proporcionalitat, com quan comprarem qualsevol producte al supermercat, o si volem comparar dues tarifes de llum distintes per a saber quina ens convé triar. En aquests casos, la representació gràfica ens facilita la presa de decisions. El llançament d'objectes a certes distàncies, com llançar un paper al fem, omplir el got d'aigua o fer un salt: la trajectòria que descriu és una corba que rep el nom de *paràbola*.

En aquest capítol estudiarem les propietats més importants de les relacions *de proporcionalitat directa i inversa* i les funcions *polinòmiques*, així com els seus elements i representacions gràfiques al pla cartesià.

Comprendre aquestes funcions és molt útil per a la ciència, ja que s'utilitzen per a comparar dades i per a saber si aqueixes dades tenen alguna relació lineal (les dades es comporten com una recta) o d'un altre tipus (polinòmica, exponencial,…).



Exemple de Recta de regressió

A l'estudi d'aquestes dades i les seues corbes es dedica l'estadística mitjançant *l'anàlisi de regressió.* Amb l'aproximació de dades a rectes o corbes conegudes, es realitzen estudis i prediccions, d'ací la seua importància per a la vida real.

Abans de començar

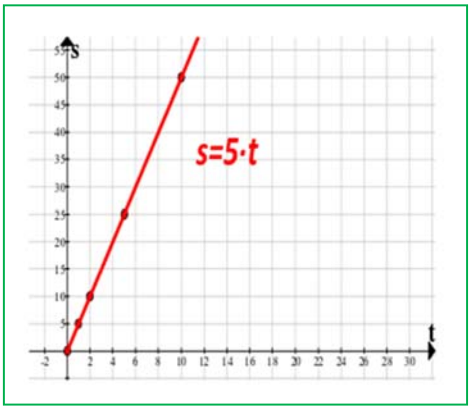
Activitats resoltes

Abans de començar, representarem mitjançant gràfiques les situacions següents:

0. *Situació 1:* La gràfica s-t d'un moviment rectilini uniforme: l'espai recorregut, en funció del temps, per un ciclista que es desplaça amb una velocitat de 5 m/s.

En tractar-se d'un moviment rectilini uniforme, podem descriure l'espai recorregut en funció del temps mitjançant la fórmula $s = v \cdot t$ on *v* = 5 m/s.

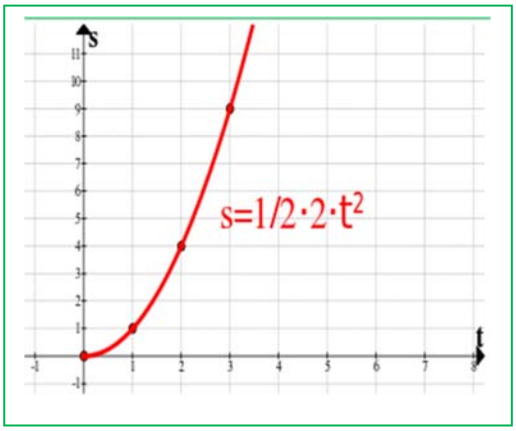
Temps (*t*)	Espai (*s*)
0	0
1	5
2	10
5	25
10	50



1. *Situació 2*: La gràfica v-t d'un moviment rectilini uniformement accelerat: l'espai recorregut per un ciclista que es desplaça amb una acceleració de 2 m/s^2.

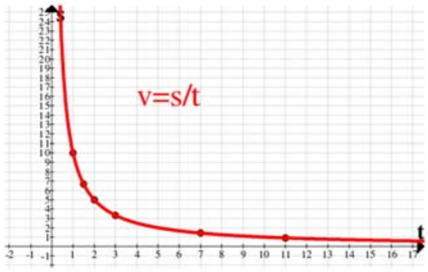
En aquest cas es tracta d'un moviment rectilini uniformement accelerat, per tant podem descriure l'espai recorregut per la fórmula $s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$, on l'espai inicial i la velocitat inicial són 0. Representem la funció $s = \frac{1}{2} a \cdot t^2$.

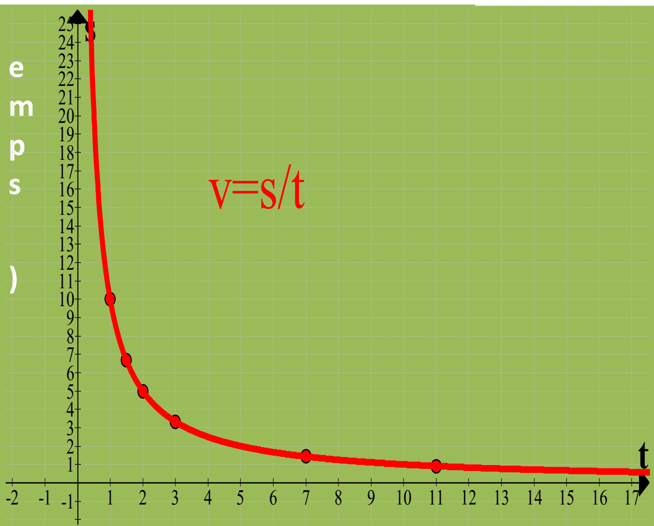
Temps (*t*)	Espai (*s*)
0	0
1	1
2	4
3	9



2. *Situació 3*: Representem la velocitat d'un ciclista respecte al temps, quan recorre un espai de 10 m.

El moviment que descriu és un moviment rectilini uniforme, per tant la fórmula que representem és $v = \frac{s}{t}$, i com l'espai que recorre el ciclista és de 10 metres, $v = \frac{10}{t}$





Temps (t)	Velocitat (v)
1	10
1.5	6.67
2	5
3	3.33
5	2
7	1.43
11	0.91

1. FUNCIONS POLINÒMIQUES DE PRIMER GRAU

1.1. Proporcionalitat directa

Recorda que dues magnituds són **directament proporcionals** quan en multiplicar o dividir a la primera per un nombre, la segona queda multiplicada o dividida pel mateix nombre.

En realitzar el quocient de qualsevol dels valors d'una variable i els corresponents de l'altra, obtenim la **raó de proporcionalitat directa *k***.

Exemple:

3. A la situació 1, les magnituds espai i temps són directament proporcionals

Temps (t)	0	1	2	5	10
Espai (s)	0	5	10	25	50

i la raó de proporcionalitat és $k = \frac{5}{1} = \frac{10}{2} = \frac{25}{5} = \frac{50}{10} = 5$

Si observem la seua gràfica, podem comprovar que es tracta d'una semirecta l'origen de la qual és l'origen de coordenades. En aquesta situació no és interessant considerar temps negatius, raó per la qual la representació és una semirecta.

La representació gràfica al pla cartesià de dues magnituds **directament proporcionals** és una **recta** que passa per l'origen de coordenades.

Es pot escriure la relació entre la magnitud A (a) i la magnitud B (b) com a $b=k\cdot a$ on k és la **raó de proporcionalitat**.

Per a representar aquestes relacions de proporcionalitat directa, n'hi ha prou amb situar els valors de cada magnitud en el pla cartesià i unir-los mitjançant una recta.

Activitats resoltes

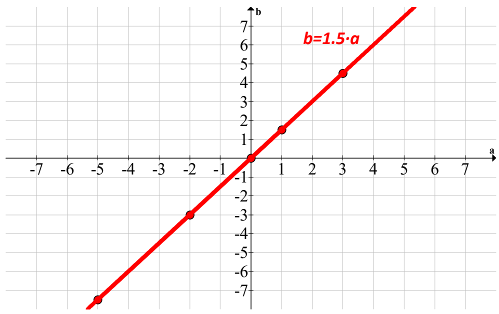
4. Representa gràficament la següent relació de proporcionalitat donada en la taula següent:

Magnitud A (a)	–5	–2	0	1	3
Magnitud B (b)	–7,5	–3	0	1,5	4,5

En calcular la raó de proporcionalitat s'obté:

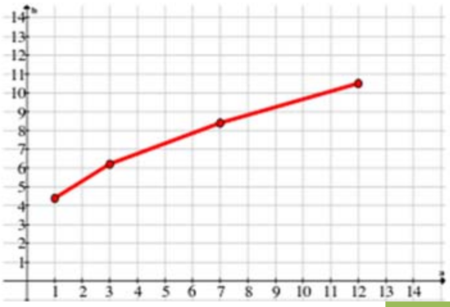
$$k = \frac{-7.5}{-5} = \frac{-3}{-2} = \frac{1.5}{1} = \frac{4.5}{3} = 1.5$$

La relació es defineix així: $b = 1.5 \cdot a$



5. La següent taula ens mostra el pes d'un bebè els primers mesos de creixement. Utilitzant una gràfica, decidir si són magnituds directament proporcionals.

Mesos	1	3	7	12
Pes (Kg)	4,4	6,2	8,4	10,5



En representar els punts en el pla, s'observa que la gràfica no és una recta, llavors **no són directament proporcionals**.

Activitats proposades

1. El consum mitjà d'aigua al dia per habitant (en 2011) és de 142 litres. Representa gràficament el consum d'una persona en una setmana.

2. L'aigua virtual és l'aigua necessària per a crear un producte. Representa gràficament les relacions següents:

a. 71 litres per a produir una poma.

b. 10.850 litres per a produir uns vaquers.

c. 4.000 litres per a produir una camiseta.

1.2. Funció lineal. Rectes de la forma $y = m \cdot x$

La representació gràfica de dues magnituds directament proporcionals és una recta que passa per l'origen. Per tant la relació de proporcionalitat directa és una funció lineal.

Una **funció lineal** és una funció polinòmica de primer grau. La seua representació al pla cartesià és una recta.

Hi ha dos tipus de funcions lineals:

- Rectes l'expressió algebraica de les quals és $y=m{\cdot}x$
- Rectes la funció de les quals ve donada per $y=m{\cdot}x+n$

En aquest apartat estudiarem les funcions lineals del primer tipus, és a dir les rectes de la forma $y=m{\cdot}x$

Exemple:

0. Les proporcions es representen com a rectes de la forma $b=k{\cdot}a$
   a. on k és la raó de proporcionalitat, $k = \frac{b}{a}$
   b. a i b són els valors que prenen les magnituds A i B respectivament.

6. La relació pes – cost de qualsevol producte, és una proporcionalitat i es representa amb rectes de la forma $y=m{\cdot}x$

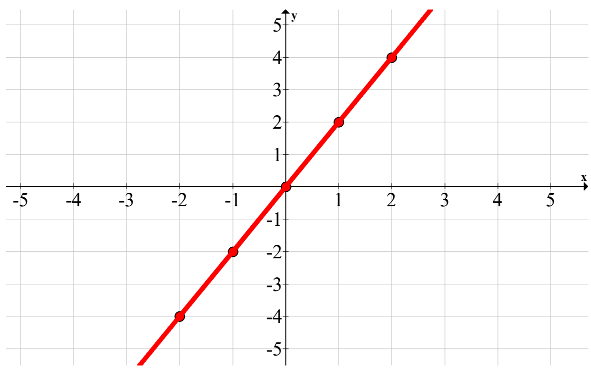
7. Moltes de les relacions en física són proporcionals i es representen mitjançant rectes com a espai – temps, pes – densitat , força – massa, …

Activitats resoltes

8. Representa la recta $y=2 \cdot x$

Per a això, cal construir una taula de valors i representar els punts. La recta és la conseqüència d'unir els punts.

Es pot observar, que la variable y es defineix donant valors a la variable x . Per aquesta raó x és la variable independent (pot ser qualsevol valor que se li done) e y és la variable dependent (depén del valor de la x).



x	–2	–1	0	1	2
y	–4	–2	0	2	4

Nota: per a definir una recta és prou de donar dos punts d'ella.

Les rectes $y=m{\cdot}x$ tenen els següents components:

- x és la variable **independent**.
- y és la variable **dependent**.
- m és el **pendent** de la recta, i és el que diferència una recta d'una altra.

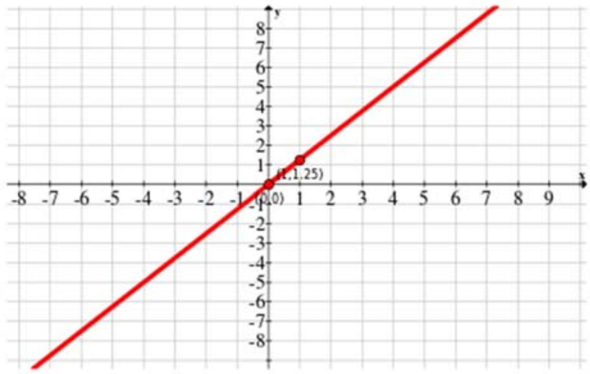
Les característiques més importants:

- Passen per l'origen de coordenades, és a dir, el punt (0,0) pertany a la recta.

- El seu domini i el seu recorregut són tots els reals: tant la x com la y accepten qualsevol valor.
- Són simètriques respecte a l'origen, o el que és el mateix, són funcions imparelles.

Activitats resoltes

0. Estudia el domini, màxims i mínims i simetries de la funció lineal $y = 1,25 \cdot x$



En tractar-se d'una recta, es pot observar que el domini són tots els reals, ja que s'admet qualsevol valor de la x.

Si no es considera cap interval, la recta no té màxims ni mínims absoluts i relatius.

Per a veure la simetria, prenem la funció $y = f(x) = 1,25 \cdot x$

$f(-x) = -1{,}25 \cdot (-x) = -1{,}25 \cdot x = -f(x) \Leftrightarrow f és imparella$

És a dir, és simètrica respecte a l'origen de coordenades.

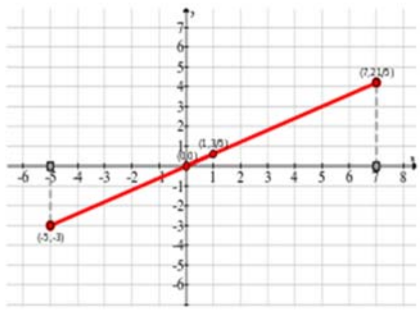
9. Estudia la funció $y = \frac{3}{5} \cdot x$ a l'interval $[-5, 7]$.

El domini és tot l'interval [-5,7].

$f(-x) = \frac{3}{5} \cdot (-x) = -\frac{3}{5} \cdot x = -f(x) \Leftrightarrow f és imparella$

simètrica respecte a l'origen.

Als extrems de l'interval, hi ha mínim (–5, –3) i màxim (7,21/5).



Activitats proposades

3. Troba el domini, màxims i mínims i la simetria de les següents rectes:

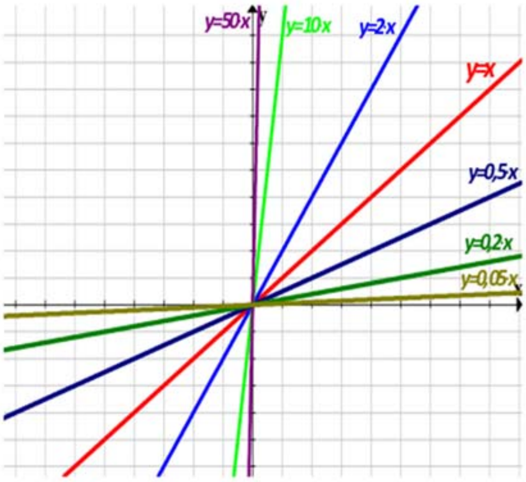
a) $y=4 \cdot x$ b) $y = \frac{x}{3}$ c) $y= 2,65 \cdot x$

1.3. Estudi del pendent

Com hem vist amb anterioritat, el pendent m és el que diferència unes rectes d'altres. Mesura la inclinació de la recta respecte a l'eix d'abscisses.

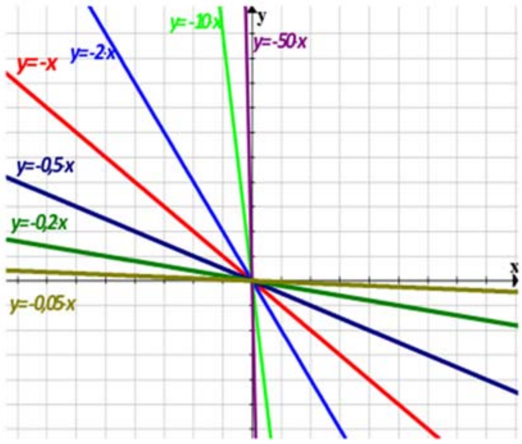
A les relacions de proporcionalitat directa, el pendent ve donat per la raó de proporcionalitat *k*.

Observa al següent gràfic com varia la recta segons anem augmentant o disminuint el pendent. Partim de la recta $y=x$, on $m=1$.



- Si augmenta m, llavors la recta es fa cada vegada més vertical, fins quasi convertir-se en l'eix y.
- Si disminueix m, llavors la recta es fa cada vegada més horitzontal, fins quasi convertir-se en l'eix x

Ara observa el que ocorre quan el pendent m pren valors negatius.



- Si augmenta m, llavors la recta es fa cada vegada més horitzontal, fins quasi convertir-se en l'eix x.
- Si disminueix m, llavors la recta es fa cada vegada més vertical, fins quasi convertir-se en l'eix y.

Com es pot observar, en variar el pendent la inclinació de la recta també canvia, segons es van donant valors m .

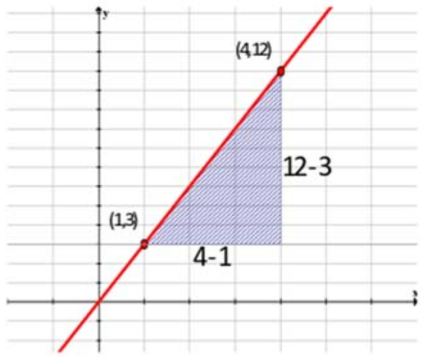
El pendent de la recta és el valor que mesura la inclinació de la recta, és a dir, mesura el creixement o decreixement de la funció lineal:

-Si $m>0$, la recta és creixent.

-Si $m<0$, la recta és decreixent.

El pendent és el coeficient que acompanya a la variable independent x .

Interpretació geomètrica del pendent



El pendent de la recta no sols indica el creixement i decreixement de la funció, sinó que també mesura quant creix o quant decreix. Es pot dir que el pendent mesura el creixement de la recta en funció del que avança:

0. Si $m > 0$:

a. Per a valors alts de m la recta creix amb major rapidesa, açò és, la recta "puja" molt i avança poc.

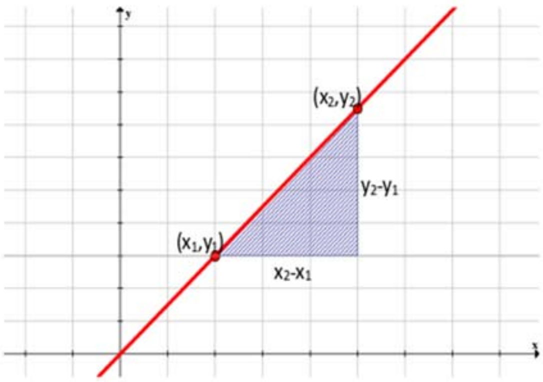
b. Per a valors xicotets de m la recta creix amb menys rapidesa, és a dir, "puja" poc i avança molt.

10. Si $m < 0$:

a. Per a valors alts de m la recta decreix amb menys rapidesa, és a dir, baixa poc i avança molt.

b. Per a valors xicotets de m la recta decreix amb major rapidesa, açò és, la recta "baixa" molt i "avança" poc.

Una manera de calcular el pendent, és dividint el valor del que puja la recta entre el que avança, com es mostra al dibuix següent:



Donats dos punts qualssevol de la recta, el pendent es calcula de la manera següent:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

és a dir, $m = \frac{elquepuja}{elqueavança}$

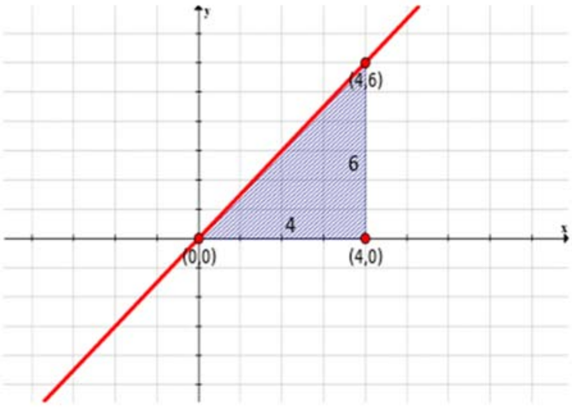
Exemple:

La recta puja 12 – 3 = 9 i avança 4 – 1 = 3, llavors

$$m = \frac{12-3}{4-1} = \frac{9}{3} = 3$$

Activitats resoltes

11. Calcula el pendent de la següent recta i la seua expressió algebraica.



Prenem dos punts qualssevol que pertanguen a la recta, el (0,0) i el (4,6).

En aquest cas, l'altura del triangle ombreig ens indica el valor que puja la recta, 6, i la base és el valor que la recta avança, 4.

En dividir aquests valors, obtenim el pendent i l'expressió algebraica de la recta.

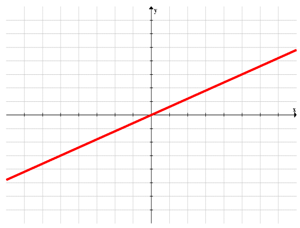
$$m = \frac{6}{4} = 1,5$$
$$y = 1,5 \cdot x$$

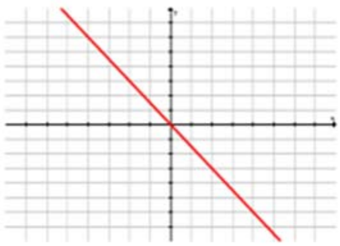
En aquests exemples, la recta sempre puja, és a dir, la funció és creixent. Què ocorre si la recta fóra decreixent? Per a no equivocar-nos amb els càlculs, sempre avaluem la funció d'esquerra a dreta, és a dir, el primer punt estarà més a l'esquerra, serà més xicotet.

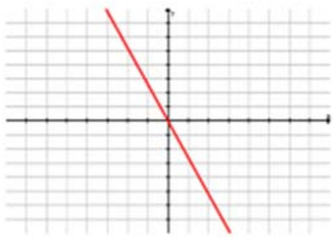
Açò és així perquè el pendent mesura la quantitat de creixement (o decreixement) segons la funció va augmentant o el que és el mateix, avançant.

Activitats proposades

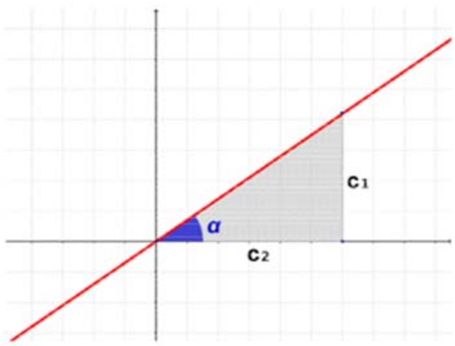
4. Troba el pendent i l'expressió algebraica de les següents rectes:

a. 


b.


c.

Una altra expressió de la pendent



Per a trobar el pendent es pren com a referència la base i l'altura del triangle rectangle que formen els vèrtexs dels punts de la recta.

El quocient entre l'altura i la base és el pendent. Com el triangle construït és un triangle rectangle, el pendent és el quocient entre els seus dos catets, o el que és el mateix, el pendent és la tangent de l'angle que forma la recta amb l'eix horitzontal.

$$tan\alpha = \frac{C_{oposat}}{C_{contigu}} = \frac{c_1}{c_2} \Leftrightarrow m = tan\alpha = \frac{c_1}{c_2}$$

El pendent és la tangent de l'angle que forma la recta amb l'eix d'abscisses, és a dir, la recta amb l'horitzontal.

1.4. Rectes de la forma $y = m \cdot x + n$

Tornem a la situació 1 al principi del capítol. En aqueix cas, volíem trobar l'espai que recorria el ciclista. Ara suposem que el ciclista, abans de començar amb la seua ruta, s'ha hagut de desplaçar 2 Km fins a l'inici del seu camí.

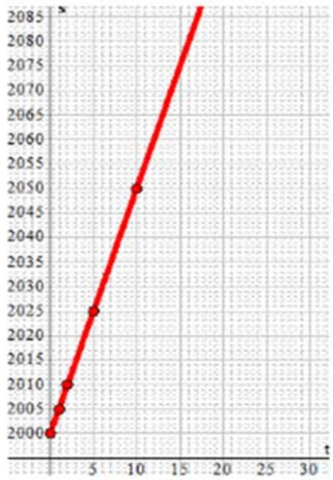
Activitats resoltes

0. *Situació 1.2:* la gràfica s-t d'un moviment rectilini uniforme: l'espai recorregut, en funció del temps, per un ciclista que s'ha traslladat 2 Km abans de començar el recorregut i es desplaça amb una velocitat de 5 m/s.

En aquest cas, la fórmula del MRU, com tenim un espai inicial, és $s = s_0 + v \cdot t$. Amb les dades de l'exercici, l'expressió queda $s = 2 + 5 \cdot t$.

Construïm la nova taula i dibuixem la gràfica:

Temps (t)	Espai (s)
0	2000
1	2007
2	2012
5	2027
10	2052



Podem observar que hem hagut d'adaptar els eixos per a poder pintar gràfica, ja que la recta s'ha desplaçat 2.000 posicions en l'eix y.

La gràfica d'aquesta recta té com a expressió algebraica $y=5 \cdot x+2000$ on x correspon al temps t i y a l'espai s, i 2.000 és l'espai inicial s_0.

En ambdós cas, el de la situació 1 i aquesta nova situació, el pendent d'ambdós rectes és 5. Açò és així ja que es tracta de la mateixa recta però desplaçada 2.000 posicions en l'eix d'abscisses, és a dir, les dues rectes són paral·leles.

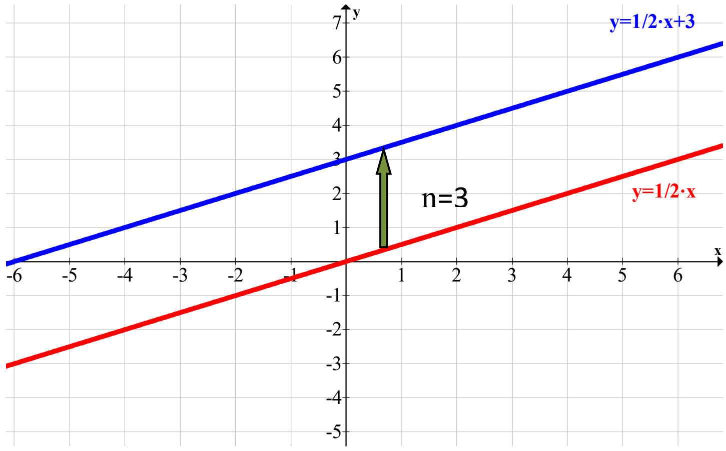
Les rectes de la forma $y=m \cdot x+n$ tenen el mateix pendent que les rectes $y=m \cdot x$ però es desplacen en l'eix d'abscisses (eix y) n posicions. Per aquesta raó, a n se l'anomena **ordenada a l'origen**, ja que és el valor de la recta al punt de partida, és a dir, quan $x=0$.

Exemple:

12. Comparem la recta $y = 1/2 \cdot x$ amb la recta $y = 1/2 \cdot x + 3$

Les dues rectes tenen la mateixa forma, és a dir, la mateixa inclinació o el mateix pendent. En ambdós casos $m = 1/2$. Són dues rectes paral·leles.

La diferència està al valor de la n: la recta $y = 1/2 \cdot x$ (on $n=0$) s'ha desplaçat 3 posicions a l'eix y, per a convertir-se en la recta $y = 1/2 \cdot x + 3$ (on $n=3$)

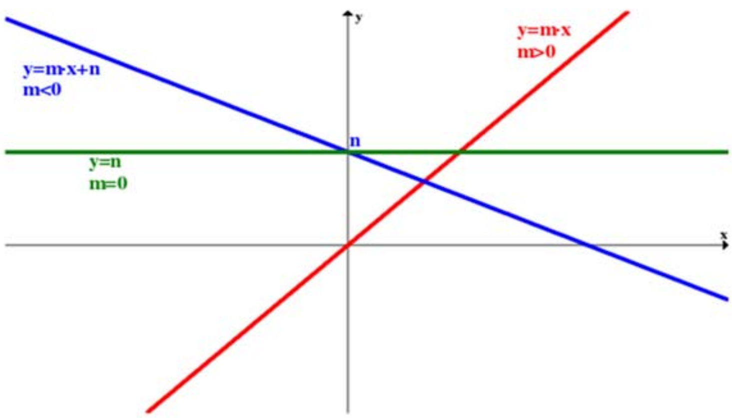


Les funcions polinòmiques de primer grau, o funcions lineals, es descriuen algebraicament de la forma $y = m \cdot x + n$ i es representen mitjançant rectes.

A més de la variable independent x, la variable dependent y, i el pendent m, s'afig el valor n que és l'ordenada en l'origen.

La recta $y=m \cdot x+n$ és paral·lela a la recta $y=m \cdot x$ (tenen el mateix pendent, m) desplaçada verticalment n posicions. Per aquesta raó, el creixement o decreixement d'aquestes funcions es comporten de la mateixa manera:

- Si $m>0$, la funció és **creixent**.
- Si $m<0$, la funció és **decreixent**.
- Si $m=0$, la funció és **constant**, ni creix ni decreix. És paral·lela a l'eix x, i passa pel punt $y=n$.



Les funcions $y=m \cdot x$ e $y=m \cdot x+n$ se les anomena **funcions lineals**, encara que a les segones també se les anomena **funcions afins**.

Activitats proposades

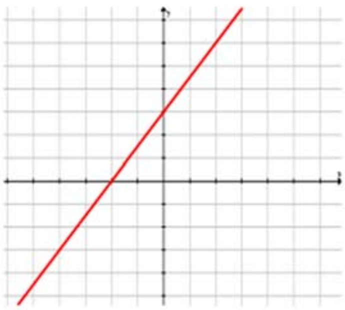
5. Representa les següents funcions lineals:

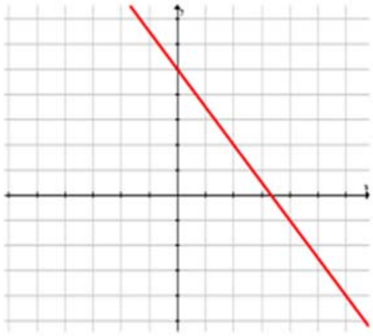
a) $y = 3 \cdot x + 4$ b) $y = -\frac{3}{7} \cdot x - 2$ c) $2x + 4y = 5$

d) $y = 5$ *e)* $y = 0$ *f)* $x = 3$

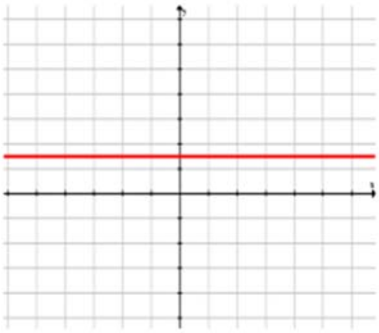
6. Troba l'expressió de les següents rectes:

a.



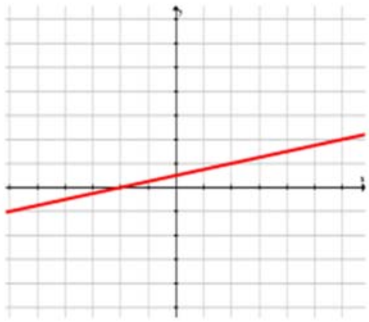


b.



c.

d.



2. FUNCIONS POLINÒMIQUES DE SEGON GRAU

2.1. Funcions polinòmiques de segon grau. Paràbola $y = a \cdot x^2$

A l'apartat anterior hem representat les gràfiques de les funcions polinòmiques de primer grau. Ara, estudiarem la representació de les funcions polinòmiques de segon grau. La gràfica d'aquest tipus de funcions serà semblant a la representació de la situació *2* al principi del capítol.

Les funcions polinòmiques de segon grau són aquelles que tenen com a expressió algebraica un polinomi de grau 2, és a dir, la seua expressió és de la forma $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$.

Es representen mitjançant **paràboles.**

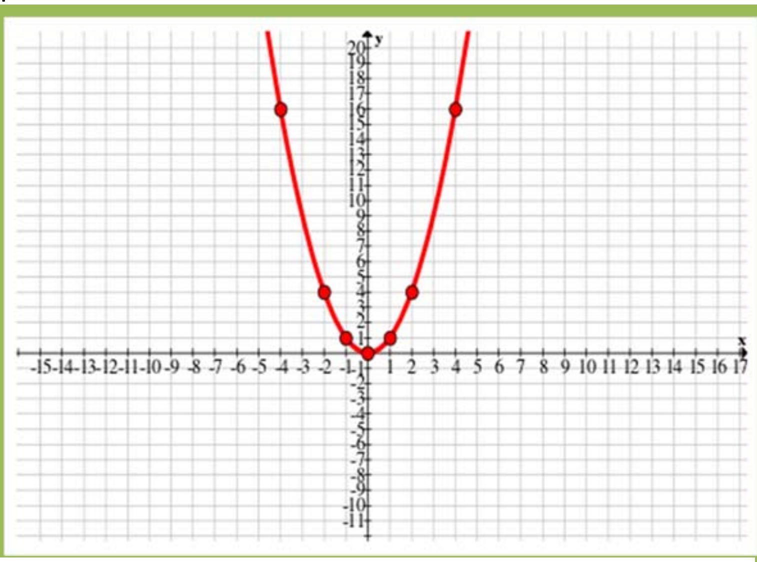
Exemple:

0. La representació de la situació 2 és una paràbola.

- En Física, la trajectòria de molts moviments es representen mitjançant paràboles, i per això rep el nom de tir parabòlic: llançar un projectil amb un cert angle, l'aterratge d'un avió a un portaavions, etc.

Paràbola $y = a \cdot x^2$

Representarem la paràbola $y = x^2$. Per a això, construïm una taula de valors i representem els parells de punts al pla cartesià.



x	*y*
–10	100
–5	25
–2	4
–1	1
0	0
1	1
2	4
5	25
10	100

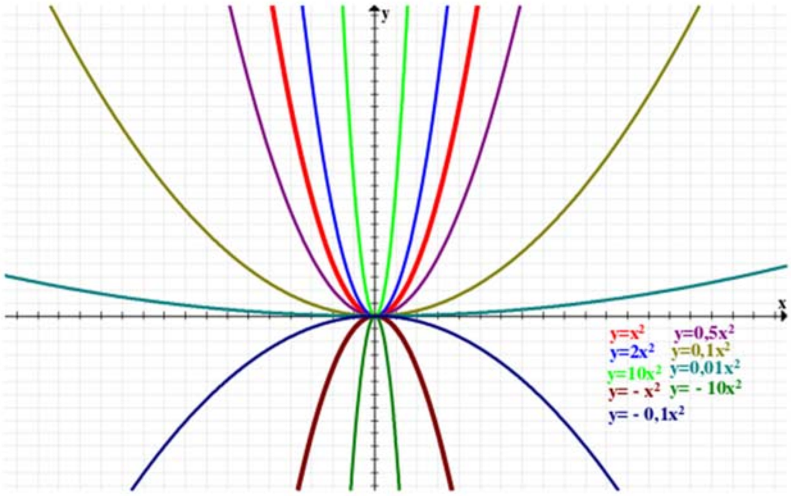
A la taula i a la gràfica es poden observar algunes característiques:

- El domini i el recorregut són tots els reals.
- La funció és contínua, perquè no presenta salts.
- És simètrica respecte a l'eix y, és a dir, és una funció parella:

$$y = f(x) = x^2 \quad , \quad f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

- És decreixent fins al 0, i després creixent, per tant té un mínim absolut al (0, 0).

En aquest cas, $a = 1$, i sabem que si $a = -1$, la paràbola té la mateixa forma però està oberta cap avall, i en compte d'un mínim, té un màxim al (0, 0).



Vegem el que succeeix quan augmentem o disminuïm el coeficient a:

- Si $a > 0$:
  a. en augmentar a, la paràbola es fa més estreta, i es va acostant a l'eix y.
  b. en disminuir a, la paràbola es fa més ampla (plana), i es va acostant a l'eix x.
- Si $a < 0$:
  c. en augmentar a, la paràbola es fa més ampla (plana), i es va acostant a l'eix x.
  d. en disminuir a, la paràbola es fa més estreta i es va acostant a l'eix y.

En general, les paràboles l'expressió algebraica de les quals és $y = a \cdot x^2$, tenen les següents característiques:

-són **contínues** en tot el domini

-el domini i el recorregut són tots els reals

-si $a > 0$, la paràbola està oberta cap amunt i té un **mínim absolut** al punt (0, 0)

-si $a < 0$, la paràbola està oberta cap avall i té un **màxim absolut** al punt (0, 0)

A aquest punt se l'anomena vèrtex de la paràbola

-són funcions parelles, és a dir, simètriques respecte a l'eix y.

Activitats proposades

7. A partir de la paràbola $y = x^2$, dibuixa la gràfica de les paràboles següents:

a) $y = \frac{5}{3}x^2$ b) $y = -3x^2$ c) $y = -\frac{15}{3}x^2$

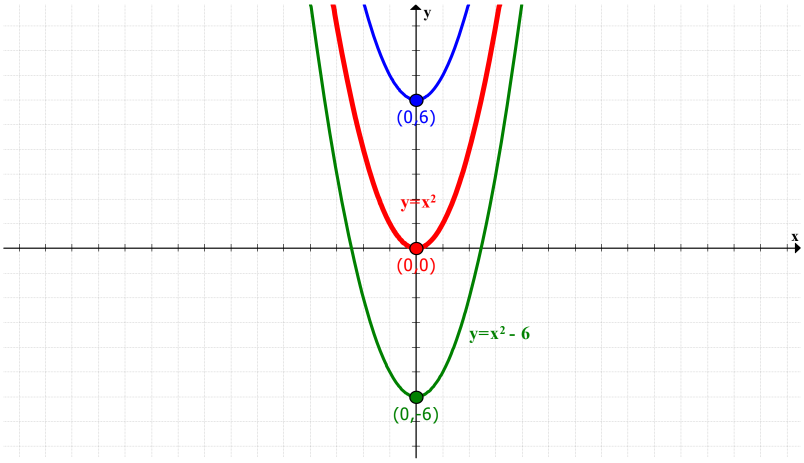
d) $y = 4{,}12x^2$ e) $y = -\frac{6}{10}x^2$ f) $y = \frac{7}{8}x^2$

2.3. Translacions al pla

Utilitzant com a plantilla la gràfica de $y=x^2$, es poden obtindre les gràfiques d'altres paràboles més complexes, depenent del tipus de desplaçament que utilitzem.

Desplaçaments verticals: translacions en la direcció de l'eix y: $y = x^2 + k$.

En aquest cas, es tracta de moure la paràbola en direcció vertical, és a dir, cap amunt o cap avall. Comparem les paràboles $y=x^2+6$ i $y=x^2-6$ amb la nostra plantilla:



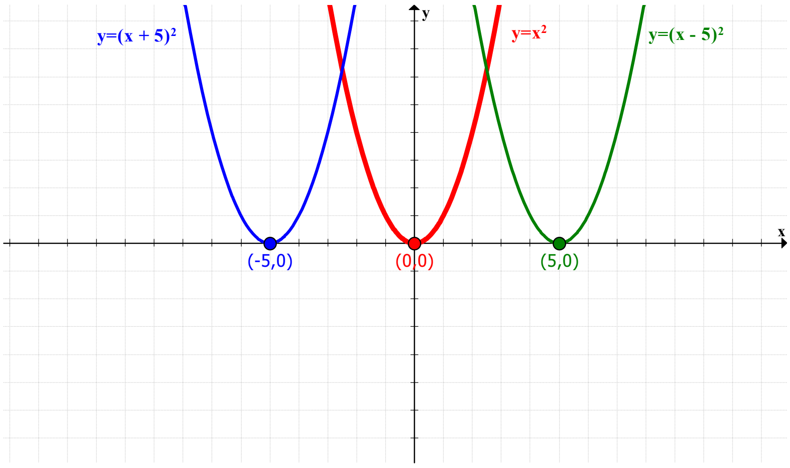
Es pot observar, que en sumar 6 a la paràbola x^2, la gràfica és idèntica però desplaçada 6 unitats en sentit positiu a l'eix y, és a dir, la paràbola ha pujat 6 unitats. El nou vèrtex passa a ser el punt (0, 6). Quelcom paregut ocorre quan es resta 6 unitats a x^2. En aquest cas la gràfica s'ha desplaçat 6 unitats en sentit negatiu fins al vèrtex (0,-6), és a dir, baixa 6 unitats.

En general, la paràbola $\boldsymbol{y=x^2+k}$ té la mateixa gràfica que $y=x^2$ però traslladada k unitats verticalment en l'eix y. Si k és positiu, la translació és cap amunt i si k és negatiu, cap avall.

El **vèrtex** de la paràbola se situa al punt (0, k).

Desplaçaments horitzontals: translacions en la direcció de l'eix x: $y = (x - q)^2$.

Ara traslladem la paràbola en direcció horitzontal. Cap a la dreta o cap a l'esquerra. Comparem les paràboles $y=(x+5)^2$ i $y=(x-5)^2$ amb la plantilla:

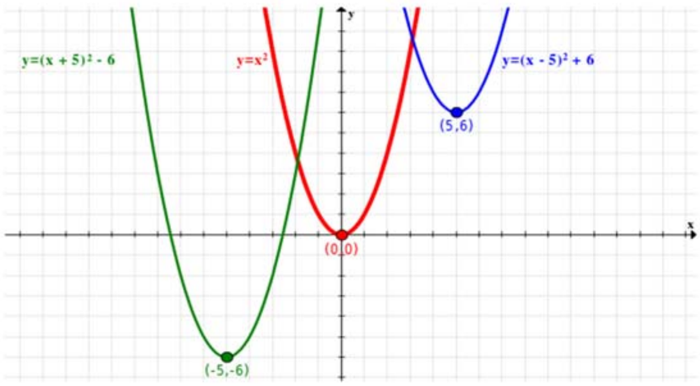


En aquest cas, en augmentar la variable que s'eleva al quadrat, és a dir, sumar 5 unitats, la gràfica es trasllada horitzontalment cap a l'esquerra 5 unitats, sent el nou vèrtex el punt (-5,0). En disminuir la dita variable, és a dir, restar 5 unitats, la paràbola es desplaça cap a la dreta sent el nou vèrtex el punt (5, 0).

En general, la paràbola $y=(x-q)^2$té la mateixa gràfica que$y=x^2$ traslladada $\boldsymbol{q}$ unitats en l'eix x cap a la dreta si $q>0$ i cap a l'esquerra si $q<0$.
El **vèrtex** de la paràbola se situa al punt $(q,0)$**.**

Desplaçaments oblics: translacions en ambdós eixos: $\boldsymbol{y=(x-q)^2+k}$.

L'últim moviment és el que combina els dos anteriors, és a dir, movem la plantilla k posicions de manera vertical i q posicions de manera horitzontal, resultant un moviment oblic al pla. Comparem la paràbola $y=(x-5)^2+6$ i $y=(x+5)^2-6$ amb la plantilla $y=x^2$.



La paràbola $y=(x-5)^2+6$es trasllada 5 unitats a la dreta i 6 unitats cap amunt, mentres que la paràbola$y=(x+5)^2-6$ es trasllada 5 unitats cap a l'esquerra i 6 unitats cap avall.
És a dir, és la combinació dels dos moviments anteriors.

En general, la paràbola $y=(x-q)^2+k$té la mateixa gràfica que$y=x^2$ traslladada de la manera següent:

$q unitats \begin{cases} cap a la dreta si q>0 \\ cap a l'esquerra si q<0 \end{cases}; k unitats \begin{cases} cap amunt si k>0 \\ cap avall si k<0 \end{cases}$

El **vèrtex** de la paràbola se situa al punt(q,k).

Representació de paràboles de la forma $y = x^2 + r \cdot x + s$

Sabem representar les paràboles de la forma $y = (x - q)^2 + k$ mitjançant translacions. Com podem pintar la gràfica de les paràboles l'expressió algebraica de la qual és $y = x^2 + r \cdot x + s$? N'hi ha prou amb convertir aqueixa expressió en una la funció de la qual sapiem representar:

Activitats resoltes

0. Representa la gràfica de la funció quadràtica $y = x^2 + 6 \cdot x - 4$

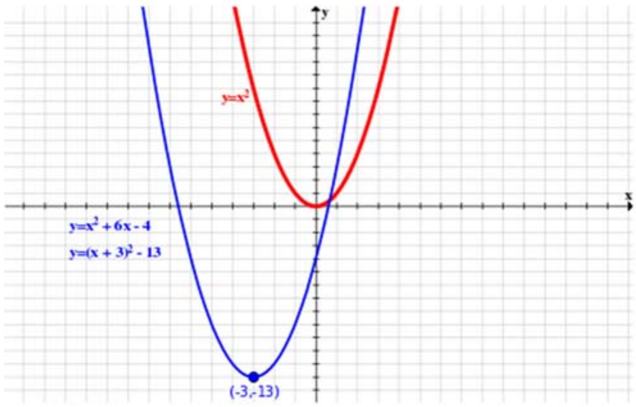
La funció ve donada de la forma $y = x^2 + r \cdot x + s$, i volem convertir-la en $y = (x - q)^2 + k$

$$y = x^2 + r \cdot x + s \Leftrightarrow y = (x - q)^2 + k$$

Sabem que $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$, on ja ens apareix $x^2 + 6x$. Ara hem d'ajustar la resta:

$$y = x^2 + 6x - 4 = (x + 3)^2 + K = x^2 + 6x + 9 + K \Rightarrow K = -13 \Rightarrow \boxed{y = (x + 3)^2 - 13}$$

Amb la paràbola expressada d'aquesta manera, n'hi ha prou amb traslladar la gràfica de $y = x^2$ 3 unitats a l'esquerra i 13 unitats cap avall, sent el vèrtex el punt (–3, –13).



En general, el vèrtex de la paràbola es troba al punt $x = \frac{-r}{2}$. L'altra coordenada s'obté substituint x a l'expressió de la funció.

Exemple:

13. Al cas anterior, $y = x^2 + 6 \cdot x - 4$, el vèrtex està al punt (–3, –13).

Com a r = 6, la primera coordenada del vèrtex és $x = \frac{-r}{2} = \frac{-6}{2} = -3$. Substituint el valor a l'expressió: $y = (-3)^2 + 6 \cdot (-3) - 4 = 9 - 18 - 4 = -13$

Activitats proposades

8. Representa la gràfica de les següents paràboles i localitza el vèrtex:

a) $y = (x + 4)^2 - 5$ b) $y = -(x - \frac{4}{5})^2 + 6$ c) $y = x^2 - 5$

d) $y = x^2 - 6x + 16$ e) $y = x^2 + 4x + \frac{5}{2}$ f) $y = -x^2 + 12x - 26$

g) $y = x^2 - 10x + 17$ h) $y = -x^2 + 2x - 4$ i) $y = -x^2 + \frac{4}{3}x - 1$

2.3. Funció quadràtica. Paràboles de la forma $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

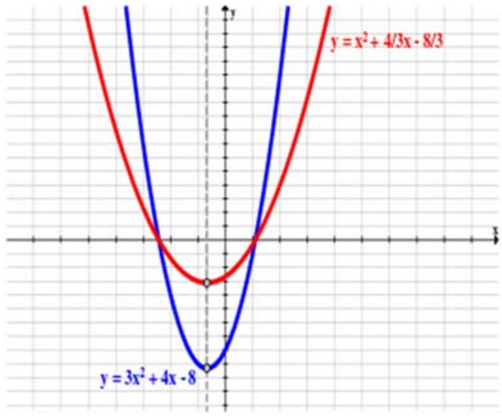
Les funcions polinòmiques de segon grau reben el nom de **funcions quadràtiques**.

Fins ara només hem estudiat les funcions de tipus $y = x^2 + rx + s$, que és una paràbola oberta cap amunt, o $y = -x^2 + rx + s$, oberta cap avall.

Sabem com afecta el valor del coeficient a a la gràfica de la paràbola $y = a \cdot x^2$, fent-la més estreta o més ampla.

Per a representar les funcions quadràtiques $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ es converteix la dita expressió en una més familiar que sabem representar: $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c = a \cdot (x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a}) = y = a \cdot (x^2 + r \cdot x + s)$

Activitats resoltes



0. Representa la paràbola $y = 3x^2 + 4x - 8$:

Convertim la funció en una expressió més fàcil de representar: $y = 3x^2 + 4x - 8 = 3 \cdot (x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{3})$

i la comparem amb $x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{3}$.

$$x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{3} = (x + \frac{4}{6})^2 - \frac{20}{9}$$

Les dues paràboles tenen el vèrtex en el mateix punt d'abscissa, i la coordenada y queda multiplicada per 3.

Pel que respecta a la forma, la paràbola és més estreta, com es pot veure al punt 2.1.

En general, la representació de la funció quadràtica $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ es pot aproximar representant la paràbola $y = x^2 + rx + s$, tenint el vèrtex al mateix punt d'abscissa i la forma dependrà del valor absolut del coeficient a, sent més ampla per a valors grans més estreta per a valors més xicotets. L'orientació de la paràbola serà :

-cap amunt si $a > 0$

-cap avall si $a < 0$

Elements de la paràbola

Els elements més característics de la paràbola ajuden a representar la seua gràfica al pla cartesià.

Coeficient a:

Si $a > 0$ la paràbola està oberta cap amunt.

Si $a < 0$ la paràbola està oberta cap avall.

Vèrtex:

El **vèrtex** de la paràbola està al punt $(\frac{-b}{2a}, \frac{b^2 - 4ac}{4a})$:

Havíem vist que per a la paràbola de la forma $y = x^2 + rx + s$, la primera coordenada és $\frac{-r}{2}$.

La paràbola al cas general és $y=a\cdot x^2+b\cdot x+c=a\cdot(x^2+\frac{b}{a}\cdot x+\frac{c}{a})=a\cdot(x^2+r\cdot x+s)$, és a dir, $r=\frac{b}{a}$,

llavors la primera coordenada del vèrtex és $\frac{-r}{2}=\frac{\frac{-b}{a}}{2}=\frac{-b}{2a}$.

La segona coordenada ix en substituir $x=\frac{-b}{2a}$ a la funció quadràtica.

Punts de tall amb l'eix OX:

Són els punts on la paràbola talla a l'eix x, és a dir, és la intersecció de la paràbola amb la recta $y=0$. Indica quan la paràbola és positiva o negativa.

Per a calcular-los, es resol l'equació de segon grau $y=a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$.

Punt de tall amb l'eix OY:

És el punt on la paràbola talla a l'eix y, és a dir, és la intersecció de la paràbola amb la recta $x = 0$.

Quan $x=0$ la paràbola pren el valor de c, després el punt de tall és el punt $(0,c)$.

Eix de simetria:

La paràbola és simètrica en la recta paral·lela a l'eix y que passa pel vèrtex de la paràbola, és a dir, **l'eix de simetria** de la paràbola és la recta $x=\frac{-b}{2a}$.

L'eix de simetria també passa pel punt mitjà del segment format pels dos punts de tall amb l'eix x.

A partir d'aquests elements, es pot representar la gràfica d'una funció quadràtica.

Activitats resoltes

14. Determina els elements de la paràbola $y=-2x^2-12x-10$

a. $a=-2$, llavors la paràbola està oberta cap avall.

b. Vèrtex: $\begin{cases} x=\frac{-b}{2a}=\frac{12}{2\cdot(-2)}=\frac{-12}{4}=-3 \\ y=-2\cdot(-3)^2-12\cdot(-3)-10=-18+36-10=8 \end{cases} \Rightarrow Vèrtex: V(-3,8)$

c. Punts de tall:

i. Eix OX: $y=-2x^2-12x-10=0 \Leftrightarrow x=\frac{12\pm\sqrt{144-80}}{-4}=\begin{cases} x_1=-5\Rightarrow(-5,0) \\ x_2=-1\Rightarrow(-1,0)\end{cases}$

ii. Eix OY: $\begin{cases} y=-2x^2-12x-10 \\ x=0\end{cases} \Leftrightarrow y=-2\cdot 0^2-12\cdot 0-10=-10\Rightarrow(0,-10)$

La paràbola també passa pel seu simètric: $(-6,-10)$.

d. Eix de simetria: recta $x=-3$.

Activitats proposades

9. Troba els elements característics i representa les paràboles següents:

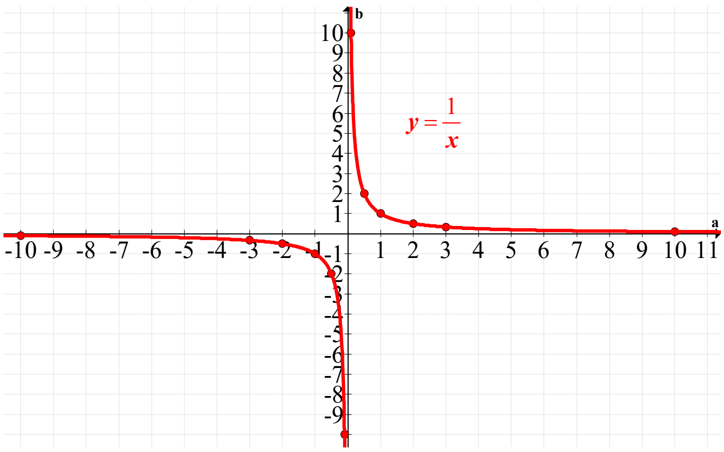
a) $y = 2x^2 + 4x - 6$ b) $y = 6x^2 - 24x$ c) $y = -2x^2 + 4x - 2$

d) $y = 2x^2 + 5x - 12$ e) $y = 3x^2 + 6x - 9$ f) $y = -2x^2 + 7x + 3$

g) $y = 7x^2 + 21x - 28$ h) $y = 5x^2 - 9x + 4$ i) $y = -4x^2 - 4x - 1$

3. FUNCIONS DE PROPORCIONALITAT INVERSA

3.1. Funció de proporcionalitat inversa $y = \dfrac{k}{x}$



Dues magnituds són **inversament proporcionals** quan en multiplicar o dividir a la primera per un nombre, la segona queda dividida o multiplicada pel mateix nombre. La **raó de proporcionalitat inversa** *k* és el producte de cada parell de magnituds: $k = a \cdot b = a' \cdot b'$.

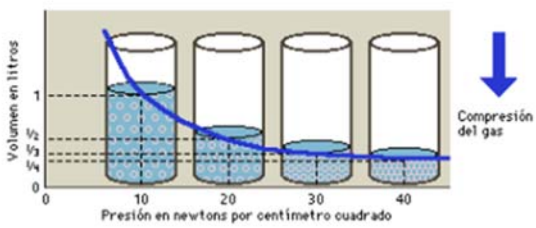
Exemple

0. Es pot comprovar a la situació *3* a l'inici del capítol, que la velocitat i el temps són magnituds inversament proporcionals. En aquest cas, l'espai es manté constant, sent la raó de proporcionalitat inversa $s = v \cdot t$.

15. En Física trobem molts exemples de magnituds inversament proporcionals: la densitat i el volum, la potència i el temps, la pressió i la superfície,…

Activitats resoltes

16. Representa al pla la llei de Boyle-Mariotte: "a temperatura constant, el volum d'una massa fixa de gas és inversament proporcional a la pressió que aquest exerceix."



La fórmula que descriu aquesta llei és $P \cdot V = k$

Si aïllem el volum final V, obtenim l'expressió següent: $V = \dfrac{k}{P}$.

La gràfica descriu una corba que a mesura que augmenta la pressió inicial, disminueix el volum i es va aproximant a l'eix x, i al contrari, si disminueix la pressió, el volum que ocupa el gas és major.

La funció de proporcionalitat inversa es defineix mitjançant l'expressió $\boldsymbol{y = \dfrac{k}{x}}$, on k és la raó de proporcionalitat inversa i les variables x e y són els distints valors que tenen les dues magnituds.
La seua representació gràfica en el pla cartesià és una **hipèrbola**.

Exemple

17. Representa la hipèrbola $y = \dfrac{1}{x}$

Donem una taula de valors i representem els punts al pla:

x	–3	–2	–1	–1/2	–1/10	1/10	1/2	1	2	3
y=1/x	–1/3	–1/2	–1	–2	–10	10	2	1	1/2	1/3

Es pot observar que la gràfica mai talla als eixos de coordenades, ja que el 0 no pertany al domini i tampoc al recorregut de la funció.

És fàcil comprovar que la funció és simètrica respecte a l'origen, i contínua a tot el domini, és a dir, en $\Re - \{0\}$.

La hipèrbola $y = \frac{k}{x}$

Activitats proposades

10. Representa les següents funcions de proporcionalitat inversa al mateix sistema de coordenades:

a) $y = \frac{-1}{x}$ b) $y = \frac{5}{x}$ c) $y = \frac{1}{2x}$

d) $y = \frac{3}{8x}$ e) $y = \frac{-5}{3x}$ f) $y = \frac{-12}{5x}$

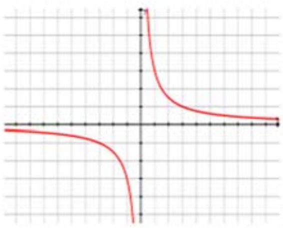
11. Descriu el que succeeix quan varia el valor de k. Ajuda't de les gràfiques de l'exercici anterior.

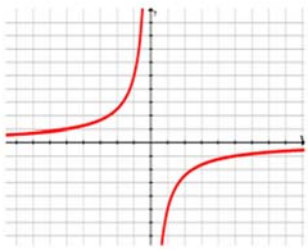
12. Troba l'expressió analítica i representa la gràfica de les hipèrboles que passa per cada un d'aquests punts. Escriu els intervals on la funció és creixent o decreixent.

a) $(4,2)$ b) $(3,-1)$ c) $(1/3\,,5)$

d) $(12,3)$ e) $(a,1)$ f) $(1,b)$

13. Troba el domini, recorregut, continuïtat, màxims i mínims i el creixement de les hipèrboles següents:


a)


b)

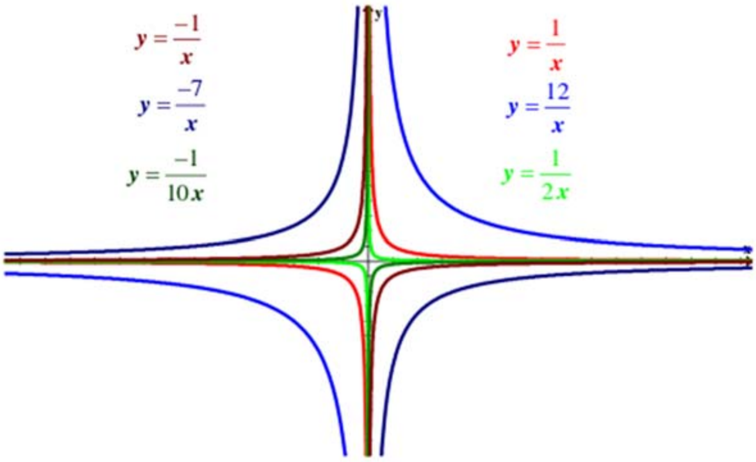
14. Troba el domini, recorregut, continuïtat, màxims i mínims i el creixement de les hipèrboles següents:

a. $y = \frac{9}{2x}$ b. $y = \frac{-5}{3x}$ c. $y = \frac{-0,3}{x}$

d. $(-5,2)$ e. $(4,-9)$ f. $(1,1/2)$

En general, les hipèrboles l'expressió de les quals és $y = \frac{k}{x}$ tenen les propietats següents:

- $|\boldsymbol{k}|$:
  a. Si el valor absolut de k augmenta, la corba s'allunya de l'origen de coordenades.
  b. Si el valor absolut de k disminueix, la corba s'aproxima a l'origen de coordenades.
- **Domini:** són tots els reals menys el 0: $\Re - \{0\}$
- **Recorregut:** el seu recorregut són tots els reals menys el 0: $\Re - \{0\}$
- **Continuïtat:** la funció de proporcionalitat inversa és contínua en tot el seu domini, però discontínua a la recta real, ja que el 0 no està al domini, i per tant, hi ha un bot.
- **Simetria:** són funcions imparelles, açò és, són simètriques respecte a l'origen de coordenades.
- **Asímptotes:** Quan els valors de x i els de y es fan molt grans, la corba s'aproxima als eixos però sense tocar-los, per tant, els eixos de coordenades són les asímptotes de les funcions de



proporcionalitat inversa: les rectes$x = 0$ y$y = 0$.

- **Creixement:** depén del signe de k :
    c. Si $k > 0$: la funció és **decreixent** a l'interval $(-\infty, 0)$i **creixent** a l'interval $(0, +\infty)$.
    d. Si $k < 0$: la funció és **creixent** a l'interval $(-\infty, 0)$i **decreixent** a l'interval$(0, +\infty)$.

Les asímptotes divideixen a la hipèrbola en dues corbes, que reben el nom de **branques de la hipèrbola**.

3.2. La hipèrbola $y = \frac{k}{x-a} + b$

A partir de la representació de la funció $y = \frac{k}{x}$, és possible representar un altre tipus d'hipèrboles? Igual que ocorre amb les paràboles, podem traslladar les hipèrboles al pla en direcció horitzontal o vertical, segons els valors que prenguen els paràmetres a i b.

Activitats proposades

15. Representa en els mateixos eixos de coordenades, les hipèrboles següents:

a) $y = \frac{5}{x}$ $y = \frac{5}{x} + 3$ $y = \frac{5}{x} - 3$

b) $y = \frac{-12}{x}$ $y = \frac{-12}{x-3}$ $y = \frac{-12}{x+3}$

c) $y = \frac{3}{x}$ $y = \frac{3}{x-1} + 5$ $y = \frac{5x-2}{x-1}$

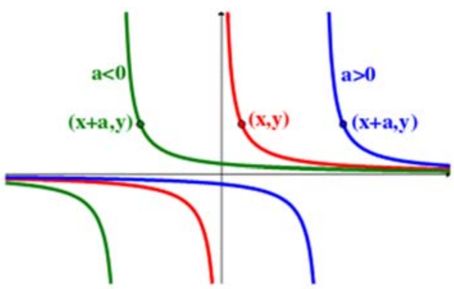
16. Descriu el que succeeix quan varien els paràmetres a i b a les hipèrboles de l'exercici anterior.

En general, la representació gràfica de les hipèrboles l'expressió algebraica de la qual és$y = \frac{k}{x-b} + a$ és una translació al pla depenent dels valors de a i b .

Desplaçaments horitzontals

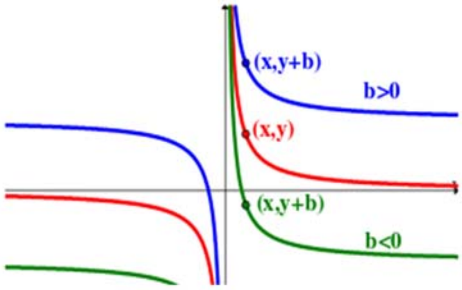
En variar el valor de $\boldsymbol{a}$, la representació gràfica de la hipèrbola es desplaça horitzontalment a unitats:

- Si $\boldsymbol{a>0}$: la hipèrbola es desplaça cap a la dreta.
- Si $\boldsymbol{a<0}$:la hipèrbola es desplaça cap a l'esquerra.
- El punt (x, y)es converteix en el punt $(x + a, y)$:
  $$(x, y) \rightarrow (x + a, y)$$
- El vector de translació és el vector $(a, 0)$



Desplaçaments verticals

En variar el valor de $\boldsymbol{b}$, la representació gràfica de la hipèrbola es desplaça verticalment b unitats:



- Si $\boldsymbol{b>0}$: la hipèrbola es desplaça cap amunt.
- Si $\boldsymbol{b<0}$: la hipèrbola es desplaça cap avall.
- El punt (x, y)es converteix en el punt$(x, y+b)$:

$$(x, y) \rightarrow (x, y+b)$$

- El vector de translació és el vector $(0, b)$

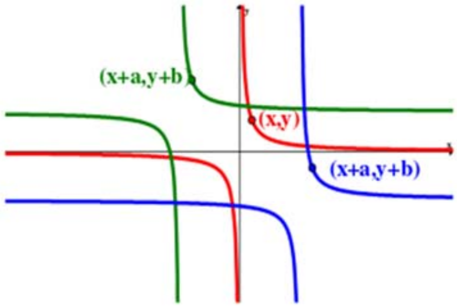
Desplaçaments oblics

En variar tant el valor de $\boldsymbol{a}$ com el valor de $\boldsymbol{b}$, la representació gràfica de la hipèrbola es desplaça diagonalment tantes unitats com siga el valor dels paràmetres:

- Les direccions cap a on es trasllada dependrà dels signes de a i b.
- El punt (x, y)es converteix en el punt $(x+a, y+b)$:

$$(x, y) \rightarrow (x+a, y+b)$$

- El vector de translació és el vector (a, b)



Activitats proposades

17. Representa les següents funcions de proporcionalitat inversa a partir de la hipèrbola$y=\frac{5}{x}$:

a) $y=\frac{10}{x-5}+3$ b) $y=\frac{1}{x+4}+8$ c)$y=\frac{100}{x+10}+1$

d) $y=\frac{10}{2x-4}-7$ e) $y=6-\frac{4}{x}$ f) $y=\frac{20}{5-x}-2$

18. Estudia el domini, recorregut, continuïtat, simetria, asímptotes i creixement de les funcions de proporcionalitat inversa de l'exercici anterior.

19. Escriu una regla per a expressar com es traslladen les asímptotes segons els paràmetres a i b.

Hipèrbola $y=\frac{mx+n}{px+q}$

Les funcions que es defineixen mitjançant aquesta expressió també són funcions de proporcionalitat inversa i es representen mitjançant hipèrboles. Per a això, necessitem fer el canvi en una expressió com l'estudiada a l'apartat anterior que ens resulte més fàcil de manejar i representar:

$$y=\frac{mx+n}{px+q} \rightarrow \text{Dividint } (mx+n):(px+q) \rightarrow y=\frac{k}{x-a}+b$$

Activitats resoltes

0. Convertir la funció$y=\frac{3x+2}{x-7}$en una funció l'expressió de la qual siga més senzilla de representar.

Dividim 3x+2 entre x-7 :

$$(3x+2)=3(x-7)+23 \Leftrightarrow \frac{(3x+2)}{(x-7)}=\frac{3(x-7)}{(x-7)}+\frac{23}{(x-7)}=\frac{23}{(x-7)}+3$$

Aquesta última expressió és fàcil de representar.

Activitats proposades

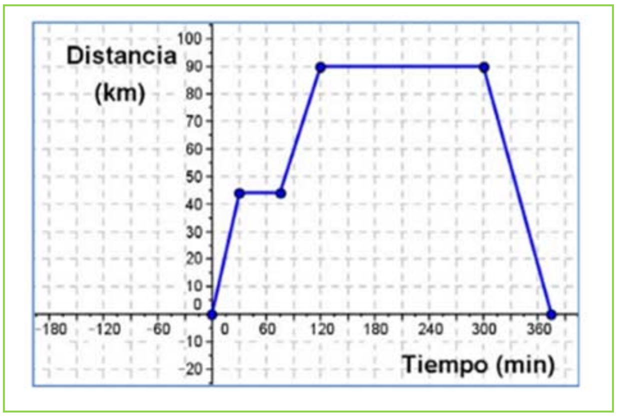
20. Representa les hipèrboles següents:

a) $y=\frac{2x-4}{x+5}$b) $y=\frac{3-5x}{x+2}$c)$y=\frac{4x-12}{x-3}$ d) $y=\frac{6x+8}{1-x}$e) $y=\frac{7x+5}{x-4}$f) $y=\frac{6x+10}{2x-1}$

4. FUNCIONS DEFINIDES A TROSSOS

Hi ha gràfiques que no podem representar amb una única fórmula, com la del marge:

Activitats resoltes



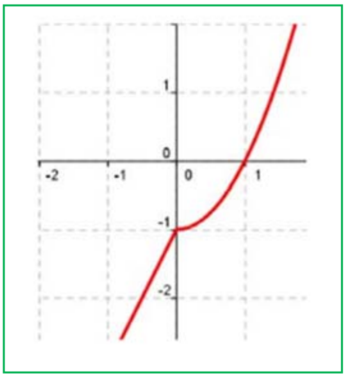
- *La gràfica del marge representa una excursió amb autobús d'un grup de 1º d'E.S.O. a Toledo, passant per Aranjuez. Busca una expressió que la represente.*

Aquest tipus de funció es denomina **funció definida a trossos** perquè cada tros té una expressió algebraica diferent. Observa que està formada per 5 trams de rectes, distints. Podem calcular les seues equacions perquè coneixem els punts pels quals passen: ((0,0), (30,45), (75, 45), (90, 120), (90, 300) y (0, 360).

La seua expressió és:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}x & si\ 0\le x\le 30\\ 45 & si\ 30<x\le 75\\ 5x-330 & si\ 75<x\le 120\\ 90 & si\ 120<x\le 300\\ -\frac{3}{2}x+360 & si\ 300<x\le 360\end{cases}$$

- *Representa gràficament la funció* $f(x)=\begin{cases}2x-1 & si\ x<0\\ x^2-1 & si\ x>0\end{cases}$.



Està definida de distinta manera abans de 0, que és una recta, que després de 0, que és una paràbola. Simplement dibuixem aquestes funcions als intervals indicats.

Activitats proposades

21. Representa gràficament la funció $f(x)=\begin{cases}2x-1 & si\ x<0\\ x-1 & si\ x>0\end{cases}$.

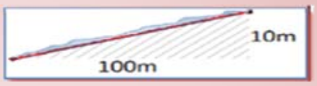
22. Representa gràficament la funció $f(x)=\begin{cases}x^2+2 & si\ x<0\\ 2x+2 & si\ x>0\end{cases}$.

23. Representa gràficament la funció $f(x)=\begin{cases}2x+1 & si\ x<1\\ x+3 & si\ x>1\end{cases}$.

CURIOSITATS. REVISTA

Coneixes aquest senyal?

Segurament l'has vist en alguna carretera, però què indica? Mesura el pendent de la carretera respecte a l'horitzontal i significa que el pendent és del 10 %, és a dir, $\frac{10}{100}$. Vol dir que pugem 10 metres d'altura mentres que avancem 100 metres.



Busca en internet el perfil del *L'Angliru* i comprova el pendent de les seues rampes.

Arquimedes i el raig de calor

Arquimedes és un dels personatges que més han aportat a la ciència en la història. Aquest enginyer, físic, inventor, astrònom i matemàtic va nàixer a Siracusa (287 a.C. – 212 a.C.) i és el responsable molts teoremes i invencions que segurament hauràs sentit, com el famós principi d'Arquimedes, o el caragol d'Arquimedes utilitzat en les cadenes de producció de moltes empreses.

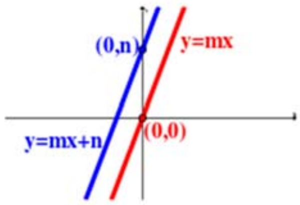
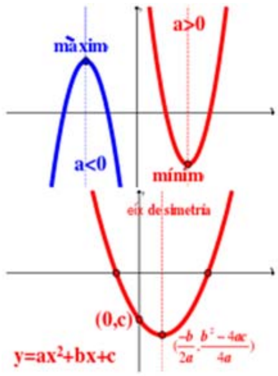
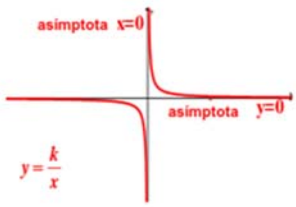
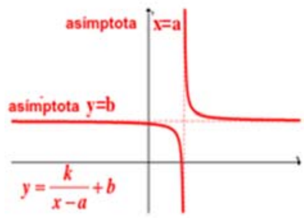
Quan els romans van atacar Siracusa, compte la llegenda que Arquimedes va construir un sistema que concentrava els rajos de sol en un raig de calor que va provocar l'incendi dels vaixells enemics. Aquest sistema estava compost per espills (o escuts ben polits) col·locats de tal forma que dibuixaren una superfície parabòlica.

Mite o realitat? No se sap, però a l'actualitat, aquest sistema és la base del funcionament dels forns solars.

Apol·loni de Pergue

Hem estat parlant de paràboles i hipèrboles, però, d'on vénen aqueixes paraules i formes? El nom d'aquestes corbes li'l devem a Apol·loni de Pergue (262 a.C.- 190 a.C.) que va estudiar aquest tipus de funcions a la seua obra *Les Còniques*. Les corbes sorgeixen dels talls d'un con: depenent l'angle de tall, obtenim unes corbes o altres. És com tallar una barra de pa.

RESUM

		Exemples
Funció polinòmica de primer grau: Rectes $\boldsymbol{y=m\cdot x}$ $\boldsymbol{y=m\cdot x+n}$	La seua expressió són polinomis de grau u. Es representen mitjançant **rectes**: Hi ha dos tipus: - **Funcions lineals o de proporcionalitat directa**: $y=m\cdot x$, passen per l'origen de coordenades. - **Funcions afins**:$y=m\cdot x+n$, són translacions a l'eix y, n unitats. Passen pel punt (0,n).	
Funció polinòmica de segon grau: Paràboles $\boldsymbol{y=a\cdot x^2+b\cdot x+c}$	La seua expressió són polinomis de grau dos. Es representen mitjançant **paràboles**: **Vèrtex:** $(\frac{-b}{2a},\frac{b^2-4ac}{4a})$ **Punts de tall amb l'eix OX:** $a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$. **Punt de tall amb l'eix OY:** $x=0$, és el punt (0,c). **Eix de simetria**: és la recta $x=\frac{-b}{2a}$.	
Funció de proporcionalitat inversa: Hipèrboles $y=\frac{k}{x}$	$\lvert k\rvert$: allunya o acosta la corba a l'origen de coordenades. **Domini i recorregut:** són tots els nombres reals menys el 0. **Continuïtat:** contínua en tot el seu domini, discontínua en $x=0$. **Simetria:** imparell, simètriques respecte a l'origen de coordenades. **Asímptotes:** les rectes $x=0$ i y=0 . **Creixement:** - Si $k>0$: **decreixent** en $(-\infty,0)$ i **creixent** en $(0,+\infty)$. - Si $k<0$: **creixent** en $(-\infty,0)$ i **decreixent** en $(0,+\infty)$.	
Hipèrboles $y=\frac{k}{x-a}+b$	Són el resultat de traslladar la hipèrbola $y=\frac{k}{x}$ pel vector de translació (a,b): - Domini: $\Re-\{a\}$ Recorregut: $\Re-\{b\}$ - Punts: $(x,y)\to(x+a,\ y+b)$ - Asímptotes: $\{x=0\to x=a\};\{y=0\to y=b\}$	

EXERCICIS I PROBLEMES

Funció lineal

1. Representa gràficament la següent relació de proporcionalitat donada a la següent taula i escriu la seua equació. Descriu quin tipus de relació és.

Magnitud A (a)	–5	–2	0	1	3
Magnitud B (b)	–15	–6	0	3	9

2. Representa les rectes a) $y = 5x$, b) $y = –5x$, c) $y = (1/2)x$, d) $y = 2'3x$.

3. Estudia el domini, màxims i mínims i simetries de les funcions lineals a) $y = 1'5x$, b) $y = –0'5x$.

4. Estudia la funció $y = 0,7x$ a l'interval [–2, 5].

5. Calcula el pendent de la recta que passa pels punts (1, 4) i (0, 0) i determina la seua expressió algebraica.

6. Representa les següents funcions lineals:

a) $y= 2x + 3$ b) $y = –x + 5$ c) $y = 3x – 2$ d) $y = –2x – 3$.

7. Calcula el pendent de la recta que passa pels punts (1, 4) i (2, 1) i determina la seua expressió algebraica.

8. Calcula el pendent de les rectes que passen pels punts que s'indiquen i determina la seua expressió algebraica.

a) (5, 1), (3, –2) b) (–3, 4), (4, –1) c) (1, 4), (0, 6) d) (–2, –4), (–1, 0)

9. Dues empreses de telefonia mòbil llancen les seues ofertes: l'empresa StarTel ofereix per cada telefonada pagar 50 cèntims més 2 cèntims per minut parlat; Tel-Hello ofereix 75 cèntims per telefonada i minuts il·limitats. Quina oferta és més econòmica? Per a donar la resposta, realitza els següents passos, expressant els resultats analíticament i gràficament:

a) Hi ha algun moment en què les dues ofertes siguen iguals?
b) Si parle una mitjana de 15 minuts al dia, quina oferta em convé?
c) Si parle una mitjana de 35 minuts al dia, quina oferta em convé?
d) Si faig una mitjana de 10 telefonades al dia de 3 minuts de duració, quina oferta em convé?
e) Si faig una mitjana de 2 telefonades al dia de 30 minuts de duració, quina oferta és la millor?
f) Quina oferta és més econòmica?

10. L'escriptor Jaime Joyce té distintes ofertes editorials per a publicar la seua última novel·la. L'editorial Vaig dolar li ofereix 100 €, a més del 20 % de cada llibre que venga; l'editorial Letrarte li ofereix 350 €; i l'editorial Paco li ofereix segons la venda de llibres: 50 € si ven fins a 250 llibres, 100 € si ven fins a 500 llibres, 300 € si ven fins a 1000 llibres i 500 € si ven més de 1000 llibres. Entre totes les editorials, quines creus que és millor oferta per a Jaime?

Funcions quadràtiques

11. A partir de la paràbola $y = x^2$, dibuixa la gràfica de les paràboles següents:

a) $y = x^2 + 3$ b) $y = –x^2 + 5$ c) $y = (x – 2)^2$ d) $y = (–x – 3)^2$.

12. A partir de la paràbola $y = x^2$, dibuixa la gràfica de les paràboles següents:

a) $y = 2,5x^2$ b) $y = –1,2x^2$ c) $y = (1/2)x^2$ d) $y = –0,7x^2$.

13. Representa la gràfica de les funcions parabòliques següents i indica el vèrtex:

a) $y = x^2 + 3x + 2$ b) $y = -x^2 + 5x - 4$ c) $y = (x - 2)^2 + 4$ d) $y = -x^2 + x - 3$.

14. Determina els elements de les paràboles següents

a) $y = 3x^2 + 2x + 5$ b) $y = -2x^2 + 4x - 1$ c) $y = 4(x - 2)^2 + 9$ d) $y = -5x^2 + 2x - 6$.

Funcions de proporcionalitat inversa

15. Troba l'expressió analítica i representa la gràfica de les hipèrboles $y = k/x$ que passen pels punts que s'indiquen. Escriu els intervals on la funció és creixent o decreixent.

a) (5, 1), b) (4, –1) c) (1, 4) d) (–2, –4).

16. Representa les següents funcions de proporcionalitat inversa:

a) $y = 2/x$ b) $y = -1/x$ c) $y = 3/x$ d) $y = -2/x$.

17. Determina el domini, recorregut, continuïtat, màxims i mínims i el creixement de les hipèrboles següents:

a) $y = 2'3/x$ b) $y = -1'7/x$ c) $y = 3'2/x$ d) $y = -2'1/x$.

18. Representa les hipèrboles següents:

a) $y = 2/x + 3$ b) $y = -1/x + 5$ c) $y = 3/x - 2$ d) $y = -2/x - 3$.

19. Representa les hipèrboles següents:

a) $y = 2/(x + 3)$ b) $y = -1/(x + 5)$ c) $y = 3/(x - 2)$ d) $y = -2/(x - 3)$.

20. Representa les hipèrboles següents:

a) $y = \frac{2x-3}{x+4}$ b) $y = \frac{-x-3}{2x+1}$ c) $y = \frac{2x-3}{3x-2}$ d) $y = \frac{x+2}{-x-3}$.

Funcions definides a trossos

21. Representa gràficament la funció $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & si\ x < -1 \\ x^2 - 1 & si\ x > -1 \end{cases}$.

22. Determina els punts d'intersecció amb els eixos coordenats de la funció $f(x) = \begin{cases} x+1 & si\ x < 2 \\ 2x+1 & si\ x > 2 \end{cases}$.

23. Indica els intervals on la funció $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & si\ x < 2 \\ -x^2+4 & si\ x > 2 \end{cases}$ és creixent.

24. Representa gràficament la funció $f(x) = \begin{cases} 3x-2 & si\ x < 1 \\ 1/x & si\ x > 1 \end{cases}$.

AUTOAVALUACIÓ

1. La recta $y = 4x + 2$ té de pendent m i ordenada a l'origen b:

a) $m = 4$, $b = 0$ b) $m = 1/2$, $b = 6$ c) $m = 2$, $b = 4$ d) $m = 4$, $b = 2$

2. La recta que passa pels punts (1, 6) i (–2, 4) té de pendent m i ordenada a l'origen b:

a) $m = 2$, $b = 4$ b) $m = 3/2$, $b = 6$ c) $m = 2/$, $b = 25/3$ d) $m = 6$, $b = 2/3$

3. Indica quina de les següents funcions lineals és simètrica respecte a l'origen de coordenades:

a) $y = (–10/17)x$ b) $y = 3x + 1$ c) $y = 4x + 2$ d) $y = –x + 3$

4. Indica quina de les següents funcions quadràtiques és simètrica respecte a l'eix d'ordenades:

a) $y = (–10/17)x^2 + 3x$ b) $y = 3x^2 + 2x + 1$ c) $y = 4x^2$ d) $y = –x^2 + 3x + 2$

5. Indica el vèrtex de la funció quadràtica $y = 3x^2 + 1$:

a) (0, 1) b) (1, 2) c) (0, 2) d) (0, 3)

6. Assenyala quina de les següents funcions quadràtiques és més *estreta* que $y = x^2$:

a) $y = (–10/17)x^2 + 3x$ b) $y = 3x^2 + 2x + 1$ c) $y = (–1/2)x^2 + 3x + 2$ d) $y = –x^2 + 3$

7. Indica quina de les següents hipèrboles és simètrica respecte a l'origen de coordenades:

a) $y = –15/21x$ b) $y = 3/x + 1$ c) $y = 4/x + 2$ d) $y = –1/x + 3$

8. Assenyala quina de les següents hipèrboles té com a asímptotes a les rectes $x = 2$ i $y = 3$:

a) $y = –15/(x – 3) –2$ b) $y = 3/(x – 2) + 3$ c) $y = 4/(x + 2) –3$ d) $y = –12/(x + 3) + 2$

9. Si trasllade la hipèrbola $y = 3/x$ mitjançant el vector de translació (1, 3) obtinc la hipèrbola:

a) $y = 3/(x – 1) + 3$ b) $y = 3/(x – 3) + 1$ c) $y = 3/(x + 3) –1$ d) $y = –3/(x + 1) – 3$

10. Assenyala quina de les següents funcions quadràtiques arriba a un màxim absolut:

a) $y = (–10/17)x^2 + 3x$ b) $y = 3x^2 + 2x + 1$ c) $y = (–1/2)x^2 + 3x + 2$ d) $y = –x^2 + 3$

Matemàtiques orientades a les ensenyances acadèmiques.

4t B d'ESO

Capítol 12

Funcions exponencials, logarítmiques i trigonomètriques

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Miguel Ángel Paz

Revisora: María Molero i Javier Rodrigo

Il·lustracions: Miguel Ángel Paz i Banc d'Imatges d'INTEF

Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

Índex

Resum

Entre les diverses funcions hi ha algunes que tenen una importància especial, o l'han tingut històricament. En aquests dos capítols et mostrem tres tipus molt importants.

Termes com a *creixement exponencial* o *corba sinusoïdal* deriven d'aquest tipus de funcions.

Tenen unes propietats importantíssimes a l'anàlisi matemàtica, enginyeria, medicina, ciències socials, etc. En aquest capítol aprendràs el càlcul de logaritmes i les propietats de les funcions exponencials i circulars i de les seues gràfiques.

El terme *logaritme* va ser encunyat en 1614 pel matemàtic escocès *John Neper* (1550-1617). Abans de la invenció de les calculadores electròniques, els logaritmes també van ser imprescindibles per al càlcul de potències de nombres no enters.

Les funcions trigonomètriques són molt conegudes i constitueixen un dels exemples més populars de funcions periòdiques. Elles o altres funcions relacionades es troben pertot arreu a la naturalesa i s'utilitzen en física, electrònica, etc. Nombroses gràfiques comparteixen les seues propietats, com per exemple la forma d'una ona, també anomenada *sinusoide*, que deu aquest nom a la funció *sinus*.

John Napier (Neper). Baró de Merchiston

1. FUNCIONS EXPONENCIALS

1.1. Funció exponencial

Hi ha dos tipus de funcions **l'expressió analítica** o **fórmula** de la qual és una **potència**:

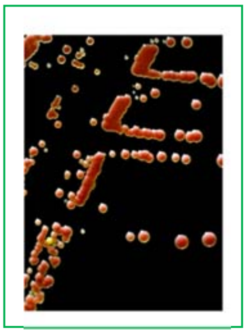
- Si la variable independent està a la base: $y = x^3$, s'anomena **funció potencial**, i quan a més l'exponent és un nombre natural és una funció polinòmica.
- Si la variable independent està a l'exponent: $y = 3^x$, s'anomena **funció exponencial**.

Exemple:

$$y = 10^x,\quad y = \left(\frac{1}{2}\right)^x,\quad y = 2^{3x},\quad y = 5^{-x}.$$

Una funció exponencial és aquella en què la variable independent està en l'exponent.

En aquest curs estudiem funcions exponencials senzilles, del tipus $y = b^x$, on la base b és un nombre positiu diferent d'1.



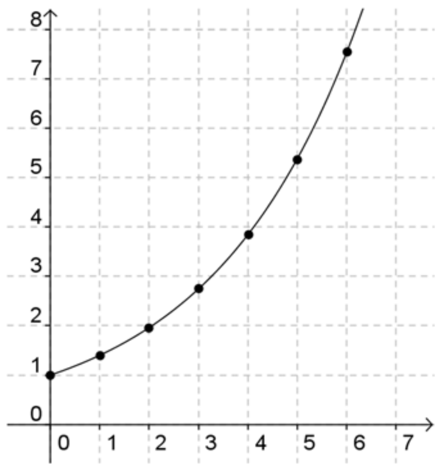
Activitats resoltes

- Si la quantitat de bacteris d'una determinada espècie es multiplica per 1,4 cada hora, podem escriure la següent fórmula per a calcular el nombre *"y"* de bacteris que hi haurà al cap de *"x"* hores (començant per un sol bacteri): $y = 1{,}4^x$.

Nombre de bacteris a cada hora
(**Taula de valors de la funció**):

Hores transcorregudes (*x*)	**Nombre bacteris (*y*)**
0	1
1	1,4
2	1,96
3	2,74
4	3,84
5	5,38
6	7,53
…	…

Gràfica de la funció



Observa que en aquest exemple no s'ha donat a la *"x"* valors negatius, ja que no té sentit un nombre d'hores negatiu. A les funcions exponencials en general la "x" sí que pot tindre valors negatius. No obstant això la base b només pot tindre valors positius. Així mateix, observaràs que la variable *"y"* també resulta sempre positiva. Més avant arrepleguem aquestes propietats en parlar de domini i recorregut de la funció exponencial.

Activitats proposades

1. Prova ara a realitzar al teu quadern una taula de valors i la gràfica per a un cas semblant, suposant que el nombre de bacteris es multiplica cada hora per 3 en compte de per 1,4.

Observaràs que els valors de "y" augmenten molt més de pressa i de seguida *s'ixen del paper*. Mentres que els valors de "x" augmenten d'1 en 1 els valors de *y* es van multiplicant per 3. Açò s'anomena **creixement exponencial**. Si en compte de multiplicar es tracta de dividir tenim el cas de **decreixement exponencial**.

2. Al teu quadern, representa conjuntament les gràfiques de $y = x^2$ (funció potencial) i $y = 2^x$ (funció exponencial), amb valors de "x" entre 0 i 6. Observa la diferència quantitativa entre el creixement potencial i el creixement exponencial.

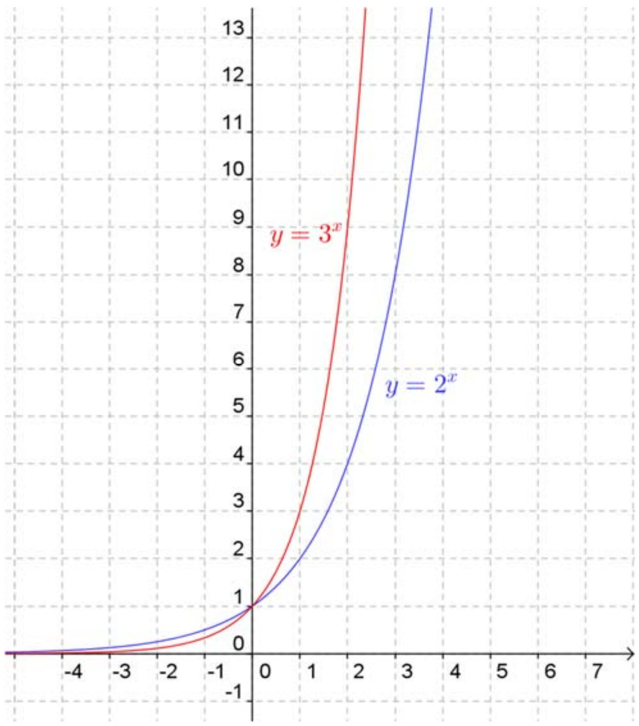
1.2. Distintes funcions exponencials

Les gràfiques de les funcions exponencials $y = b^x$ es diferencien segons el valor de la base "b". Especialment es diferencien si $0 < b < 1$ o $b > 1$.

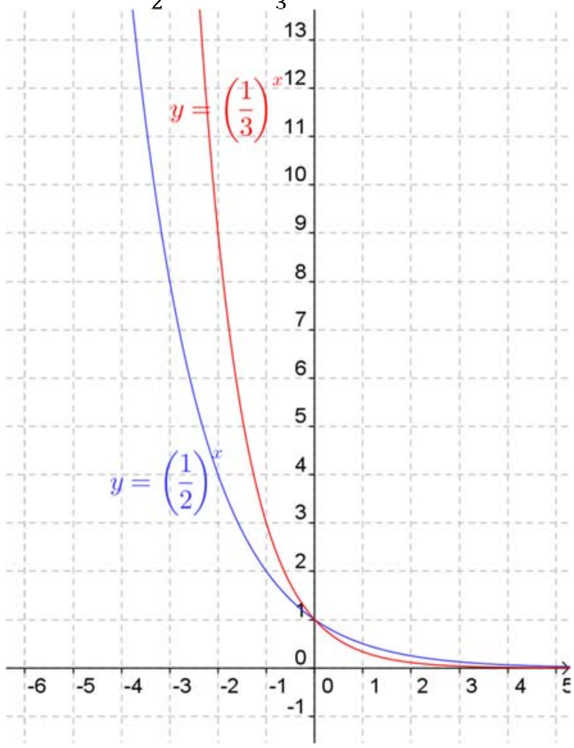
Al cas en què $b = 1$ tenim la funció constant $y = 1$, la gràfica de la qual és una recta horitzontal.

Vegem les gràfiques d'algunes funcions exponencials, comparant-les amb altres:

Funcions $y = 2^x$ **i** $y = 3^x$



Funcions $y = (\frac{1}{2})^x$ **i** $y = (\frac{1}{3})^x$



Observem els següents aspectes comuns a les quatre gràfiques:

- El seu **domini** és tota la recta real. A més són contínues.
- El seu **recorregut** és (0, +∞). És a dir, "y" mai és zero ni negatiu.
- Passen totes pels punts (0, 1), (1, b) i (–1, 1/b).
- La gràfica de $y = a^x$ i la de $y = (1/a)^x$ són simètriques respecte de l'eix OY.

I observem també aspectes diferenciats en ambdues il·lustracions:

Quan la base és b > 1
Són funcions **creixents**. A més gran és la base el creixement és més ràpid.
Quan $x \to -\infty$ la funció tendeix a 0. Per tant presenta una **asímptota horitzontal** en la part esquerra de l'eix OX.
Encara que en alguns casos puga aparentar-ho, no presenten asímptota vertical, perquè no s'aproximen a cap recta.

Quan la base és 0 < b < 1
Són funcions **decreixents**. A més xicoteta és la base el decreixement és més ràpid.
Quan $x \to +\infty$ la funció tendeix a 0. Per tant presenta una **asímptota horitzontal** en la part dreta de l'eix OX.
Encara que en alguns casos puga aparentar-ho, no presenten asímptota vertical, perquè no s'aproximen a cap recta.

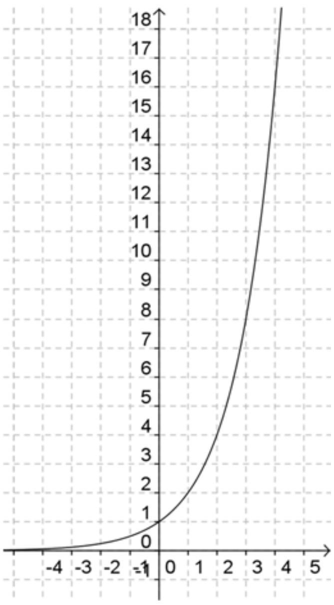
Activitats resoltes

- Representa gràficament les següents funcions exponencials $y = 2^x$ i $y = 2^{-x}$.

Solució:

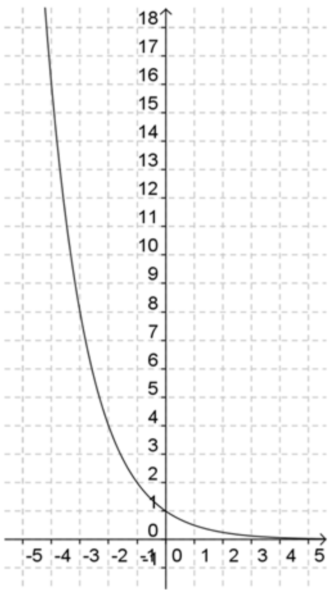
Funció $y = 2^x$

x	**y**
…	…
-5	1/32
-4	1/16
-3	1/8
-2	1/4
-1	1/2
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
…	…

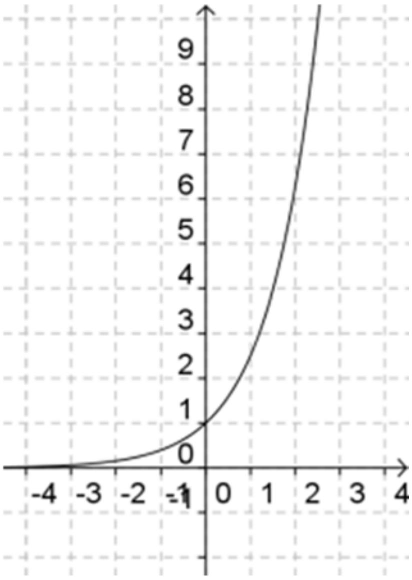


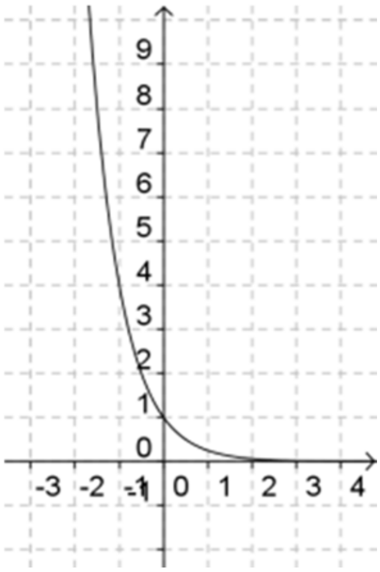
Funció $y = 2^{-x}$

x	**y**
…	…
-5	32
-4	16
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	1/2
2	1/4
3	1/8
4	1/16
5	1/32
6	1/64
…	…



- Identifica les funcions corresponents amb les següents gràfiques:

a) 

b) 

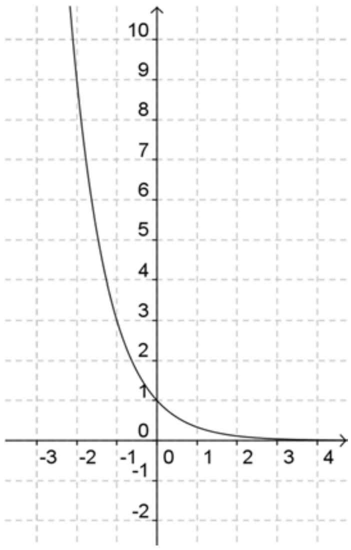
Solució:

Ambdues són funcions exponencials perquè passen pel punt (0, 1) i tenen per un costat com a asímptota horitzontal l'eix OX, mentres que per l'altre costat tendeixen a + ∞.

La funció (a) és $y = 2{,}5^x$ perquè passa pel punt (1, 2'5).
La funció (b) és $y = (\frac{1}{4})^x$ perquè passa pel punt (–1, 4).

- Representa la funció $y = 3^{-x}$

Solució:



Per tindre exponent negatiu és:

$$y = 3^{-x} \Rightarrow y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

Per tant la seua gràfica és la del marge.

Observa que passa pels punts (–1, 3), (0, 1) i (1, 1/3).

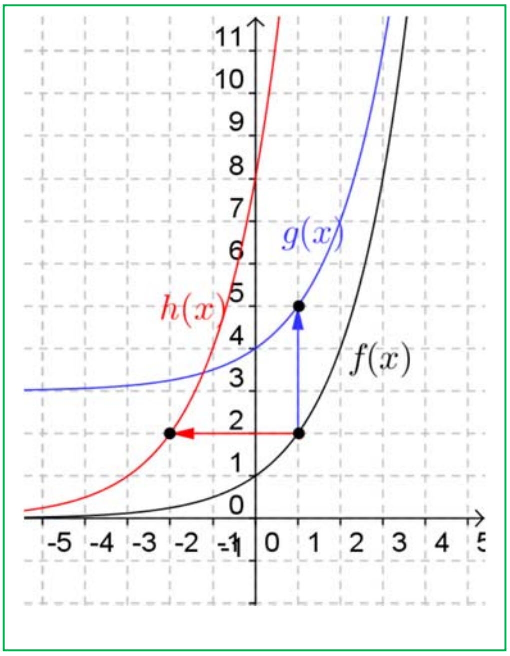
- Coneixent la gràfica de la funció $f(x) = 2^x$, que s'ha vist anteriorment, i sense calcular valors, dibuixa les gràfiques de les funcions $g(x) = 2^x + 3$ i $h(x) = 2^{x+3}$.

Solució:

La funció *g(x)* és la funció *f(x)* desplaçada cap amunt 3 unitats.

La funció *h(x)* és la funció *f(x)* desplaçada cap a l'esquerra 3 unitats.

Per tant les seues gràfiques són aquestes, representades en diferent color:



1.3. El nombre *e*. La funció e^x

El nombre e té una gran importància en Matemàtiques, comparable inclús al nombre π encara que la seua comprensió no és tan elemental i tan popular. Per a comprendre la seua importància cal accedir a continguts de cursos superiors. És un nombre irracional.

El nombre *e* es defineix com el límit quan *n* tendix a infinit de la successió següent:

$$e = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$$

El seu valor aproximat és *e* = 2,71828182846...

Es tracta d'un nombre irracional (encara que en veure'l pot parèixer periòdic).

Amb l'ajuda de la calculadora es pot comprovar com els valors de$(1 + \frac{1}{n})^n$s'acosten cada vegada més al valor *e* = 2,71828182846... a mesura que augmenta el valor de n.

Aquest nombre apareix a les equacions de creixement de poblacions, desintegració de substàncies radioactives, interessos bancaris, etc.

També es pot obtindre directament el valor de e amb la calculadora (sempre com a aproximació decimal, ja que és un nombre irracional). Normalment hi ha una tecla amb l'etiqueta e però pots usar també la tecla etiquetada e^x. Per a això hauràs de calcular el valor de e^1.

La funció$y = e^x$comparteix les característiques descrites més amunt per a funcions exponencials de base major que 1.

Activitats proposades

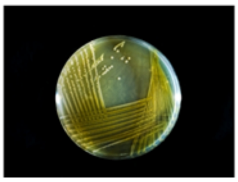
3. Utilitzant la calculadora, al teu quadern fes una taula de valors i representa al teu quadern les funcions $y = e^x$, $y = e^{-x}$.

4. Una persona ha ingressat una quantitat de 5.000 euros a interès del 3 % en un banc, de manera que cada any el seu capital es multiplica per 1,03.

a. Escriu al teu quadern una taula de valors amb els diners que tindrà aquesta persona al cap d'1, 2, 3, 4, 5 i 10 anys.

b. Indica la fórmula de la funció que expressa el capital en funció del nombre d'anys.

c. Representa al teu quadern gràficament la dita funció. Pensa bé quines unitats hauràs d'utilitzar als eixos.



Cultiu del bacteri Salmonel·la

5. Un determinat antibiòtic fa que la quantitat de certs bacteris es multiplique per 2/3 cada hora. Si la quantitat a les 7 del matí és de 50 milions de bacteris, (a) fes una taula calculant el nombre de bacteris que hi ha cada hora, des de les 2 del matí a les 12 de migdia (observa que has de calcular també "cap arrere"), i (b) representa gràficament aquestes dades.

6. Representa al teu quadern les següents funcions i explica la relació entre les seues gràfiques:

a) $y = 2^x$ b) $y = 2^{x+1}$ c) $y = 2^{x-1}$

7. Coneixent la gràfica de la funció $f(x) = 2^x$, que s'ha vist més amunt, i sense calcular taula de valors, dibuixa al teu quadern les gràfiques de les funcions $g(x) = 2^x - 3$ i $h(x) = 2^{x-3}$

2. FUNCIONS LOGARÍTMIQUES

2.1. Definició i càlcul elemental de logaritmes

Recorda que:

L'expressió $\mathbf{log}_b\, \boldsymbol{a}$ es llig "logaritme de a en base b".
$\mathbf{log}_b\, \boldsymbol{a}$ és l'exponent a què cal elevar "b" perquè el resultat siga "a".

$$\log_b a = x \quad \Leftrightarrow \quad b^x = a$$

"b" s'anomena **base** i "***a***" s'anomena **argument**.

Observacions:

- La base ha de ser un nombre positiu i diferent de la unitat.
- L'argument ha de ser positiu i diferent de 0.

Exemples:

a) $log_2 32 = 5$perquè $2^5 = 32$ b)$log_2 \frac{1}{8} = -3$perquè $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

Un parell de propietats elementals

- El logaritme de la base sempre val 1:$log_b b = 1$perquè $b^1 = b$
- El logaritme d'1 en qualsevol base sempre val 0:$log_b 1 = 0$ perquè$b^0 = 1$.

2.1.1. Logaritmes immediats

S'anomenen així els que es calculen directament aplicant la definició.

Exemples:

- perquè $5^3 = 125$
- perquè $3^4 = 81$
- log 10000 = 4 perquè $10^4 = 10000$.

Quan no s'escriu la base vol dir que la base és 10 (*log* x). Els logaritmes en base 10 s'anomenen **logaritmes decimals**. Els logaritmes en base e s'anomenen logaritmes neperians i s'escriuen *ln x*.

Altres logaritmes no són immediats però es poden calcular també aplicant la definició, igualant **exponents**. Açò passa quan la base i l'argument son potències del mateix nombre.

Exemples:

- Per a trobar *log*$_4$ 8 posem $log_4 8 = x \Rightarrow 4^x = 8 \Rightarrow 2^{2x} = 2^3 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$
- Per a trobar *log*$_4$ 32 posem$log_4 32 = x \Rightarrow 4^x = 32 \Rightarrow 2^{2x} = 2^5 \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$

Activitats resoltes

- Troba els logaritmes següents: a) $\log_4 256$; b) $\log_2 1/32$; c) $\log_2 1/2$; d) $\log 1/100$; e) $\log_3 0{,}111...$; f) $\log_3 3$; g) $\log_2 1$; i calcula el valor de *x* a les igualtats següents: h) $x = \log_3 3\sqrt{3}$; i) $\log_x 16 = 4$.

Solucions:

a) $\log_4 256 = 4$, perquè $4^4 = 256$.

b) $\log_2 1/32 = -5$, perquè $2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$

c) $\log_2 1/2 = -1$, perquè $2^{-1} = \frac{1}{2}$

d) $\log 1/100 = -2$, perquè $10^{-2} = \frac{1}{100}$

e) $\log_3 0{,}111... = -2$, perquè $0{,}111... = 1/9$, i llavors $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

f) $\log_3 3 = 1$, perquè $3^1 = 3$ (el logaritme de la base sempre val 1)

g) $\log_2 1 = 0$, perquè $2^0 = 1$ (el logaritme d'1 sempre val 0).

h) $x = log_3 3\sqrt{3} \Leftrightarrow 3^x = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow 3^x = 3^{3/2} \Leftrightarrow x = 3/2$

i) $\log_x 16 = 4 \Leftrightarrow x^4 = 16 \Leftrightarrow x^4 = 2^4 \Leftrightarrow x = 2$.

- Calcula el valor de *x* en les igualtats següents:

a) $\log_3 81 = x \Leftrightarrow 3^x = 81 \Leftrightarrow 3^x = 3^4 \Leftrightarrow x = 4$

b) $\log_{12} 12 = x \Leftrightarrow 12^x = 1 \Leftrightarrow x = 1$

c) $\log_{30} 900 = x \Leftrightarrow 30^x = 900 \Leftrightarrow x = 2$

d) $\log 0{,}1 = x \Leftrightarrow 10^x = 0{,}1 \Leftrightarrow 10^x = 10^{-1} \Leftrightarrow x = -1$

e) $\log_3 243 = x \Leftrightarrow 3^x = 243 \Leftrightarrow 3^x = 3^5 \Leftrightarrow x = 5$

f) $\log_9 3 = x \Leftrightarrow 9^x = 3 \Leftrightarrow 3^{2x} = 3^1 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = 1/2$

g) $\log_7 \frac{1}{49} = x \Leftrightarrow 7^x = 7^{-2} \Leftrightarrow x = -2$

h) $\log_{16} 4096 = x \Leftrightarrow 16^x = 4096 \Leftrightarrow 2^{4x} = 2^{12} \Leftrightarrow 4x = 12 \Leftrightarrow x = 3$

i) $\log 1000 = x \Leftrightarrow 10^x = 1000 \Leftrightarrow x = 3$

j) $\log_{25} \sqrt{5} = x \Leftrightarrow 25^x = \sqrt{5} \Leftrightarrow 5^{2x} = 5^{1/2} \Leftrightarrow 2x = 1/2 \Leftrightarrow x = 1/4$

k) $\log 0 = x$ no hi ha solució, perquè cap potència dóna 0 com resultat.

l) $\log(-100) = x$ no hi ha solució, perquè el resultat de calcular una potència de base positiva sempre és positiu.

m) $\log_x 7 = -2 \Leftrightarrow x^{-2} = 7 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}\right)^2 = 7 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \sqrt{7} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7}$

n) $\log_2 x = -1/2 \Leftrightarrow 2^{-1/2} = x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2^{1/2}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Activitats proposades

8. Calcula els següents logaritmes utilitzant la definició (sense calculadora):

a) $\log_3 81$ b) $\log_2 256$ c) $\log 10\,000$ d) $\log_5 125$ e) $\log_2 0{,}25$ f) $\log 0{,}001$

9. Calcula els següents logaritmes utilitzant la definició i igualant exponents (sense calculadora):

a) $\log_4 2$ b) $\log_9 27$ c) $\log_{81} 27$ d) $\log_2 0{,}125$ e) $\log_3 \frac{1}{9}$ f) $\log_2 \frac{3}{12}$

g) $\log_{16} 2$ h) $\log_{64} 32$ i) $\log_4 \sqrt{2}$ j) $\log_3 \sqrt{27}$ k) $\log \sqrt[3]{100}$

10. Troba el valor de *x* en les igualtats següents:

a) $\log_8 x = \frac{2}{3}$ b) $\log_x 81 = 4$ c) $\log_{\frac{1}{3}} 27 = x$ d) $\log_x 0{,}5 = -1$ e) $\log x = -4$.

2.1.2. Logaritmes decimals i neperians amb la calculadora

Fins ací hem aprés a calcular logaritmes utilitzant la definició. No obstant això només es pot fer així en uns pocs casos (en concret quan l'argument és una potència de la base del logaritme).

Per exemple no es poden calcular $log_4\ 35$, $log_{10}\ 7$, $log_4 30$, $log_9 5$.

Les calculadores científiques disposen de tecles per a trobar únicament dues o tres tipus de logaritmes (segons el model de calculadora):

<table>
<tr><td>Logaritmes decimals (en base 10): </td><td rowspan="2">Logaritmes neperians (en base e):
Logaritmes neperians són els que tenen com a base el nombre e = 2,718281…
També s'anomenen logaritmes naturals.
Els logaritmes neperians s'escriuen de tres maneres:
$\log_e x = \ln x = \mathrm{L}\, x$ </td></tr>
<tr><td>Logaritmes en qualsevol base: 
En algunes calculadores pot trobar-se directament posant la base i l'argument.</td></tr>
</table>

Exemples:

- Comprova amb la teua calculadora que $log\ 7 = 0{,}845$ i que $\ln 7 = 0{,}946$ (valors arrodonits).
- Comprova també que $\log 10 = 1$ i que $\ln e = 1$.

Per a **calcular un nombre coneixent el seu logaritme s'empren** les mateixes tecles utilitzant prèviament la tecla de funció inversa (normalment *SHIFT* o *INV*).

Exemples:

- Comprova amb la teua calculadora que el nombre el logaritme decimal del qual val 1,36 és 22,9 i que el nombre el logaritme neperià del qual val 1,36 és 3,896.

2.1.3. Canvi de base de logaritmes

Amb la calculadora també es poden calcular logaritmes que no siguen decimals ni neperians, és a dir, en bases diferents de "10" i "*e*".

Per a això s'empra la **fórmula del canvi de base**:

Per a canviar de base "*a*" a base "*b*": $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

Exemple:

- Per a calcular $\log_4 7$ utilitzant la calculadora fem $\log_4 7 = \dfrac{\log_{10} 7}{\log_{10} 4} = \dfrac{0{,}845}{0{,}602} = 1{,}40$

Activitats proposades

11. Calcula els següents logaritmes amb la calculadora utilitzant la fórmula del canvi de base, i compara els resultats amb els obtinguts a l'activitat:

a) $\log_4 2$ b) $\log_9 27$ c) $\log_{81} 27$ d) $\log_{16} 2$ e) $\log_2 0{,}125$ f) $\log_3 \dfrac{1}{9}$.

2.2. Propietats dels logaritmes

Les propietats dels logaritmes són les següents:

- $\mathbf{\log_b 1 = 0}$ ja que $b^0 = 1$ (el logaritme d'1 en qualsevol base és 0)
- $\mathbf{\log_b b = 1}$ ja que $b^1 = b$ (el logaritme de la base és 1)
- El logaritme d'un **producte** és igual a la suma dels logaritmes dels factors:

$$\log_b (x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$$

- El logaritme d'un **quocient** és igual a la diferència dels logaritmes:

$$\log_b (x : y) = \log_b x - \log_b y$$

- El logaritme d'una **potència** és igual a l'exponent pel logaritme de la base:

$$\log_b x^y = y \cdot \log_b x$$

Exemple:

a) $\log_2 10 + \log_2 3{,}2 = \log_2 (10 \cdot 3{,}2) = \log_2 32 = 5$

b) $\log 140 - \log 14 = \log (140/14) = \log 10 = 1$

c) $\log_3 9^5 = 5 \log_3 9 = 5 \cdot 2 = 10$

d) $\log_3 \sqrt[5]{9} = \log_3 9^{1/5} = \dfrac{1}{5} \log_3 9 = \dfrac{1}{5} \cdot 2 = \dfrac{2}{5}$.

2.2.1. Expressions logarítmiques i algebraiques

Les propietats dels logaritmes s'empren en dos tipus importants d'operació:

- **Prendre logaritmes** en una igualtat és aplicar el logaritme a ambdós membres de la mateixa:

$$x = y \Leftrightarrow \log_b x = \log_b y.$$

- **Eliminar logaritmes** en una igualtat és el contrari: aconseguir que una expressió logarítmica deixe de ser-lo. Per a açò és necessari que cada membre tinga un únic logaritme:

$$\log_b x = \log_b y \Leftrightarrow x = y.$$

Activitats resoltes

- Sabent que log 2 = 0,301, calcula:
  - a) $\log 32 = \log 2^5 = 5 \log 2 = 5 \cdot 0{,}301 = 1{,}505$
  - b) $\log 0{,}008 = \log (8/1000) = \log 8 - \log 1000 = 3 \log 2 - 3 = 3 \cdot 0{,}301 - 3 = -2{,}097$

Observa que el logaritme en base 10 de la unitat seguida de zeros és igual al nombre de zeros que tinga.

- Sabent que log 2 = 0,301 i que log 3 = 0,477 calcula:
  - a) $\log 6 = \log(3 \cdot 2) = \log 3 + \log 2 = 0{,}301 + 0{,}477 = 0{,}778$
  - b) $\log 180 = \log(3^2 \cdot 2 \cdot 10) = 2\log 3 + \log 2 + \log 10 = 2 \cdot 0{,}477 + 0{,}301 + 1 = 2{,}255$
  - c) $\log 15 = \log(3 \cdot 5) = \log\left(\frac{3 \cdot 10}{2}\right) = \log 3 + \log 10 - \log 2 = 0{,}477 + 1 - 0{,}301 = 1{,}176$

- Pren logaritmes i desenrotlla:
  - a) $a = \frac{mn}{p} \Rightarrow \log a = \log \frac{mn}{p} \Rightarrow \log a = \log m + \log n - \log p$
  - b) $a = \frac{\sqrt{b^3c}}{x^2} \Rightarrow \log a = \log \frac{\sqrt{b^3c}}{x^2} \Rightarrow \log a = \frac{3}{2} \log b + \frac{1}{2} \log c - 2 \log x$

- Elimina els logaritmes:
  - a) $\log a = \log c + \log d - \log e \Rightarrow \log a = \log \frac{cd}{e} \Rightarrow a = \frac{cd}{e}$
  - b) $\log b = \log 4 + \frac{1}{2}\log 5 - 3 \log x \Rightarrow \log b = \log 4 + \log \sqrt{5} - \log x^3 \Rightarrow \log b = \log \frac{4\sqrt{5}}{x^3} \Rightarrow b = \frac{4\sqrt{5}}{x^3}$

c) $\log a + 3 = 2\log b - \frac{\log c}{3} \Rightarrow \log a + \log 1000 = \log b^2 - \log c^{1/3} \Rightarrow \log(1000a) = \log \frac{b^2}{\sqrt[3]{c}} \Rightarrow$

$1000a = \frac{b^2}{\sqrt[3]{c}}$

- Resol la següent equació **logarítmica**: $2\log x = 2\log(x-1) + \log 4$

Solució:

Per a resoldre-la és necessari eliminar logaritmes:

$$\log x^2 = \log(x-1)^2 + \log 4 \quad \Rightarrow \quad \log x^2 = \log 4(x-1)^2$$

L'equació queda $x^2 = 4(x-1)^2 \quad \Rightarrow \quad 0 = 3x^2 - 8x + 4$ les solucions de la qual són x =2 i x= 2/ 3.

La segona solució no és vàlida perquè en substituir-la a l'equació original quedaria log (x – 1) com a logaritme d'un nombre negatiu, que no existeix. Açò ocorre de vegades a les equacions logarítmiques, igual que a les equacions irracionals, i per això és necessari comprovar la validesa de les solucions trobades.

- Al càlcul **d'interès compost** l'interès produït cada període de temps passa a formar part del capital. Així, si el període de temps és un any, la fórmula de l'interès cada any es calcula sobre un nou capital, que és el capital anterior més els interessos produïts l'any. Per tant, si el percentatge d'interès anual és r, el capital cada any es multiplica per $1 + \frac{r}{100}$.

  Per exemple si l'interès és del 4 % cal multiplicar per 1,04 cada any transcorregut.

  La fórmula del capital acumulat al cap de n anys és: $C_n = C\cdot\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$

  1. Calcula el capital final acumulat al cap de 4 anys per a 6.000 € al 2 % d'interès compost anual.

Solució:

$C = 6000 \cdot (1 + 0{,}02)^4 = 6000 \cdot 1{,}02^4 = 6.494{,}59$ €.

- A quin interès compost cal invertir 10.000 euros per a obtindre en 10 anys almenys 16.000 euros?

Solució:

$$16.000 = 10.000\cdot\left(1 + \frac{r}{100}\right)^{10} \Rightarrow 1{,}6 = \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{10} \Rightarrow 1 + \frac{r}{100} = \sqrt[10]{1{,}6} = 1{,}048 \Rightarrow \frac{r}{100} = 0{,}048$$

Així doncs r = 4,8 %.

- Quan la incògnita és el nombre d'anys (que està a l'exponent) necessitem prendre logaritmes per a resoldre-la: Si ingressem en un banc 3.000 € al 4 % d'interès compost anual, quants anys han de passar per a aconseguir 4.500 €?

Solució:

$4.500 = 3000 \cdot (1 + 0{,}04)^n \Rightarrow 1{,}5 = 1{,}04^n \Rightarrow \log 1{,}5 = n \log 1{,}04 \Rightarrow n = \dfrac{\log 1{,}5}{\log 1{,}04} = 10{,}34$ anys (haurem d'esperar 11 anys).

- La fórmula de l'interès compost també s'utilitza per als problemes de **creixement o decreixement de poblacions**, que és una funció exponencial: Per exemple, si la població d'un país augmenta un 3 % cada any i actualment té 15 milions d'habitants, quants tindrà al cap de 5 anys?

La solució és:

$$15.000.000 \cdot (1 + 0{,}03)^5 = 15.000.000 \cdot 1{,}03^5 = 17.383.111 \text{ habitants.}$$

Activitats proposades

12. Sabent que log 2 = 0,301 i que log 3 = 0,477 calcula:
a) log 5 b) log 25 c) log 24 d) log 60

13. Sabent que log 8 = 0,903, i sense utilitzar calculadora, troba els següents:
a) log 80 b) log 2 c) log 64 d) log 0,8 e) log 1,25 f) $\log \sqrt[3]{800}$

14. Pren logaritmes i desenrotlla:
a) $A = \dfrac{2x^3y^2}{3z}$ b) $B = \dfrac{\sqrt{x^3y^2}}{10z}$

15. Redueix a un únic logaritme cada expressió:
a) log 2 – log 12 + 1 + log 3 b) $2 \log 5 + \frac{1}{2} \log 5 - 2$ c) 2 log 2*a* – log *a*

16. Resol les següents equacions logarítmiques:
a) $\log (x + 1)^2 = 6$ b) $\log x + \log 5 = \log 20$ c) log (7 – 3x) – log (1 – x) = log 5

17. Quan va nàixer un xiquet els seus pares van col·locar 1.000 euros en una llibreta d'estalvi al 2,5 % d'interès compost anual. Quants diners tindrà el compte quan el xiquet complisca 15 anys?

18. La població de certs bacteris es multiplica per 1,5 cada dia. Si al començament hi ha 18 milions de bacteris, quantes hi haurà al cap d'una setmana?

19. A què tant per cent d'interès compost cal invertir un capital de 20.000 euros per a guanyar 1.000 euros en tres anys?

20. Si invertim 7.000 euros al 1,35 % d'interès compost anual, quants anys han de transcórrer per a haver guanyat almenys 790 euros?

21. Calcula en quants anys es duplica una població que creix al ritme del 10 % anual.

22. Si una població de 8 milions d'habitants s'ha convertit en 15 milions en 7 anys, quant ha crescut cada any? (*Ull*: no es tracta de dividir entre 7!).

2.3. Funcions logarítmiques

2.3.1. Gràfica i característiques

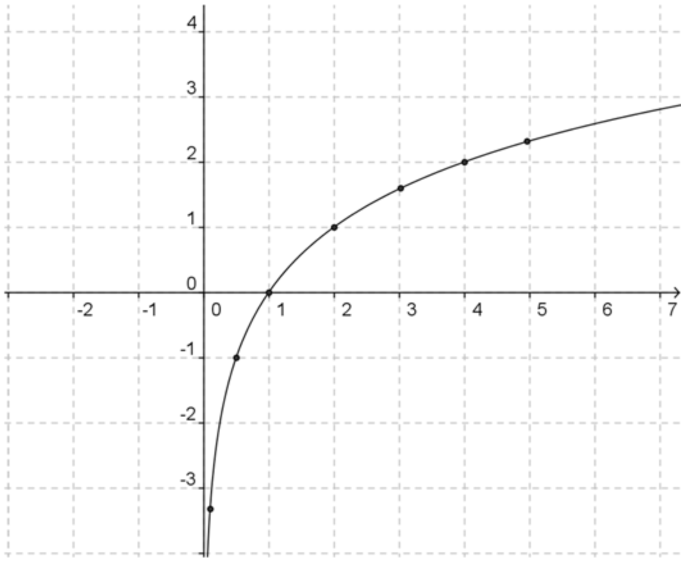
Les funcions logarítmiques són les del tipus $y = \log_b x$

Hi ha una funció distinta per a cada valor de la base b.

Exemples:

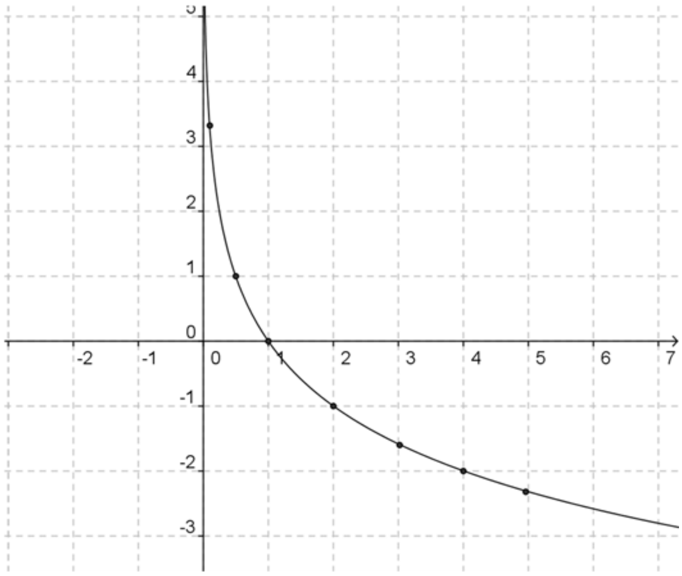
- La taula de valors i la gràfica de la funció $y = log_2 x$ són les següents:

x	$\log_2 x$
0,1	-3,3
0,5	-1,0
0,7	-0,5
1	0,0
2	1,0
3	1,6
4	2,0
5	2,3
...	...



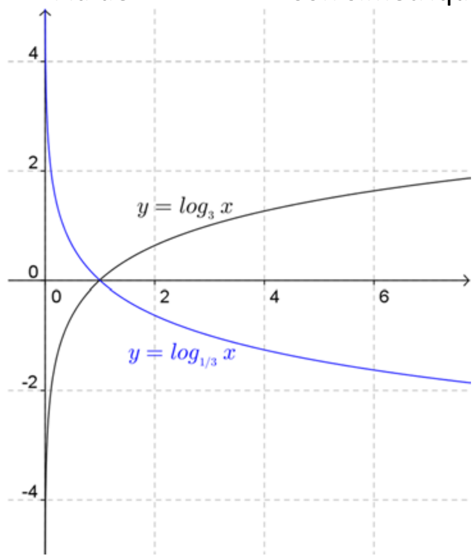
- La taula de valors i la gràfica de la funció $y = log_{1/2} x$ són les següents:

x	$\log_{1/2} x$
0,1	3,3
0,5	1,0
0,7	0,5
1	0,0
2	-1,0
3	-1,6
4	-2,0
5	-2,3...
...	



Les característiques d'aquestes gràfiques ens permeten deduir les de les funcions logarítmiques en general, que són les següents:

- El seu **domini** és (0, +∞). És a dir, només estan definides per a “x” *positiu*.
- Són contínues.
- El seu **recorregut** és tota la recta real.
- Passen pels punts (1, 0), (b, 1) i (1/b, –1).
- La gràfica de $y = \log_b x$ i la de $y = \log_{1/b} x$ són simètriques respecte de l’eix OX.



D’altra banda observem unes característiques pròpies en les funcions en ambdues il·lustracions, segons siga la base del logaritme major o menor que la unitat.

Quan la base és b > 1:

- Són funcions **creixents**. Quant major és la base el creixement és més ràpid.
- Quan $x \to 0$ la funció tendeix a –∞. Per tant presenta una **asímptota vertical** a la part negativa de l’eix OY.
- Encara que en alguns casos puga aparentar-ho, no presenten asímptota horitzontal, perquè la variable “y” pot arribar a qualsevol valor.

Quan la base és 0 < b < 1:

- Són funcions **decreixents**. Quant menor és la base el decreixement és més ràpid.
- Quan $x \to 0$ la funció tendeix a +∞. Per tant presenta una **asímptota vertical** a la part positiva de l’eix OY.
- Encara que en alguns casos puga aparentar-ho, no presenten asímptota horitzontal, perquè la variable “y” pot arribar a qualsevol valor.

2.3.2. Relació entre les funcions exponencial i logarítmica

Segons la definició del logaritme tenim la relació següent: $y = \log_b x \quad \Leftrightarrow \quad x = b^y$

Les funcions logarítmica i exponencial porten intercanviat el lloc de la “x” i la “y”. Per tant són **funcions inverses**.

En conseqüència, si partim d’un nombre i li apliquem la funció logarítmica, i després al resultat li apliquem la funció exponencial tornem al nombre de partida. El mateix ocorre si primer apliquem la funció exponencial i després la logarítmica.

Exemple:

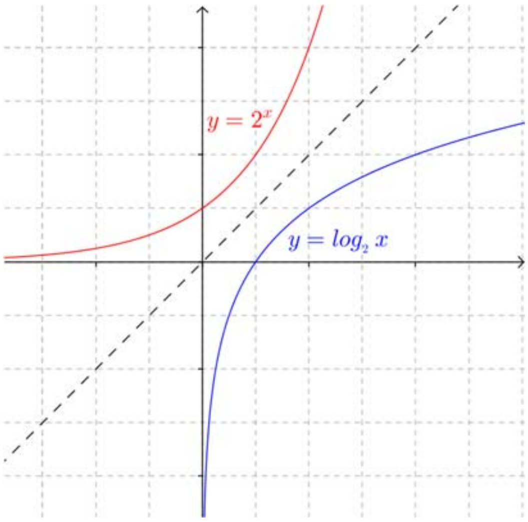
- Partint del nombre 3, utilitzant la calculadora apliquem una funció logarítmica: $\log_5 3 = 0{,}6826$ (recorda la fórmula de canvi de base). A continuació apliquem la funció exponencial: $5^{0{,}6826} = 3$ i obtenim el nombre del principi.
- Fent el mateix en sentit invers, partint del nombre 3 apliquem primer una funció exponencial: $5^3 = 125$. A continuació apliquem la funció logarítmica: $\log_5 125 = 3$ i també hem obtingut el nombre del principi.

Quan dues funcions són inverses les seues gràfiques són **simètriques**, sent el seu eix de simetria la bisectriu del primer quadrant.

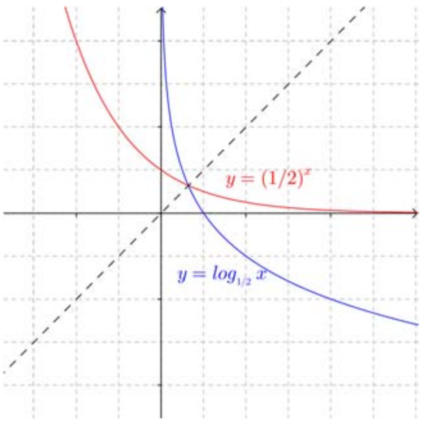
Açò es deu al fet que si el punt (*a*, *b*) és de la gràfica d'una d'elles, el punt (*b*, *a*) pertany a la gràfica de l'altra.

Exemples:

- Les gràfiques de les funcions $f(x) = \log_2 x$ i $g(x) = 2^x$ tenen la simetria següent:



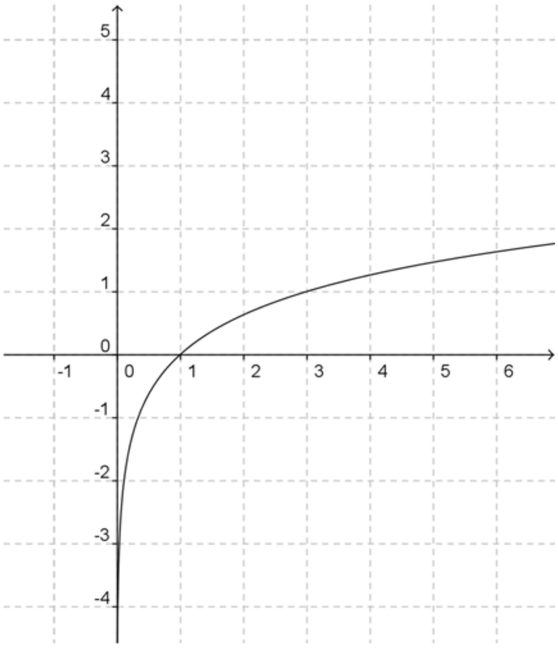
- Les gràfiques de les funcions $f(x) = \log_{1/2} x$ i $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ tenen la simetria següent:



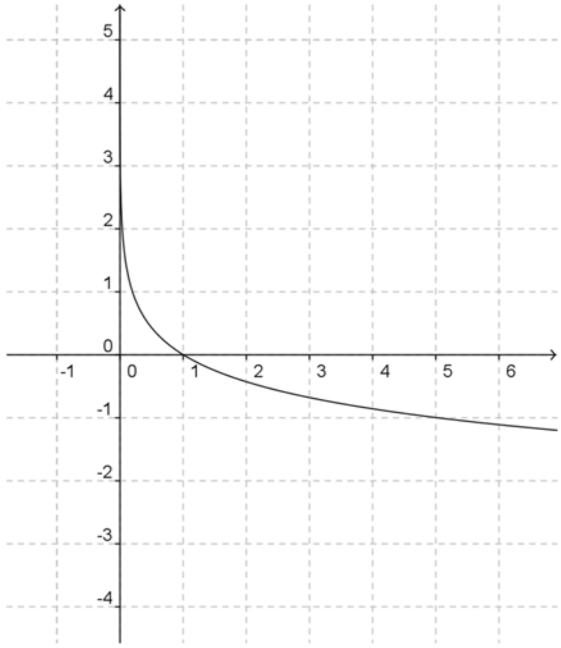
Activitats resoltes

- Identifica les funcions corresponents amb les següents gràfiques:

a)



b)



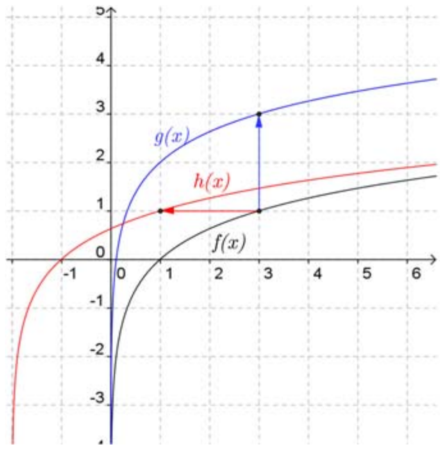
Solució:

Ambdues són funcions logarítmiques perquè passen pel punt (1, 0) i tenen com a asímptota vertical l'eix OY (bé siga en la seua part positiva o negativa) i per l'altre costat tendeixen a ∞.

La funció (a) és $y = \log_3 x$ perquè passa pel punt (3, 1) i per (1/3, –1).

La funció (b) és $y = \log_{1/5} x$ perquè passa pel punt (5, –1) i per (1/5, 1).

- Coneixent la gràfica de la funció $f(x) = \log_3 x$, que s'ha vist més amunt, i sense calcular valors, dibuixa les gràfiques de les funcions $g(x) = \log_3 x + 2$ i $h(x) = \log_3 (x+2)$.



Solució:

La funció $g(x)$ és la funció $f(x)$ desplaçada cap amunt 2 unitats.

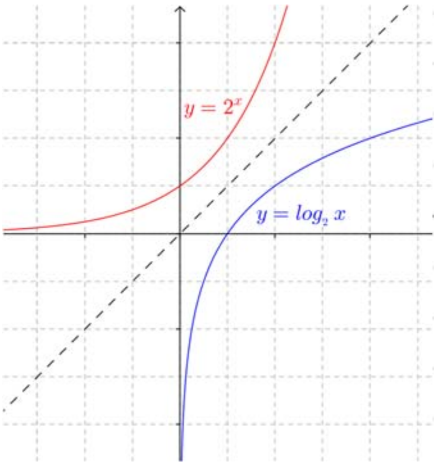
La funció $h(x)$ és la funció $f(x)$ desplaçada cap a l'esquerra 2 unitats.

Per tant les seues gràfiques són aquestes:

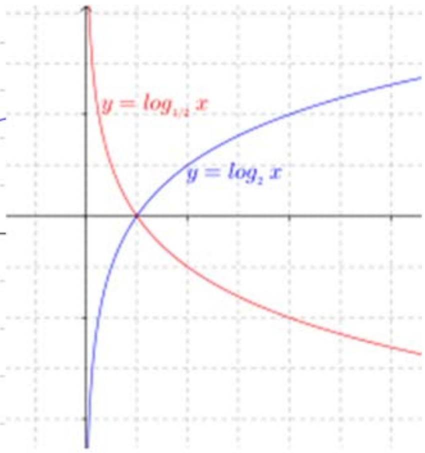
- Representa la funció $y = \log_2 x$ usant una taula de valors. A continuació, a partir d'ella i sense calcular valors, representa les funcions següents: $y = 2^x$, $y = \log_{1/2} x$, i utilitzant també $y = 2^x$ representa $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$.

Solució:

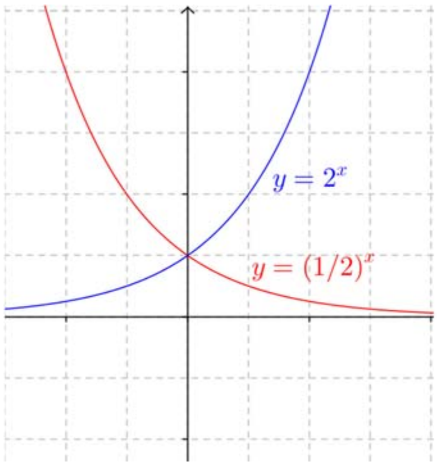
Per la simetria respecte a la bisectriu del primer quadrant:



Per la simetria respecte a l'eix OX:



Per la simetria respecte a l'eix OY:



Activitats proposades

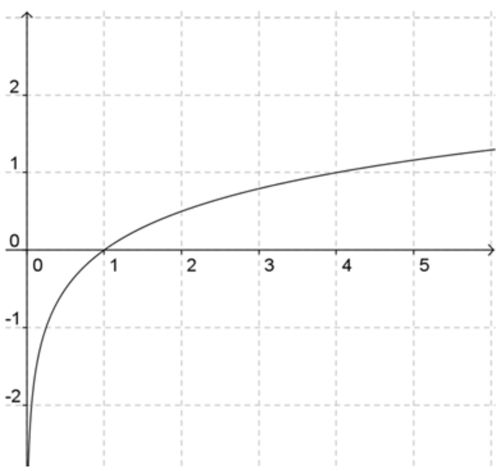
23. Representa al teu quadern, mitjançant taules de valors, les gràfiques de les funcions següents:

a) $f(x) = \log_2 x$ b) $f(x) = \log_{1/2} x$ c) $f(x) = \log_{1,5} x$

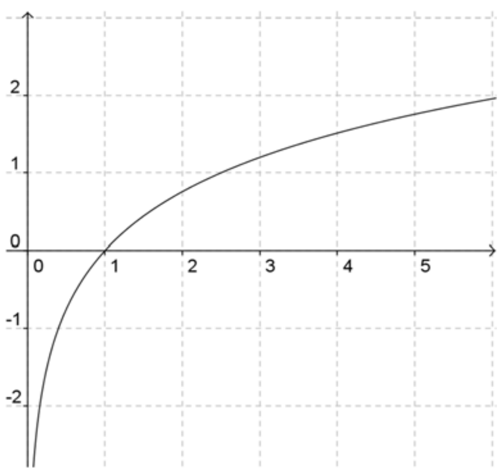
Comprova que a tots els casos passen pels punts (1, 0), (*b*, 1) i (1/*b*, –1).

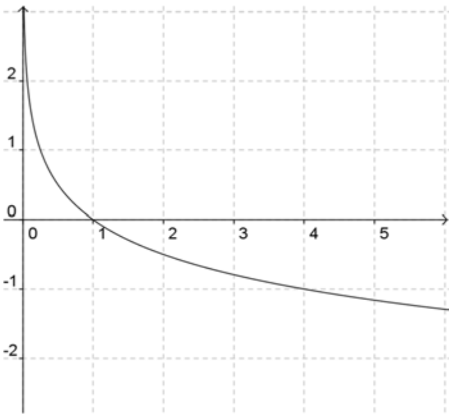
24. Identifica les fórmules de les següents funcions a partir de les seues gràfiques, sabent que són funcions logarítmiques:

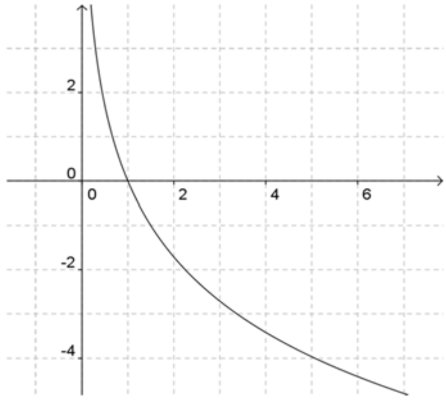
a)



b)



c) 

d) 

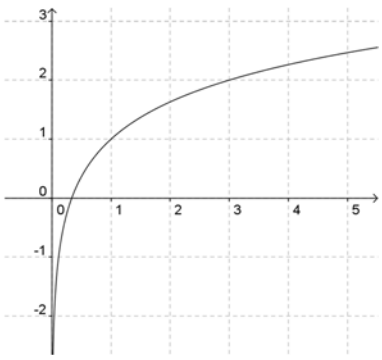
25. Repeteix al teu quadern el dibuix de la funció $f(x) = log_2 x$ representada a l'exercici 23. Després pensa quin desplaçament pateixen respecte a ella les funcions següents i representa-les a la mateixa gràfica sense fer taules de valors:

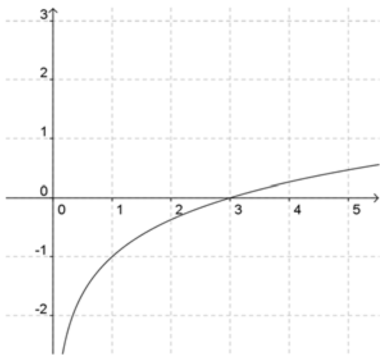
a) $g(x)=\log_2 x+3$ b) $h(x)=\log_2 x-3$ c) $i(x)=\log_2(x+3)$ d) $j(x)=\log_2(x-3)$

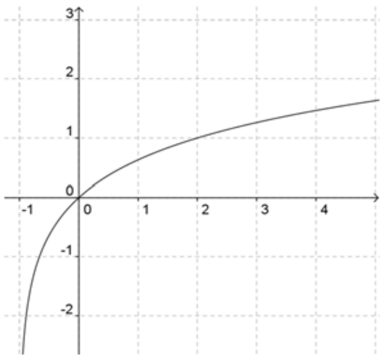
26. Fes el mateix procés de l'exercici anterior amb les funcions següents:

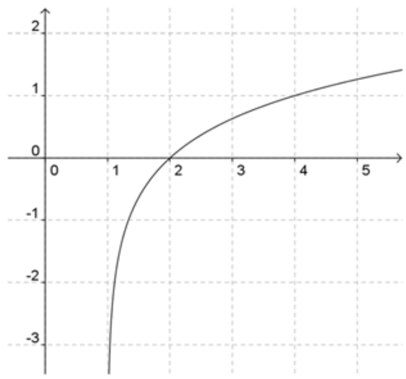
a) $g(x)=\log_2 x+2$ b) $h(x)=\log_2 x-2$ c) $i(x)=\log_2(x+2)$ d) $j(x)=\log_2(x-2)$

27. Identifica les fórmules de les següents funcions a partir de les seues gràfiques, sabent que són funcions logarítmiques:

a) 

b) 

c) 

d) 

28. Representa al teu quadern la funció y = 3^x usant una taula de valors. A continuació, a partir d'ella i sense calcular valors, representa les funcions següents: $y=\left(\frac{1}{3}\right)^2$, $y=\log_3 x$, $y=\log_{1/3} x$.

3. FUNCIONS TRIGONOMÈTRIQUES

Al capítol 7 has estudiat Trigonometria, per la qual cosa ja coneixes les raons trigonomètriques sinus, cosinus i tangent d'un angle. Ara estudiarem les funcions trigonomètriques i les seues propietats.

Recorda que:

Un radian es defineix com la mesura de l'angle central l'arc de circumferència de la qual té una longitud igual al radi Per tant:

360º equivalen a 2π radians

D'on es dedueix que :

180º equivalen a π radians

90º equivalen a π/2 radians …

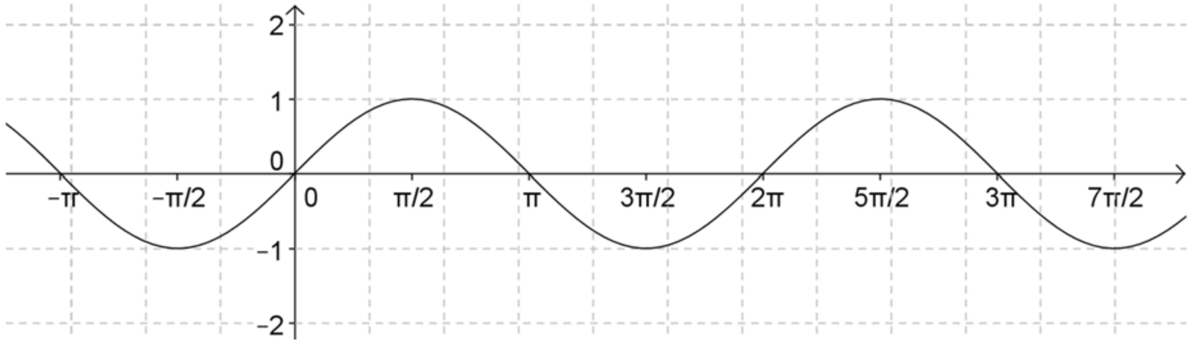
3.1. Les funcions sinus i cosinus

Aquestes dues funcions s'inclouen al mateix apartat perquè són molt paregudes.

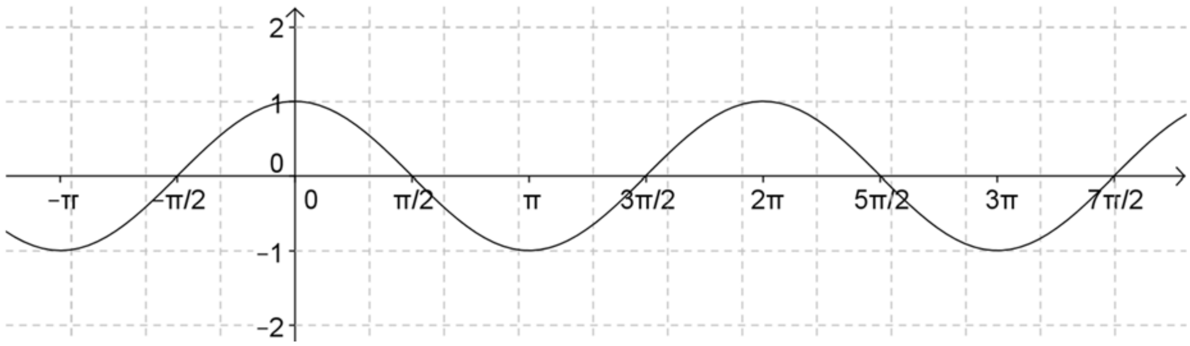
La seua gràfica és l'anomenada *sinusoide*, el nom de la qual deriva del llatí *sinus* (sin).

Ja saps que als estudis de Matemàtiques se sol utilitzar com a unitat per a mesurar els angles el radian. Per tant és necessari conèixer aquestes gràfiques expressades en radians. Les pots obtindre fàcilment amb la calculadora. Fixa't en les seues similituds i en les seues diferències:

Gràfica de la funció $f(x) = \sin x$



Gràfica de la funció $f(x) = \cos x$



Ja saps quant val π, π = 3,14…. Tin-ho en compte en dibuixar les gràfiques.

Propietats d'aquestes funcions:

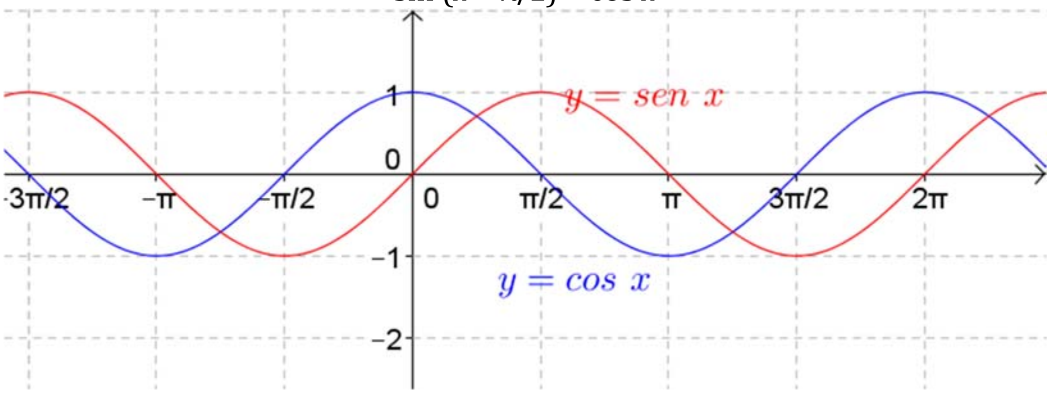
- Ambdues són periòdiques i el valor del seu període és 2π.

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x \qquad \cos(x + 2\pi) = \cos x$$

- Són funcions contínues a tot el seu domini.
- El seu domini són tots els nombres reals.

- El seu recorregut és l'interval [–1 , 1].
- La funció sinus té simetria imparella (simètrica respecte a l'origen de coordenades, és a dir, *sin x* = – *sinus* (–*x*)) i la funció cosinus té simetria parella (simètrica respecte de l'eix OY, és a dir, *cos x* = *cos* (–*x*)).
- Ambdues funcions tenen la mateixa gràfica però desplaçada en $\frac{\pi}{2}$ radians en sentit horitzontal. És a dir:

sin (x + π/2) = cos x

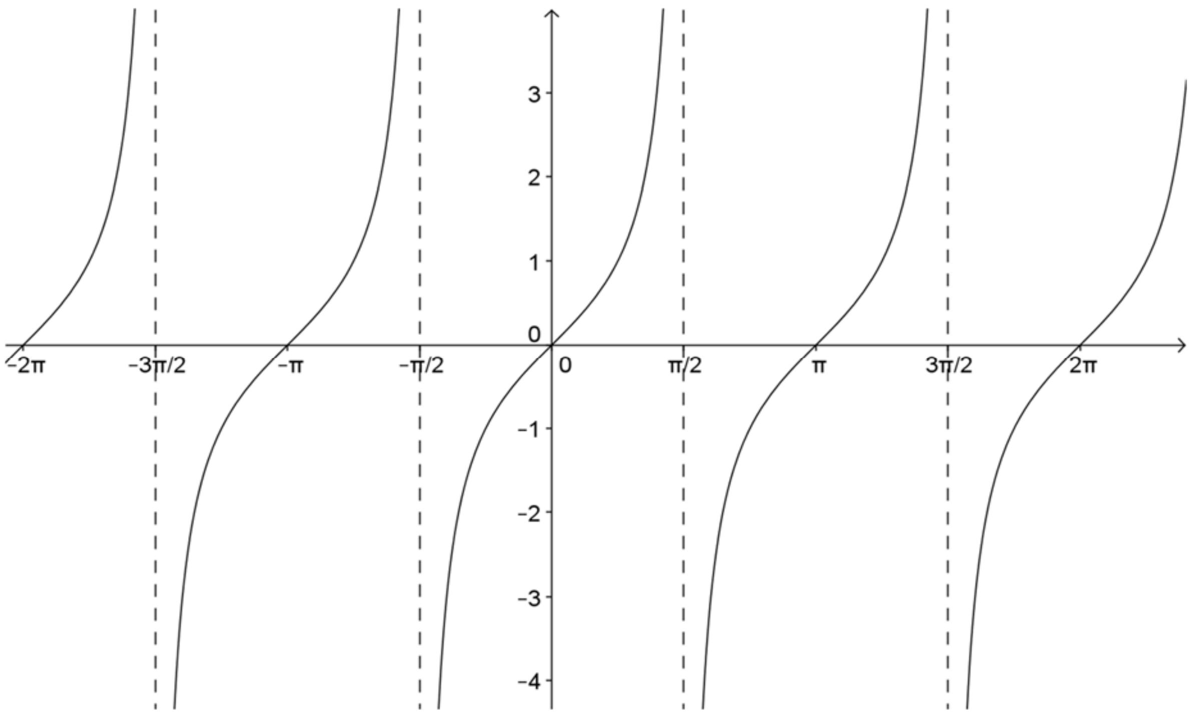


3.2. La funció tangent

Aquesta funció és diferent de les altres dues. Per aqueixa raó la presentem separadament.

Ja saps que com a raons trigonomètriques: tg x = sin x/ cos x.

La gràfica de la funció *f(x) = tg x* és la següent:



Recordem en primer lloc que no existeix la tangent per als angles de ± π/2, ±3π/2, ±5π/2, etc.

Les propietats d'aquesta funció són les següents:

- És una funció periòdica i el valor del seu període és ara menor, és π: tg $(x + \pi)$ = tg x.
- El seu domini són tots els nombres reals excepte els múltiples de π/2 per un nombre imparell (±π/2, ±3π/2, ±5π/2, etc.), on no existeix. En aqueixos valors presenta discontinuïtats anomenades discontinuïtats *inevitables*, perquè no es podrien "tapar" mitjançant un punt.
- Té asímptotes verticals en aqueixos mateixos valors de la x. Les hem representat al gràfic mitjançant línies discontínues.
- Té simetria imparella: és simètrica respecte a l'origen de coordenades, ja que tg(x)=–tg(–x)

Activitats resoltes

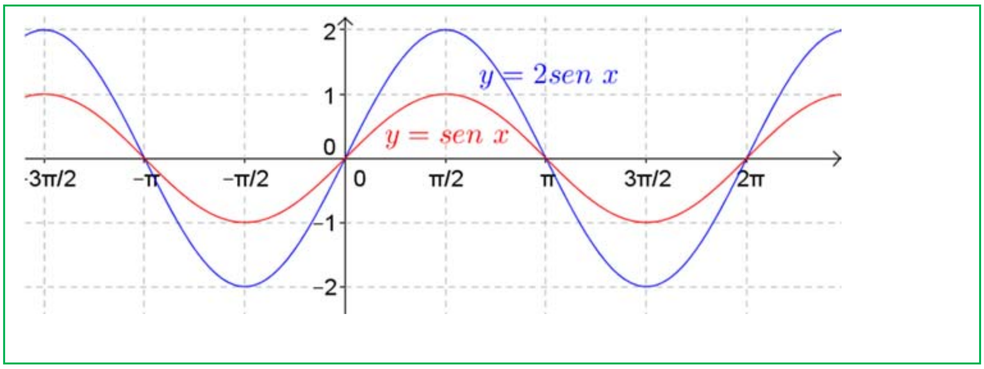
- Representa les gràfiques de les funcions $y = \sin(2x)$ i $y = 2\sin x$ comparant-les després amb la gràfica de $y = \sin x$.

Solució:

Donant valors amb la calculadora obtenim les següents gràfiques, representades en blau junt amb la de la funció sin x, representada en roig:

La gràfica de y=sin $(2x)$ és igual a la de y=sin x contraient-la horitzontalment. Canvia el període, que ara és de π.

La gràfica de $y = 2\sin x$ és igual a la de $y = \sin x$ expandint-la verticalment. Tenen el mateix període, però canvia l'amplitud. Quan y=sin$x$ aconsegueix en π/2 un valor màxim d'1, y=2sen$x$ aconsegueix en π/2 un valor màxim de 2. Diem que la seua amplitud val 2.



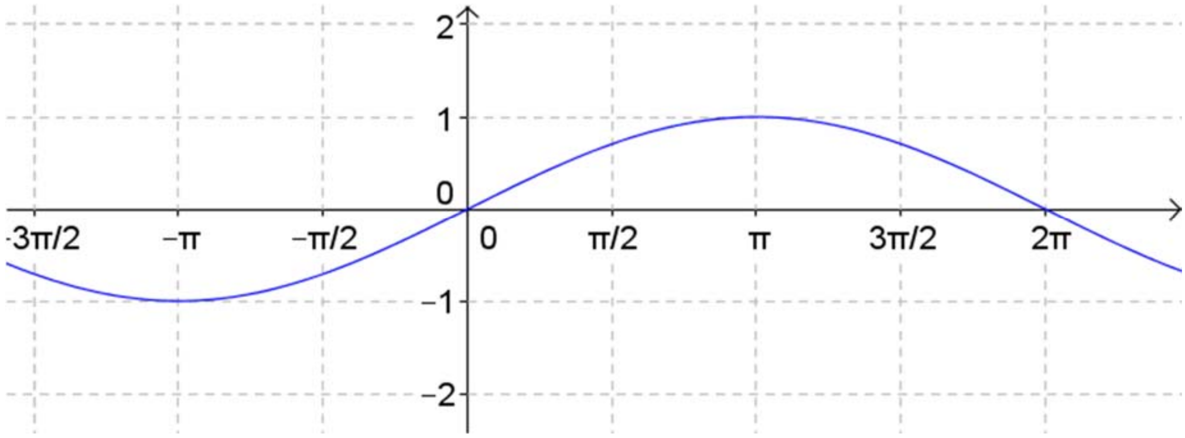
Activitats proposades

29. Representa al teu quadern les gràfiques de les funcions $y = \cos x$, $y = \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$ i $y = \frac{1}{2}\cos x$ comparant-les després amb la gràfica de $y = \cos x$.

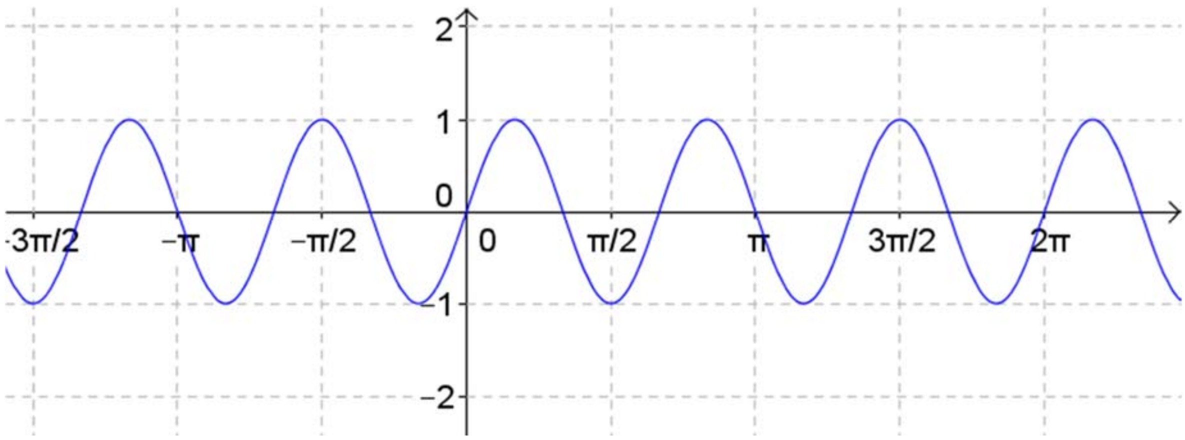
30. Partint de la gràfica de la funció $y = \sin x$, representa al teu quadern, sense fer taules de valors, les gràfiques de $y = 1 + \sin x$ i de $y = \sin(x + \pi/6)$.

31. Identifica les gràfiques de les següents funcions trigonomètriques:

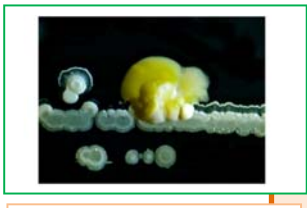
a)



b)



CURIOSITATS. REVISTA



Les poblacions creixen exponencialment

Als models que s'utilitzen per a estudiar les poblacions s'utilitza la funció exponencial. Se suposa que una població d'una certa espècie creix exponencialment mentres tinga aliment suficient i no existisquen depredadors. Arriba un moment en què la població ha omplit el territori (la Terra és finita) i aleshores canvia la funció que s'utilitza, estabilitzant-se el creixement.

Açò permet estudiar el creixement dels bacteris que es reprodueixen per fissió binària, o el creixement de les cèl·lules del fetus, o la població de ... ar a Austràlia... Malthus va afirmar que si la població ... rma exponencial i la producció d'aliments creixi... greus fams.

Logaritmes

No fa tant temps no existien les calculadores. Per a calcular logaritmes s'usaven "taules". Hi havia unes taules de logaritmes que eren un llibre amb un llom d'uns tres dits d'ample. S'usaven en problemes d'Astronomia en què calia utilitzar fórmules de trigonometria per a resoldre'ls i s'usaven nombres amb moltes xifres decimals (més de 10). Imagines el que és multiplicar o dividir nombres amb aqueixes xifres decimals! Resultava molt convenient transformar les multiplicacions en sumes i les divisions en restes. Aquesta mateixa idea és la que va portar a John Napier (o Neper) a

No tot ho pots calcular amb calculadora.

Utilitza la teua calculadora per a calcular 45^{79}.Veuràs que dóna *error*. Però si uses logaritmes pots calcular-lo fàcilment.

$$Y = 45^{79} \Rightarrow$$

$$\log Y = \log 45^{79} = 79 \cdot \log 45 = 130{,}6037886 \Rightarrow$$

Decreixement exponencial

Molts fenòmens es modelen amb funcions exponencials de base menor que 1, com

La desintegració d'àtoms d'una substància radioactiva.

La intensitat lluminosa d'un feix de llum

La probabilitat de supervivència de certes espècies que no tenen

Carboni 14

El carboni 14 és un isòtop radioactiu amb un període de semi-desintegració (vida mitjana) de 5568 anys, molt utilitzat per a datar restes orgàniques. Les plantes, per fotosíntesi, i els animals per ingestió incorporen el carboni en la mateixa proporció que existeix a l'atmosfera, i en morir el ser viu comença el procés de desintegració.

Sophia Kovalevkaya

Coneixem molt ben moltes anècdotes de la vida de Sophia (o Sònia com a ella li agradava que la cridaren), una dona matemàtica amb teoremes amb el seu nom, perquè va escriure la seua biografia en un preciós llibre anomenat “*Una infància a Rússia*”

Quan Sophia tenia 14 anys, la seua família va rebre la visita de Nikolai Nikanorovich Tyrtov, un veí professor de física, que va deixar la família una còpia del seu nou llibre sobre aquesta matèria. Sonia va començar a estudiar-lo i es va quedar embossada en arribar a la secció d’òptica en què s’utilitzaven raons trigonomètriques que no havia vist mai. Aleshores va anar directament a Tyrtov a preguntar-li què era exactament un *sinus*, però ell, sense fer-li massa cas, li va contestar que no ho sabia. De manera que Sònia va començar a analitzar i a explicar el que era un sinus partint de les coses que ja coneixia arribant a substituir-lo per l’arc, que, atés que les fórmules que tractava el llibre s’aplicaven en angles molt xicotets, l'aproximaven prou bé. La següent vegada que Tyrtov va ser de visita a la casa, Sònia li va demanar que discutiren sobre el seu llibre i ell, després d’intentar canviar de tema, va concloure que el trobava massa difícil per a ella. Sònia li va comentar que el text no havia tingut cap dificultat per a ella, i inclús li va explicar com havia anat deduint tot allò que no coneixia i que s’utilitzava al llibre. Tyrtov va quedar estupefacte i li va comentar al pare de Sònia que el seu desenrotllament sobre el concepte de sinus havia sigut exactament el mateix amb el què històricament s’havia introduït tal

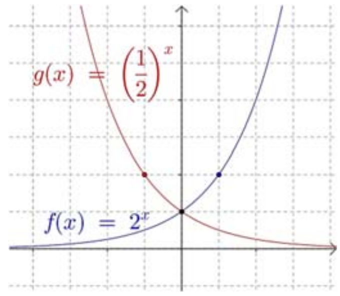
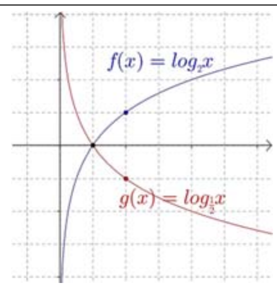
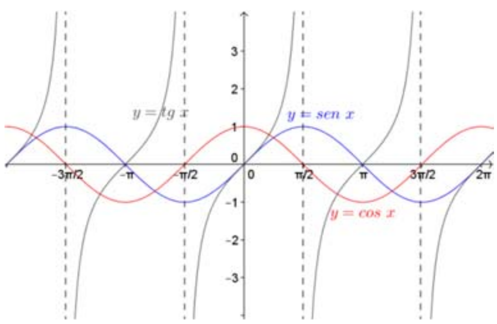
Fourier i el concepte de funció

El concepte de funció ha tardat molt a ser comprés inclús pels matemàtics, només disposats a acceptar dos tipus de funcions, les que venien donades per una fórmula o les que es traçaven arbitràriament dibuixant la seua gràfica. La idea abstracta de funció com a correspondència va tardar un temps a aparéixer.

Va ser *Joseph Fourier* a la seua obra *“La teoria analítica de la calor”* el motor per a l’aprofundiment del concepte de funció. Fourier va viure durant la Revolució Francesa i va participar en l’expedició de Napoleó a Egipte. Era molt fredolí i per aqueix motiu li interessava la propagació de la calor. A la seua obra afirma que “tota” funció podia escriure’s com una suma infinita de funcions sinus i cosinus.

Antoni Zygmund va escriure *“Aquesta teoria ha sigut una font de noves idees per als analistes durant els dos últims segles i probablement ho serà als pròxims anys. Moltes nocions i resultats bàsics de la teoria de funcions han sigut obtinguts per matemàtics treballant sobre sèries trigonomètriques”. Afig* que aqueixa obra de Fourier va ser el catalitzador per a fixar el concepte de funció, la definició d’integral, aprofundir a la Teoria de Conjunts i actualment amb la Teoria de Funcions Generalitzades o

RESUM

		Exemples
Funció exponencial $y = b^x$	Domini: Tots els nombres reals. Recorregut: Tots els nombres reals positius. Contínua en tot el domini Asímptota horitzontal: y = 0 $b > 1$, ⇔ *Creixent* en tot el domini. $0 < b < 1$ ⇔ Decreixent en tot el domini Punts destacables: $(0, 1)$, $(1, b)$, $(-1, 1/b)$	
Definició de logaritme	$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a \quad (a > 0, b > 0, b \neq 1)$ Conseqüències elementals: $\log_b b = 1 \quad \log_b 1 = 0$	$\log_5 125 = 3$ $\log_4 8 = 3/2$
Canvi de base	$\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$	$\log_4 7 = \dfrac{\log 7}{\log 4} = 1{,}40$
Operacions amb logaritmes	Log. d'un producte: $\log_b (x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$ Log. d'un quocient: $\log_b (x{:}y) = \log_b x - \log_b y$ Log. d'una potència: $\log_b x^y = y \cdot \log_b x$	$\log \dfrac{\sqrt{b^3 c}}{x^2} =$ $\dfrac{1}{2}(3\log b + \log c) - 2\log x$
Funció logarítmica $y = \log_b x$	*Domini*: Tots els nombres reals positius. *Recorregut*: Tots els nombres reals. **Contínua** en tot el domini Asímptota vertical: x=0 $b > 1$ ⇔ Creixent en tot el domini. $0 < b < 1$ ⇔ Decreixent en tot el domini Punts destacables: $(1, 0)$, $(b, 1)$, $(1/b, -1)$	
Funcions trigonomètriques $y = \sin x$ $y = \cos x$ $y = \text{tg } x$	<u>**Funcions sinus i cosinus**</u>: *Domini*: Tots els nombres reals *Recorregut*: $[-1, 1]$ Contínues en tot el domini. Periòdiques de període 2π <u>**Funció tangent**</u>: *Domini i continuïtat*: Tot $\Re$ excepte $(2n + 1)\cdot\pi/2$ (En aqueixos valors hi ha asímptotes verticals) *Recorregut*: Tots els nombres reals. Periòdica de període π. <u>**Simetria**</u>: Funcions sinus i tangent: simetria imparella. Funció cosinus: simetria parell.	

Textos Marea Verde

EXERCICIS I PROBLEMES

Funció exponencial

1. Representa mitjançant una taula de valors les funcions següents:

a) $y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$ b) $y=\left(\frac{4}{3}\right)^x$ c) $y=2^{x/2}$ d) $y=3^{-2x}$

2. Representa mitjançant una taula de valors la funció $y=3^x$ i a continuació, sense taula de valors, representa aquestes altres sobre el mateix dibuix:

a) $y=3^x-1$ b) $y=3^x+1$ c) $y=3^{x+1}$ d) $y=3^{x-1}$

3. Troba una funció exponencial $f(x)=b^x$ sabent que $f(2)=9$.

4. Troba una funció $f(x)=k\cdot b^x$ sabent que $f(4)=48$ i que $f(0)=3$.

5. Si un capital de 3.500 euros es multiplica cada any per 1,02 representa en un gràfic l'evolució d'aqueix capital als 10 primers anys. Tria unes proporcions adequades per als eixos.

6. Un cert tipus de cèl·lules es reprodueix per bipartició, comprovant-se que el nombre d'elles es duplica cada dia. Si en un dia determinat el nombre de cèl·lules era de 4 milions:

a) Expressa mitjançant una funció el nombre de cèl·lules en funció del nombre de dies.

b) Troba el nombre de cèl·lules que haurà d'ací a 3 dies i el que hi havia fa 3 dies.

c) En quin dia penses que el nombre de cèl·lules era de 31.250?

7. La descomposició d'un cert isòtop radioactiu ve donada per la fórmula $y = y_0\cdot 2{,}7^{-0{,}25t}$, on y_0 representa la quantitat inicial i t el nombre de mil·lennis transcorregut. Si la quantitat actual és de 50 grams, quina serà la quantitat que quede al cap de 8.000 anys? Quina era la quantitat que hi havia fa 5.000 anys?

Funció logarítmica

8. Calcula els següents logaritmes utilitzant la definició i sense utilitzar la calculadora:

a) $\log_5 625$ b) $\log_2 128$ c) $\log 1000$ d) $\log_3 \frac{1}{27}$ e) $\log_5 0{,}2$ f) $\log 0{,}1$

9. Calcula els següents logaritmes utilitzant la definició i igualant exponents, sense calculadora:

a) $\log_9 3$ b) $\log_4 32$ c) $\log_2 0{,}125$ d) $\log_9 27$ e) $\log_2 \sqrt{8}$ f) $\log_8 2$

g) $\log_3 0{,}333...$ h) $\log_8 \sqrt{2}$ i) $\log_3 \sqrt[4]{27}$ j) $\log \sqrt{1000}$

10. Calcula els següents logaritmes amb la calculadora utilitzant la fórmula del canvi de base:

a) $\log_5 7$ b) $\log_9 12$ c) $\log_{20} 0{,}1$ d) $\log_{13} \sqrt{8}$ e) $\log_{16} \sqrt{1000}$

11. Utilitzant els valors log 2 = 0,301 i que log 3 = 0,477 calcula, aplicant les propietats dels logaritmes i sense calculadora:

a) $\log 27$ b) $\log 12$ c) $\log 20$ d) $\log 50$ e) $\log \sqrt{6}$ f) $\log \sqrt[3]{25}$

12. Si anomenem log 9 = *x* expressa en funció de *x* els logaritmes següents:

a) $\log 81$ b) $\log 900$ c) $\log 0,\hat{1}$ d) $\log 0,9$ e) $\log \sqrt[3]{900}$

13. Resol les següents equacions logarítmiques:

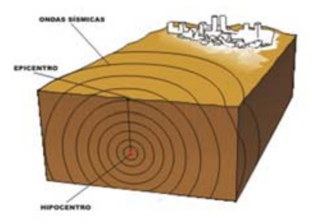
a) $2 \log x = \log (10 - 3x)$ b) $\log 2 + \log(11 - x^2) = 2 \log(5 - x)$

c) $\log(x^2 + 3x + 2) - \log (x^2 - 1) = \log 2$ d) $\log x + \log(x + 15) = 2$

14. Quina relació hi ha entre el logaritme d'un nombre *x* i el del seu invers 1/*x*?

15. Si es multiplica per 36 el nombre *x*, el seu logaritme en una certa base augmenta en dues unitats. Quina és la dita base?

16. L'escala Richter, *usada* per a mesurar la intensitat dels terratrèmols, és una escala logarítmica: un terratrèmol de magnitud 5 és 100 vegades més intens que un de magnitud 3, perquè 5=log 100.000 i 3= log 1.000. Tenint açò en compte, si el famós terratrèmol de San Francisco (en 1906) va tindre una magnitud de 8,2 i el d'Haití (en 2010) va ser de 7,2 quantes vegades més fortes va ser un que un altre?



Terratrèmol

Funcions trigonomètriques

17. Determina tots els angles que verifiquen que sin $x = 1/2$.

18. Determina tots els angles que verifiquen que sin $x = -1/2$.

19. Determina tots els angles que verifiquen que $\cos x = 1/2$.

20. Determina tots els angles que verifiquen que $\cos x = -1/2$.

21. Determina tots els angles que verifiquen que $tg\ x = -1$.

22. Calcula sin x i $\cos x$ si $tg\ x = -3$.

23. Calcula sin x i $tg\ x$ si $\cos x = 0,4$.

24. Calcula $tg\ x$ i $\cos x$ si sin $x = -0,3$.

25. Calcula les raons trigonomètriques dels angles expressats en radians següents:

a) $17\pi/3$ b) $-20\pi/3$ c) $13\pi/2$ d) $-9\pi/2$.

26. Dibuixa al teu quadern sobre uns mateixos eixos les gràfiques de les funcions sinus, cosinus i tangent i indica el següent: a) Si el sinus val zero, quant val el cosinus, i la tangent? b) Si el cosinus val zero, quant val el sinus i la tangent? c) Si la tangent val zero, quant val el sinus i el cosinus? d) Quan la tangent tendix a infinit, quant val el cosinus?

27. Dibuixa la gràfica de la funció $y = sin(2x)$, completant prèviament la taula següent al teu quadern:

x					
$2x$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$sin(2x)$					
y					

a) L'amplitud és l'ordenada del màxim. Quina és l'amplitud d'aquesta funció?

b) Quin és el seu període?

c) La freqüència és la inversa del període, quina és la seua freqüència?

28. Dibuixa la gràfica de la funció $y = 3\text{sen}(\pi x)$, completant prèviament la taula següent al teu quadern:

x					
πx	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$sin(\pi x)$					
y					

a) Quina és l'amplitud d'aquesta funció?

b) Quin és el seu període?

c) Quina és la seua freqüència?

29. Dibuixa la gràfica de la funció $y = 2sin((\pi/3)x) + \pi/2$, completant prèviament la taula següent al teu quadern:

x					
$(\pi/3)x$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$sin((\pi/3)x)$					
y					

a) Quina és l'amplitud d'aquesta funció?

b) Quin és el seu període?

c) Quina és la seua freqüència?

30. Dibuixa la gràfica de la funció $y = 3sin(\pi x + 2)$, completant prèviament la taula següent al teu quadern:

x					
$\pi x + 2$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$sin(\pi x+2)$					
y					

a) Quina és l'amplitud d'aquesta funció?
b) Quin és el seu període?
c) Quina és la seua freqüència?

31. Dibuixa la gràfica de la funció $y = cos(2x)$, completant prèviament la taula següent al teu quadern:

x					
$2x$	0	π/2	π	3π/2	2π
$cos(2x)$					
y					

a) Quina és l'amplitud d'aquesta funció?

b) Quin és el seu període?

c) Quina és la seua freqüència?

32. Dibuixa la gràfica de la funció $y = 3cos(\pi x)$, completant prèviament la taula següent al teu quadern:

x					
πx	0	π/2	π	3π/2	2π
$cos(\pi x)$					
y					

a) Quina és l'amplitud d'aquesta funció?

b) Quin és el seu període?

c) Quina és la seua freqüència?

33. Dibuixa la gràfica de la funció $y = 2cos(\pi x + 2)$, completant prèviament la taula següent al teu quadern:

x					
$\pi x + 2$	0	π/2	π	3π/2	2π
$cos(\pi x+2)$					
y					

a) Quina és l'amplitud d'aquesta funció?

b) Quin és el seu període?

c) Quina és la seua freqüència?

34. Dibuixa la gràfica de la funció $y = tg(2x)$, completant prèviament la taula següent al teu quadern:

x					
$2x$	0	π/2	π	3π/2	2π
$tg(2x)$					
y					

Quin és el seu període?

Problemes

35. Per efecte d'un antibiòtic el nombre de bacteris d'una colònia es redueix en un 7 % cada hora. Si en el moment d'administrar-se l'antibiòtic hi havia 40 milions de bacteris, quantes hi haurà al cap de 10 hores?

36. Una persona ingereix a les 8 del matí una dosi de 10 mg de medicament. El dit medicament es va eliminant a través de l'orina, i la quantitat que queda al cos al cap de t hores ve donada per la fórmula$M(t) = 10 \cdot 0{,}8^t$. Perquè el medicament faça efecte ha d'haver-hi almenys una quantitat de 2 mg al cos. Quant temps continuarà fent efecte després de la seua ingestió?

37. La mesura de la pressió atmosfèrica P (en mil·libars) a una altitud de *x* quilòmetres sobre el nivell del mar està donada per l'equació$P(x) = 1035 \cdot e^{-0{,}12x}$.

a) Si la pressió al cim d'una muntanya és de 449 mil·libars, quina és l'altura de la muntanya?

b) Quina serà la pressió al cim de l'Everest (altitud 8.848 metres)?

38. A què tant per cent cal invertir un capital per a duplicar-lo en 10 anys?

39. Quants anys ha d'estar invertit un capital perquè al 5 % d'interès es convertisca en 1,25 vegades el capital inicial?

40. Coneixes aqueixes nines russes que porten dins una altra nina igual però més xicoteta, i així successivament? Suposem que cada nina té dins una altra que ocupa 2/3 del seu volum. Si la nina major té un volum de 405 cm^3 i la més xicoteta és de 80 cm^3, quantes nines hi ha en total a la sèrie? Podries donar una fórmula general per a aquest càlcul?

41. Indica, sense dibuixar la gràfica, el període, l'amplitud i la freqüència de les funcions següents:

a) $y = 2\, sin\, (x/2)$, b) $y = 0{,}4\, cos\, (\pi x/2)$, c) $y = 5\, sin\, (\pi x/3)$, d) $y = 3\, cos\, (\pi x)$.

AUTOAVALUACIÓ

1. El valor de x que verifica l'equació exponencial $\frac{4^{x+3}}{2^{x-1}} = 64$ és:

a) 1 b) 2 c) 3 d) –1

2. La funció exponencial $y = e^x$ tendeix a *** quan x tendeix a –∞ i a *** quan x tendeix a +∞. Indica amb quins valors caldria omplir els asteriscos:

a) 0, +∞ b) +∞, 0 c) 0, –∞ d) –∞, 0

3. Indica quina és la funció exponencial $f(x) = b^x$ que verifica que $f(3) = 27$:

a) $f(x) = 2^x$ b) $f(x) = 3^x$ c) $f(x) = 27^x$ d) $f(x) = 5^x$

4. El valor de x que verifica $x = log_2 1024$ és:

a) 0 b) 5 c) 10 d) Un altre valor

5. L'equació logarítmica log x log + 6 log = 30 té com a solució :

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5

6. Indica l'afirmació verdadera:

a) La funció exponencial de base major que 1 és decreixent

b) La funció logarítmica de base major que 1 és decreixent

c) La funció exponencial sempre és creixent

d) La funció exponencial de base major que 1 és creixent

7. L'expressió general de tots els angles la tangent dels quals val 1, on k és un nombre enter, és:

a) $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ b) $\frac{\pi}{4} + k\pi$ c) $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ d) $\frac{\pi}{2} + k\pi$

8. La funció $f(x) = 3\,sin(4x)$ té d'amplitud, període i freqüència, respectivament:

a) 3, π/2, 2/π b) 4, π/3, 3/π c) 4, 3/π, π/3 d) 3, 2/π, π/2

9. El sinus el cosinus i la tangent de $-\frac{7\pi}{4}$ valen respectivament:

a) $-\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2},\ 1$ b) $-\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2},\ \sqrt{3}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2},\ \sqrt{3}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ 1$

10. El sinus, el cosinus i la tangent de $\frac{13\pi}{6}$ valen respectivament:

a) $\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{\sqrt{3}}$ b) $-\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2},\ \sqrt{3}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2},\ \sqrt{3}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ 1$

Matemàtiques orientades a les ensenyances acadèmiques

4tB ESO
Capítol 13: Estadística

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Raquel Caro

Revisores: María Molero i Nieves Zuasti

Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF

Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

L'Estadística s'utilitza en la Ciència. També per a fer **sondejos d'opinió**, com l'acceptació pel públic d'un programa de televisió, o les enquestes sobre la intenció de vot a un partit polític. S'usen tècniques estadístiques als processos de fabricació, és el **control de qualitat**. Per a fer previsions i programes del tràfic, o les necessitats d'energia d'un país. Quan s'analitza un fenomen observable apareixen una sèrie de resultats que han de ser tractats convenientment, de manera que es puguen comprendre millor tant els resultats com la característica objecte d'estudi corresponent al dit fenomen. Per a aquest fi s'utilitza l'Estadística.

En aquest capítol aprendrem a reconèixer i classificar distints tipus de variables estadístiques, construir taules de freqüències i gràfics estadístics per a distints tipus de variables estadístiques i determinar i interpretar mesures de centralització, posició i dispersió.

També ens centrarem a l'estudi de dos variables d'interès corresponents a dues característiques (o variables) distintes. En aquest sentit, pot ser interessant considerar simultàniament els dos caràcters a fi d'estudiar les possibles relacions entre ells.

1. FASES I TASQUES D'UN ESTUDI ESTADÍSTIC

Ens enfrontem diàriament a la necessitat d'arreplegar, organitzar i interpretar dades i aquesta necessitat augmentarà en el futur, a causa del desenrotllament dels sistemes de comunicació i les bases de dades. És notable l'augment de l'ús de les xarxes socials com ara *Youtube* o *Facebook*, on les persones tenen oportunitat de presentar informació sobre ells mateixos, i de pàgines web on es poden trobar i descarregar gran varietat de dades estadístiques sobre diversos temes d'actualitat: resultats esportius dels seus equips favorits, temperatura màxima i mínima al llarg d'un mes, vendes de torró el passat nadal, etc. Altres vegades les dades són arreplegades per l'investigador mitjançant la realització d'una enquesta o a través d'un experiment. L'enquesta requerirà l'elaboració d'un qüestionari, fixant els objectius del mateix, triant les variables explicatives i redactant les preguntes que permeten obtindre la informació desitjada d'una forma clara i concisa.

En aquest sentit, l'estadística ha jugat un paper primordial en aquest desenrotllament tecnològic que ens està tocant viure, en proporcionar ferramentes metodològiques generals per a analitzar la variabilitat, determinar relacions entre variables, dissenyar de forma òptima experiments, millorar les prediccions i la presa de decisions en situacions d'incertesa.

El tractament estadístic d'un problema comença sempre amb la presentació de la magnitud que es vol analitzar d'una determinada població i la selecció de la mostra pertinent per a passar a l'arreplega de dades. Una vegada obtinguts les dades s'ordenen i presenten en taules o gràfiques, de manera que siga possible observar les particularitats que assenyalen.

D'ací es pot considerar que un estudi estadístic consta d'una sèrie de fases i tasques ben diferenciades :

Definició de la població i característica a estudiar.

Tasques: Identificació de les característiques quantitatives i qualitatives; fixació de la població; especificació de la forma d'arreplega de dades (entrevistes, telèfon, correu electrònic, etc.).

Selecció de la mostra.

Tasques: Identificació de la grandària de la mostra i pressupost necessari.

Arreplega de dades.

Tasques: Disseny del qüestionari; disseny mostral.

Organització i representació gràfica.

Tasques: Taules i gràfiques que ajuden a una més fàcil interpretació de les dades; açò consisteix en un estudi de cada variable, la tabulació i representació (ns) gràfica (ques) més apropiada (es).

Anàlisi de dades.

Tasques: Tractament de les dades. Açò consistirà en una anàlisi descriptiva de les dades i/o una anàlisi multivariant de les dades, depenent del tipus d'estudi a realitzar i costos del mateix.

Obtenció de conclusions.

Tasques: recomanacions i presa de decisions a partir de les conclusions.

Exemple:

Una llista de punts a tindre en compte en plantejar les preguntes d'investigació és la següent:

Què vols provar? Què has de mesurar /observar /preguntar?

Quines dades necessites? Com trobaràs les teues dades? Què faràs amb elles?

Creus que pots fer-ho? Trobaràs problemes? Quins?

¿Per a què et serviran els resultats?

D'aquesta manera es prepararà una llista de les característiques que volem incloure a l'estudi, analitzant les diferents formes amb què podrien obtindre's les dades. Per simple observació: com el sexe, color de pèl i ulls, si l'alumne usa o no ulleres; Si es requereix un mesurament: com el pes, talla, perímetre de cintura; si caldria preguntar, és a dir, si s'ha de realitzar una enquesta: quant esport practica, nombre del calçat, quantes hores dorm, quantes hores estudia al dia o a la setmana, etc.

Per tant, és important considerar la naturalesa de les escales de mesura i tipus de variable estadística, ja que d'elles depèn el mètode d'anàlisi de dades que es pot aplicar. L'elecció del conjunt de dades és crítica, perquè depenent del tipus de dades la gamma de tècniques estadístiques serà més o menys àmplia, ja que no totes les tècniques són aplicables a qualsevol tipus de dada.

2. POBLACIÓ I MOSTRA. VARIABLES ESTADÍSTIQUES

2.1. Població

Població estadística, col·lectiu o univers és el conjunt de tots els individus (persones, objectes, animals, etc.) que continguen informació sobre el fenomen que s'estudia.

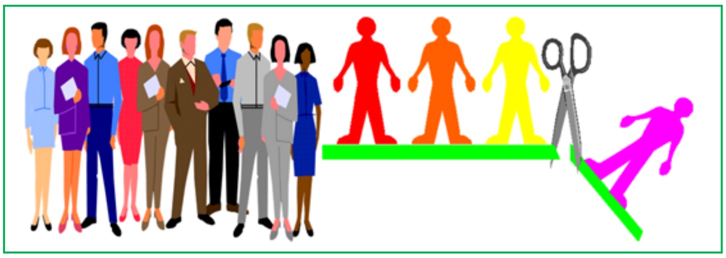
Exemples:

Si estudiem el preu de la vivenda en una ciutat, la població serà el total de les vivendes de la dita ciutat.

Es va a realitzar un estudi estadístic sobre el percentatge de persones casades a la península. Per a això no és factible estudiar a tots i cada un dels habitants per raons de cost i de rapidesa en l'obtenció de la informació. Per tant, és necessari acudir a examinar només una part d'aquesta **població**. Aqueixa part és la **mostra** triada.

1.2. Mostra

Mostra és un subconjunt representatiu que se selecciona de la població i sobre el qual es va a realitzar l'anàlisi estadística. La **grandària de la mostra** és el nombre dels seus elements. Quan la mostra comprèn a tots els elements de la població, es denomina cens**.**



Exemple:

Si s'estudia el preu de la vivenda d'una ciutat, el normal serà no arreplegar informació sobre totes les vivendes de la ciutat (ja que seria una labor molt complexa i costosa), sinó que se sol seleccionar un subgrup (mostra) que s'entenga que és prou representatiu.

Activitats proposades

1. Assenyalar en quin cas és més convenient estudiar la població o una mostra:

El diàmetre dels caragols que fabrica una màquina diàriament. L'altura d'un grup de sis amics.

2. Es pot llegir el següent titular al periòdic que publica el teu institut: "*La nota mitjana dels alumnes de 4t ESO de la Comunitat de Madrid és de* 7'9". Com s'ha arribat a aquesta conclusió? S'ha estudiat a tota la població? Si hagueren seleccionat per al seu càlcul només a les dones, seria representatiu el seu valor?

2.3. Individu o unitat estadística

Individu o **unitat estadística** és qualsevol element que continga informació sobre el fenomen que s'estudia.

Exemple:

Si estudiem les notes dels alumnes d'una classe, cada alumne és un individu; si estudiem el preu de la vivenda, cada vivenda és una unitat estadística.

2.4. Variable estadística

En general, suposarem que s'està analitzant una determinada població, de la que ens interessa certa característica, representada per una **variable** observable o estadística *X*. Les variables que estan baix estudi es poden classificar en dues categories:

Variables qualitatives o atributs (dades no mètrics), que no es poden mesurar numèricament. Les escales de mesura no mètriques es classifiquen en nominals (o categòriques) i ordinals.

Variables quantitatives, que tenen un valor numèric. Aquest tipus de variables són les que apareixen amb més freqüència i permeten una anàlisi més detallada que les qualitatives. Dins de les variables quantitatives, es poden distingir les **variables discretes** i les **variables contínues**. Les **variables discretes** prenen valors aïllats, mentres que les **variables contínues** poden prendre qualsevol valor dins d'un interval.

Exemple:

Exemples de variables qualitatives són la nacionalitat o la raça d'un conjunt de persones.

Exemples de variables quantitatives són les notes obtingudes en una assignatura, el pes o altura d'un conjunt de persones.

Exemples de variables discretes són el nombre d'alumnes que aproven una assignatura, o el nombre de components defectuosos que es produeixen al dia en una fàbrica.

Exemples de variables contínues són el temps que tardem a arribar a l'institut des de la nostra casa o la velocitat d'un vehicle.

Activitats resoltes

Es va a realitzar un estudi estadístic sobre el percentatge de persones amb fills en una localitat madrilenya de 134.678 habitants. Per a això es trien 2.346 habitants i s'estenen les conclusions a tota la població. Identificar: variable estadística, població, mostra, grandària mostral i individu.
Variable estadística: si una persona té fills o no.

Població: Els 134.678 habitants de la localitat.

Mostra: Els 2.346 habitants triats.

Grandària mostral: 2.346 persones.

Individu: Cada persona a qui se li pregunte.

Activitats proposades

3. Indicar el tipus de variable estadística que estudiem i raona, en cada cas, si seria millor analitzar una mostra o la població:

El sexe dels habitants d'un país.

Els diners gastat a la setmana pel teu germà.

El color de cabell dels teus Companys de classe.

La temperatura de la teua província.

La talla de peu dels alumnes de l'institut.

4. Per a realitzar un estudi fem una enquesta entre els jóvens d'un barri i els preguntem pel nombre de vegades que van al cine al mes. Indica quines característiques hauria de tindre la mostra triada i si haurien de ser tots els jóvens de la mostra de la mateixa edat.

3. TAULES DE FREQÜÈNCIES

3.1. Freqüència absoluta

Quan s'analitza una *variable discreta*, la informació resultant de la mostra es troba resumida habitualment en una taula o distribució de freqüències. Suposem que s'ha pres una mostra de grandària N en què s'han identificat k valors (o modalitats) distints $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Cada un d'ells es produeix amb una **freqüència absoluta** n_i, és a dir, el nombre de vegades que apareix a la mostra.

La informació obtinguda es pot resumir en una **taula de freqüències**.

Les taules de freqüència també s'utilitzen per a representar informació d'una *variable contínua* procedent d'una mostra en què s'agrupen les observacions en intervals, que es denominen **intervals de classe** L_i o cel·les.

Encara que aquest procediment suposa, de fet, una pèrdua d'informació, aquesta pèrdua no és de magnitud important i es veu compensada amb l'agrupació de la informació i la facilitat d'interpretació que proporciona una taula de freqüències.

En aquest cas, els valors x_i es corresponen amb el punt mitjà de l'interval i es denominen **marques de classe**.

Exemple:

Quan realitzem un estudi sobre l'oci i enquestem a 40 jóvens d'una localitat sobre el nombre de vegades que van al cine els resultats de la dita enquesta els podem arreplegar en una taula per a resumir la dita informació.

Activitats resoltes

S'està realitzant un control del pes d'un grup de xiquets. Per a això, es comptabilitzen el nombre de vegades que mengen al dia una xocolatina 13 xiquets durant un mes, obtenint els nombres següents: 2, 5, 3, 2, 0, 4, 1, 7, 4, 2, 1, 0, 2.

La informació obtinguda es pot resumir en una taula de freqüències absolutes:

Valors	0	1	2	3	4	5	6	7
Freqüència absoluta	2	2	4	1	2	1	0	1

En una fàbrica es realitza un estudi sobre la grossària, en *mm*, d'un cert tipus de llandes de refresc. Amb aquest fi, selecciona una mostra de grandària $N = 25$, obtenint els valors següents: 7.8, 8.2, 7.6, 10.5, 7.4, 8.3, 9.2, 11.3, 7.1, 8.5, 10.2, 9.3, 9.9, 8.7, 8.6, 7.2, 9.9, 8.6, 10.9, 7.9, 11.1, 8.8, 9.2, 8.1, 10.5.

Aquesta informació es pot resumir en la següent taula de freqüències, amb 5 intervals: (7, 8], (8,9], (9, 10], (10, 11], (11, 12], sent les marques de classe els punts mitjans de cada interval: 7.5; 8.5; 9.5; 10.5; 11.5. Comprova que les freqüències absolutes són les indicades en la taula:

Intervals de classe	**(7, 8]**	**(8, 9]**	**(9, 10]**	**(10, 11]**	**(11, 12]**
Marques de classe	7.5	8.5	9.5	10.5	11.5
Freqüència absoluta	6	8	5	4	2

Activitats proposades

5. Obtindre la taula de freqüències absolutes de les notes en anglès de 24 alumnes:

6	6	7	8	4	9	8	7	6	5	3	5
7	6	6	6	5	4	3	9	8	8	4	5

3.2. Freqüència relativa

Es denomina **freqüència relativa** (f_i) d'un valor de la variable al quocient entre la freqüència absoluta i el nombre total d'observacions N. S'escriu: $f_i = \dfrac{n_i}{N} \le 1$

Exemple:

De la mateixa manera podem arreplegar la informació obtinguda a partir d'una enquesta a 40 jóvens d'una localitat sobre el nombre de vegades que van al cine mitjançant percentatge del nombre de vegades que es repeteix un valor de la variable sobre el total.

Activitats resoltes

S'està realitzant un control del pes d'un grup de xiquets. Per a això, es comptabilitzen el nombre de vegades que mengen al dia una xocolatina 13 xiquets durant un mes, obtenint els nombres següents: 2, 5, 3, 2, 0, 4, 1, 7, 4, 2, 1, 0, 2.

La informació obtinguda es pot resumir en una taula de freqüències relatives:

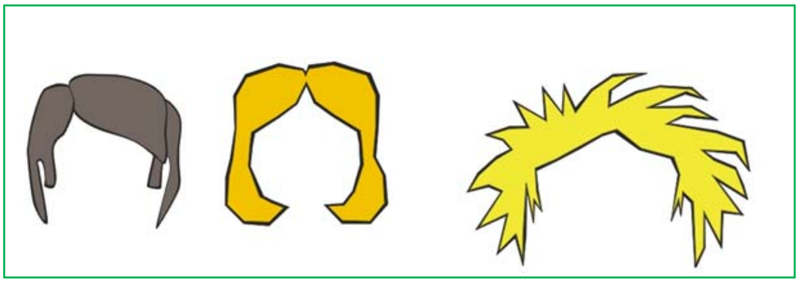
Valors	0	1	2	3	4	5	6		7
Freqüència relativa	0'154	0'154	0'307	0'077	0'154	0'077	0		0'077

Activitats proposades

6. Construir una taula de freqüències relatives amb el color de cabell de 24 persones triades a l'atzar:

M=moreno; R=ros; P=pèl-roig

M	R	P	R	R	R
R	P	P	M	M	M
M	R	R	R	R	R
M	M	M	M	M	P



3.3. Freqüència absoluta acumulada

Es denomina **freqüència absoluta acumulada** d'un valor de la variable N_i a la suma de totes les freqüències absolutes dels valors menors o iguals que ell. Es calcula com:

$$N_i = \sum_{j=1}^{i} [n_j]$$

Es verifica la següent relació entre els valors de N_i:

$$N_1 \leq N_2 \leq \cdots \leq N_k = N$$

Exemple:

De la mateixa manera podem arreplegar la informació obtinguda a partir d'una enquesta a 40 jóvens d'una localitat sobre el nombre de vegades que van al cine mitjançant el nombre acumulat de vegades que es repeteix un valor de la variable sobre el total.

Activitats resoltes

S'està realitzant un control del pes d'un grup de xiquets. Per a això, es comptabilitzen el nombre de vegades que mengen al dia una xocolatina 13 xiquets durant un mes, obtenint els nombres següents: 2, 5, 3, 2, 0, 4, 1, 7, 4, 2, 1, 0, 2.

La informació obtinguda es pot resumir en una taula de freqüències absolutes:

Valors	0	1	2	3	4	5	6	7
Freqüència absoluta	2	2	4	1	2	1	0	1
Freqüència absoluta acumulada	2	4	8	9	11	12	12	13

Activitats proposades

7. El nombre d'hores diàries d'estudi de 14 alumnes és el següent:

3 4 2 5 3 4 3 2 3 4 5 4 3 2

a) Efectua un recompte i organitza els resultats obtinguts en una taula de freqüències absolutes acumulades.

b) Què signifiquen les freqüències acumulades que has calculat?

3.4. Freqüència relativa acumulada

Es denomina **freqüència relativa acumulada** (F_i) d'un valor de la variable a la suma de totes les freqüències relatives dels valors menors o iguals que ell. Es calcula com:

$$F_i = \sum_{j=1}^{i} [f_j]$$

Es verifica la següent relació entre els valors de F_i:

$$F_1 \leq F_2 \leq \cdots \leq F_k = 1$$

Exemple:

De la mateixa manera podem arreplegar la informació obtinguda a partir d'una enquesta a 40 jóvens d'una localitat sobre el nombre de vegades que van al cine mitjançant el percentatge acumulat del nombre de vegades que es repeteix un valor de la variable sobre el total.

Activitats resoltes

S’està realitzant un control del pes d’un grup de xiquets. Per a això, es comptabilitzen el nombre de vegades que mengen al dia una xocolatina 13 xiquets durant un mes, obtenint els nombres següents: 2, 5, 3, 2, 0, 4, 1, 7, 4, 2, 1, 0, 2.

La informació obtinguda es pot resumir en una taula de freqüències relatives:

Valors	0	1	2	3	4	5	6	7
Freqüència relativa	0’154	0’154	0’307	0’077	0’154	0’077	0	0’077
Freqüència relativa acumulada	0’154	0’308	0’615	0’692	0’846	0’923	0’923	1

En una fàbrica es realitza un estudi sobre la grossària, en *mm*, d’un cert tipus de llandes de refresc. Amb aquest fi, selecciona una mostra de grandària *N* = 25, obtenint els valors següents: 7’8, 8’2, 7’6, 10’5, 7’4, 8’3, 9’2, 11’3, 7’1, 8’5, 10’2, 9’3, 9’9, 8’7, 8’6, 7’2, 9’9, 8’6, 10’9, 7’9, 11’1, 8’8, 9’2, 8’1, 10’5.

Aquesta informació es pot resumir en la següent taula de freqüències, amb 5 intervals:

Intervals de classe	**(7, 8]**	**(8, 9]**	**(9, 10]**	**(10, 11]**	**(11, 12]**
Marques de classe	7’5	8’5	9’5	10’5	11’5
Freqüència absoluta	6	8	5	4	2
Freqüència relativa	0’24	0’32	0’2	0’16	0’08
Freqüència relativa acumulada	0’24	0’56	0’76	0’92	1

S’organitza en una taula la informació arreplegada de les estatures, en cm, d’un grup de 20 xiquetes:

130	127	141	139	138	126	135	138	134	131
143	140	129	128	137	136	142	138	144	136

L’estatura és una variable estadística quantitativa contínua. Per tant, podem agrupar els valors de la variable en intervals que anomenem classes o cel·les. L’amplitud de cada interval ve donada per la fórmula: $\frac{Màx-Mín}{\sqrt{N}}$

Al nostre cas concret tenim que: $\frac{144-126}{\sqrt{20}} = 4.02$

Aproximant, l’amplitud de cada interval és de 5 cm.

Estatura en intervals	**[125-130)**	**[130-135)**	**[135-140)**	**[140-145)**
Freqüència absoluta	4	3	8	5
Freqüència relativa	0’2	0’15	0’4	0’25
Freqüència absoluta acumulada	4	7	15	20
Freqüència relativa acumulada	0’2	0’35	0’75	1

Activitats proposades

8. En una avaluació, dels 30 alumnes d’una classe, el 30 % va aprovar tot, el 10 % va suspendre una assignatura, el 40 % va suspendre dues assignatures i la resta més de dues assignatures.

a) Realitza la taula de freqüències completa corresponent (freqüències absolutes, freqüències relatives, freqüències absolutes acumulades i freqüències relatives acumulades).

b) Hi ha algun tipus de freqüència que corresponga a la pregunta de quants alumnes van suspendre menys de dues assignatures? Raona la resposta.

4. GRÀFICS ESTADÍSTICS

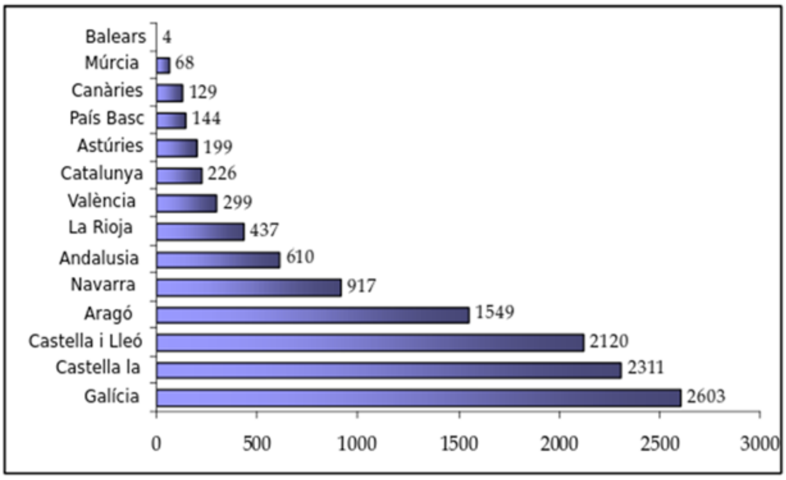
4.1. Diagrama de barres

Hi ha nombroses maneres de representar gràficament la informació que s'ha obtingut d'una mostra, depenent del tipus de variable que s'estiga analitzant i del fi que es perseguisca amb la representació.

Quan es vol representar gràficament una variable qualitativa (atribut) o una variable quantitativa discreta es pot utilitzar els ***diagrames de barres o rectangles***. Es col·loquen els valors de la variable (les modalitats de l'atribut o valors de la variable discreta) a l'eix d'abscisses i, a l'eix d'ordenades les freqüències (absolutes o relatives). Sobre cada valor s'alça una barra o rectangle l'altura de la qual és igual a la freqüència. Per comoditat, de vegades també se solen intercanviar els eixos.

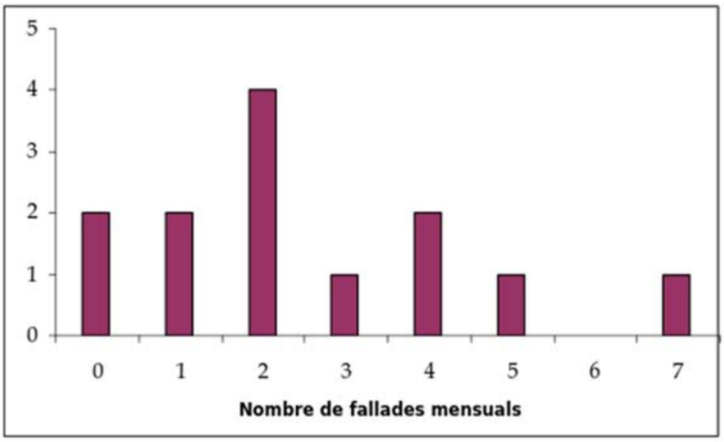
Exemple:

S'ha representat gràficament la potència eòlica (font d'energia elèctrica renovable) instal·lada a Espanya per Comunitat Autònoma Al Gener de 2014 (en Megawats)



Exemple:

S'ha representat gràficament el nombre de fallades mensuals d'una màquina de gelats



Autora: Raquel Caro
Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

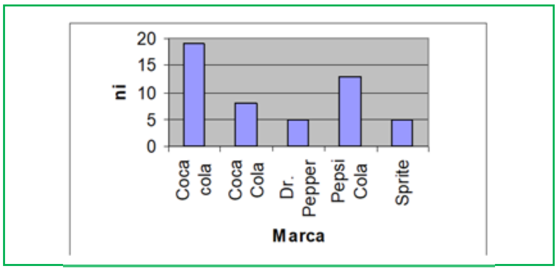
Activitats resoltes

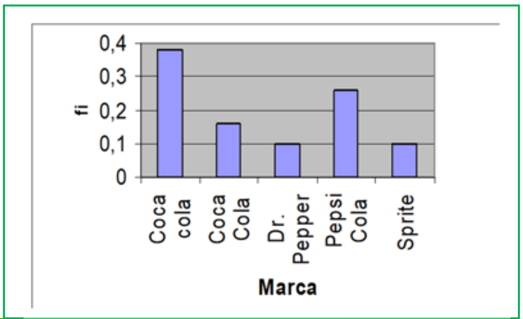
Donada la següent informació corresponent a les preferències de 50 adolescents americans respecte a la marca de refresc que consumixen, construeix la taula associada a aquestes dades i representa-les gràficament en un diagrama de barres de freqüències absolutes i un altre de freqüències relatives.

COCA-COLA=CC; COCA-COLA LIGHT=CCL; DR.PEPPER=A; PEPSI-COLA=PC, SPRITE=S

CCL	CC	S	A	CC	CC	A	CC	P	CC
S	CCL	P	CCL	CC	CC	CCL	P	P	A
S	S	CC	CC	CC	A	P	CC	CCL	CC
CCL	CC	P	P	P	CCL	P	S	P	CC
CC	P	CCL	CC	CC	P	CC	P	CC	A

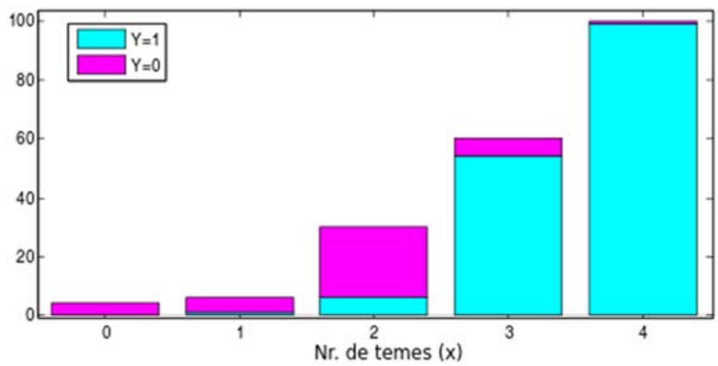
Marca	n_i	f_i
Coca Cola	19	0,38
Coca Cola Light	8	0,16
Dr. Pepper	5	0,10
Pepsi Cola	13	0,26
Sprite	5	0,10
	50	1





Activitats proposades

9. Si volem representar conjuntament valors de la variable corresponents a diferents períodes de temps, o a distintes qualitats, per a comparar situacions podem construir un diagrama de barres apilades. Podries interpretar aquest gràfic corresponent al nombre de temes que els alumnes d'una assignatura de 4t ESO porten estudiats? Es pren informació en dues classes d'un institut (blau i rosa).



El sexe de 18 bebès nascuts en un hospital de Madrid ha sigut:

H	M	H	H	M	H
H	M	M	H	M	H
M	M	H	H	M	H

Construeix la taula associada a aquestes dades i representa-les.

Representa els valors de la variable de la taula adjunta amb el gràfic adequat corresponents a una enquesta realitzada sobre el sector a què pertanyen un grup de treballadors madrilenys.

SECTOR	INDUSTRIAL	AGRARI	SERVICIS	ALTRES
% TREBALLADORS	20	16	45	19

4.2. Histogrames

La representació més utilitzada en variables quantitatives contínues és **l'histograma**.

En l'eix d'abscisses es col·loquen els diferents intervals en què s'agrupen les observacions de la variable. Sobre aquests intervals, s'alcen rectangles **l'àrea** dels quals és proporcional a la freqüència observada en cada un d'ells.

En el cas que tots els intervals tinguen la mateixa amplitud basta amb què l'altura dels rectangles siga proporcional a la freqüència.

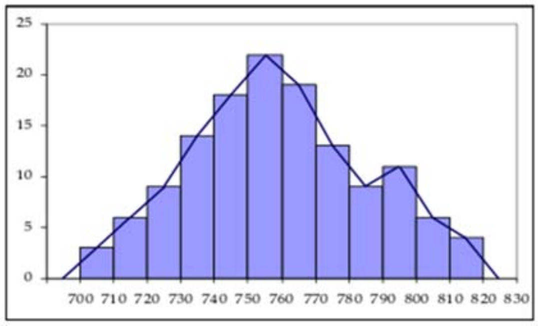
Depenent de les freqüències que s'utilitzen, es tractarà d'un histograma de freqüències relatives, o bé d'un histograma de freqüències absolutes.

De vegades, s'uneixen els punts mitjans dels segments superiors dels rectangles, obtenint-se d'aquesta manera el **polígon de freqüències**, ja siguen absolutes o relatives. Aquests polígons es construeixen utilitzant un interval anterior al primer (de la mateixa longitud que aquest) i un altre posterior a l'últim (de la seua mateixa longitud). D'aquesta manera, els polígons delimiten una àrea tancada.

En ambdós casos, també es poden utilitzar les freqüències acumulades per a construir els respectius histogrames. Aquests histogrames també porten associats els corresponents polígons de freqüències, que en aquest cas es construeixen unint els vèrtexs superiors drets de cada un dels intervals.

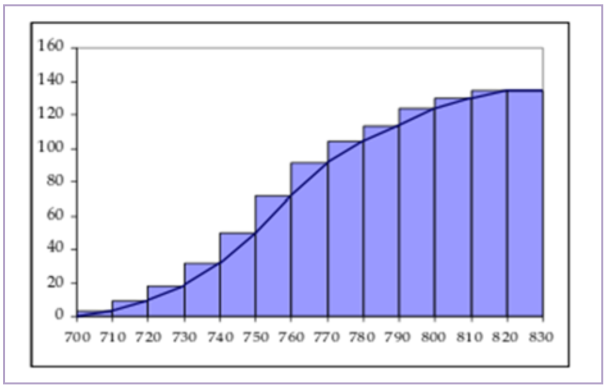
Exemple:

S'ha representat gràficament la informació obtinguda a partir de les emissions específiques de CO_2 d'una central de carbó (kg/megawat-hora) a partir d'un histograma i un polígon de freqüències absolutes.



Exemple:

S'ha representat gràficament la informació obtinguda a partir de les emissions específiques de CO_2 d'una central de carbó (kg/megawat-hora) a partir d'un histograma i un polígon de freqüències acumulades absolutes.

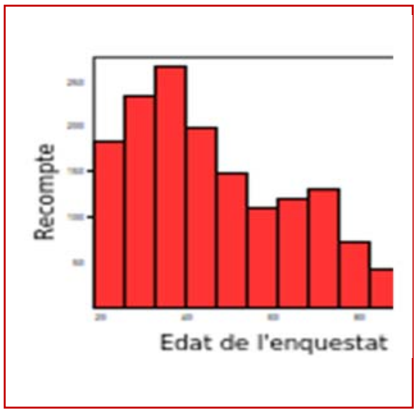


Activitats proposades

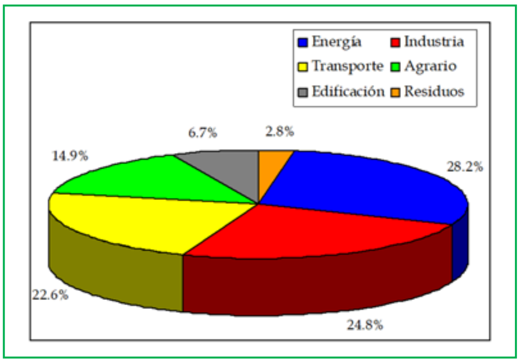
10. Completa la taula de freqüències per a poder representar la informació mitjançant l'histograma de freqüències acumulades:

EDAT	[15, 25)	[25, 35)	[35, 45)	[45, 55)
NOMBRE DE PERSONES	25	45	55	65

11. A quina representació gràfiques corresponen el següent gràfic corresponent a la informació arreplegada sobre l'edat de 100 persones? Per què creus que s'ha utilitzat aquest i no un altre?



4.3. Diagrama de sectors



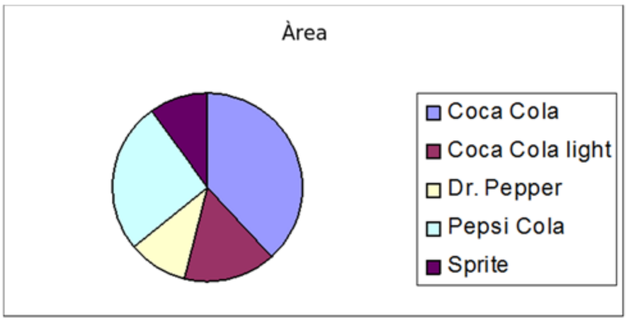
Al **diagrama de sectors** es col·loquen les modalitats de l'atribut (variable qualitativa) o valors d'una variable quantitativa discreta en un cercle, assignant a cada un un sector del cercle **d'angle proporcional a la seua freqüència**. No resolta molt operatiu quan la variable té massa categories.

Exemple:

- De la mateixa manera podem arreplegar la informació obtinguda d'emissions de gasos d'efecte d'hivernacle a Espanya al període 1999-2012 (%)

Activitats resoltes

Donada la informació corresponent a les preferències de 50 adolescents americans respecte a la marca de refresc que consumixen de l'activitat resolta de l'apartat 3.1. realitzar el gràfic de sectors.



Activitats proposades

12. Dels 100 assistents a una boda, el 34 % va menjar vedella de segon plat, 25 % ànec, 24 % corder i la resta peix.

Organitza la informació anterior en una taula de freqüències i representa les dades en un gràfic de sectors.

Realitza un diagrama de barres i explica com el fas. Quin dels dos gràfics prefereixes? Per què?

13. S'ha arreplegat informació sobre el contingut de sals minerals de 24 botelles d'aigua d'un grup d'escolars en una excursió tal que:

45	45	65	56	33	65	23	23
34	23	43	67	22	43	34	23
12	34	45	34	19	34	23	43

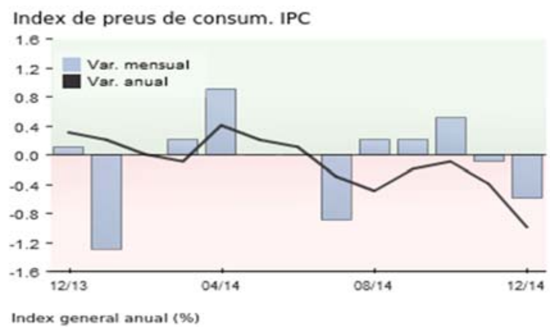
Classifica la variable estadística estudiada

Seria convenient prendre o no intervals en fer una taula de freqüències?

Realitza el gràfic que consideres més oportú.

4.3. Anàlisi crítica de taules i gràfiques estadístiques als mitjans de comunicació. Detecció de fal·làcies

Els Mitjans de comunicació recorren ben sovint a taules i gràfiques que ajuden a una més fàcil interpretació de les dades per part del públic en general. Un cas pot ser el següent gràfic que presenta l'Institut Nacional d'Estadística (INE), que representa l'índex dels preus al consum.



No obstant això, no és rar observar com s'utilitzen unes mateixes dades estadístiques per a obtindre conclusions distintes.

Una pujada de preus o de l'índex de desocupació pot parèixer més o menys accentuada segons qui presente la informació.

Un índex d'audiència o el colesterol d'un determinat aliment poden parèixer més o menys alts segons amb què se'l compare.

Les telefonades pareixen ser més barates en una companyia que en una altra.

La llista d'exemples és interminable.

D'aquesta manera, l'Estadística, a més del paper instrumental que hem presentat fins ara, té un important paper en el desenrotllament del pensament crític que ens mantindrà atents a aquests excessos.

Els errors més freqüents, encara que de vegades no es tracta d'errors, sinó de manipulacions tendencioses, són els següents:

Errors en l'obtenció de dades.

Limitacions humanes o dels instruments: és impossible, per exemple, mesurar el pes o l'estatura d'una persona amb infinita precisió. Però inclús en estudis exhaustius, com els censos, s'estimen els errors de mostreig.

Qüestionaris mal plantejats: si no s'arrepleguen totes les possibles respostes, si la pregunta influeix en la resposta, si les preguntes contenen juís de valor o si les diferents opcions de resposta no són equilibrades (per exemple: sí, de vegades, no). El conjunt de respostes possibles pot fer que hi haja duplicacions o omissions. Incórrer en aquest error, deliberadament o no, deixa individus de la població sense representació entre les respostes i, per tant, els resultats que isquen de l'estudi estaran esbiaixats. Les modalitats de la variable han de ser incompatibles i exhaustives (per exemple: si preguntem pel color favorit i oferim com a possibles respostes "Roig", "Blau" o "Groc", deixem sense poder respondre als que volen triar un altre color; si no estem interessats en altres colors, podem incloure un apartat anomenat "Un altre").

Delimitació imprecisa de la població: Per exemple, si es desitja estudiar si els xiquets madrilenys veuen massa la televisió, caldrà deixar clar quines edats en concret es consideraran, si entenem per madrileny a qualsevol resident o només als nascuts a Madrid, etc.

Selecció de la mostra inapropiada o no representativa: la mostra no representa a la població. L'elecció dels individus concrets que formen part de la mostra ha de fer-se de forma aleatòria. Per exemple: si estudiem els gustos televisius dels adolescents d'un institut i pensem que aquests gustos poden variar en funció de l'edat, en la selecció de la mostra han de triar-se edats variades, a poder ser, en la mateixa proporció en què es presenten a l'institut.

Errors en les taules: les dades no estan ordenades, evitar ambigüitats als extrems dels intervals per a variables contínues, etc.

Errors a les gràfiques: als diagrames de barres falta l'origen, estan truncats o a l'escala als eixos, etc. Cal deixar clares les variables que es mesuren.

Errors als paràmetres de mesura: per exemple la mitjana no és representativa (poblacions heterogènies) o es veu afectada per valors molt grans; confusió entre mitjana i mediana.

Errors als pictogrames amb superfícies on s'inscriuen proporcionals al quadrat de les freqüències.

5. MESURES DE TENDÈNCIA CENTRAL

5.1. Mesures de grandària

Les mesures de tendència central o de centralització són les que, intuïtivament, apareixen en primer lloc en intentar descriure una població o mostra.

Es poden dividir en tres classes: **mesures de grandària, de freqüència i de posició**.

Al que segueix, suposarem que estem analitzant una població de què es pren una mostra de grandària *N*, és a dir, que està composta per *N* individus (o observacions), dels quals es desitja estudiar la variable *X*, la qual cosa dóna lloc a l'obtenció de *N* valors que es representen per $x_1, x_2, \ldots, x_N$. Aquests valors no se suposen ordenats, sinó que el subíndex indica l'orde en què han sigut seleccionats.

Les mesures de grandària es defineixen a partir dels valors de la mostra, així com de la seua freqüència.

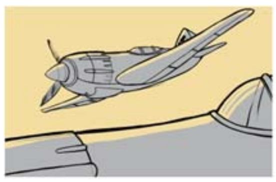
Definim així la **mitjana aritmètica** o **promedi** o, simplement, **mitjana** com:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N}[x_i]}{N}$$

Es pot interpretar com el centre de masses de les observacions de la mostra. Dins dels seus avantatges es poden destacar que utilitza totes les observacions, que són fàcilment calculables, tenen una interpretació senzilla i bones propietats matemàtiques. El seu inconvenient és que es pot veure afectada pels valors anormalment xicotets o grans que existisquen a la població o mostra (denominats *outliers*).

En el cas que tinguem una variable quantitativa agrupada en intervals el valor de la variable *X* que representa a l'interval per a poder calcular la mitjana aritmètica és la **marca de classe** i es calcula com la semisuma dels valors extrems de l'interval.

Exemple:



S'arreplega la informació referida al nombre d'hores de vol diàries de 20 hostesses. Si la mitjana és igual a 4.1, açò indica que, generalment, el nombre d'hores de vol és 4.1.

Exemple:

De la mateixa manera si arrepleguem la informació sobre l'edat mitjana de la teua classe obtindrem un valor entre 15 i 16 anys. L'edat mitjana serà per exemple 15.4, valor teòric, que pot no coincidir amb cap dels valors reals.

Activitats resoltes

Un fabricant de gelats està realitzant un control de qualitat sobre certes màquines respecte a la seua capacitat de regular la temperatura de refrigeració. Per a això, selecciona una mostra de N = 16 màquines de la fàbrica i mesura amb precisió el valor de la seua capacitat (en la unitat de mesura μF), obtenint els resultats següents: 20.5, 19.8, 19.6, 19.2, 23.5, 28.9, 19.9, 19.2, 20.1, 18.8, 19.5, 20.2, 18.6, 19.7, 22.1, 19.3. Utilitzant aquests valors de capacitat, obtindre la mitjana aritmètica.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N}[x_i]}{N} = \frac{20.5+19.8+19.6+19.2+23.5+28.9+19.9+19.2+20.1+18.8+19.5+20.2+18.6+19.7+22.1+19.3}{16} = \mathbf{20.56} \quad \mu F$$

Activitats proposades

14. Una persona ingressa 10 000 euros en un fons d'inversió l'1 de gener de 2009. Les rendibilitats anuals del fons durant els anys següents van ser les següents:

Any	2009	2010	2011	2012
Rendibilitats (%)	5	3	–1	4

Si no ha retirat el capital, quin ha sigut la rendibilitat mitja del dit fons durant aquests anys?

Interpreta els valors de la variable d'aquesta taula que representa el pes de 100 000 bombones de butà d'una fàbrica, en quilograms. Què gràfic utilitzaries? Calcula la mitjana i interpreta-la.

Pes [)	**f_i %**	**n_i**	**N_i**
			
14.5-15	0.3	300	300
15-15.5	1.6	1 600	1 900
15.5-16	7.4	7 400	9 300
16-16.5	21.5	21500	30800
16.5-17	30.5	30500	61300
17-17.5	24.5	24500	85800
17.5-18	10.7	10700	96500
18-18.5	21.5	21500	30800

5.2. Mesures de freqüència

Es defineixen tenint en compte únicament la freqüència dels valors de la variable de la mostra.

La **moda** (*Mo*) es defineix com el valor de la variable que s'ha obtingut amb major freqüència. Pot haver-hi més d'una moda.

Exemple:

15. Es realitza un estudi entre 200 espectadors a un musical a Madrid per a determinar el grau de satisfacció, obtenint-se els resultats següents:

16. Opinió	**17.** Molt bo	**18.** Bo	**19.** Regular	**20.** Roí	**21.** Molt roí
22. %	**23.** 75	**24.** 25	**25.** 45	**26.** 15	**27.** 40

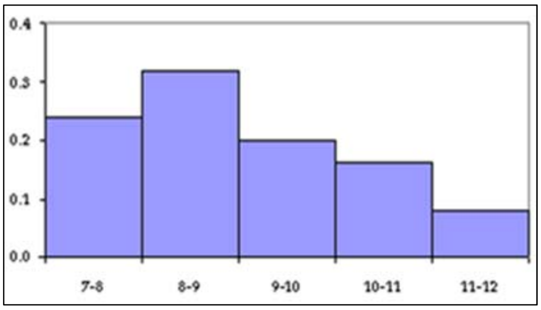
La modalitat que més es repeteix és "molt bo", per la qual cosa la moda és Mo = Molt bo.

Exemple:

Al cas que la distribució estiga agrupada en intervals caldrà identificar la classe modal, és a dir, l'interval on hi ha el nombre més gran de valors de la variable.

Activitats resoltes

A partir de la taula de freqüències de la grossària de llandes de refresc, podem dibuixar els seus histogrames de freqüències relatives i determinar on està la seua moda. És a dir en l'interval [8 - 9). La moda assenyala que el més freqüent és tindre una grossària entre 8 i 9 mm.



Activitats proposades

28. Obtindre la mitjana i la moda dels següents valors de la variable referits al resultat de llançar un dau 50 vegades.

1	2	3	2	3	4	3	3	3	5
5	5	5	6	5	6	5	6	4	4
3	2	1	2	3	4	5	6	5	4
3	2	3	4	5	6	5	4	3	2
3	4	5	5	5	5	6	6	6	3

Realitzar l'activitat anterior però agrupant en intervals d'amplitud 2, començant en 0. Obtens els mateixos resultats? Per què?

5.3. Mesures de posició

Es defineixen a partir de la posició dels valors de la mostra.

En general, es coneixen amb el nom de **centils** o **percentils**.

Si reordenem en orde creixent els valors que hem pres a la mostra i els denotem per $x_{\{1\}}$, $x_{\{2\}}$,…, $x_{\{N\}}$ es poden definir les següents mesures de posició:

La ***mediana*** *Me* és un valor tal que el 50 % de les observacions són inferiors a ell. No té per què ser únic i pot ser un valor no observat.

Altura mitjana

Els ***quartils*** (o quartiles) Q_1, Q_2 i Q_3 són els valors tals que el 25 %, 50 % i 75 % (respectivament) dels valors de la variable són inferiors a ell.

Els ***decils*** D_1, D_2,…, D_9 són els valors tals que el 10 %, 20 %, …, 90 % (respectivament) dels valors de la variable són inferiors a ell.

En general, es defineix el **percentil** o **centil** del *k* % (sent $0 \le k \le 100$) com el valor tal que el *k* % de les observacions són inferiors a ell.

La mitjana i la resta de mesures de posició tenen com principal avantatge la seua fàcil interpretació i la seua robustesa (no es veuen afectades per observacions extremes).

Exemple:

Calcula els quartils i el percentil 65 dels següents valors de la variable referits al nombre de fills de les famílies d'un bloc d'edificis de la localitat de Madrid:

Nombre de fills	f_i	F_i
1	11	11
2	27	38
3	4	42
4	18	60
Total	60	

Per a trobar el primer quartil calculem el 25 % del total mostral *N* = 60, és a dir, 60·0.

25 = 15. Així, el primer quartil té 15 valors de la variable menors i la resta majors. A la columna de freqüències acumulades, el primer nombre major o igual que 15 és 38, que correspon al valor de la variable 2. Per tant el primer quartil és 2 (o amb millor aproximació un valor entre 1 i 2). De la mateixa manera el 50 % de 60 és 30, és a dir el quartil 2 (Mitjana) seria també 2 (o de nou, un valor entre 1 i 2). El 75% de 60 seria 45 i d'aquesta manera el quartil 3 seria 4 (o un valor entre 3 i 4) ja que el valor major a 45 és 60, que correspon al valor 4 de la variable objecte d'estudi. Finalment, el percentil 65 correspon al valor 3 ja que 65 % de 60 és igual a 39 i el valor major que 39 és 42.

Resum:

25 % de 60 = 15 → 38 > 15 > 11 → $Q_1 = 2$

50 % de 60 = 30 → 38 > 30 > 11 → Me = $Q_2 = 2$

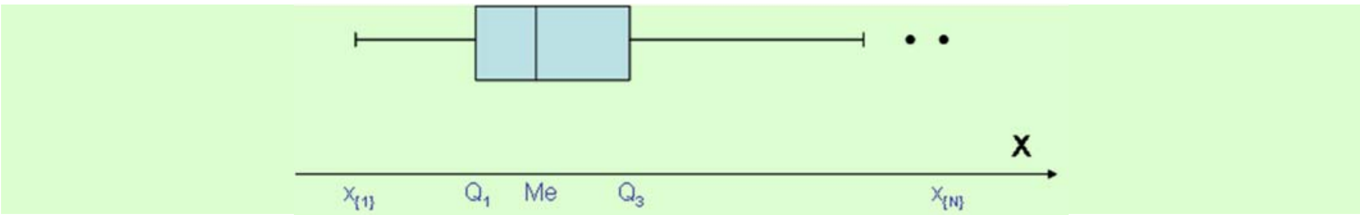
75 % de 60 = 45 → 60 > 45 > 42 → $Q_3 = 4$

65 % de 60 = 39 → 42 > 39 > 38 → $P_{65} = 3$

Les mesures de posició ens permeten realitzar un altre tipus de gràfic estadístic que s'anomena el **gràfic *de caixa***.

Per a realitzar aquest gràfic, es construeix una *caixa* (ja siga horitzontal o vertical), els costats de la qual coincideixen amb el *primer i tercer quartil* Q_1 i Q_3. Per tant, la caixa comprèn el 50 % de les observacions realitzades. Dins de la dita caixa, s'inclou un segment (o bé un punt) que correspon a la *mitjana*.

De cada costat de la caixa part un segment que s'estén fins als valors corresponents a les observacions *mínima i màxima* $x_{\{1\}}$ i $x_{\{N\}}$.



Activitats resoltes

S'està realitzant un control de qualitat sobre les fallades d'unes determinades màquines. Per a això, es comptabilitzen les fallades de N = 13 màquines durant un mes, obtenint els següents nombres de fallades: 2, 5, 3, 2, 0, 4, 1, 7, 4, 2, 1, 0, 2. Utilitzant aquests valors obtindre les mesures de tendència central i resumir en una taula de freqüències la informació obtinguda del nombre de fallades mensuals de les màquines, obtenint la mitjana aritmètica d'una altra manera.

$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N}[x_i]}{N} = \frac{2+5+3+2+0+4+1+7+4+2+1+0+2}{13} =$ **2.54** fallades/mes

Mo=**2 fallades/mes**

$Q_1 = x_{[4]}$=**1 fallada/mes**

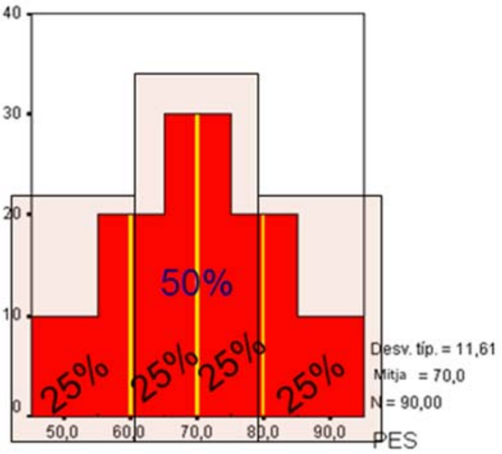
$Q_3 = x_{[10]}$=**4 fallades/mes**

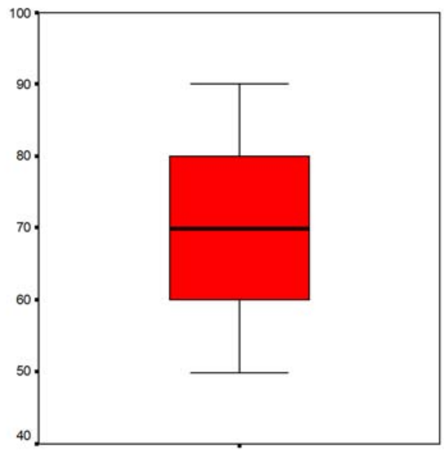
Valors	0	1	2	3	4	5	6	7
Freqüència absoluta	2	2	4	1	2	1	0	1
Freqüència relativa	0.154	0.154	0.307	0.077	0.154	0.077	0	0.077
Freqüència relativa acumulada	0.154	0.308	0.615	0.692	0.846	0.923	0.923	1

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{k}[f_i \cdot x_i] = 0.154\cdot 0 + 0.154\cdot 1 + 0.307\cdot 2 + 0.077\cdot 3 + 0.154\cdot 4 + 0.077\cdot 5 + 0.077\cdot 7 = \mathbf{2.54} \quad \text{fallos/mes}$$

$\bar{x} = \sum_{i=1}^{k}[f_i \cdot x_i]$=0.154·0+0.154·1+0.307·2+0.077·3+0.154·4+0.077·5+0.077·7=**2.54 fallades/mes**

S'arreplega informació sobre el pes de 90 xics en una classe de Matemàtiques. Determinar els centils que ens permeten realitzar el gràfic de caixa.





Primer quartil = percentil 25 = 60 Kg.

Tercer quartil= percentil 75= 80 kg.

Activitats proposades

29. Dibuixar un diagrama de caixa coneixent les següents dades.

Mínim valor = 2; quartil 1 = 3; mitjana = 6; quartil 3 = 7; màxim valor = 12.

30. Un corredor de marató entrena, de dilluns a divendres recorrent les distàncies següents: 2, 3, 3, 6 i 4, respectivament. Si el dissabte també entrena:

31. Quants quilòmetres ha de recórrer perquè la mitjana siga la mateixa?

I perquè la mitjana no varie?
I perquè la moda no varie?

32. El salari mensual en euros dels 6 treballadors d'una empresa tèxtil és el que es presenta. Quin dels tres tipus de mesures de tendència central descriu millor els sous de l'empresa?

1700	1400	1700	1155	1340	4565

33. Quin valor o valors podríem afegir a aquest conjunt de valors de la variable perquè la mitjana continue sent la mateixa?

12	19	24	23	23	15	21	32	12	6	32	12	12	21

Ixen 25 places per a un lloc d'auxiliar d'infermeria i es presenten 200 persones amb les següents notes.

notes	3	4	5	6	7	8	9	10
n_i	6	34	25	56	29	10	30	10

a) Amb quina nota s'obté una de les places mitjançant l'examen?
b) Quin percentil és la nota 5?

6. MESURES DE DISPERSIÓ

6.1. Mesures de desviacions

Les mesures de tendència central resulten insuficients a l'hora de descriure una mostra. A més de les tendències, és necessari disposar de mesures sobre la variabilitat de les dades. Dins d'aquestes mesures, estudiarem les mesures de desviacions i els rangs.

Les mesures de desviacions arrepleguen les desviacions dels valors de la variable respecte d'una mesura de tendència central.

La ***variança*** es defineix com: $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left[(x_i-\overline{x})^2\right]}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} {x_i}^2}{N} - \overline{x}^2$

Els seus principals avantatges són la seua manejabilitat matemàtica i que utilitza totes les observacions. Els seus principals inconvenients són el ser molt sensible a observacions extremes i que la seua unitat és el quadrat de la unitat original de la mostra.

La **desviació típica** és l'arrel quadrada de la variança i té el principal avantatge que utilitza les mateixes unitats que els valors de la variable originals.

Observa que la desviació típica és una distància, la distància dels valors de la variable a la mitja. Recorda que l'arrel quadrada és sempre un nombre positiu.

Associat a la mitjana i la desviació típica, es defineix el **coeficient de variació**, definit en mostres amb mitjana diferent de zero com: $g = \frac{s}{|\overline{x}|}$

Aquest coeficient és adimensional (no té unitats i se sol expressar en percentatge), el que resulta un gran avantatge, ja que permet comparar la variabilitat de distintes mostres, independentment de les seues unitats de mesura. Alguns autors defineixen aquest coeficient utilitzant la mitjana al denominador, en compte del seu valor absolut. Valors del coeficient de variació majors del 100 % indiquen que la mitjana no es pot considerar representativa del conjunt de valors de la variable.

Exemple:

- La nota mitjana de 6 alumnes d'una mateixa classe de 4t d'ESO en Matemàtiques és de 5. Si la variança és 0.4, la desviació típica serà de 0.632, per tant la mitjana és prou homogènia en la distribució. Les notes que s'han obtingut estan situades al voltant de la nota mitjana 5.

Activitats resoltes

- El propietari d'una instal·lació mixta solar-eòlica està realitzant un estudi del volum d'energia que és capaç de produir la instal·lació. Per a això, mesura la dita energia al llarg d'un total de N = 16 dies que considera prou representatius. L'energia (en quilowatt, KWh) produïda en els dits dies per dues instal·lacions es troba arreplegada a la taula següent:

Generació solar	13.1	10.5	4.1	14.8	19.5	11.9	18	8.6
Generació eòlica	8.5	14.3	24.7	4	2.3	6.4	3.6	9.2
Generació solar	5.7	15.9	11.2	6.8	14.2	8.2	2.6	9.7
Generació eòlica	13.5	1.4	7.6	12.8	10.3	16.5	21.4	10.9

Utilitzant aquests valors de la variable calcula les mesures de dispersió estudiades, comparant els resultats a les dues instal·lacions

$$\overline{x}=\frac{\sum_{i=1}^{N}x_i}{N}=\frac{13'1+10'5+4'1+14'8+19'5+11'9+18+8'6+5'7+15'9+11'2+6'8+14'2+8'2+2'6+9'7}{16}=10'925$$

Kwh

$$\overline{y}=\frac{\sum_{i=1}^{N}y_i}{N}=\frac{8'5+14'3+24'7+4+2'3+6'4+3'6+9'2+13'5+1'4+7'6+12'8+10'3+16'5+21'4+10'9}{16}=10'463$$

Kwh

$$s_x^2=\frac{\sum_{i=1}^{N}x_i^2}{N}-\overline{x}^2=\frac{13'1^2+10'5^2+4'1^2+14'8^2+19'5^2+11'9^2+18^2+8'6^2+5'7^2+15'9^2+11'2^2+6'8^2+14'2^2+8'2^2+2'6^2+9'7^2}{16}=\frac{141'5}{16}-10'9^2=22'16$$

$$s_y^2=\frac{\sum_{i=1}^{N}y_i^2}{N}-\overline{y}^2=\frac{8'5^2+14'3^2+24'7^2+4^2+2'3^2+6'4^2+3'6^2+9'2^2+13'5^2+1'4^2+7'6^2+12'8^2+10'3^2+16'5^2+21'4^2+10'9^2}{16}=\frac{150'48}{16}-10'5^2=41'01$$

$$g_x=\frac{s_x}{|\overline{x}|}=\frac{\sqrt{22'16}}{10'9}=\frac{4'7}{10'9}=0'43$$

$$g_y=\frac{s_y}{|\overline{y}|}=\frac{\sqrt{41'01}}{10'5}=\frac{6'4}{10'5}=0'61$$

La mitjana de la primera instal·lació és més representativa que la mitjana de la segona ja que el coeficient de variació és menor en la primera. Les dades estan menys agrupades a la segona de les instal·lacions. La seua desviació típica és molt major.

- S'està realitzant un control de qualitat sobre les fallades d'unes determinades màquines. Per a això, es comptabilitzen les fallades de N = 13 màquines durant un mes, obtenint els següents nombres de fallades. Utilitzant aquests valors presentats a la taula de freqüències obtindre les mesures de dispersió estudiades.

Valors	0	1	2	3	4	5	6	7
Freqüència absoluta	2	2	4	1	2	1	0	1
Freqüència relativa	0.154	0.154	0.307	0.077	0.154	0.077	0	0.077
Freqüència relativa acumulada	0.154	0.308	0.615	0.692	0.846	0.923	0.923	1

$$s^2=\sum_{i=1}^{k}\left[f_i\cdot(x_i-\overline{x})^2\right]=0.154\cdot(-2.54)^2+0.154\cdot(-1.54)^2+0.307\cdot(-0.54)^2+0.077\cdot 0.46^2+0.154\cdot 1.46^2+$$

$$+0.077\cdot 2.46^2+0.077\cdot 4.46^2=\mathbf{3.80}\quad(\mathbf{fallos/mes})^2$$

Una altra forma de realitzar aquests mateixos càlculs és:

Valors	0	1	2	3	4	5	6	7	Suma
Freqüència absoluta	2	2	4	1	2	1	0	1	13
x_i^2	0	1	4	9	16	25	36	49	
x_i^2·Fr. Abs.	0	2	16	9	32	25	0	49	133

Apliquem la fórmula: $s^2=\frac{\sum_{i=1}^{N}x_i^2}{N}-\overline{x}^2$ i obtenim que

s^2 = 133/13 – 2.54^2 = 10.23 – 6.45 = 3.80, por lo que s = 1.95.

Activitats proposades

34. Un grup de gossos pastor alemany té una mitjana de 70 kg i desviació típica 2 kg. Un conjunt de gossos canitx té una mitjana de 15 kg i desviació típica 2 kg. Compara ambdós grups.

35. El temps, en minuts, que un conjunt d'estudiants de 4t ESO dedica a preparar un examen de Matemàtiques és:

234	345	345	123	234	234	556
234	234	345	223	167	199	490

36. Les qualificacions d'aqueix conjunt d'estudiants són les següents:

4	5	6	7	6	5	8
9	8	7	8	7	6	8

a) Què haurem de fer per a comparar la seua variabilitat? b) En quin conjunt els valors de la variable estan més dispersos? c) És la mitjana sempre major que la desviació típica?

6.2. Els rangs

Aquestes mesures proporcionen informació sobre l'interval total de valors que pren la mostra analitzada.

El **rang total** o **recorregut** és la diferència entre els valors màxims i mínims que pren la variable en la mostra:

$$R = x_{\{N\}} - x_{\{1\}}$$

El **recorregut interquartílic** és la diferència entre el tercer i el primer quartil:

$$R_I = Q_3 - Q_1$$

Exemple:

- S'està realitzant un control de qualitat sobre les fallades d'una determinada màquina. Per a això, es comptabilitzen les fallades de N = 13 màquines durant un mes, obtenint els següents nombres de fallades: 2, 5, 3, 2, 0, 4, 1, 7, 4, 2, 1, 0, 2. Utilitzant aquests valors obtenim el rang total igual a 7 i el recorregut interquartílic igual a 3.

Activitats resoltes

- Ixen 25 places per a un lloc de caixer en un supermercat i es presenten 200 persones. La següent informació arreplega les notes d'un test de coneixements bàsics.

notes	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n_i	6	4	30	25	56	29	10	30	10

Calcula el rang total de la variable objecte d'estudi.

Activitats proposades

37. S'ha arreplegat una mostra de 20 recipients els diàmetres dels quals són:

0'91 1'04 1'01 1 0'77 0'78 1 1'3 1'02 1
1 0'88 1'26 0'92 0'98 0'78 0'82 1'2 1'16 1'14

a)Calcula totes les mesures de dispersió que conegues.

b) A partir de quin valor de diàmetre dels recipients es consideren el 20 % amb major diàmetre?

7. DISTRIBUCIONS BIDIMENSIONALS

Aquest apartat se centra en l'anàlisi de dades bidimensionals, en el que són dues les variables d'interès. D'aquesta manera, quan s'està analitzant una població i se selecciona una mostra, per a cada individu es prenen dos valors, corresponents a dues característiques (o variables) distintes. En aquest sentit, pot ser interessant considerar simultàniament els dos caràcters a fi d'estudiar les possibles relacions entre ells.

7.1. Taules de freqüència d'una variable bidimensional

Quan es volen resumir els resultats d'una mostra bidimensional utilitzant una taula de freqüències (ja siga per tractar-se d'una variable discreta, o perquè es desitgen agrupar les observacions d'una variable contínua), és necessari utilitzar el que es denomina *taula de doble entrada* (o bidimensional). Siguen $x_1, x_2, \ldots, x_k$ les modalitats de la primera variable e $y_1, y_2, \ldots, y_p$ les de la segona. Aquestes modalitats poden correspondre tant als valors que es donen en la mostra (si la variable és discreta), com a les marques de classe dels intervals utilitzats (si la variable és contínua). Per a construir la taula de freqüències, s'utilitzen les freqüències absolutes n_{ij} corresponents a les observacions que prenen simultàniament valors corresponents a les classes x_i e y_j. Òbviament, s'ha de verificar que:

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p}\left[n_{ij}\right] = N$$

Amb açò, la taula de freqüències absolutes es presenta com:

	y_1	y_2	……	y_p	$n_{i\cdot}$
x_1	n_{11}	n_{12}	……	n_{1p}	$n_{1\cdot}$
x_2	n_{21}	n_{22}	……	n_{2p}	$n_{2\cdot}$
……	……	……	……	……	……
x_k	n_{k1}	n_{k2}	……	n_{kp}	$n_{k\cdot}$
$n_{\cdot j}$	$n_{\cdot 1}$	$n_{\cdot 2}$	……	$n_{\cdot p}$	N

Els valors $n_{i\cdot}$ arrepleguen les freqüències absolutes de la classe x_i, mentres que n_j és la suma de freqüències absolutes de la classe $y_{j.}$, amb la qual cosa es verifica:

$$n_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{p}\left[n_{ij}\right] \qquad n_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{k}\left[n_{ij}\right]$$

$$\sum_{i=1}^{k}\left[n_{i\cdot}\right] = N \qquad \sum_{j=1}^{p}\left[n_{\cdot j}\right] = N$$

De la mateixa manera, es pot realitzar una taula de freqüències relatives f_{ij}, utilitzant els quocients entre les freqüències absolutes i el nombre d'observacions:

$$f_{ij} = \frac{n_{ij}}{N} \leq 1$$

Activitats resoltes

- El propietari d'una instal·lació mixta solar-eòlica està realitzant un estudi del volum d'energia que és capaç de produir la instal·lació. Per a això, mesura la dita energia al llarg d'un total de $N = 16$ dies que considera prou representatius. L'energia (en *kWh*) produïda als dits dies per les instal·lacions solar i eòlica es poden resumir a les següents taules de doble entrada de freqüències absolutes i de freqüències relatives:

		Energia eòlica				
		[0, 6.5]	(6.5, 13]	(13, 19.5]	(19.5, 26]	$n_{i\cdot}$
Energia solar	[0, 5]	0	0	0	2	**2**
	(5, 10]	0	3	2	0	**5**
	(10, 15]	2	3	1	0	**6**
	(15, 20]	3	0	0	0	**3**
	$n_{\cdot j}$	**5**	**6**	**3**	**2**	**16**

		Energia eòlica				
		[0, 6.5]	(6.5, 13]	(13, 19.5]	(19.5, 26]	$f_{i\cdot}$
Energia solar	[0,5]	0	0	0	0.125	**0.125**
	(5, 10]	0	0.1875	0.125	0	**0.3125**
	(10, 15]	0.125	0.1875	0.0625	0	**0.375**
	(15, 20]	0.1875	0	0	0	**0.1875**
	$f_{\cdot j}$	**0.3125**	**0.375**	**0.1875**	**0.125**	**1**

7.2. Representació gràfica d'una variable bidimensional

Igual que al cas d'una mostra unidimensional, en nombroses ocasions resulta interessant realitzar una representació gràfica d'una mostra bidimensional.

Un mode senzill de representar una mostra bidimensional és mitjançant el denominat **diagrama de dispersió** o **núvol de punts**. Aquesta tècnica consisteix a representar al pla (x, y) els valors obtinguts en la mostra.

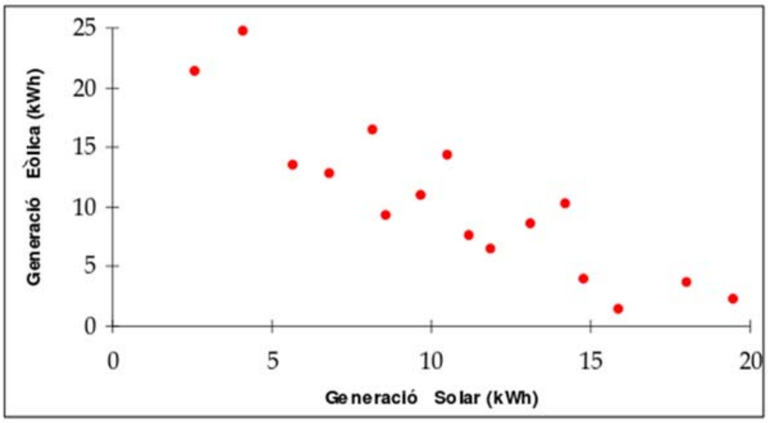


Diagrama de dispersió de la generació solar i eòlica (en kWh) de l'activitat resolta

La figura anterior mostra el diagrama de dispersió. Es pot observar l'existència d'una dependència inversa.

7.3. Mesures en una variable bidimensional. Coeficient de correlació

Quan s'està analitzant una mostra bidimensional, es poden calcular les mesures que caracteritzen a cada una de les variables de la mostra per separat, tal com s'ha descrit anteriorment. Però en aquest cas es pot fer un pas més i calcular algunes mesures conjuntes, que tenen en compte simultàniament els valors que prenen ambdues variables en cada individu.

Igual que quan s'analitza una única característica, suposarem que es pren una mostra de grandària N de la població, és a dir, que està composta per N individus (o observacions), dels quals es desitja analitzar les característiques (o variables) X e Y. Açò dóna lloc a l'obtenció de N valors per a cada una de les dos variables: (x_1, y_1), (x_2, y_2),…, (x_N, y_N). De nou, aquests valors no se suposen ordenats, sinó que el subíndex indica l'orde en què han sigut seleccionats.

Seguint aquesta notació es poden formular els càlculs dels moments respecte a l'origen i respecte a la mitjana per a una variable bidimensional. Definim, per tant:

Moments respecte a l'origen d'orde (r, s) com:

$$a_{r,s} = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left[x_i^r \cdot y_i^s\right]}{N}$$

Observa que els moments respecte a l'origen d'orde (1, 0) i (0, 1) coincideixen amb les mitgenes d'ambdues variables:

$$a_{1,0} = \overline{x} \qquad a_{0,1} = \overline{y}$$

També resulta d'interès al moment d'orde (1, 1):

$$a_{1,1} = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left[x_i \cdot y_i\right]}{N}$$

Anàlogament, es poden definir els moments respecte a la mitjana d'orde (r, s):

$$m_{r,s} = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left[\left(x_i - \overline{x}\right)^r \cdot \left(y_i - \overline{y}\right)^s\right]}{N}$$

Els moments respecte a la mitjana d'orde (2, 0) i (0, 2) coincideixen amb les variàncies d'ambdues variables:

$$m_{2,0} = s_X^{\,2} \qquad m_{0,2} = s_Y^{\,2}$$

El moment respecte a la mitjana d'orde (1, 1), que es denomina **covariància** o moment mixt, és de gran importància:

$$m_{1,1} = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left[\left(x_i - \overline{x}\right) \cdot \left(y_i - \overline{y}\right)\right]}{N}$$

Alternativament a la fórmula anterior, la covariància es pot calcular a partir dels moments respecte al origen, segons la fórmula:

$$m_{1,1} = a_{1,1} - a_{1,0} \cdot a_{0,1} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i \cdot y_i)}{N} - \bar{x} \cdot \bar{y}$$

La covariància, igual que la variança, té l'inconvenient que depèn de les unitats de la mostra.

Per aquest motiu, s'utilitza el **coeficient de correlació** lineal de Pearson (que es denota, indistintament, com ρ o r):

$$\rho = r = \frac{m_{1,1}}{s_x \cdot s_y} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i \cdot y_i)}{N} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{s_x \cdot s_y}$$

Aquest coeficient tindrà el signe de la covariància i ens indicarà si la dependència entre les dues variables objecte d'estudi són dependents positiva o negativament. El coeficient de correlació (o simplement correlació) pren un valor comprés entre –1 i 1. Si la correlació és positiva es diu que hi ha dependència directa entre *X* i *Y* (a un augment d'una de les dos variables li correspon una tendència a l'augment a l'altra). En canvi, si la correlació és negativa, es diu que hi ha una dependència inversa (a un augment d'una de les dos variables li correspon una tendència a la disminució a l'altra).

Activitats resoltes

- El propietari d'una instal·lació mixta solar-eòlica està realitzant un estudi del volum d'energia que és capaç de produir la instal·lació. Per a això, mesura la dita energia al llarg d'un total de *N* = 16 dies que considera prou representatius. L'energia (en kWh) produïda als dits dies per les instal·lacions solar i eòlica es troba arreplegada a la taula següent:

Generació solar (x_i)	13.1	10.5	4.1	14.8	19.5	11.9	18	8.6	5.7	15.9	11.2	6.8	14.2	8.2	2.6	9.7
Generació eòlica (y_i)	8.5	14.3	24.7	4	2.3	6.4	3.6	9.2	13.5	1.4	7.6	12.8	10.3	16.5	21.4	10.9

Utilitzant aquestes produccions, calcularem la covariància i el coeficient de correlació, denotant a la generació solar com a variable ***X*** i la generació eòlica com a variable ***Y***. Afegim noves files a la nostra taula:

Generació solar (x_i)	13.1	10.5	4.1	14.8	19.5	11.9	18	8.6	5.7	15.9	11.2	6.8	14.2	8.2	2.6	9.7
Generació eòlica (y_i)	8.5	14.3	24.7	4	2.3	6.4	3.6	9.2	13.5	1.4	7.6	12.8	10.3	16.5	21.4	10.9
x_i^2	171.6	110.3	16.81	219.0	380.3	141.6	324	73.96	32.49	252.8	125.4	46.24	201.6	67.24	6.76	94.09
y_i^2	72.25	204.5	610.1	16	5.29	40.96	12.96	84.64	182.3	1.96	57.76	163.8	106.1	272.3	457.9	118.8
$x_i * y_i$	111.4	150.2	101.3	59.2	44.85	76.16	64.8	79.12	76.95	22.26	85.12	87.04	146.2	135.3	55.64	105.7

Prèviament calculem la mitjana i la desviació típica de cada variable (que ja coneixem d'una activitat resolta anterior). Sumant la primera fila i dividint per *N* = 16, obtenim la mitjana de la Generació Solar en Kwh. Recorda $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$; per tant

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} = \frac{13'1 + 10'5 + 4'1 + 14'8 + 19'5 + 11'9 + 18 + 8'6 + 5'7 + 15'9 + 11'2 + 6'8 + 14'2 + 8'2 + 2'6 + 9'7}{16} = 10'925$$ Kwh

Sumant la segona fila i dividint per *N* = 16 obtenim la mitjana de la Generació Eòlica en Kwh:

$$\bar{y}=\frac{\sum_{i=1}^{N} y_i}{N}=\frac{8'5+14'3+24'7+4+2'3+6'4+3'6+9'2+13'5+1'4+7'6+12'8+10'3+16'5+21'4+10'9}{16}=10'463$$ Kwh

A la tercera fila hem calculat els quadrats dels valors de la primera variable i els utilitzem per a calcular la variança: Recorda $s_x{}^2=\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i{}^2}{N}-\bar{x}^2$; per tant

$$s_x{}^2=\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i{}^2}{N}-\bar{x}^2=\frac{13'1^2+10'5^2+4'1^2+14'8^2+19'5^2+11'9^2+1'8^2+8'6^2+5'7^2+15'9^2+11'2^2+6'8^2+14'2^2+8'2^2+2'6^2+9'7^2}{16}=\frac{1415}{16}-10'9^2=22'16$$

A la quarta fila els quadrats dels valors de la segona variable i calculem la seua variança tal que

$$s_y{}^2=\frac{\sum_{i=1}^{N} y_i{}^2}{N}-\bar{y}^2=\frac{8'5^2+14'3^2+24'7^2+4^2+2'3^2+6'4^2+3'6^2+9'2^2+13'5^2+1'4^2+7'6^2+12'8^2+10'3^2+16'5^2+21'4^2+10'9^2}{16}=\frac{150'48}{16}-10'5^2=41'01$$

La desviació típica és l'arrel quadrada de la variança, per tant:

$$s_x=\sqrt{22'16}=4'71 \text{ y } s_y=\sqrt{41'01}=6'4$$

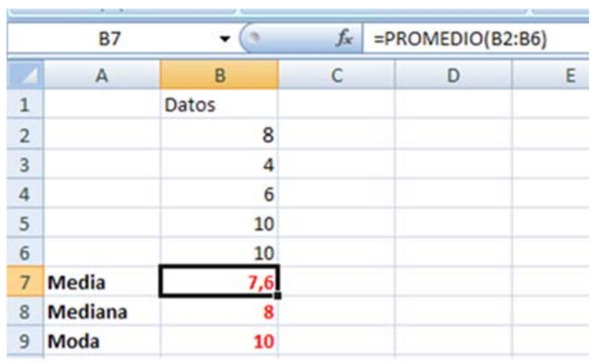
Per a calcular el coeficient de correlació calculem a la cinquena fila els productes de la variable *x* per la variable *y*. Així, 13'1*8'5 = 111'4. Volem calcular el terme: $\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i\cdot y_i)}{N}$. En sumar obtenim 1401'2, que dividim entre 16, li restem el producte de les mitges i dividim pel producte de les desviacions típiques:

$$\rho=\frac{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i\cdot y_i)}{N}-\bar{x}\cdot\bar{y}}{s_x\cdot s_y}=\frac{1401'2-(10'9\cdot 10'5)}{4'71\cdot 6'4}=\frac{-26'728}{4'71\cdot 6'4}=-0'887$$

Aquest coeficient de correlació negatiu i pròxim a –1 ens indica que la relació entre les dos variables és negativa i prou important.

Utilitza l'ordinador

- *Nieves ha tingut en Matemàtiques les notes següents: 8, 4, 6, 10 i 10. Calcula la seua mitjana, la seua moda i la seua mediana.*



B7	=PROMEDIO(B2:B6)			
	A	B	C	D	E
1		Datos			
2		8			
3		4			
4		6			
5		10			
6		10			
7	Media	7,6			
8	Mediana	8			
9	Moda	10			

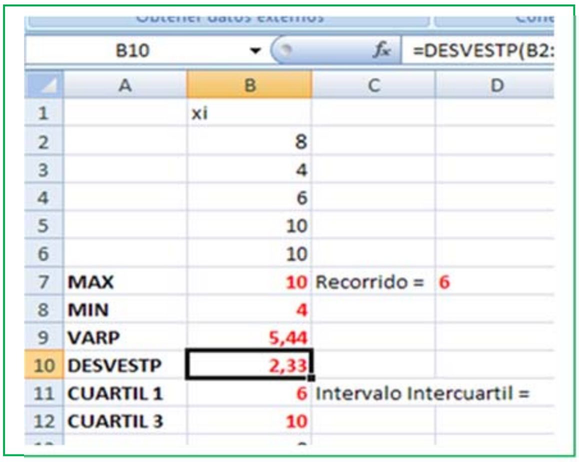
Per a calcular la mitjana, la mediana i la moda amb el full de càlcul, copiem a la casella B2, B3… les dades: 8, 4, 6, 10 i 10. Escrivim a la casella A7, Mitjana, i per a calcular la mitjana escrivim un signe igual en B7. Busquem, desplegant les possibles funcions, la funció MITJANA, i escrivim

=PROMEDIO(B2:B6),

que significa que calcule la mitjana dels valors que hi ha a les caselles des de B2 fins a B6.

De la mateixa manera calculem la mitjana buscant a les funcions o escrivint =MEDIANA(B2:B6) i la moda buscant a les funcions o escrivint =MODA(B2,B6).

(Nota del traductor: el nom de les funcions depèn de l'idioma en què estiga configurat el full de càlcul)



B10 | =DESVESTP(B2:

	A	B	C	D
1		xi		
2		8		
3		4		
4		6		
5		10		
6		10		
7	MAX	10	Recorrido =	6
8	MIN	4		
9	VARP	5,44		
10	DESVESTP	2,33		
11	CUARTIL 1	6	Intervalo Intercuartil =	
12	CUARTIL 3	10		

Igual que hem calculat la mitjana, la mediana i la moda, el full de càlcul es pot utilitzar per a obtindre:

- El recorregut calculant MAX – MIN $\to$ 6.
- La variança utilitzant VARP $\to$ 5'44.
- La desviació típica usant DESVESTP $\to$2'33
- Els quartils, (QUARTIL), sent el quartil 0 el mínim; el quartil 1, Q1; el quartil 2, la mediana; el quartil 3, Q3; i el quartil 4, el màxim.
- Q1 = 6.
- Q3 = 10.
- Interval interquartílic = 10 – 6 = 4.
-

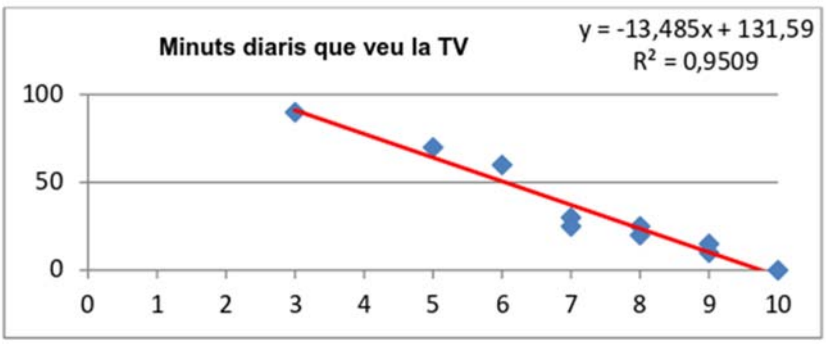
Utilitza l'ordinador

- Preguntem a 10 alumnes de 4t d'ESO per les seues qualificacions en Matemàtiques, pel nombre de minuts diaris que veuen la televisió, pel nombre d'hores setmanals que dediquen a l'estudi, i per la seua estatura en centímetres. Les dades s'arrepleguen a la taula adjunta. Volem dibuixar els núvols de punts que els relacionen amb les qualificacions de Matemàtiques, el coeficient de correlació i la recta de regressió.

Qualificacions de Matemàtiques	10	3	7	8	5	9	9	8	6	7
Minuts diaris que veu la TV	0	90	30	20	70	10	15	25	60	25
Hores setmanals d'estudi	15	2	9	12	7	14	13	11	7	8
Estatura (en cm)	177	168	157	159	163	179	180	175	169	170

Per a fer-ho, entrem en Excel, i copiem les dades. Seleccionem la primera i la segona fila, després la primera i la tercera i finalment la primera fila i la quarta.

Amb la primera i segona files seleccionades, inserirem, *Dispersió* i triem el núvol *de punts*. Podem aconseguir que l'eix d'abscisses vaja de 0 a 10 en "Donar *format a l'eix*". Punxem sobre un punt del núvol, i triem "*Agregar línia de tendència*". Perquè dibuixe l'ordinador la recta de regressió la línia de tendència ha de ser *Lineal*. En la pantalla que apareix marquem la casella que diu: "*Presentar equació al gràfic*" i la casella que diu "*Presentar el valor de R quadrat al gràfic*".



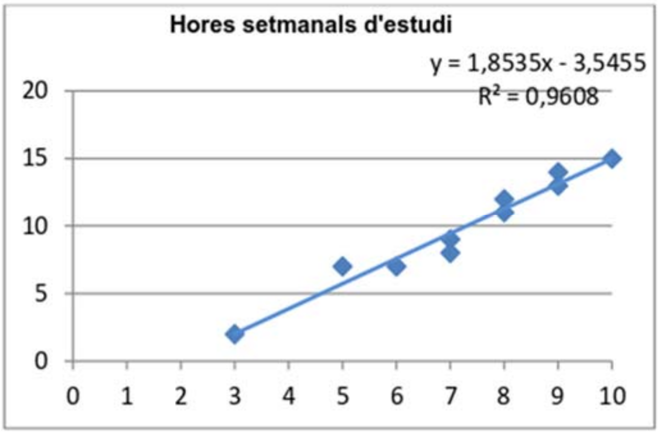
Observa, la recta de regressió, en color roig, és decreixent i la seua equació és aproximadament:

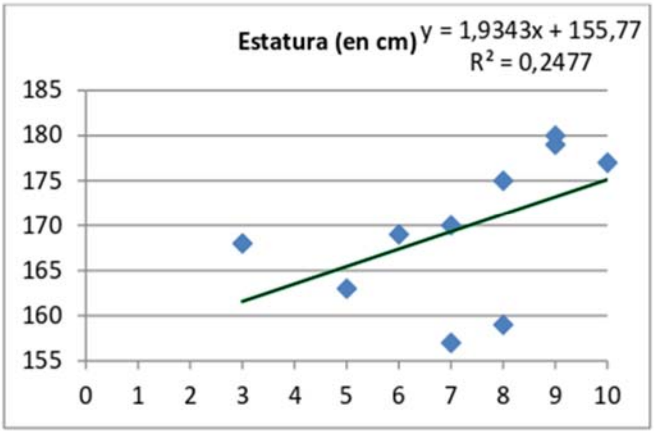
$$y = -13.5\,x + 132.$$

El quadrat del coeficient de correlació és ρ^2 = 0.95. La correlació és negativa i alta:

$$\rho = \sqrt{0'95} = -0{,}975$$

Fem el mateix amb la primera i tercera fila i amb la primera i quarta fila. Obtenim els gràfics:





Observa que en ambdós casos el pendent de la recta de regressió és positiva però al primer el coeficient de correlació, positiu, és pròxim a 1, $\rho = \sqrt{0.96} = 0.98$. La correlació és alta i positiva.

Al segon $\rho = \sqrt{0.25} = 0.5$.

Activitats proposades

38. S'han mesurat els pesos i altures de 6 persones, com a mostra de les persones que estan en una fila o cua d'espera, obtenint-se els resultats següents:

Pesos (kg)	65	60	65	63	68	68
Altures (cm)	170	150	168	170	175	180

Es demana:

a) Calcular les mitganes i les variàncies d'aqueixos dos conjunts de dades unidimensionals.

b) Quines mesures estan més disperses, els pesos o les altures?

c) Representar gràficament aqueix conjunt de dades bidimensionals. Calcular la covariància i interpretar el seu valor.

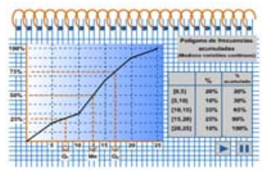
d) Donar una mesura de la correlació entre ambdues variables. Interpretar el seu valor.

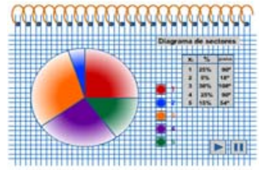
e) CURIOSITATS. REVISTA

f) UTILITZEM L'ESTADÍSTICA PER DAMUNT DE LES NOSTRES POSSIBILITATS?

g)

h) A les últimes dècades l'ús de dades estadístiques és una de les principals maneres amb què es presenta informació de qualsevol tipus, provinga la seua font dels Mitjans de comunicació, a través de missatges publicitaris o relacionada amb treballs d'investigació. Actualment





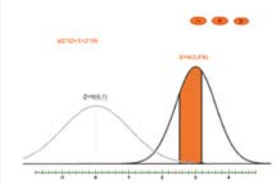
consumir informació es converteix, moltes vegades, entrar en un món de nombres, percentatges, gràfics, probabilitats, mapes i altres conceptes bàsics d'aquesta disciplina que costa entendre.

i)

j)

k)

l) "TINC ELS MEUS RESULTATS FA TEMPS, PERÒ NO SÉ COM ARRIBAR A ELLS"



m) Aquesta expressiva frase de Gauss -descobridor de la campana que porta el seu nom, i que al·ludeix a la distribució normal quan la quantitat de dades és prou gran-, és aplicable a moltes de les informacions errònies que veiem diàriament. Tenen les dades però no saben com arribar al nucli de la seua interpretació.

n) Moltes vegades quan un mitjà de comunicació vol impressionar mitjançant un titular sobre la gravetat d'una situació que afecta tota la població, fa ús de nombres absoluts en compte de percentatges.

o)


EL PAÍS

POLÍTICA

PORTADA | INTERNACIONAL | POLÍT

MONCLOA | FERRAZ | GÉNOVA | + PARTIDOS | CONGRESO | OPINIÓN | SUCESOS

ESTÁ PASANDO | El órdago soberanista catalán | La imputación de la Infanta | Baltasar Garzón

OPERACIÓN RETORNO

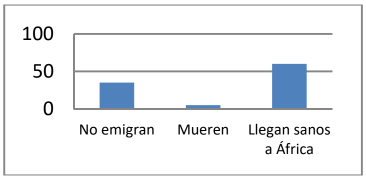
40 muertos en carretera en Semana Santa

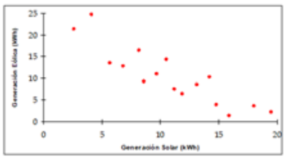
- Los principales atascos de la jornada se concentran en la zona centro
- Consulta el estado de las carreteras

EL PAÍS | Madrid | 9 ABR 2012 - 09:47 CET | 52

p) Per exemple: Quan llegim el titular sens dubte que tots pensem que 40 morts són molts morts siguen per accident de tràfic o per una altra causa. L'argúcia està ben pensada per a cridar l'atenció del lector, però informativament parlant aquesta presentació dels fets utilitzant nombres sense comparar-los amb altres nombres es mereix *"un suspens"*. Les dades estadístiques no "parlen per si mateixes". Una dada sempre cal relacionar-la amb altres dades per a comprendre la variabilitat que ha experimentat el cas que estem analitzant. Si la notícia s'haguera acompanyat amb les estadístiques de morts per accident de tràfic dels últims anys en períodes vacacionals de quatre dies, ràpidament el lector es donaria compte que no és per a alarmar-se més que altres vegades ja que el nombre de morts ni ha pujat ni ha baixat, és més o menys el mateix que en qualsevol altre pont semblant en dies. O siga, aquest "impactant" titular recolzat en dades numèriques, en realitat *ni tan sols és notícia*…

RESUM

Població estadística, col·lectiu o univers	El conjunt de tots els individus (persones, objectes, animals, etc.) que continguen informació sobre el fenomen que s'estudia.	Nombre de persones a Espanya entre 16-65 anys
Mostra	És un subconjunt representatiu que se selecciona de la població i sobre el qual es va a realitzar l'anàlisi descriptiva. La grandària de la mostra és el nombre dels seus elements. Quan la mostra comprèn a tots els elements de la població, es denomina cens.	Nombre de persones en un barri de Madrid entre 16 i 65 anys.
Variable observable o estadística *X*	En general, suposarem que s'està analitzant una determinada població, de la que ens interessa certa característica que ve donada per la variable *X*.	Les variables que estan baix estudi es poden classificar en dues categories: - Variables qualitatives o atributs (dades no mètrics) - Variables quantitatives, que tenen un valor numèric.
Freqüència absoluta	Nombre de vegades que es repeteix un valor de la variable	Si en tirar un dau hem obtingut 2 vegades el 3, 2 és la freqüència absoluta de 3.
Freqüència relativa	Freqüència absoluta dividit pel nombre d'experiments	Si es realitza un experiment 500 vegades i la freqüència absoluta d'un succés és 107, la freqüència relativa és 107/500.
Freqüència acumulada	Se sumen les freqüències anteriors	
Diagrama de rectangles o barres	Els valors de la variable es representen mitjançant rectangles de la mateixa base i d'altura proporcional a la freqüència. S'indica a l'eix horitzontal la variable i al vertical les freqüències.	
Polígon de freqüències	S'uneixen els punts mitjans superiors d'un diagrama de barres	
Diagrama de sectors	En un cercle es dibuixen sectors d'angles proporcionals a les freqüències	

Mitjana aritmètica	És el quocient entre la suma de tots els valors de la variable i el nombre total de dades.	En les dades 3, 5, 5, 7, 8, la mitjana és: (3+5+5 + 7 + 8)/5 = 28/5 = 5.6.
Mediana	Deixa per davall la mitat dels valors i per damunt l'altra mitat	La mediana és 5
Moda	El valor que més es repeteix.	La moda és 5.
Variança	Mesura de desviació que arreplega les desviacions dels valors de la variable respecte de la mitjana aritmètica.	$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left[(x_i - \bar{x})^2\right]}{N}$
Desviació típica	La desviació típica és l'arrel quadrada de la variança	
Coeficient de variació	Permet comparar la variabilitat de distintes mostres, independentment de les seues unitats de mesura.	$g = \frac{s}{\lvert\bar{x}\rvert}$
Rang total o recorregut	Diferència entre els valors màxims i mínims que pren la variable a la mostra	$R = x_{\{N\}} - x_{\{1\}}$
Recorregut interquartílic	Diferència entre el tercer i el primer quartil	$R_I = Q_3 - Q_1$
Núvol de punts	Un mode senzill de representar una mostra bidimensional. Aquesta tècnica consisteix a representar al pla (*x*, *y*) els valors obtinguts a la mostra.	
Coeficient de correlació	Ens indica si la dependència entre dos variables objecte d'estudi són dependents positiva o negativament.	$\rho = r = \frac{m_{1,1}}{s_x \cdot s_y}$

EXERCICIS I PROBLEMES

Població i mostra. Variables estadístiques. Taules de freqüències

1) Es llança una moneda 700 vegades i s'obté cara 355 vegades. Expressa en una taula les freqüències absolutes, relatives i calcula també les freqüències acumulades absolutes i acumulades relatives de cares i creus en aquest experiment.

2) Es llança un dau 500 vegades i s'obtenen els resultats següents:

Resultat	1	2	3	4	5	6
Nombre de vegades	70	81	92	85		81

a) Quantes vegades ha eixit el 5?

b) Construir taula amb les freqüències absolutes i les freqüències absolutes acumulades

c) Construir una taula amb les freqüències relatives i les freqüències relatives acumulades

3) Una urna que conté 10 boles numerades del 0 al 9, traiem una bola, anotem el nombre i tornem la bola a l'urna. Repetim l'experiment 1000 vegades i s'han obtingut els resultats indicats a la taula:

Resultat	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Freqüència absoluta	79	102			93	98	104	77		
Freqüència relativa			0.12	0'.3					0.1	
Freqüència absoluta acumulada	79	181								
Freqüència relativa acumulada										1

a) Quina és la freqüència absoluta de 9?

b) Quina és la freqüència absoluta acumulada de 2?

c) Quina és la freqüència relativa acumulada d'1?

d) Copia la taula al teu quadern i completa-la.

4) Pepa ha tirat un dau 25 vegades i ha obtingut els resultats següents:

1, 2, 5, 6, 3, 1, 4, 5, 6, 1, 3, 1, 2, 2, 1, 6, 2, 2, 4, 3, 4, 6, 6, 1, 4

a) Construir una taula de freqüències absolutes.

b) Construir una taula de freqüències relatives.

c) Dibuixa un diagrama de barres.

d) Dibuixa un polígon de freqüències i una representació per sectors.

5) En una classe s'ha mesurat la grandària de les mans de cada un dels alumnes, i el resultat en centímetres ha sigut el següent:

19, 18, 20, 19, 18, 21, 19, 17, 16, 20,
16, 19, 20, 21, 18, 17, 20, 19, 22, 21,
23, 21, 17, 18, 17, 19, 21, 20, 16, 19

a) Quina grandària ha sigut el valor mínim? I el màxim? Quin és el rang total de la variable?

b) Construir una taula de freqüències absolutes i una altra de freqüències relatives.

c) Construir una taula de freqüències absolutes acumulades i una altra de freqüències relatives acumulades.

6) Calcula la freqüència absoluta de les dades d'una enquesta en què s'ha triat entre veure la televisió, t, o llegir un llibre, l:

t, l, t, t, t, l, t, t, l, t, l, t, l, t, t, t, l, l, t, l, t, l, t, l, t.

7) La duració en minuts d'unes telefonades ha sigut:

7, 3, 6, 3, 7, 5, 4, 3, 5, 7, 10, 1, 9, 12, 2

Construir una taula de freqüències absolutes i una taula de freqüències relatives.

Gràfics estadístics

8) S'ha preguntat en un poble de la província de Madrid el nombre de germans que tenien i s'ha obtingut la següent taula de freqüències absolutes sobre el nombre de fills de cada família:

Nombre de fills	1	2	3	4	5	6	7	8 o més
Nombre de famílies	46	249	205	106	46	21	15	6

a) Escriu al teu quadern una taula de freqüències relatives.

b) Fes un diagrama de barres de freqüències absolutes i un altre de freqüències relatives.

c) Fes un polígon de freqüències absolutes i un altre de freqüències absolutes acumulades.

9) Fes una enquesta semblant amb els teus companys i companyes de curs preguntant el nombre de germans i confeccionant una taula sobre el nombre de fills i el nombre de famílies.

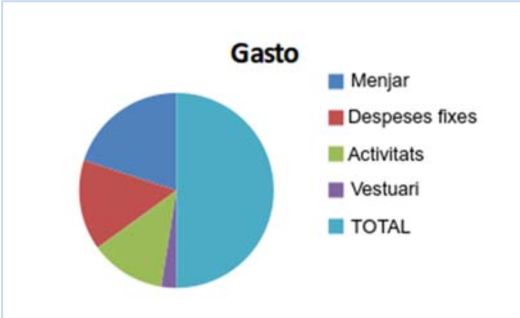
a) Construeix una taula de freqüències relatives

b) Fes un diagrama de barres de freqüències absolutes i relatives. Completa amb un polígon de freqüències

c) Compara la taula de freqüències relatives i el diagrama de barres de freqüències relatives que obtingues amb l'obtingut en l'exercici anterior.

10) Un batut de fruites conté 25 % de taronja, 15 % de plàtan; 50 % de poma i, la resta de llet. Representa en un diagrama de sectors la composició del batut.

11) En un campament d'estiu s'han gastat deu mil euros. El gràfic mostra la distribució del gasto:



1. Menjar: 40 %
2. Neteja i manteniment: 30 %
3. Aigua, gas, electricitat i telèfon: 25 %
4. Vestuari: ....

a) Quin percentatge es va gastar en vestuari?

b) Quants euros es van gastar en menjar?

c) Quant mesura l'angle del sector corresponent a activitats?

12) Busca en revistes o periòdics dues gràfiques estadístiques, retalla-les i apega-les al teu quadern. Moltes vegades aquestes gràfiques tenen errors. Observa-les detingudament i comenta les qüestions següents:

a) Està clara la variable a què es referix? I les freqüències?

b) Són correctes les unitats? Poden millorar-se?

c) Comenta les gràfiques.

13) Es fa una enquesta sobre el nombre de vegades que van al cine uns jóvens al mes. Els valors de la variable estan a la taula:

Vegades que van al cine	0	1	2	3	4	5
Freqüència absoluta	1	7	9	5	2	1

a) Representa un diagrama de barres de freqüències absolutes.
b) Representa un polígon de freqüències relatives.
c) Representa els valors de la variable en un diagrama de sectors.

14) Es fa un estudi sobre el que es recicla en una ciutat i es fa una taula amb el pes en percentatge dels distints tipus de residus:

Tipus de residu	Percentatge
Orgànic	15
Paper i cartó	1
Vidre	15
Plàstic	1
Piles	15

a) Construeix un diagrama de barres
b) Representa un polígon de freqüències.
c) Representa els valors de la variable en un diagrama de sectors.

15) En un exercici anterior s'ha tingut el resultat de mesurar en una classe la grandària de les mans de cada un dels alumnes, i el resultat en centímetres ha sigut el següent:

19, 18, 20, 19, 18, 21, 19, 17, 16, 20,

16, 19, 20, 21, 18, 17, 20, 19, 22, 21,

23, 21, 17, 18, 17, 19, 21, 20, 16, 19

Representa els valors de la variable en un diagrama de barres i en un polígon de freqüències.

16) El 35 % de les cigonyes no ha emigrat enguany a Africa i el 6 % va morir pel camí. Dibuixa un diagrama de sectors que descriga aquesta situació.

17) En una classe s'ha preguntat per les preferències esportives i s'ha obtingut:

Futbol	Bàsquet	Natació	Karate	Ciclisme
8	9	7	6	10

a) Copia la taula al teu quadern i construeix una taula de freqüències relatives.

b) Representa aquests valors de la variable en un diagrama de sectors.

Mesures de centralització i dispersió

18) Pepa ha tirat un dau 25 vegades d'un exercici anterior i ha obtingut els resultats següents:

1, 2, 5, 6, 3, 1, 4, 5, 6, 1, 3, 1, 2, 2, 1, 6, 2, 2, 4, 3, 4, 6, 6, 1, 4

a) Calcula la mitjana aritmètica

b) Calcula la mediana

c) Quina és la moda? És única?

d) Calcula la variança i desviació típica interpretant el seu resultat

19) Sara ha tingut les següents notes als seus exàmens de Matemàtiques: 9, 7, 8, 6, 9, 10, 9

a) Calcula la mitjana aritmètica

b) Calcula la mediana

c) Quina és la moda? És única?

d) Calcula el percentil 45 interpretant el seu resultat

e) Calcula el percentil 75 interpretant el seu resultat. quin altre nom rep?

f) Calcula la variança i desviació típica interpretant el seu resultat

g) Calcula el coeficient de variació interpretant el seu resultat

20) En un exercici anterior s'ha tingut el resultat de mesurar en una classe la grandària de les mans de cada un dels alumnes, i el resultat en centímetres ha sigut el següent:

19, 18, 20, 19, 18, 21, 19, 17, 16, 20,

16, 19, 20, 21, 18, 17, 20, 19, 22, 21,

23, 21, 17, 18, 17, 19, 21, 20, 16, 19

a) Calcula la mitjana aritmètica; b) Calcula la mediana; c) Quina és la moda? És única?

d) Calcula el percentil 45 interpretant el seu resultat; e) Calcula el percentil 75 interpretant el seu resultat. Quin altre nom rep? f) Calcula la variança i desviació típica interpretant el seu resultat

g) Calcula el coeficient de variació interpretant el seu resultat

21) Ens interessa conèixer la distribució de notes obtingudes per 40 estudiants. Les notes són:

4, 1, 7, 10, 3, 2, 8, 9, 0, 0, 5, 8, 2, 7, 1, 2, 8, 10, 2, 10,

3, 4, 8, 9, 3, 6, 3, 7, 2, 4, 9, 4, 9, 5, 1, 3, 3, 9, 7, 8, 10

a) Escriu al teu quadern una taula de freqüències absolutes.

b) Fes un polígon de freqüències absolutes.

c) Calcula la mitjana

d) Calcula la mediana

e) Calcula la moda

f) Calcula el percentil 45 interpretant el seu resultat

g) Calcula el percentil 75 interpretant el seu resultat. quin altre nom rep?

h) Calcula la variança i desviació típica interpretant el seu resultat

i) Calcula el coeficient de variació interpretant el seu resultat

j) Si les notes dels mateixos alumnes respecte a una altra assignatura tenen una mitjana de 5,3 i desviació típica de 2, quina de les dues assignatures té una mitjana més homogènia?

22) Els jugadors d'un equip d'handbol tenen les edats següents:

12, 14, 13, 12, 15, 11, 12, 12, 13, 14, 11, 12, 12.

a. Calcula la mitjana

b. Calcula la mediana

c. Calcula la moda

d. Calcula el percentil 45 interpretant el seu resultat

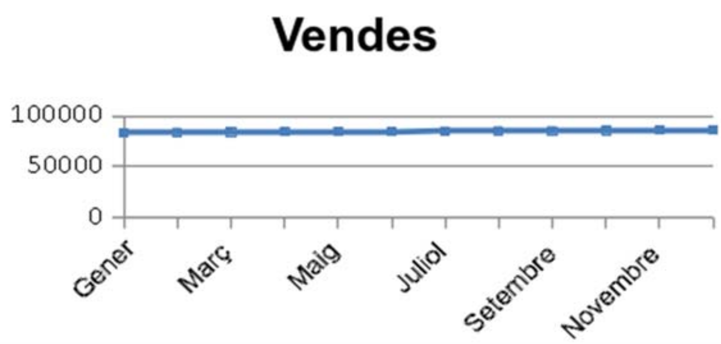
e. Calcula el percentil 75 interpretant el seu resultat. quin altre nom rep?

f. Calcula la variança i desviació típica interpretant el seu resultat

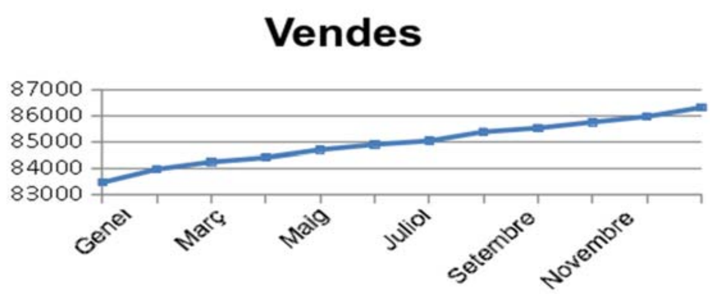
g. Calcula el coeficient de variació interpretant el seu resultat

Problemes

23) El Director Comercial d'una empresa serà avaluat. Per a això ha de donar compte dels resultats obtinguts. Vol quedar bé, perquè això li pot suposar un augment de sou. S'han venut les quantitats següents:



Mesos	Gener	Febrer	Març	Abril	Maig	Juny	Juliol	Agost	Setembre	Octubre	Novembre	Desembre
Vendes	83451	83962	84238	84401	84693	84889	85032	85378	85524	85751	859967	86316



L'estadístic de l'empresa li ha entregat la següent gràfica:

No li ha agradat gens, i per a la presentació ell s'ha confeccionat el següent gràfic:

Ambdós gràfics són correctes. Escriu un inform sobre com poden els distints gràfics donar impressions tan diferents.

24) Llança una moneda 15 vegades i anota les vegades que cau cara i les que no. Construeix després dues taules: una de freqüències absolutes i una altra de freqüències relatives. Representa el resultat en un diagrama de freqüències i en un polígon de freqüències.

25) La mitjana de sis nombres és 5. S'afigen dos nombres més però la mitjana continua sent 5. Quant sumen aquests dos nombres?

26) La següent taula expressa les estatures, en metres, de 1000 soldats:

Talla	1.50 - 156	1.56– 1.62	1.62 - 168	1.68- 1.74	1.74- 1.80	1.80-.92
Nr de soldats	20	150	200	330	200	100

Calcula:

a) La mitjana i la desviació típica.

b) Els intervals on es troben la mediana i els quartils.

c) L'interval ($\bar{x}$ - σ, $\bar{x}$ + σ) i el percentatge d'individus en el dit interval.

d) Representa les dades en un histograma.

27) Una companyia aèria sospita que hi ha una relació entre les variables *X*, temps d'un vol, en hores; i *Y*, consum de combustible (gasoil) per al dit vol, en litres. Per aquesta raó, s'han obtingut les següents dades, dins del rang de nivells d'interès per a X en aquesta companyia.

X_i	0´4	0´5	0´6	0´65	0´7	0´8	1	1´15	1´2
Y_i	1.350	2.220	2.900	3.150	3.350	3.550	3.900	4.330	4.500

X_i	1´4	1´5	1´6	1´8	2´2	3
Y_i	5.050	5.320	5.650	6.400	7.500	10.250

Es demana:

a) Mitjançant la representació del diagrama de dispersió raonar l'interès de relacionar les dites variables.

b) Obtindre la covariància i el coeficient de correlació entre ambdues variables. Interpretar els resultats.

AUTOAVALUACIÓ

1. Un diagrama de caixa informa sobre:

a) Els quartils i qurtosis. b) Asimetria i variança. c) Dades atípiques i simetria.

2. Siga la variable aleatòria nombre de persones que és capaç d'alçar un ascensor. Per a calcular el nombre de persones a partir del qual s'arreplega el 30 % dels valors de la variable necessitem obtindre

a) El percentil 30 b) El percentil 3 c) El percentil 70

3. El 25 % dels madrilenys gasten en la factura del mòbil per damunt de 100 euros, mentres que el 25 % gasten per davall de 20 euros. Llavors coneixem:

a) 100 i 20 són valors que corresponen al quartil 1 i 3, respectivament.

b) 100 i 20 són valors que corresponen al quartil 3 i 1, respectivament.

c) 100 i 20 són valors que no corresponen a cap quartil.

4. En un diagrama de barres de freqüències absolutes, la suma de les seues altures és proporcional a:

a) 100 b) 1 c) Total de valors de la variable d) Suma de les seues bases

5. La mitjana dels següents valors de la variable 3, 4, 6, 7, 5, 8, és:

a) 6 b) 7 c) 4,8 d) 5,5

6. La mediana dels següents valors de la variable 3, 4, 6, 7, 8, és:

a) 6 b) 7 c) 4 d) 5

7. La moda dels següents valors de la variable 3, 4, 6, 7, 5, 8, 7, 7, és:

a) 6 b) 7 c) 4 d) 5

8. La mitjana de 7 nombres és 8. S'afigen dos nombres més però la mitjana continua sent 8. Quant sumen aquests dos nombres?

a) 10 b) 16 c) 20 d) 14

9. Dues revistes especialitzades en ocupació, A i B, han publicat una mitjana d'ofertes de treball, de m_A = 10 i m_B = 20 amb variàncies, respectivament de $s^2_A = 4$ i $s^2_B = 9$.

a) La revista B presenta major dispersió absoluta que la revista A, mentres que la revista A presenta major dispersió relativa que la B

b) La revista A presenta major dispersió absoluta que la revista B, mentres que la revista B presenta major dispersió relativa que la A

c) La revista B presenta major dispersió absoluta i relativa que la A

10. El 70 % dels madrilenys gasten en regals nadalencs per damunt de 100 euros, mentres que el 5 % gasten per damunt de 500 euros. Llavors coneixem:

a) El valor corresponent al percentil 30.

b) El valor corresponent al percentil 70.

c) El valor corresponent al percentil 5.

Matemàtiques orientades a les ensenyances acadèmiques.

4t B d'ESO

Capítol 14: Combinatòria

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Adela Salvador i María Molero

Revisors: Andrés Hierro i Sergio Hernández

Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF i María Molero

Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

(N. del T.: Als exercicis proposats de combinatòria amb lletres s'ha respectat l'original en castellà)

Combinatòria: 4t B d'ESO

Índex

Resum

Saber comptar és quelcom important en Matemàtiques. Ja Arquimedes al seu llibre "*Arenari*" es preguntava com comptar el nombre de grans d'arena que hi havia a la Terra.

En aquest capítol aprendrem tècniques que ens permeten comptar. Aprendrem a reconèixer les permutacions, les variacions i les combinacions; i a utilitzar els nombres combinatoris en distintes situacions, com per a desenrotllar un binomi elevat a una potència.

Aquestes tècniques de comptar les utilitzarem en altres parts de les Matemàtiques com en *Probabilitat* per a comptar el nombre de *casos possibles* o el nombre de *casos favorables*.

Autores: Adela Salvador i María Molero
Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

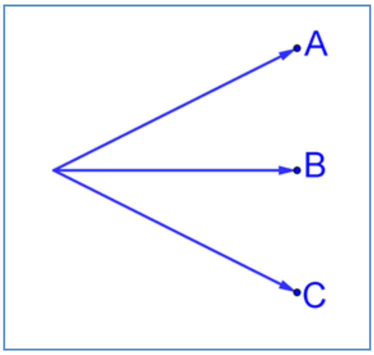
1. PERMUTACIONS

1.1. Diagrames en arbre

Activitats resoltes

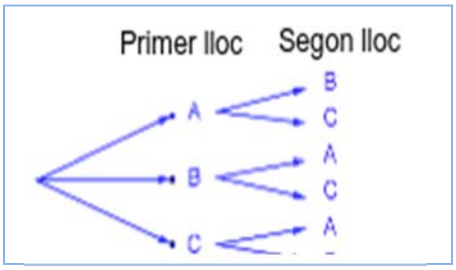
- *En una festa es compta amb tres grups musicals que han d'actuar. Per a organitzar l'orde d'actuació, quantes possibilitats distintes hi ha?*

Una tècnica que pot ajudar molt és confeccionar un **diagrama en arbre**. Consisteix en una representació per nivells en què cada branca representa una opció individual per a passar d'un nivell al següent, de tal manera que tots els possibles recorreguts des de l'arrel fins a l'últim nivell, el nivell de les fulles, són tots els possibles resultats que es poden obtindre.



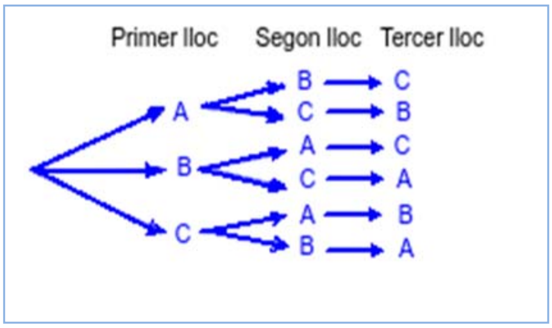
Anomenem als tres grups musicals A, B i C.

Primer nivell de l'arbre: En primer lloc podran actuar o bé A, o bé B o bé C.



Segon nivell de l'arbre: Una vegada que el grup A ha sigut triat per a actuar en primer lloc, per al segon lloc només podrem col·locar a B o a C. Igualment, si ja B va en primer lloc, només podran estar en el segon lloc A o C. I si actua en primer lloc C, per al segon lloc les opcions són A i B.

Tercer nivell de l'arbre: Si ja s'haguera decidit que en primer lloc actua el grup A i en segon el grup B, per al tercer lloc, que es pot decidir? Només ens queda el grup C, I de la mateixa manera, en tots els altres casos, només queda una única possibilitat



Confeccionar el diagrama en arbre, inclús únicament començar a confeccionar-lo, ens permet comptar amb seguretat i facilitat. Per a saber quantes formes tenim d'organitzar el concert, apliquem el principi de multiplicació: només hem de multiplicar els nombres de ramificacions que hi ha en cada nivell: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ formes d'organitzar l'orde d'actuació dels grups.

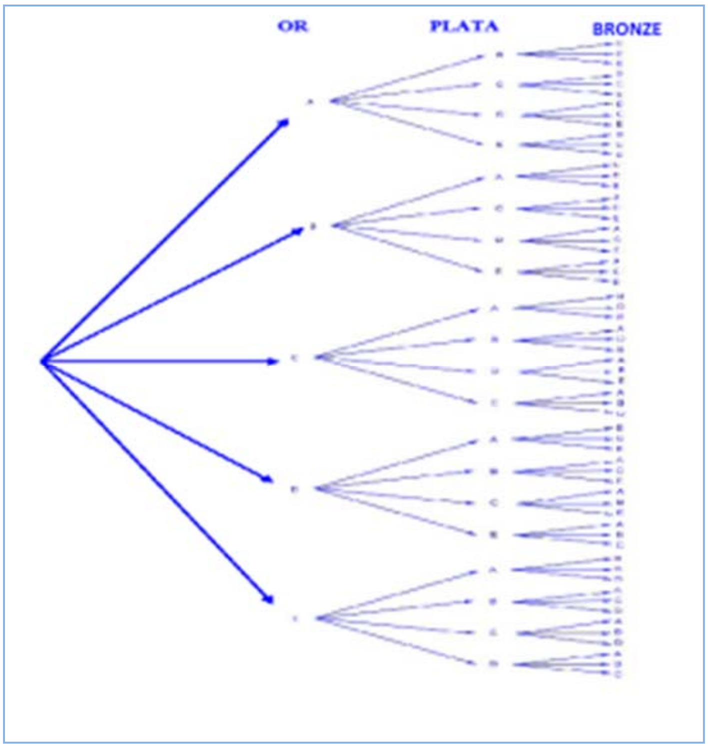
També permet escriure aqueixes sis possibles formes sense més que seguir a l'arbre: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.

- *En una carrera competeixen* 5 *corredors i es van a repartir tres medalles, or, plata i bronze, de quantes formes distintes poden repartir-se?*

Fem el diagrama en arbre. L'or el poden guanyar els cinc corredors que anomenarem A, B, C, D i E. Fem les cinc fletxes del diagrama. Si l'or l'haguera guanyat el corredor A, la plata només la podria guanyar algun dels altres quatre corredors: B, C, D o E. Si l'or l'haguera guanyat B també hi hauria quatre possibilitats per a la medalla de plata: A, C, D i E. I així amb la resta.

Si suposem que la medalla d'or l'ha guanyat A i la de plata B, llavors la medalla de bronze la poden guanyar C, D o E.

Per tant hi ha 5 · 4 · 3 = 60 formes diferents de repartir les tres medalles entre els cinc jugadors.



Activitats proposades

1. Fes diagrames en arbre per a calcular:

a) Quantes paraules de dues lletres (amb significat o sense ell) pots escriure amb les lletres A, B o C.

b) Quantes paraules de tres lletres que comencen per vocal i acaben per consonant es poden formar amb les lletres de l’alfabet. (*Recorda* que hi ha 5 vocals i 22 consonants).

2. Anna té 5 camisetes, 3 pantalons i 4 parells de sabatilles. Pot portar una combinació diferent de camiseta, pantaló i sabatilla durant dos mesos (61 dies)? Quants dies haurà de repetir combinació? *Ajuda*: Segur que un diagrama en arbre et resol el problema.

3. En un tauler quadrat amb 25 caselles, de quantes formes diferents podem col·locar dues fitxes idèntiques, de manera que estiguen en distinta fila i en distinta columna? *Suggeriment*: Confecciona un diagrama d’arbre. Quantes caselles hi ha per a col·locar la primera fitxa? Si descartem la seua fila i la seua columna, en quantes caselles podem col·locar la segona fitxa?

1.2. Permutacions o ordenacions d’un conjunt

Anomenem **permutacions** a les possibles formes distintes en què es pot ordenar un conjunt d’elements distints.

Cada canvi en l’orde és una permutació.

Exemples:

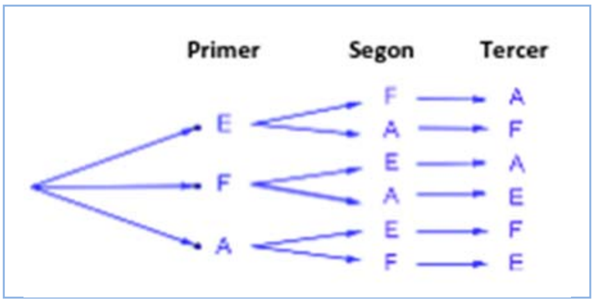
- *Són permutacions:*
  - Les formes en què poden arribar a la meta 10 corredors.
  - Les paraules de quatre lletres, sense repetir cap lletra, amb sentit o sense que podem formar amb les lletres de la paraula TAULA.
  - Els nombres de 5 xifres distintes que es poden formar amb els dígits: 1, 2, 3, 4 i 5.

El nombre de permutacions d'un conjunt de n elements es designa per P_n, i es llig *permutacions de n elements*.

L'activitat resolta dels tres grups musicals que actuarien en una festa era de permutacions, era una ordenació, per tant l'escriuríem com P_3, i es llig *permutacions de 3 elements*.

Activitats resoltes

- *A la fase preparatòria d'un campionat del món estan en el mateix grup Espanya, França i Alemanya. Indica de quantes formes poden quedar classificats aquests tres països.*



Són permutacions de 3 elements: P_3. Fem un diagrama d'arbre. Poden quedar primers Espanya (E), França (F) o Alemanya (A). Si ha guanyat Espanya, poden optar pel segon lloc F o A. I si ja hagueren guanyat Espanya i després França, per al tercer lloc només quedaria Alemanya.

Poden quedar de 3 · 2 · 1 = 6 formes distintes.

En general per a calcular les permutacions de n elements es multiplica n per $n - 1$, i així, baixant d'un en u, fins a arribar a 1: $P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. A aquest nombre se l'anomena factorial de n, i s'indica $n!$

$$\mathbf{P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!}$$

Correspon a un arbre de n nivells amb n, $n - 1$, $n - 2$, … , 3, 2, 1 possibilitats d'elecció respectivament.

Per a realitzar aquesta operació amb la calculadora s'utilitza la tecla **!**

Exemples:

- Les formes en què poden arribar a la meta 10 corredors són:

$$P_{10} = 10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3628800.$$

- Les paraules amb sentit o sense que podem formar amb les lletres, sense repetir, de la paraula TAULA són $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.
- Els nombres de 5 xifres, totes distintes, que es poden formar amb els dígits: 1, 2, 3, 4 i 5 són:

$$P_5 = 5! = 120.$$

- Espanya, França i Alemanya poden quedar classificats de $P_3 = 3! = 6$ formes distintes.

Activitats proposades

4. De quantes formes poden repartir-se quatre persones, quatre pastissos distints, menjant cada persona un pastís?

5. En una carrera de cavalls participen cinc cavalls amb els nombres 1, 2, 3, 4 i 5. Quin d'ells pot arribar el primer? Si la carrera està preparada perquè el nombre quatre arribe el primer, quins d'ells poden arribar en segon lloc? Si la carrera no està preparada, de quantes formes distintes poden arribar a la meta? Fes un diagrama en arbre per a respondre.

6. De quantes maneres pots ficar quatre objectes distints en quatre caixes diferents, si només pots posar un objecte en cada caixa?

7. Quants països formen actualment la Unió Europea? Pots ordenar-los seguint diferents criteris, per exemple per la seua població, o respecte a la seua producció d'acer, o per la superfície que ocupen. De quantes maneres distintes és possible ordenar-los?

8. L'any 1973 havia sis països en el Mercat Comú Europeu. De quantes formes pots ordenar-los?

9. En una oficina de col·locació hi ha set persones. De quantes formes distintes poden haver arribat?

Activitats resoltes

- *Càlcul de* $\frac{6!}{3!}$.

1. Quan calculem quocients amb factorials sempre simplifiquem l'expressió, eliminant els factors del numerador que siguen comuns amb factors del denominador, abans de fer les operacions. En general sempre sol ser preferible simplificar abans d'operar, però en aquest cas resulta imprescindible, perquè no isquen nombres massa grans.

És $\frac{6!}{3!} = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1} = 6\cdot5\cdot4 = 120$.

- *Expressa, utilitzant factorials, els productes següents:* a) 10·9·8; b) (n+4)·(n+3)·(n+2);

a) $10\cdot9\cdot8 = \frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} = \frac{10!}{7!}$

b) $(n+4)\cdot(n+3)\cdot(n+2) = \frac{(n+4)!}{(n+1)!}$

Activitats proposades

10. Calcula: a) $\frac{6!}{4!}$; b) $\frac{7!}{3!}$; c) $\frac{8!}{5!\cdot3!}$; d) $\frac{6!}{5!}$; e) $\frac{12!}{11!}$; f) $\frac{347!}{346!}$.

11. Calcula: a) $\frac{(n+1)!}{n!}$; b) $\frac{(n+4)!}{(n+3)!}$; c) $\frac{(n+4)!}{(n+2)!}$; d) $\frac{n!}{(n-1)!}$.

12. Expressa utilitzant factorials: a) 5·4·3; b) 10·11·12·13; c) 8·7·6; d) 10·9.

13. Expressa utilitzant factorials: a) $(n+3)\cdot(n+2)\cdot(n+1)$; b) $n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)$; c) $n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+k)$.

14. Escriu en forma de factorial les distintes formes que tenen d'assentar-se en una classe els 30 alumnes als 30 llocs que hi ha. (No ho calcules. El resultat és un nombre molt gran, per a calcular-lo es necessita un ordinador o una calculadora, i caldria recórrer a la notació científica per a expressar-lo de forma aproximada).

15. Nou ciclistes circulen per una carretera en fila índia. De quantes formes distintes poden anar ordenats?

2. VARIACIONS

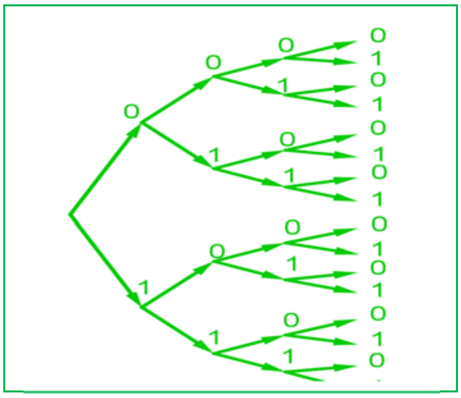
2.1. Variacions amb repetició

Ja saps que les quinieles consisteixen a endevinar els resultats de 14 partits de futbol assenyalant un 1 si pensem que guanyarà l'equip de casa, un 2 si guanya el visitant i una X si esperem que hi haja empat. En una mateixa jornada, quantes quinieles distintes podien omplir-se?

Observa que ara cada diferent quiniela consisteix en una seqüència dels símbols 1, 2 i X, en les que el mateix símbol pot aparèixer diverses vegades **repetit** al llarg de la seqüència i dues quinieles poden diferenciar-se pels **elements** que la componen o per **l'orde** en què apareixen.

Activitats resoltes

- *Amb dos símbols,* 0 *i* 1*, quantes tires de* 4 *símbols es poden escriure?*



Igual que en anteriors exemples, formem el diagrama d'arbre. Observant que al primer lloc de la tira podem posar els dos símbols. Al segon lloc, encara que hàgem posat el 0, com es pot repetir, podem tornar a posar el 0 i l'1. El mateix al tercer i al quart lloc. És a dir, el nombre de ramificacions no es va reduint, sempre és igual, per tant el nombre de tires distintes que podem formar és

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16 \text{ tires distintes.}$$

Les diferents seqüències de longitud *n* que es poden formar amb un conjunt de m elements diferents, s'anomenen **variacions amb repetició** de m elements presos de *n* en *n*. El nombre de diferents seqüències que es poden formar es designa amb l'expressió $VR_{m,n}$. i es calcula amb la fórmula:

$$\mathbf{VR_{m,n} = m^n}$$

A l'***activitat resolta*** anterior són variacions amb repetició de 2 elements presos de 4 en 4:

$$VR_{2,4} = 2^4 = 16 \text{ tires distintes.}$$

Activitat resolta

- Al càlcul del nombre *de quinieles distintes,* els elements són 3 (1, 2, X) i es formen seqüències de longitud 14, per tant es tracta de *variacions amb repetició* de 3 elements presos de 14 en 14:

$$VR_{3,14} = 3^{14} = 4\ 782\ 969.$$

Per a tindre la certesa absoluta d'aconseguir 14 encerts cal omplir 4 782 969 apostes simples.

- *La probabilitat que et toque una quiniela en una aposta simple és*, per tant, $\frac{1}{4782969}$.

Activitats proposades

16. Amb els 10 dígits, quants nombres distints poden formar-se de 6 xifres?

17. Amb els 10 dígits i les 22 consonants de l'alfabet, quantes matricules de cotxe poden formar-se prenent quatre dígits i tres lletres?

18. Un byte o octet és una seqüència de zeros i uns presos de 8 en 8. Quants bytes distints poden formar-se?

19. Calcula: a) $VR_{4,2}$; b) $VR_{4,4}$; c) $VR_{11,2}$; d) $VR_{2,11}$.

20. Expressa amb una fórmula:

a) Les variacions amb repetició de 3 elements presos de 5 en 5.

b) Les variacions amb repetició de 7 elements presos de 2 en 2.

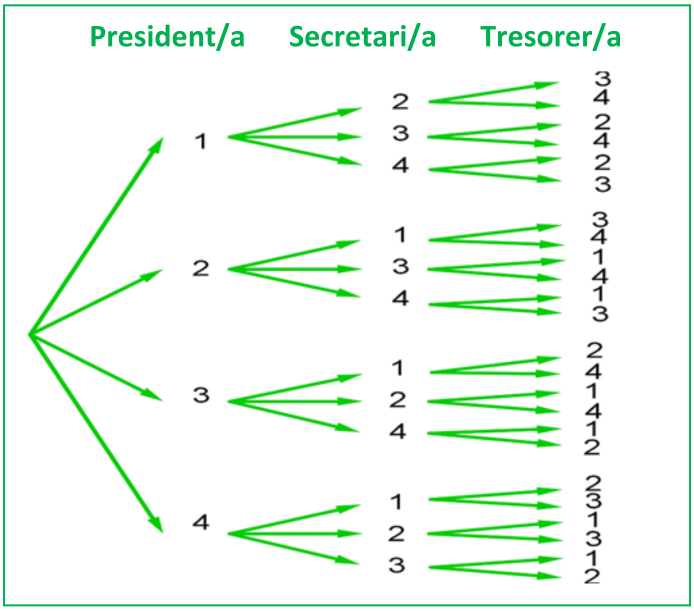
c) Les variacions amb repetició de 5 elements presos de 4 en 4.

21. Quantes paraules de tres lletres (amb significat o no) pots formar que comencen per consonant i acaben amb la lletra R?

2.2. Variacions sense repetició

Activitats resoltes

- Una associació de veïns renovarà la junta directiva. Aquesta consta de tres càrrecs, presidència, secretaria i tresoreria. a) Si únicament es presenten quatre persones. De quantes maneres pot estar formada la junta? b) Si, abans de que comence la votació, es presenten altres dos candidats, quantes juntes diferents podran formar-se ara?



a) Confeccionem el nostre diagrama en arbre. Numerem els candidats de l'1 al 4. A la presidència poden optar els 4 candidats, però si un determinat candidat ja ha sigut triat per a la presidència, no podrà optar als altres dos càrrecs, per la qual cosa des de cada una de les primeres quatre branques, només eixiran tres branques. Una vegada triada una persona per a la presidència i la secretaria, per a optar a la tresoreria hi haurà únicament dues opcions, per la qual cosa de cada una de les branques del segon nivell, ixen dues branques per al tercer nivell.

D'aquesta manera, multiplicant el nombre de ramificacions en cada nivell, tenim que la junta pot estar formada de $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ maneres.

b)Si en compte de 4 candidats fossen 6, podria estar formada de $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ maneres.

Aquestes agrupacions d'elements, en que un element pot aparèixer en cada grup com a màxim una vegada, sense repetir-se, i cada grup es diferència dels altres pels elements que el componen o per l'orde en què apareixen es denominen *variacions sense repetició*.

A les variacions, tant amb repetició com sense repetició, es tenen en compte **l'orde** i els **elements** que formen el grup. La diferència és que a les variacions amb repetició poden repetir-se els elements i a les variacions ordinàries no. A l'exemple anterior no tindria sentit que un mateix candidat ocupara dos càrrecs, **no es repeteixen els elements**.

Les **variacions sense repetició** (o simplement **variacions**) de m elements presos de *n* en *n* es designen com $V_{m,n}$. Són els grups de *n* elements distints que es poden formar de manera que un grup es diferencie d'un altre bé pels **elements** que el componen bé per **l'orde** en què apareixen.

El nombre de variacions és igual al producte de multiplicar *n* factors partint de m i decreixent d'un en un:

$$V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \text{ } (n \text{ factors})$$

Observacions

1) *m* ha de ser sempre major o igual que *n*.

2) Les variacions de m elements presos de *m* en *m* coincideixen amb les permutacions de m elements: $V_{m,m} = P_m$.

Activitats resoltes

- *Observa les següents variacions i intenta trobar una expressió per a l'últim factor que es multiplica al càlcul de les variacions:*

  a) $V_{4,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2$

  b) $V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4$

  c) $V_{10,6} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$

  d) $V_{9,4} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$

  Al cas a) 2 és igual a $4 - 3 + 1$.

  A b) $4 = 6 - 3 + 1$.

  A c) $5 = 10 - 6 + 1$.

  A d) $6 = 9 - 4 + 1$.

En general l’últim element és ($m - n + 1$).

$$V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n+1)$$

- *Escriu la fórmula de les variacions utilitzant factorials:*

a) $V_{4,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = \frac{4!}{1!}$

b) $V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{6!}{3!}$

c) $V_{10,6} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = \frac{10!}{4!}$

d) $V_{9,4} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = \frac{9!}{5!}$

Per a escriure-ho com a quocient de factorials s’ha de dividir per $(m-n)!$.

$$V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Per a realitzar aquesta operació amb la *calculadora* s’utilitza la tecla etiquetada ***nPr***

Activitats proposades

22. Tres persones van a una pastisseria en què únicament queden quatre pastissos, distints entre si. De quantes formes distintes poden triar el seu pastís si cada una compra un?

23. Amb els 10 dígits es desitgen escriure nombres de quatre xifres, totes elles distintes. Quantes possibilitats hi ha per a escriure la primera xifra? Una vegada triada la primera, quantes hi ha per a triar la segona? Una vegada triades les dues primeres, quantes hi ha per a la tercera? Quantes possibilitats hi ha en total?

24. Si tens 9 elements diferents i els has d’ordenar de 5 en 5 de totes les formes possibles, quantes hi ha?

25. Amb les lletres A, B i C, quantes paraules de 2 lletres no repetides podries escriure?

26. Amb els dígits 3, 5, 7, 8 i 9, quants nombres de 3 xifres distintes pots formar?

27. Calcula: a) $V_{11,6}$; b) $V_{7,5}$; c) $V_{8,4}$.

28. Calcula: a) $\frac{7!}{3!}$; b) $\frac{6!}{4!}$; c) $\frac{10!}{8!}$.

Una altra observació

Hem dita que $V_{m,m} = P_m$ però si utilitzem la fórmula amb factorials tenim que $V_{m,m} = P_m = \frac{m!}{(m-m)!} = \frac{m!}{0!}$. Perquè tinga sentit s’assigna a 0! el valor d’1.

0! = 1.

3. COMBINACIONS

3.1. Combinacions

Activitats resoltes

- *En una llibreria volen fer paquets de tres llibres, usant els sis llibres més llegits. Quants paquets diferents podran fer?*

En aquest cas cada grup de tres llibres es diferenciarà dels altres possibles pels llibres (**elements**) que el componen, sense que importe l'orde en què aquests s'empaqueten. A aquesta agrupació se la denomina combinació.

S'anomena **combinacions** de m elements presos de *n* en *n* i es designa $C_{m,n}$ als grups de *n* elements que es poden formar a partir d'un conjunt de m elements diferents entre si, de manera que cada grup es diferencie dels altres pels **elements** que el formen (no per l'orde en què apareixen).

Designem els llibres amb les lletres A, B, C, D, E i F.

Paquets amb A				Paquets sense A però amb B			Paquets sense A ni B però amb C		
ABC				BCD			CDE		
ABD	ACD			BCE	BDE		CDF	CEF	DEF
ABE	ACE	ADE		BCF	BDF	BEF			
ABF	ACF	ADF	AEF						

Hem format primer tots els paquets que contenen el llibre A, hi ha 10; Després continuem formant els que no contenen el llibre A però si contenen el B. Després els que no contenen ni A ni B però sí C. I finalment, el paquet DEF que no conté els llibres A, B ni C. Amb aquest recompte hem identificat un total de 20 paquets distints. $C_{6,3} = 20$.

Aquesta forma de fer-ho és poc pràctica. Per a trobar una fórmula general que ens permeta calcular el nombre de grups, anem a recolzar-nos en el que ja sabem.

Si fóra rellevant l'orde en què apareixen els llibres en cada paquet, a més dels llibres que el componen, seria un problema de variacions i calcularíem: $V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ diferents:

ABC, ABD, ABE, ABF, ACB, ACD, ACE, ACF, ADB, ADC, ADE, ADF, AEB, AEC, AED, AEF, AFB, AFC, AFD, AFE, BAC, BAD, BAE, BAF, BCA, BCD, BCE, BCF, BDA, BDC, BDE, BDF, BEA, BEC, BED, BEF, BFA, BFC, BFD, BFE, CAB, CAD, CAE, CAF, CBA, CBD, CBE, CBF, CDA, CDB, CDE, CDF, CEA, CEB, CED, CEF, CFA, CFB, CFD, CFE, DAB, DAC, DAE, DAF, DBA, DBC, DBE, DBF, DCA, DCB, DCE, DCF, DEA, DEB, DEC, DEF, DFA, DFB, DFC, DFE, EAB, EAC, EAD, EAF, EBA, EBC, EBD, EBF, ECA, ECB, ECD, ECF, EDA, EDB, EDC, EDF, EFA, EFB, EFC, EFD, FAB, FAC, FAD, FAE, FBA, FBC, FBD, FBE, FCA, FCB, FCD, FCE, FDA, FDB, FDC , FDE, FEA, FEB, FEC, FED.

A la llista anterior hem assenyalat amb el mateix color alguns dels paquets que contenen els mateixos tres llibres, veuràs que el paquet amb els llibres A, B i C es repeteix sis vegades: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. Les mateixes vegades es repeteix el paquet ABD, l'ACF, etc. Pots provar a assenyalar qualsevol altra combinació i veuràs que totes estan repetides exactament sis vegades. Això és degut al fet que hi ha sis variacions possibles amb la mateixa composició d'elements, que es diferencien per l'orde (les permutacions d'aqueixos tres elements que són $P_3 = 6$). Així doncs, com al recompte de variacions, cada paquet està comptat $P_3 = 6$ vegades. Per a saber el nombre de paquets diferents dividim el total de variacions entre $P_3 = 6$.

Per tant n'hi ha prou amb dividir les variacions entre les permutacions:

$$C_{6,3} = \frac{V_{6,3}}{P_3} = \frac{120}{6} = 20.$$

I, en general, d'acord amb el mateix raonament es calculen les combinacions de m elements presos de *n* en *n*, dividint les variacions entre les permutacions, amb la fórmula:

$$C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} = \frac{m!}{(m-n)!\cdot n!}$$

Per a realitzar aquesta operació amb la calculadora s'utilitza la tecla etiquetada ***nCr***

Activitats resoltes

- *Un test consta de* 10 *preguntes i per a aprovar cal respondre* 6 *correctament. De quantes formes es poden triar aqueixes* 6 *preguntes?*

  No importa en quin orde es trien les preguntes, sinó quines són les preguntes triades. No poden repetir-se (no té sentit que respongues 3 vegades la primera pregunta). Únicament influeixen les preguntes (els elements). Es tracta d'un problema de combinacions, en que hem de formar grups de 6, d'un conjunt format per 10 preguntes diferents, per tant són combinacions, $C_{10,6}$.

  $$C_{10,6} = \frac{10!}{4!\cdot 6!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 10\cdot 3\cdot 7 = 210 \text{ maneres.}$$

- *Tenim 5 llibres sense llegir i volem emportar-nos tres per a llegir-los en vacacions, de quantes maneres distintes podem triar-los?*

  Són combinacions de 5 elements presos de 3 en 3. $C_{5,3}$ = 10 formes.

- *Tens* 7 *monedes d'euro que col·loques en fila. Si* 3 *mostren la cara i 4 la creu, de quantes formes distintes pots ordenar-les?*

  Bastarà de col·locar en primer lloc les cares i als llocs lliures posar les creus. Tenim 7 llocs per a col·locar 3 cares, seran per tant les combinacions de 7 elements presos de 3 en 3. $C_{7,3}$ = 35. Observa que s'obté el mateix resultat si col·loques les creus i deixes els llocs lliures per a les cares ja que $C_{7,4}$ = 35.

Activitats proposades

29. Tenim 5 bombons (iguals) que volem repartir entre 7 amics, de quantes formes es poden repartir els bombons si a cap li anem a donar més d'un bombó?

30. Juan vol regalar 3 DVDs a Pedro dels 10 que té, de quantes formes distintes pot fer-ho?

31. En el joc del pòquer es dóna a cada jugador una mà formada per cinc cartes, de les 52 que té la baralla francesa, quantes mans diferents pot rebre un jugador?

3.2. Nombres combinatoris

Les combinacions són molt útils, per la qual cosa el seu ús freqüent fa que s'haja definit una expressió matemàtica denominada nombre combinatori.

El **nombre combinatori** *m* sobre *n* es designa $\binom{m}{n}$ i és igual a:

$$\binom{m}{n} = C_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!\cdot n!}$$

Propietats dels nombres combinatoris

Activitats resoltes

- *Calcula* $\binom{7}{0}$, $\binom{5}{0}$, $\binom{9}{0}$, $\binom{4}{0}$.

Hauràs comprovat que: $\binom{7}{0} = 1$, $\binom{5}{0} = 1$, $\binom{9}{0} = 1$ i $\binom{4}{0} = 1$. Raona el motiu. Podem generalitzar i dir que $\binom{m}{0} = 1$? En efecte: $\binom{m}{0} = \frac{m!}{m!\cdot 0!} = 1$. Recorda que 0! = 1.

- *Calcula* $\binom{7}{7}$, $\binom{5}{5}$, $\binom{9}{9}$, $\binom{4}{4}$.

Hauràs comprovat que: $\binom{7}{7} = 1$, $\binom{5}{5} = 1$, $\binom{9}{9} = 1$ i $\binom{4}{4} = 1$. Raona el motiu. Podem generalitzar i dir que $\binom{m}{m} = 1$? En efecte: $\binom{m}{m} = \frac{m!}{(m-m)!\cdot m!} = \frac{m!}{0!\cdot m!} = 1$. Recorda que 0! = 1.

- *Calcula* $\binom{7}{1}$, $\binom{5}{1}$, $\binom{9}{1}$, $\binom{4}{1}$.

Hauràs comprovat que: $\binom{7}{1} = 7$, $\binom{5}{1} = 5$, $\binom{9}{1} = 9$ i $\binom{4}{1} = 4$. Raona el motiu. Podem generalitzar i dir que $\binom{m}{1} = m$? En efecte: $\binom{m}{1} = \frac{m!}{(m-1)!\cdot 1!} = m$.

- *Calcula* $\binom{7}{4}$, $\binom{7}{3}$, $\binom{9}{7}$, $\binom{9}{2}$ *i indica quins són iguals.*

Hauràs comprovat que: $\binom{7}{4} = \binom{7}{3}$ i que $\binom{9}{7} = \binom{9}{2}$. Raona el motiu. Podem generalitzar i dir que $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$?

En efecte: $\binom{m}{n} = \frac{m!}{(m-n)!\cdot n!} = \frac{m!}{(m-(m-n))!(m-n)!} = \binom{m}{m-n}$.

Fins ara totes les propietats han sigut molt fàcils. Tenim ara una propietat més difícil. Vegem que:

$\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1}$.

Però abans ho comprovarem amb un problema.

- *Lluís i Miriam s'han casat i els han regalat sis objectes d'adorn. Volen posar tres en una estanteria, però Miriam vol que en l'estanteria estiga, sí o sí, el regal de sa mare. No obstant això, a Lluís no li agrada aqueix objecte, i li dóna igual qualsevol combinació en què no estiga. Un dels dos s'eixirà amb la seua. Calcula quantes són les possibilitats de cada u.*

A Lluís i Miriam els han regalat 6 objectes d'adorn i volen posar 3 en una estanteria. Les formes de fer-ho són $C_{6,3} = \binom{6}{3}$.

Però Miriam vol que en l'estanteria estiga, sí o sí, el regal de sa mare. De quantes formes ho faria Miriam? Són $C_{5,2} = \binom{5}{2}$.

No obstant això a Lluís, aqueix objecte no li agrada, i li dóna igual qualsevol combinació en què no estiga. De quantes formes ho faria Lluís? Són $C_{5,3} = \binom{5}{3}$.

Les opcions de Miriam més les de Lluís són les totals: $\binom{6}{3} = \binom{5}{3} + \binom{5}{2}$.

- *Comprova que* $\binom{6}{3} = \binom{5}{3} + \binom{5}{2}$ *i que* $\binom{7}{5} = \binom{6}{5} + \binom{6}{4}$.

En general, $\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1}$.

T'atreveixes a demostrar-ho?

Per a demostrar-ho recorrem a la definició i realitzem operacions:

$\binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1} = \frac{(m-1)!}{(m-1-n)!\cdot n!} + \frac{(m-1)!}{(m-1-(n-1))!\cdot(n-1)!}$ reduïm a comú denominador

$= \frac{(m-n)\cdot(m-1)!}{(m-n)\cdot(m-1-n)!\cdot n!} + \frac{n\cdot(m-1)!}{n\cdot(m-n)!\cdot(n-1)!}$ Recorda: $m\cdot(m-1)! = m!$

$= \frac{(m-n)\cdot(m-1)!}{(m-n)!\cdot n!} + \frac{n\cdot(m-1)!}{(m-n)!\cdot n!}$ Posem el denominador comú i sumem els numeradors

$= \frac{(m-n)\cdot(m-1)! + n\cdot(m-1)!}{(m-n)!\cdot n!}$ Traiem $(m-1)!$ factor comú

$= \frac{(m-n+n)\cdot(m-1)!}{(m-n)!\cdot n!}$ De nou usem que $m\cdot(m-1)! = m!$

$= \frac{m!}{(m-n)!\cdot n!} = \binom{m}{n}$.

Triangle de Pascal o Triangle de Tartaglia

A un matemàtic italià del segle XVI, que li van dir Tartaglia perquè era botijós, se li va ocórrer disposar als nombres combinatoris així:

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$
$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

....

O bé calculant els seus valors corresponents:

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

...

A ambdós triangles se'ls anomena **Triangle de *Pascal*** o **Triangle de *Tartaglia***.

Els valors que cal posar en cada fila del triangle es calculen, sense haver d'usar la fórmula dels nombres combinatoris, d'una forma més fàcil basada en les propietats dels nombres combinatoris que acabem de provar:

Per la propietat $\binom{m}{0} = 1 = \binom{m}{m}$, cada fila comença i acaba amb 1.

Per la propietat $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$, sabem que el *Triangle de Tartaglia* és simètric o siga que el primer element de cada fila coincideix amb l'últim, el segon amb el penúltim i així successivament.

Per la propietat $\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1}$, podem obtindre les següents files sumant termes de l'anterior, ja que cada posició en una fila és la suma de les dos que té just damunt a la fila anterior.

D'aquesta manera el triangle es construeix seqüencialment, afegint files per baix fins a arribar a la que ens interessa. Si només necessitem conèixer un nombre combinatori aïllat, tal vegada no val la pena desenrotllar tot el triangle, però moltes vegades necessitem conèixer els valors de tota una fila del triangle (per exemple quan desenrotllem un binomi de Newton, o quan resolem problemes de probabilitat).

Activitats proposades

32. Afig tres files més al triangle de *Tartaglia* de la dreta.

33. Suma els nombres de cada fila i comprova que la suma dels elements de la fila *m* és sempre igual a 2^m.

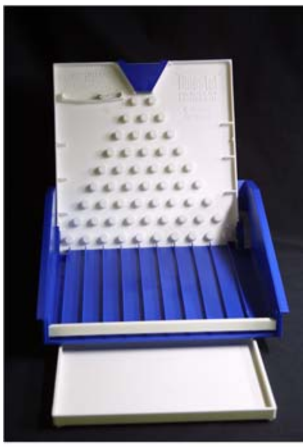
34. Sense calcular-los, indica quant valen $C_{5,3}$; $C_{5,4}$; $C_{5,2}$ i $C_{5,5}$ buscant el seu valor al triangle.

1	$1 = 2^0$
1 1	$2 = 2^1$
1 2 1	$4 = 2^2$
1 3 3 1	$8 = 2^3$
1 4 6 4 1	$16 = 2^4$
1 5 10 10 5 1	$32 = 2^5$

Recorreguts aleatoris o caminades a l'atzar

Els nombres combinatoris serveixen com a model per a resoldre situacions molt diverses.

Activitats resoltes



El dispositiu que apareix a l'esquerra es denomina *aparell de Galton*. El seu funcionament és el següent: quan s'introdueix una bola per l'embut superior, va caient pels buits que existeixen en cada fila. En cada pas pot caure pel buit que té a la seua dreta o pel que té a la seua esquerra amb la mateixa probabilitat, de manera que és impossible, quan posem una bola en l'embut predir en quin dels carrils inferiors acabarà caient.

- *Si introduïm moltes boles pel forat superior, per exemple* 1024, *creus que en arribar a baix es distribuiran uniformement entre tots els carrils o hi haurà llocs a què arriben més boles?*

Observa que per a arribar a la primera fila, només hi ha un camí possible, que és el que va sempre cap a l'esquerra, i per a arribar a l'última, l'únic camí possible és el que va sempre a la dreta.

Mentres que per a arribar als buits centrals de cada fila el nombre de camins possibles és major. Per exemple, per a arribar al segon buit de la segona fila, hi ha dos camins. En general, al primer buit de cada fila només arriba un camí, igual que a l'últim i a cada un dels altres buits arriben tants camins com la suma dels camins que arriben als dos buits que té just damunt. Comprova que per a arribar al buit *n* de la fila *m* hi ha $\binom{m}{n}$ camins.

En resum, el nombre de camins aleatoris que arriben a cada buit es calcula igual que els nombres al triangle de *Tartaglia*. Si el nostre *aparell de Galton* té 9 files, el nombre de camins que arriben a cada un dels compartiments d'eixida és el que s'obté amb la novena fila del Triangle de *Tartaglia*: 1 9 36 84 126 126 84 36 9 1, d'un total de 2^9 = 512 camins diferents que pot realitzar la bola. Així que quan tirem en l'aparell 1024 boles, hi haurà aproximadament 2 boles que facen cada un dels 512 recorreguts possibles, ja que tots tenen la mateixa probabilitat d'ocórrer. Per tant el nombre de boles que podem esperar que caiguen en cada compartiment és el següent:

Compartiment	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre aproximat de boles	$\frac{1024}{512}$ =2	9·2 = 18	36·2 = 72	84·2 = 168	126·2 = 252	126·2 = 252	84·2 = 168	36·2 = 72	9·2 = 18	2

Veiem que no es deposita el mateix nombre de boles en tots els compartiments. Mentres que en els extrems hi haurà aproximadament 2 boles, en els centrals hi haurà unes 252.

D'acord amb la llei dels grans nombres, els resultats experimentals seran més pareguts als teòrics quant major siga el nombre de vegades que es realitza l'experiment (és a dir, quant major siga el nombre de boles). En Youtube *buscant* l'expressió "*màquina de Galton" pots* veure molts vídeos en què es realitza l'experiment i es verifica aquest fet.

Nombre d'èxits

Activitats resoltes

- En una sessió de tir al plat es realitzen successivament 10 tirs. Quantes possibilitats haurà d'encertar en el blanc exactament tres vegades (tindre tres èxits)?

Són les $C_{10,3} = \binom{10}{3} = 120$.

En resum

$\binom{m}{n}$ = Nombre de combinacions de m elements presos de *n* en *n*

Nombre de camins possibles per a arribar al buit *n* de la fila *m* de l'aparell de Galton

Nombre de subconjunts de *n* elements presos en un conjunt de m elements

Nombre de successos en què obtenim *n* èxits en *m proves*

Nombres de mostres sense ordenar de grandària *n* en una població de grandària *m*.

3.3. Binomi de Newton

Calcularem les successives potències d'un binomi. Ja saps que:

$(a + b)^0 = 1$

$(a + b)^1 = a + b$

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Per a calcular $(a + b)^4$ multipliquem $(a + b)^3$ por $(a + b)$.

$(a + b)^4 = (a + b)^3\cdot(a + b) = (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)\cdot(a + b)$

$= a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3 + a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4=$

$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Observa que per a trobar cada un dels coeficients de $(a + b)^4$, excepte el primer i l'últim que valen 1, se sumen els coeficients igual que al triangle de Tartaglia. S'obté cada element sumant els dos que té damunt.

Activitats resoltes

- *Series capaç de calcular* $(a + b)^5$ *només observant?*

Fixa't que sempre apareixen tots els possibles termes del grau que estem calculant, per la qual cosa per a calcular la cinquena potència tindrem: a^5, a^4b, a^3b^2, a^2b^3, ab^4 i b^5. Els exponents estan ordenats de manera que els de a van descendint des de 5 fins a 0, i els de b van augmentant des de 0 fins a 5 (recorda a^0=1).

El coeficient del primer i últim terme és 1.

Els coeficients s'obtenen sumant els dels termes de la fila anterior, com al *Triangle de Tartaglia*. Són la cinquena fila del *Triangle de Tartaglia*.

Per tant $(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$.

Podem escriure'l també utilitzant nombres combinatoris:

$$(a + b)^5 = \binom{5}{0}a^5 + \binom{5}{1}a^4b + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}ab^4 + \binom{5}{5}b^5.$$

Activitats proposades

35. Desenrotlla $(a + b)^6$

En general:

$$(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n.$$

Aquesta igualtat es denomina ***Binomi de Newton***.

Activitats resoltes

- *Com calcularies* $(a - b)^n$?

Basta aplica la fórmula del Binomi de Newton a $(a + (-b))^n$.

Recorda $(-b)$ elevat a un exponent parell té signe positiu i elevat a un exponent imparell el té negatiu.

Per tant $(a - b)^n = \binom{n}{0}a^n - \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + (-1)^n\binom{n}{n}b^n$. Els signes són alternativament positius i negatius.

Activitats proposades

36. Desenrotlla

a) $(a - b)^6$;

b) $(x - 3)^4$;

c) $(x + 2)^7$;

d) $(-x + 3)^5$.

37. Calcula el coeficient de x^7 al polinomi que s'obté en desenrotllar $\left(3x - \frac{x^2}{2}\right)^5$

38. Expressa amb radicals simplificats el polinomi que s'obté en desenrotllar $\left(-\frac{x}{2} + \sqrt{2}\right)^5$

4. ALTRES PROBLEMES DE COMBINATÒRIA

4.1. Resolució de problemes

Recorda: per a resoldre un problema és convenient tindre en compte les fases següents:

Fase 1: Abans de començar a actuar, intenta entendre bé el problema

Llig-lo fins a assegurar-te d'haver comprés l'enunciat, quines dades et donen?, què et demanen?

Fase 2: Busca una bona estratègia.

Si el problema és de *Combinatòria* una possible bona estratègia pot ser analitzar si és un problema de permutacions, de variacions o de combinacions i, en aqueix cas, aplicar la fórmula que ja coneixes. Aquesta estratègia podríem anomenar-la:

Mira si el teu problema s'assembla a algun que ja conegues

Però una altra possible bona estratègia, que no exclou l'anterior, és començar a fer un diagrama en arbre. A aquesta estratègia podem anomenar-la:

Experimenta, juga amb el problema

O bé:

Fes un diagrama, un esquema, una taula...

La fase següent a seguir és:

Fase 3: Porta avant la teua estratègia

Segur que utilitzant aquestes estratègies, resols el problema. Finalment, quan ja l'hages resolt:

Fase 4: Pensa si és raonable el resultat. Comprova l'estratègia. Generalitza el procés.

4.2. Permutacions circulars

Utilitzarem aquestes tècniques, o altres distintes, per a resoldre un problema:

Activitats resoltes

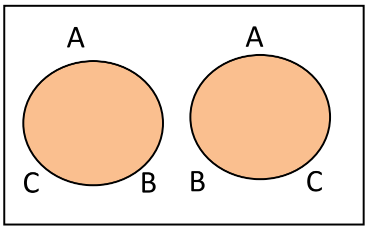
- Deu amics i amigues van a dinar i al restaurant els assenten en una taula redona. De quantes formes poden assentar-se?

Si en compte d'una taula fora un banc, ja sabem resoldre el problema, és un problema de *Permutacions*. La solució seria 10! formes distintes. Però és una taula redona, no té un primer seient ni un últim seient. Tampoc és senzill, pel mateix motiu, dissenyar el diagrama en arbre. Què fem? Pensa. Busca una bona estratègia.

Una bona estratègia potser serà:

Fes-ho més fàcil per a començar

Deu són molts. Pensa en tres: A, B i C. Si fóra un banc, les possibilitats serien 3! = 6. Assenta'ls ara en una taula redona. La possibilitat ABC, és ara la mateixa que BCA i que CAB. Ens queden només dues formes diferents d'assentar-los.



Anomenem PC a aqueixa permutació circular.

Tenim doncs que $P_2 = 2! = 2$ i $PC_2 = 1$; $P_3 = 3! = 6$ i $PC_3 = 2$. Com podem assentar a 4 persones en una taula circular? La permutació ABCD ara és la mateixa que BCDA, i que CDAB i que DABC, doncs si $P_4=4!=24$, aleshores $PC_4 = P_4/4 = 6$.

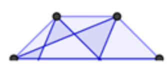
Sabem ja resoldre el nostre problema inicial?

És $PC_{10} = P_{10}/10 = P_9 = 9!$ Raona aquesta resposta.

Activitats proposades

39. Tres amics "A", "B" i "C" estan jugant a les cartes. Cada un passa una carta al què està a la seua dreta. U és espanyol, un altre italià i l'altre portuguès. "A" li passa una carta a l'italià. "B" se l'ha passat a l'amic que li l'ha passat a l'espanyol. Quin dels amics és espanyol, quin italià i quin portuguès? *Ajuda*: Fes un diagrama circular com l'anterior.

40. Anna i Alexandre inviten a sopar a 3 amics i 3 amigues, quantes formes tenen de col·locar-se en una taula redona? En quantes estan junts Anna i Alexandre? En quantes no hi ha dos xics ni dues xiques junts?



41. Quantes poligonals tancades es poden dibuixar amb els 8 vèrtexs d'un octògon?

4.3. Permutacions amb repetició

Activitats resoltes

- *Quantes paraules 8 lletres, amb sentit o sense ell, es poden formar on les lletres de la paraula RASTREJAR?*

Observem que la lletra "R" es repeteix tres vegades i la lletra "A", dues vegades. Si les 9 lletres foren distintes el nombre de paraules que es podrien formar seria 9!, però entre aquestes 362 880 paraules observem que totes aquelles en què estan permutades les dues lletres "A" són iguals, per tant tenim la mitat de les paraules 181 440. A més en considerar les tres lletres "R" que hem considerat distintes i que són iguals tenim que per cada paraula diferent hi ha 6, és a dir 3!, que són iguals, per tant el nombre de paraules diferents és 30 240.

Per tant, les permutacions de 9 elements de què unisc es repeteix 3 vegades i un altre 2 serà:

$$PR_{9,3,2} = \frac{9!}{2!3!} = 30240$$

Observa que el nombre de les permutacions de dos elements de què unisc es repeteix *k* vegades i l'altre *n* – *k* vegades coincideix amb el nombre combinatori $\binom{n}{k}$.

Activitats proposades

42. Amb els dígits 1, 2, i 3 quants nombres diferents de 7 xifres pots formar amb tres vegades la xifra 1, dues vegades la xifra 2 i dues vegades la xifra 3.

43. Amb les lletres de la paraula CARCAJADA, quantes paraules amb aquestes 9 lletres, amb sentit o sense ell, es poden formar?

44. Tenim dues fitxes blanques, tres negres i quatre roges, de quantes formes distintes podem apilar-les? En quantes no queden les dues fitxes blanques juntes?

45. El cadenat de la meua maleta té 7 posicions en què es pot posar qualsevol dels 10 dígits del 0 al 9. Quantes contrasenyes diferents podria posar? Quantes tenen tots els seus nombres distints? Quantes tenen algun nombre repetit? Quantes tenen un nombre repetit dues vegades? Ajuda*:* Observa que per a calcular les que tenen algun nombre repetit el més fàcil és restar del total les que tenen tots els seus nombres distints.

4.4. Combinacions amb repetició

Activitats resoltes

- *Un grup de 10 amics se'n van d'excursió i un d'ells s'encarrega de comprar una beguda per a cada u, podent triar entre aigua, batut o refresc. De quantes maneres diferents pot realitzar-se l'encàrrec?*

Per a resoldre aquest problema hem de formar una seqüència de 10 elements, d'un conjunt format pels tres elements A, B, R. Està clar que no importa l'orde en què es compren les begudes, per la qual cosa es tracta de combinacions. Però cada element pot aparèixer en la combinació més d'una vegada. Per exemple una solució formada per dos d'aigua, tres de batut i cinc de refresc, es representaria

AABBBRRRRR. Qualsevol altra combinació haurà de diferenciar-se d'ella per almenys un element de la seua composició. Així que veient que cada seqüència comença amb una repetició de l'element A, segueix amb una altra de l'element B i acaba amb repeticions de l'element R, sent en total 10 els elements que es prenen, podem representar-les per una sèrie de 10 buits amb dos guions de separació entre ells.

A A – B B B – R R R R R (Combinació que representa dos d'aigua, tres de batut i cinc de refresc)

– – R R R R R R R R R R (Combinació que representa només deu de refresc)

– B B B B – R R R R R R (Combinació que representa quatre de batut i sis de refresc)

Així que cada una de les combinacions es correspon amb **una forma de triar on col·locar els guions**, és a dir de 12 possibles posicions triar dos. Com no importa en quin orde es col·loquen els guions i no poden estar els dos a la mateixa posició, aqueix nombre serà igual a les combinacions de 12 elements presos de 2 en 2, per tant serà:

$$\binom{12}{2} = \frac{12!}{10!\cdot 2!} = \frac{12\cdot 11}{2\cdot 1} = 66$$

En general,

S'anomenen **combinacions amb repetició** de m elements presos de *n* en *n* i es designen $CR_{m,n}$ als grups de *n* elements que es poden formar a partir d'un conjunt de m elements diferents entre si, de manera que cada grup es diferencie dels altres pels **elements** que el formen i amb la possibilitat que cada element aparega més d'una vegada.

Coincideixen amb el nombre de seqüències que es poden formar de *m* buits i *n – 1* guions, per tant:

$$CR_{m,n} = \binom{m+n-1}{n-1}$$

Activitats proposades

46. En una caixa hi ha boles roges, negres i blaus. Si fiquem la mà a la caixa i traiem 8 boles, de quantes formes possibles pot realitzar-se l'extracció?

47. De quantes maneres possibles es poden menjar quatre amics 10 caramels iguals?

Problemes d'ampliació

Activitat resolta

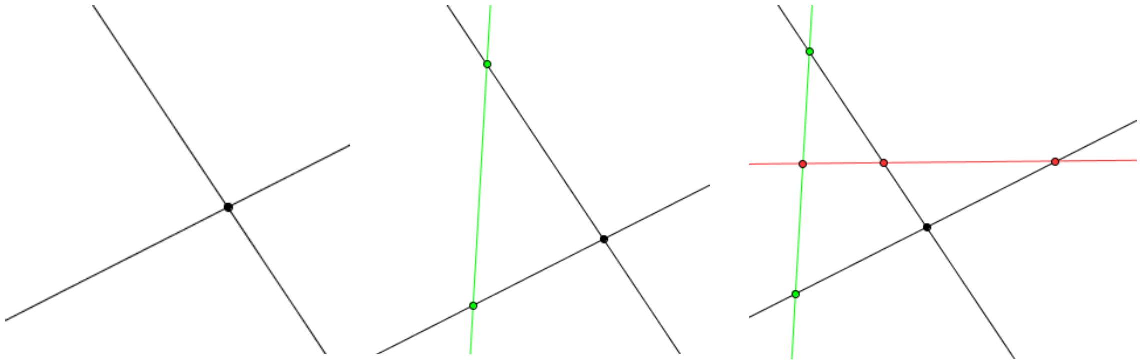
- *Si n rectes d'un mateix pla es tallen dos a dos en punts que són tots distints, es partix així el pla en regions distintes. Quin és el nombre d'aqueixes regions? Quants segments hi ha? Quants punts apareixen?*

Fase 1: Abans de començar a actuar, intenta entendre bé el problema

Per a entendre bé el problema dibuixa rectes al pla per a anar comptant punts, regions i segments

Fase 2: Busca una bona estratègia.

Una bona estratègia consisteix a experimentar amb casos particulars:



S'observa que:

Amb 2 rectes hi ha 4 regions, 1 punt i 4 segments infinits (semirectes).

Amb 3 rectes: En afegir la tercera recta

- Tres de les regions s'han dividit en dos: 4 + 3 = 7 regions.
- S'afigen els 2 punts en què aqueixa recta talla a les anteriors 1 + 2 = 3.
- Es tenen 5 segments més: 3 finits +2 semirectes: 4 + 5 = 9.
  - En particular les semirectes han augmentat en dos: 4 + 2 = 6

Amb 4 rectes: En afegir la quarta recta:

- Quatre de les regions s'han dividit en dos: 7 + 4 = 11 regions
- S'afigen els 3 punts en què aqueixa recta talla a les anteriors 3 + 3 = 6.
- Es tenen 7 segments més: 5 finits + 2 semirectes: 9 + 7 = 16.
  - En particular les semirectes han augmentat en dos: 6 + 2 = 8

Una altra bona estratègia és elaborar una taula amb els resultats obtinguts:

Rectes	Punts	Regions	Segments	Semirectes
2	1	4	4	4
3	1 + 2 = 3	4 + 3 = 7	9	6
4	3 + 3 = 6	7 + 4 = 11	16	8
5	6 + 4 = 10	11+ 5 = 16	25	10
6	10 + 5 = 15	16 + 6 = 22	36	12

Fase 3: Porta avant la teua estratègia

En aquesta fase busquem expressions en funció del nombre de rectes, *n*, per a poder calcular el nombre de punts, segments i regions segons els valors de *n*.

La fórmula per a les **semirectes** pareix la més fàcil d'obtindre perquè aparentment és el doble que el nombre de rectes i a més cada vegada que afegim una recta tenim 2 semirectes més. Si anomenem SS_n al nombre de semirectes que apareixen amb *n* rectes tenim que $\mathbf{SS_n = 2n}$.

Per a calcular el nombre de **segments** (incloses les semirectes) que s'obtenen amb *n* rectes, a partir de les dades de la taula, pareix plausible suggerir que és el quadrat del nombre de rectes, és a dir, si S_n designa al el nombre de segments (els finits i les semirectes) llavors: $\mathbf{S_n = n^2}$.

Per a determinar el nombre de **punts**, a la taula s'observa una llei de recurrència, el nombre de punts, per a qualsevol nombre de rectes, és igual al nombre de punts anterior més el nombre de rectes també de la fila anterior. Si denominem P_n al nombre de punts que es tenen en tallar-se *n rectes* llavors: $\mathbf{P_n = P_{n-1} + n - 1}$

D'altra banda observem que si numerem les rectes amb 1, 2, 3, …, *n i* anomenant els punts pel parell de rectes que determina cada un tenim que són: (1, 2), (1, 3), (1, 4) , … (1, *n*), (2, 3), (2, 4), … (2, *n*), (3, 4) …

El nombre d'aquests parells d'elements coincideix amb les combinacions de *n* elements presos de 2 en 2, és a dir, $\mathbf{P_n} = C_{n,2} = \binom{n}{2}$.

La llei de recurrència que ens suggereix la taula per a obtindre el nombre de **regions** que s'obtenen quan es tallen *n* rectes, és que el nombre de regions de qualsevol fila de la taula és igual al nombre regions de la fila anterior més el nombre de rectes de la seua fila, per tant si R_n el nombre de regions que s'obtenen en tallar-se *n* rectes llavors: $\mathbf{R_n = R_{n-1} + n}$.

Per a obtindre una fórmula observem que:

$R_n = 4 + 3 + 4 + 5 + 6 + \ldots + n = 1 + (1 + 2) + (3 + 4 + 5 + 6 + \ldots + n) = 1 + (1 + 2 + 3 + \ldots + n)$.

Sumant $1 + 2 + 3 + \ldots + n$, obtenim que:

$$R_n = 1 + (n+1)\frac{n}{2}$$

i per tant

$$R_n = 1 + \binom{n+1}{2}$$

o bé

$$R_n = 1 + \frac{(n-1+2)n}{2} = 1 + n + \frac{(n-1)n}{2}$$

i per consegüent

$$R_n = 1 + n + \binom{n}{2}$$

Fase 4: Pensa si és raonable el resultat. Comprova l'estratègia. Generalitza el procés.

En aquesta fase es tracta de justificar o demostrar que totes les conjectures que hem realitzat són certes:

Respecte al nombre de **semirectes** és senzill comprovar que és el doble del nombre de rectes ja que per cada recta tenim dues semirectes, és a dir: $\mathbf{SS_n := 2n}$

El nombre de **segments** és el quadrat del nombre de rectes ja que com en cada una de les rectes hi ha $n-1$ punts tenim n segments (finits i semirectes) i com hi ha n rectes es té que $\mathbf{S_n = n^2}$

Com cada **punt** és la intersecció de dues rectes es té que $\mathbf{P_n} = \binom{n}{2}$,aquesta fórmula compleix la llei de recurrència $\mathbf{P_n = P_{n-1} + n - 1}$. Aplicant les propietats dels nombres combinatoris:

$$P_{n-1} + n - 1 = \binom{n-1}{2} + n - 1 = \binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{1} = \binom{n}{2} = P_n$$

Respecte a les **regions** vegem que la hipòtesi $\mathbf{R_n} = 1 + \binom{n+1}{2}$**,** compleix la llei de recurrència:

$$\mathbf{R_n = R_{n-1} + n}.$$

Si $R_n = 1 + \binom{n+1}{2}$**,** llavors $R_{n-1} = 1 + \binom{n}{2}$**,** i per les propietats dels nombres combinatoris:

$$R_{n-1} + n = 1 + \binom{n}{2} + n = 1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{1} = 1 + \binom{n+1}{2} = R_n$$

En aquesta fase també es pot generalitzar el problema: Què ocorreria si p de les n rectes foren paral·leles? I si q rectes de les n rectes convergeixen en un mateix punt?

Activitats proposades

48. De quantes maneres es poden introduir 7 boles idèntiques en 5 caixes diferents col·locant-les totes si cap caixa pot quedar buida? I si podem deixar alguna caixa buida? Ajuda*:* Ordena les boles en una fila separades per 4 punts així queden dividides en 5 parts, que indiquen les que es col·loquen en cada caixa.

49. Quantes polseres diferents podem formar amb 4 boles blanques i 6 roges? Ajuda*:* Aquest problema és equivalent a introduir 6 boles iguals en 4 caixes idèntiques podent deixar caixes buides.

50. Quantes formes hi ha de col·locar el rei blanc i el rei negre en un tauler d'escacs de manera que no s'ataquen mútuament. I dos alfils? I dues reines?

CURIOSITATS. REVISTA

L'any 1494 apareix la primera obra impresa que té qüestions sobre Combinatòria. És "*Summa*" escrita per Lucca Pacioli. (Et recordes del Nombre d'Or?). Un dels problemes que planteja és el de calcular el nombre de formes distintes en què *n* persones poden assentar-se en una taula redona. Problema que ja hem resolt a l'apartat 4.2.

L'any 1559 va escriure Buteo a França el llibre "*Logística, quae et Aritmètica vulgo dicitur*", un dels primers llibres que tracten sobre Combinatòria. En aquest llibre apareix el problema següent: Un manyà fabrica cadenats formats per 7 discos, i en cada disc hi ha 6 lletres. Quants cadenats és possible fabricar de manera que cada un tinga una combinació diferent per a obrir?

A				
				B

Un gat es troba en A i un ratolí en B. El gat avança de centre de casella en centre de casella movent-se cap a la dreta o cap avall, mai retrocedeix. Quants camins distints pot recórrer el gat per a caçar al ratolí?

"Per aquesta raó d'independència, l'amor a l'estudi és de totes les passions la que més contribueix a la nostra felicitat".

Mme. de Châtelet

RESUM

		Exemples
Permutacions	Es considera només **l'orde**. $P_n = n!$	$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.
Variacions amb repetició	Es consideren **l'orde** i els **elements**. Els elements poden **repetir-se**. $VR_{m,n} = m^n$.	$VR_{2,4} = 2\cdot2\cdot2\cdot2 = 2^4 = 16$
Variacions sense repetició	Influeixen **l'orde** i els **elements**. Els elements **NO** poden repetir-se. $V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}$	$V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{6!}{3!} = 120$
Combinacions	Influeixen només els **elements**. $C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} = \frac{m!}{(m-n)! \cdot n!} = \binom{m}{n}$	$C_{9,7} = \binom{9}{7} = \frac{9!}{2! \cdot 7!} = 36$
Propietats dels nombres combinatoris	$\binom{m}{0} = 1$; $\binom{m}{m} = 1$; $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$; $\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1}$	$\binom{5}{0} = \binom{5}{5} = 1$; $\binom{5}{2} = \binom{5}{3} = 10$; $\binom{5}{3} = \binom{4}{3} + \binom{4}{2} = 6 + 4$
Triangle de Tartaglia	$\binom{0}{0}$ $\binom{1}{0}\ \binom{1}{1}$ $\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2}$ $\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3}$	1 1 1 1 2 1 1 3 3 1 …
Binomi de Newton	$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$	$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Els PowerPoint següents són un bon resum: Variaciones y permutaciones; Combinaciones.

EXERCICIS I PROBLEMES

Permutacions

1. Tres nadadors tiren una carrera. De quantes formes poden arribar a la meta si no hi ha empats? I si són 8 nadadors?

2. Loli, Paco, Anna i Jordi volen fotografiar-se junts, de quantes maneres poden fer-se la fotografia? Volen situar-se de manera que alternen xics amb xiques, de quantes maneres poden ara fer-se la fotografia?

3. De quantes maneres es poden introduir 6 objectes distints en 6 caixes diferents si només es pot posar un objecte en cada caixa?

4. En una parada d'autobús hi ha 5 persones, en quants ordes distints poden haver arribat a la parada? En arribar una nova persona s'aposta amb una altra a què endevina l'orde d'arribada, quina probabilitat té de guanyar?

5. Set xiques participen en una carrera, de quantes formes poden arribar a la meta? No hi ha empats. Quina és la probabilitat d'encertar l'orde d'arribada a la meta?

6. Quants nombres distints i de cinc xifres distintes poden formar-se amb els dígits 3, 4, 5, 6, i 7? Quants poden formar-se si tots comencen per 5? I si han de començar per 5 i acabar en 7?

Variacions

7. Quantes banderes de 3 franges horitzontals de colors distints es poden formar amb els colors roig, groc i morat? I si es disposa de 5 colors? I si es disposa de 5 colors i no cal que les tres franges tinguen colors distints?

8. Quants nombres de 4 xifres distintes es poden escriure amb els dígits: 1, 2, 3, 4, 5 i 6? Quants d'ells són imparells? Quants són múltiples de 4? *Recorda*: Un nombre és múltiple de 4 si el nombre format per les seues dues últimes xifres és múltiple de 4.

9. Quants nombres de 4 xifres, distintes o no, es poden escriure amb els dígits: 1, 2, 3, 4, 5 i 6? Calcula la suma de tots ells. *Suggeriment*: Ordena'ls de menor a major i suma el primer amb l'últim, el segon amb el penúltim, el tercer amb l'antepenúltim i així successivament

10. A Mario li encanta el cine i va a totes les estrenes. Aquesta setmana hi ha sis, i decideix anar cada dia a u. De quantes formes distintes pot ordenar les pel·lícules? Mala sort. Li anuncien un examen i decideix anar al cine només el dimarts, el dijous i el dissabte. Entre quantes pel·lícules pot triar el primer dia? I el segon? I el tercer?

11. Amb els dígits 0, 1, 2, 3, 4, 5, quants nombres de quatre xifres diferents es poden formar? (*Observa:* Si comença per 0 no és un nombre de quatre xifres). Quants són menors de 3000?

12. Amb les lletres de la paraula “ARQUETIPO” Quantes paraules de 6 lletres es poden formar que no tinguen dues vocals ni dues consonants juntes? a) Si totes les lletres són distintes. b) Si es poden repetir lletres.

13. Quants nombres de tres xifres, diferents o no, es poden formar? D’aquests, quants són majors que 123?

14. El llenguatge de l’ordinador està escrit en seqüències de zeros i uns (dígits binaris o bits) de grandària fixa. Al context de la informàtica, aquestes cadenes de bits es denominen paraules. Els ordinadors normalment tenen una grandària de paraula de 8, 16, 32 o 64 bits. El codi ASCII amb el que es representaven inicialment els caràcters per a transmissió telegràfica tenia 7 bits. Després es va aplicar als ordinadors personals, ampliant-ho a 8 bits que és el que es denomina un byte o ASCII estès. Més tard se substituïsc per Unicode, amb una longitud variable de més de 16 bits. Quants bytes diferents (8 dígits) es poden formar? En un ordinador la longitud de paraula del qual tingueren 16 dígits, quantes es podrien formar que anessen diferents? Si existira un ordinador la longitud de paraula del qual tinguera 4 dígits, es podria escriure amb ells les lletres de l’alfabet?

Combinacions

15. Escriu dos nombres combinatoris amb elements diferents que siguen iguals i altres dos que siguen distints.

16. Tens set boles de la mateixa grandària, quatre blanques i tres negres, si les col·loques en fila. De quantes formes pot ordenar-les?

17. Amb 5 llandes de pintura de distints colors, quantes mescles de 3 colors podràs fer?

18. Calcula: a) $\binom{6}{3}$; b) $\binom{8}{5}$; c) $\binom{20}{1}$; d) $\binom{34}{0}$; e) $\binom{47}{47}$.

19. Calcula: a) $C_{9,3}$; b) $C_{10,6}$; c) $C_{8,4}$; d) $C_{20,19}$; e) $C_{47,1}$.

20. De quantes maneres es pot triar una delegació de 4 estudiants d’un grup de 30? I al teu propi grup?

21. Quants productes diferents es poden formar amb els nombres: 2, 1/3, 7, 5 i π prenent-los de 3 en 3? Quants d’aqueixos productes donaran com resultat un nombre enter? Quants un nombre racional no enter? Quants un nombre irracional?

22. Quants aliatges de 3 metalls poden fer-se amb 7 tipus diferents de metall?

23. Quina és la forma més fàcil de calcular $\binom{8}{0}+\binom{8}{1}+\binom{8}{2}+\binom{8}{3}+\binom{8}{4}+\binom{8}{5}+\binom{8}{6}$ sense calcular cada un dels nombres combinatoris?

$\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}$

$\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}$

24. De quantes formes pots separar un grup de 10 estudiants en dos grups de 3 i 7 estudiants respectivament?

25. Una assignatura es compon de 20 temes i es va a realitzar un examen en què cauen preguntes de dos temes. Quantes possibilitats hi ha per a triar els temes que cauen? Si només has estudiat 16 temes. Quantes possibilitats hi ha de que et toquen dos temes que no et sàpies? Quina és la probabilitat que et toquen dos temes que no et sàpies? I la de que et toque només un tema que no et sàpies?

26. Un grup de 10 alumnes de 4º d'ESO visitaran un museu en què poden triar entre dues activitats diferents. Quantes formes distintes pot haver de formar els grups d'alumnes?

27. Desenrotlla el binomi a) $(4-x)^5$; b) $(3-2x)^4$; c) $(2ab-3c)^6$; d) $\left(\frac{x}{2}-\sqrt{2x}\right)^3$.

28. Calcula x a les expressions següents:

a) $\binom{6}{4}+\binom{6}{x}=\binom{x+2}{x}$ b) $\binom{10}{x}=\binom{10}{x+2}$

c) $\binom{7}{4}+\binom{7}{x}=\binom{x+3}{x}$ d) $\binom{12}{x}=\binom{12}{x+2}$

29. Escriu el valor de x a les igualtats següents:

a) $\binom{4}{3}=\binom{4}{x}$, $x \neq 3$; b) $\binom{7}{3}=\binom{7}{x}$, $x \neq 3$; c) $\binom{4}{3}=\binom{3}{x}+\binom{3}{2}$;

d) $\binom{2x+1}{5}=\binom{8}{x}+\binom{8}{5}$; e) $\binom{7}{x-3}=\binom{6}{3}+\binom{x}{2}$; f) $\binom{7}{x}=\binom{7}{x+1}$

30. Calcula en funció de n la suma dels següents nombres combinatoris:

a) $\binom{n}{3}+\binom{n}{4}$ b) $\binom{n}{2}+n$ c) $\binom{n+1}{2}+\binom{n+1}{3}$

31. Troba el sisè terme al desenrotllament de: $\left(\frac{a}{2}+\frac{\sqrt{2}}{x}\right)^{10}$

32. Troba el coeficient de x^2 al desenrotllament de: $(-1 - 5x)^9$.

33. Quantes opcions hi ha per a triar quatre assignatures entre set optatives?

34. Es juga una partida de tir al plat en què es llancen successivament dotze plats. Quin és el nombre de successos en què s'obtenen quatre èxits, és a dir s'encerta quatre vegades en el blanc? Al mateix cas anterior, quina és la probabilitat de tindre èxit a l'últim tir?

Problemes

35. En "Curiositats *i Revista*" tens el problema de *Buteo*. Amb 7 discos i 6 lletres en cada disc, quantes combinacions distintes es poden fer? Ajuda*:* En el primer disc podem posar qualsevol de les 6 lletres. El mateix al segon. I al tercer? Però si és facilíssim! Si ja sabem resoldre'l.

36. En un restaurant hi ha 5 primers plats, 4 segons i 6 postres, de quantes formes diferents es pot combinar el menú?

37. Llancem una moneda i després un dau, Quants resultats distints podem obtindre? I si llancem dues monedes i un dau? I si fossen 3 monedes i 2 daus?

38. S'estan triant els actors i actrius per a fer de protagonistes en una telesèrie. S'han presentat 6 xics i 8 xiques. Quantes parelles distintes podrien formar-se?

39. Una caixa d'un conegut joc educatiu té figures roges, grogues i blaus, que poden ser triangles, cercle o quadrats, i de dos grandàries, grans i xicotetes. De quantes peces consta la caixa?

40. En un restaurant hi ha 8 primers plats i 5 segons, quants tipus de postres ha d'elaborar el restaurant per a poder assegurar un menú diferent els 365 dies de l'any?

41. En una reunió totes les persones se saluden estretint-se la mà. Sabent que va haver-hi 91 salutacions. Quantes persones hi havia? I si va haver-hi 45 salutacions, quantes persones hi havia?

42. De quantes maneres es poden introduir 5 objectes distints en 5 caixes diferents si només es pot posar un objecte en cada caixa? I si es poden posar diversos objectes en cada caixa col·locant tots? Quina és la probabilitat que en la primera caixa no hi haja cap objecte?

43. La major part de les contrasenyes de les targetes de crèdit són nombres de 4 xifres. Quantes possibles contrasenyes podem formar? Quantes tenen algun nombre repetit? Quantes tenen un nombre repetit dues vegades?

44. Tenim 10 rectes al pla que es tallen 2 a 2, és a dir, no hi ha rectes paral·leles. Quants són els punts d'intersecció?, i si tens 15 rectes?, i si tens *n* rectes?

45. Quantes diagonals té un octògon regular?, i un polígon regular de 20 costats?


46. Quantes diagonals té un icosaedre regular?, i un dodecaedre regular? *Ajuda*: Recorda que l'icosaedre i el dodecaedre són poliedres duals, és a dir, el nombre de cares d'un coincideix amb el nombre de vèrtexs de l'altre. Per a saber el nombre d'arestes pots utilitzar la *Relació d'Euler*: C + V = A + 2

47. Quants nombres diferents de 5 xifres distintes pots formar amb els dígits 1, 2, 3, 5 i 7? Quants que siguen múltiples de 5? Quants que comencen per 2? Quants que a més de començar per 2 acaben en 7?

48. Amb 5 boles de 3 colors distints, a) Quantes files diferents pots formar? b) Quantes polseres distintes pots formar?

49. Fa molts anys les plaques de matrícula eren com aquesta: M 677573; després van ser com aquesta: M 1234 AB; i actualment com aquesta: 6068 BPD. Investiga quines avantatges té cada un d'aquests canvis respecte a l'anterior.

50. Amb els dígits 1, 2, 3, 4, 5, quants nombres de cinc xifres distintes es poden formar? Calcula la suma de tots aquests nombres.

51. Calcula *x* als casos següents: a) $V_{x,3} = C_{x,2}$ b) $V_{x,5} = 6\,V_{x,3}$ c) $\dfrac{C_{x+1,4}}{C_{x,2}} = \dfrac{7}{3}$

52. Iker i Maria juguen al tenis i decideixen que guanya aquell que primer guanye 3 sets. Quin és el nombre màxim de sets que hauran de disputar? Quants desenrotllaments possibles pot tindre el partit?

53. Pere va conèixer ahir una xica. Ho van passar molt bé i ella li va donar el seu nombre de mòbil, però ell no portava el seu mòbil ni bolígraf. Va pensar que s'acordaria, però... només recorda que començava per 656, que hi havia altres quatre que eren totes distintes entre si i menors que 5. Calcula quantes possibilitats té d'encertar si marca un nombre. Massa. Fa memòria i recorda que les dues últimes són 77. Quantes possibilitats hi ha ara d'encertar fent una telefonada?

54. Un club de muntanyisme ha organitzat una expedició al Kilimanjaro formada per 11 persones, 7 experts i 4 que estan en formació. En un determinat tram només poden anar 3 experts i 2 que no ho siguen, de quantes formes pot estar compost aqueix equip de 5 persones? Tu ets un expert, i aniràs en aqueix tram, quantes formes hi ha ara de compondre'l?

55. En un festival de curtmetratges amb 15 participants, es reparteixen 3000 euros en premis. Indica el nombre de formes diferents de realitzar el repartiment, segons cada una de les tres modalitats proposades.

a. *Modalitat A:* Es reparteixen tres premis de 1000 euros a tres curtmetratges triats per un jurat.

b. Modalitat B: Es realitza una votació i s'entreguen 1500 euros al més votat, 1000 al segon i 500 al tercer.

56. *Modalitat C*: S'entreguen tres premis de 1000 euros cada un en tres categories: millor guió, millor realització i millor interpretació. Nota: Podria ocórrer que un curtmetratge fora el millor en diverses categories.

57. Als bitllets d'una línia d'autobusos van impresos els noms de l'estació de partida i de la d'arribada. Hi ha en total 8 possibles estacions. Quants bitllets diferents hauria d'imprimir l'empresa d'autobusos? Ara volen canviar el format i només imprimir el preu, que és proporcional a la distància. Les distàncies entre les estacions són totes distintes. Quants bitllets diferents hauria d'imprimir en aquest cas?

58. Una parella té un fill de 3 anys que entra en la guarderia a les 9 del matí. El pare treballa en una fàbrica que té 3 torns mensuals rotatius: de 0 a 8, de 8 a 16 i de 16 a 24 hores. La mare treballa en un supermercat que té dos torns rotatius mensuals, de 8 a 14 i de 14 a 20 hores. Quants dies a l'any, generalment, no podrà cap dels dos portar al seu fill a la guarderia?

59. Un tir al blanc té 10 cavallets numerats que giren. Si s'encerta a un d'ells s'encén una llum amb el nombre del cavallet. Tires 3 vegades, de quantes maneres es poden encendre les llums? I si el primer tir no dóna a cap cavallet?

60. En una festa hi ha 7 xiques i 7 xics. Joan balla sempre amb Anna. Antoni és el més decidit i sempre ix a ballar el primer, de quantes formes pot triar parella als pròxims 4 balls?

61. Amb els dígits 0, 1, 2, 3, 4, 5:

a) Quants nombres de cinc xifres es poden formar?
b) Quants hi ha amb dues vegades la xifra 1 i tres la xifra 2?
c) Calcula la suma de tots aquests últims nombres.

62. Quantes paraules, amb sentit o sense, es poden formar amb les lletres de la paraula "puerta" que no tinguen dues vocals ni dues consonants juntes?

63. Quants números capicues de dues xifres existeixen? I de tres xifres? I de quatre xifres?

64. Amb les lletres de la paraula "ARGUMENTO" Quantes paraules de 5 lletres es poden formar que no tinguen dues vocals ni dues consonants juntes? a) Si totes les lletres són distintes. b) Si es poden repetir lletres.

65. Quants nombres hi ha entre el 6 000 i el 9 000 que tinguen totes les seues xifres distintes?

66. Una fàbrica de joguets té a la venda 8 models distints. Quants mostraris distints pot fer de 4 joguets cada un? Quina és la probabilitat que l'últim model d'avió fabricat arribe a un determinat client? Si es vol que en aqueixos mostraris sempre estiga l'últim model de joguet fabricat, quants mostraris distints pot fer ara?

67. La primera obra impresa amb resultats de Combinatòria és “Summa” de *Lucca Pacioli*, de 1494. En aquesta obra es proposa el problema següent: De quantes formes distintes poden assentar-se quatre persones en una taula circular?

68. Quants nombres de quatre xifres tenen almenys un 5?

69. En una companyia militar hi ha 10 soldats, quantes guàrdies de 3 soldats poden fer-se? Un dels soldats és Alexandre, en quantes d’aquestes guàrdies estarà? I en quantes no estarà?

70. L’encarregada d’un guarda-roba s’ha distret, i sap que dels cinc últimes bosses de mà que ha arreplegat a tres bosses de mà els ha posat el resguard equivocat i a dos no. De quantes formes es pot haver produït l’error? I si fossen dos els equivocats?

71. Amb les lletres de la paraula “SABER”, quantes paraules, amb sentit o sense, de lletres diferents, es poden formar que no tinguen dues vocals ni dues consonants juntes. El mateix per a les paraules “CORTE”, “PUERTA” i “ALBERTO”.

72. Amb les lletres de la paraula GRUPO, quantes paraules de 5 lletres amb sentit o sense es poden formar que tinguen alguna lletra repetida?

73. Un jove té al seu armari 10 camisetes, 5 pantalons i tres parells de sabatilles. Sabent que ha de fer l’equipatge per a un campament i només pot ficar a la motxilla quatre camisetes, tres pantalons i dos parells de sabatilles, de quantes maneres diferents podrà omplir la motxilla?

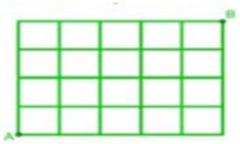
74. Amb els dígits 1, 3 i 5, quants nombres menors de 6 000 es poden formar? Quants hi ha amb 4 xifres que tinguen dues vegades la xifra 5?

75. Camins en una quadrícula:

a) Quants camins hi ha per a anar de A fins a B si només podem anar cap a la dreta i cap amunt?

b) Si no podem travessar el quadrat verd, ni caminar pels seus costats, quantes formes tenim ara per a anar des de A cap a B?

c) Si no podem travessar el rectangle verd, ni caminar pels seus costats, quantes formes tenim ara per a anar des de A cap a B?



Generalització

d) Quants camins hi ha en una quadrícula quadrada amb n quadrats en cada costat?

e) Quants camins hi ha en una quadrícula rectangular amb m quadrats verticals i n horitzontals?

AUTOAVALUACIÓ

1. Tens nou monedes iguals que col·loques en fila. Si quatre mostren la cara i cinc la creu De quantes formes distintes pots ordenar-les?

a) $V_{9,4}$ b) P_9 c) $C_{9,5}$ d) $VR_{9,5}$

2. En una companyia aèria hi ha deu auxiliars de vol, i un avió necessita portar quatre a la seua tripulació, de quantes formes es poden triar?

a) $V_{10,4}$ b) P_{10} c) $C_{10,4}$ d) $VR_{10,4}$

3. Quants productes distints poden obtindre's amb tres factors diferents triats entre els dígits: 2, 3, 5 i 7?

a) $V_{4,3}$ b) P_4 c) $C_{4,3}$ d) $VR_{4,3}$

4. Tenim cinc objectes distints i volem guardar-los en cinc caixes diferents, posant un objecte en cada caixa, de quantes formes podem fer-ho?

a) $V_{5,1}$ b) P_5 c) $C_{5,5}$ d) $VR_{5,1}$

5. Permutacions de n+4 elements dividit entre permutacions de n+1 elements és igual a:

a) $(n+4)\cdot(n+3)\cdot(n+2) = \dfrac{(n+4)!}{(n+1)!}$ b) $V_{n+4,n+2}$ c) $\dfrac{(n+4)!}{n!}$ *d)* $V_{n+4,n+2}/ C_{n+4,n+1}$

6. Les variacions de 10 elements presos de 6 en 6 és igual a

a) $VR_{6,10}$ b) $V_{10,6} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = \dfrac{10!}{6!}$ c) $V_{10,6} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = \dfrac{10!}{4!}$ d) $V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = \dfrac{6!}{3!}$

7. Indica quina afirmació és falsa

a) $0! = 1$ b) $V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n)$ c) $VR_{m,n} = m^n$ d) $P_n = n!$

8. El valor dels següents nombres combinatoris $\binom{5}{0}$, $\binom{9}{9}$, $\binom{4}{1}$ és:

a) 0, 1, i 1 b) 0, 9 i 4 c) 1, 1 i 4 d) 5, 9 i 4

9. El valor de x, diferent de 4, a la igualtat $\binom{7}{4} = \binom{7}{x}$ és:

a) 3 b) 7 c) 1 d) 0

10. El coeficient del terme quart del desenrotllament del Binomi de Newton de $(a + b)^7$ és:

a) $\binom{7}{3}$ b) 1 c) $\binom{7}{4}$ d) $V_{7,4}$

Matemàtiques orientades a les ensenyances acadèmiques.

4tB ESO. Capítol 15: Atzar i Probabilitat

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Fernando Blasco

Revisora: Raquel Caro

Il·lustracions: Fernando Blasco, Banc d'Imatges d'INTEF i Wikimedia

Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

(N. del T. en alguns exercicis s'ha respectat la paraula en castellà pels solucionaris)

Índex

Resum

Tots els dies utilitzem conceptes probabilístics informalment: decidim si emportar-nos abric o no quan eixim al matí de casa, juguem a jocs d'atzar o d'estratègia, llegim estadístiques i sondejos o ens preguntem si hui plourà. No obstant això la nostra intuïció probabilística no està molt desenrotllada. En aquest capítol introduïm algunes regles probabilístiques formals i mostrem com es pot utilitzar la combinatòria o els diagrames d'arbre per a calcular probabilitats. En realitat, l'únic secret consisteix a ser capaços de comptar bé. Amb aquests coneixements no deixarem que altres manipulen estadístiques. El coneixement ens donarà la clau per a prendre decisions pròpies.

També mostrarem alguns exemples que poden parèixer contraris a la nostra intuïció. Hi ha fets que, fent els comptes, resulten molt més probable del que ens pareix a simple vista. Conèixer-los ens ajudarà a distingir altres casos semblants.

1. EXPERIÈNCIA I PROBABILITAT

1.1. La llei de Laplace

Tots els dies estem obligats a calcular probabilitats, encara que siga de manera intuïtiva: guanyarà la Lliga el meu equip favorit?, plourà demà?, li agradaré a aqueixa persona "especial" que hi ha en classe?, em donaran una beca?

A cada succés se li pot assignar una **probabilitat**, que és un nombre comprés entre 0 i 1. Quant major siga la possibilitat que aqueix succés ocórrega, el nombre que indica la probabilitat serà més pròxim a 1 i si tenim poques opcions que ocórrega aqueix fet, la seua probabilitat estarà pròxima a 0.

La nostra experiència (i també la teoria que pots consultar en els Apunts Marea Verda de 3º ESO) ens ajuda a calcular probabilitats mitjançant **la Llei de *Laplace*** al cas en què tots els casos siguen equiprobables (açò és, no hi haja successos simples que tinguen més probabilitat d'eixir que altres).

La regla de *Laplace* està basada en el principi *de raó insuficient*: si a priori no hi ha cap raó per a suposar que un resultat es pot presentar amb més probabilitat que els altres, podem considerar que tots els resultats tenen la mateixa probabilitat d'ocórrer.

$$P(S) = \frac{nombredecasosfavorablesalsuccés S}{nombredecasospossibles}$$

Un poc més avant en aquest capítol tornarem a formalitzar (i ampliar) la matemàtica que hi ha davall del càlcul de probabilitats, però preferim ara mostrar uns quants exemples que ens servisquen per a entrenar la nostra intuïció.

Exemples:

- *En una classe hi ha 16 xics i 17 xiques. Com no es presenta ningú per a ser delegat es fa un sorteig. Quina és la probabilitat que en la classe haja delegada?*

Com hi ha 17 xiques (els casos favorables) sobre una població de 33 individus, d'acord amb la Llei de *Laplace*, la probabilitat demanada és

$$P(S) = \frac{nombredecasosfavorablesalsuccés S}{nombredecasospossibles} = \frac{17}{33}$$

- En el portamonedes tenim 7 monedes d'1 cèntim, 5 monedes de 5 cèntims, 6 monedes de 10 cèntims i 3 monedes de 50 cèntims. Traiem una moneda a l'atzar, quina és la probabilitat que la quantitat obtinguda siga un nombre parell de cèntims?

En traure una moneda, per a tindre un nombre parell de cèntims ha de ser de 10 c o de 50 c. Per tant el total de casos favorables és de 9 (hi ha 6 de 10 i 3 de 50). El nombre de casos possibles és el de monedes que tenim al portamonedes, que són 7 + 5 + 6 + 3 = 21.

La probabilitat d'obtindre un nombre parell de cèntims és $P(par) = \frac{casos favorables}{casos possibles} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$.

Activitats proposades

1. En una caixa tenim mesclats 25 claus de 2 cm de llarg, 15 claus de 3 cm, 20 claus de 2,5 cm i 40 claus de 3,5 cm. Traiem a l'atzar un clau de la caixa (s'assumeix que tots els claus tenen la mateixa probabilitat de ser triats). Quina probabilitat hi ha de que el clau extret tinga la menor longitud?

2. a) La ruleta francesa consta dels nombres que van del 0 al 36. Si ix 0 guanya la banca. Decidim apostar a "*parell*" (guanyarem si ix un nombre parell no nul). Quina probabilitat tenim de guanyar l'aposta?

b) La ruleta americana consta d'un 0, un 00 i dels nombres que van de l'1 al 36. Si ix 0 o 00 guanya la banca. Decidim apostar a "*parell*" (guanyarem si ix un nombre parell no nul). Quina probabilitat tenim de guanyar l'aposta?

3. En un institut de 800 alumnes hi ha 400 estudiants que parlen anglès, 300 que parlen francès, 100 que parlen alemany, 100 que parlen anglès i francès, 80 que parlen anglès i alemany, 50 que parlen francès i alemany i 30 que parlen els tres idiomes.

Es tria un estudiant a l'atzar. Quina és la probabilitat que parle només una llengua estrangera?

1.2. Traient boles d'una bossa

Una forma senzilla de fer-nos una idea dels conceptes probabilístics és fer *experiments* amb objectes coneguts. Per exemple, són molt típics els problemes en què traiem boles (o caramels, o paperetes, …) d'una bossa.

Exemple:

- *Una bossa conté* 4 boles *blanques,* 2 boles *roges i una bola negra.*

a) S'extrauen dues boles al mateix temps. Quina és la probabilitat que siguen una blanca i una negra?

b) S'extrau una bola de la bossa. Després es trau una segona bola, sense tornar a ficar en la bossa la primera. Quina és la probabilitat que després de la segona extracció tinguem una bola blanca i una bola negra?

c) S'extrau una bola de la bossa. Després es trau una segona bola, sense tornar a ficar en la bossa la primera. Quina és la probabilitat que la primera bola siga blanca i la segona negra?

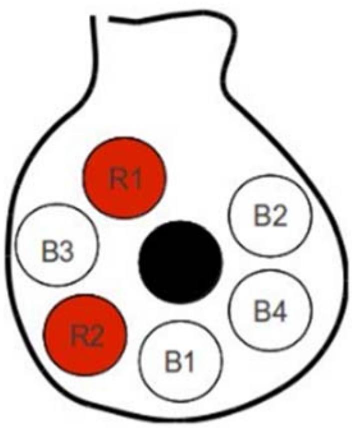
d) S'extrau una bola de la bossa. Després de mirar de quin color s'introdueix en la bossa de nou. Es trau una segona bola. Quina és la probabilitat que la primera bola siga blanca i la segona negra?

e) S'extrau una bola de la bossa. Després de mirar de quin color s'introdueix en la bossa de nou. Es trau una segona bola. Quina és la probabilitat que les dues vegades haja eixit la bola negra?

f) S'extrau una bola de la bossa. Després de mirar de quin color s'introdueix en la bossa de nou. Es trau una segona bola. Quina és la probabilitat que les dues vegades haja eixit una bola blanca?

Hi ha moltes maneres de resoldre aquests exemples. La clau està a comptar bé els casos que apareixen. Empraren mètodes distints, que desenrotllarem després al llarg del capítol.

a) Encara que no ens diguen res al problema, i encara que les boles siguen indistingibles, imaginarem que cada una té un nombre escrit, com les boles de billar americà. Això ens ajudarà a comptar. Així, la situació és la representada en la figura



Formalment no ens importa en quina orde ixen les boles. En principi agafem les dos al mateix temps.

Els casos favorables són:

Els casos possibles són les combinacions de 7 elements presos de 2 en 2. Açò és,

$$C_{7,2} = \binom{7}{2} = 21$$

Així, la probabilitat demanada és $\frac{4}{21}$.

b) Encara que parega distint per com l'hem enunciat, en aquest exemple preguntem <u>exactament el mateix</u> que a l'exemple (a). En efecte, només ens interessa el que ocorre després de la segona extracció. Així que ja sabem el resultat.

Si volguérem podríem plantejar-lo tenint en compte l'orde en què ixen les boles. En aqueix cas, per a comptar el total de casos possibles haurem d'utilitzar variacions de 7 elements presos de 2 en 2.

Casos favorables: B1 N, B2 N, B3 N, B4 N, N B1, N B2, N B3, N B4 (es considera orde d'extracció)

Casos possibles: són totes les formes de triar una parella de boles en què sí que importa l'orde d'elecció (primer es trau una i després una altra) $V_{7,2} = 7 \cdot 6 = 42$

Així, la probabilitat demanada és $\frac{casos favorables}{casos possibles} = \frac{8}{42} = \frac{4}{21}$

c) Aquest exemple canvia respecte a l'anterior en que sí ens importa l'orde en què ixen les boles.

Casos favorables: B1 N, B2 N, B3 N, B4 N

Casos possibles $V_{7,2} = 7 \cdot 6 = 42$

Probabilitat = $\frac{casos favorables}{casos possibles} = \frac{4}{42} = \frac{2}{21}$.

d) En aquest exemple els casos favorables són els mateixos que a l'exemple anterior. Però hi ha moltes més possibilitats, ja que tornem a introduir en la bossa la bola que hem tret a la primera extracció. Per a comptar el nombre de casos possibles s'utilitzen les *variacions amb repetició.*

Casos favorables: B1 N, B2 N, B3 N, B4 N

Casos possibles: $VR_{7,2} = 7^2 = 49$

Probabilitat = $\frac{casos favorables}{casos possibles} = \frac{4}{49}$.

e) En aquest exemple hi ha un únic cas favorable: que isca la bola negra 2 vegades. El nombre de casos possibles és el que hem calculat a l'exemple anterior, ja que realitzem dues extraccions i ens importa l'orde.

Casos favorables: N N

Casos possibles: $VR_{7,2} = 7^2 = 49$

Probabilitat = $\frac{casos favorables}{casos possibles} = \frac{1}{49}$

f) En aquesta ocasió tornem a tindre el mateix nombre de casos possibles que als dos exemples anteriors. El que canvia és el mode de comptar el nombre de casos favorables. Podem fer-ho sense pensar o bé utilitzant combinatòria, que per a això l'hem estudiada.

Els casos possibles són B1 B1, B1 B2, B1 B3, B1 B4, B2 B1, B2 B2, B2 B3, B2 B4, B3 B1, B3 B2, B3 B3, B3 B4, B4 B1, B4 B2, B4 B3, B4 B4. És a dir, 16 casos.

Els podríem haver calculat d'una forma molt més senzilla tenint en compte que hi ha 4 boles blanques i s'extrauen, amb reemplaçament, 2 vegades. Això dóna lloc a un problema típic de variacions amb repetició.

Casos favorables: $VR_{4,2} = 4^2 = 16$

Casos possibles: $VR_{7,2} = 7^2 = 49$

Probabilitat = $\frac{casos favorables}{casos possibles} = \frac{16}{49}$

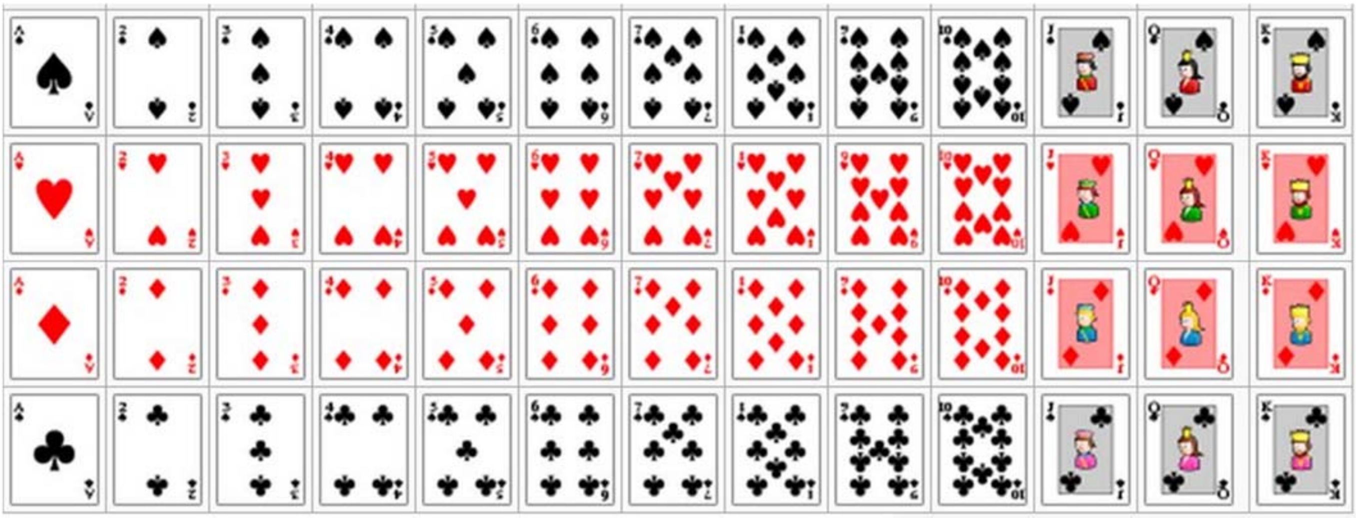
Activitats proposades

4. Torna a fer tots els apartats de l'exemple anterior però substituint en cada cas "bola blanca" per "bola roja".

5. A la loteria primitiva una aposta consisteix a marcar 6 caselles d'entre 49 possibles. El dia del sorteig s'extrauen 6 boles (d'entre 49). Quina és la probabilitat que la teua aposta coincidisca amb la combinació guanyadora? Quina és la probabilitat que encertes 5 nombres? I la de que encertes 4 nombres?

1.3. Mesclant cartes

En una baralla americana tenim 4 colls: piques, cors, trèvols i diamants. Les cartes de piques i de trèvols són negres, mentres que els diamants i els cors són cartes roges. Cada pal té 13 cartes, de les que hi ha cartes amb nombres de l'1 al 10 i 3 figures: la sota (J), la dama (Q) i el rei (K). A la baralla francesa (original, però menys vista) en compte d'aparèixer J, Q, K apareixen V, D, R (del francès Valet, Dame i Roi). A més, la baralla en té 2 comodins, però no els utilitzarem als nostres exemples.



Les mescles de cartes tenen propietats molt interessants. De fet hi ha molts jocs de cartomàgia que es basen en propietats matemàtiques de les mescles (i no precisament probabilístiques). Als exemples que veurem a continuació suposarem sempre que treballem amb una baralla ben mesclada i l'extracció de les cartes es farà sempre de forma aleatòria.

Exemples:

- *Es reparteixen a l'atzar* 5 cartes *d'una baralla de pòquer. Quina és la probabilitat que tingues* 4 cartes *del mateix valor?* (aqueixa és la jugada que s'anomena *pòquer*).

No ens importa l'orde, amb la qual cosa el nombre de mans possibles es calcula mitjançant combinacions. Açò és,

$$C_{52,5} = \binom{52}{5} = 2\,598960.$$

Per a comptar el nombre de casos favorables pensarem, de moment, en un poc més concret: quantes possibilitats hi ha d'obtindre un *pòquer d'asos.*

La mà que ens interessa és A A A A * , on * pot ser qualsevol carta. Hi ha 12 possibilitats per a açò. En efecte, l'única elecció possible és la carta que acompanya als asos.

Així, com tenim 13 possibles valors (de l'As al 10 i les 3 figures) hi ha, 13 ·12 = 156 casos favorables. Amb això, la probabilitat demanada és

$$P(pòquer) = \frac{casos favorables}{casos possibles} = \frac{156}{2598960} = \frac{39}{649740}$$

- *Una jugada de* 5 *cartes s'anomena full si en ella hi ha* 3 *cartes d'un valor i altres* 2 *d'un valor distint. Quina és la probabilitat d'aconseguir un full d'Asos i Dosos, açò és, AAA 22?*

Els casos possibles són els mateixos d'abans: el nombre de possibles jugades de 5 cartes.

Per a aconseguir AAA tenim 4 cartes (els 4 asos) dels que hem de triar 3. Es calculen amb combinacions.

$$C_{4,3}=\binom{4}{3}=4.$$

Per a aconseguir els dosos hem de triar 2 dosos d'entre 4. Tornem a utilitzar combinacions.

$$C_{4,2}=\binom{4}{2}=6.$$

Combinant les 4 possibilitats que tenim per a aconseguir els 3 asos i les 6 possibilitats que tenim per a aconseguir els 2 dosos, ens queda un total de 24 formes d'aconseguir aqueix full d'Asos i Dosos.

Així,

$$P(AAA22)=\frac{casosfavorables}{casospossibles}=\frac{24}{2598960}=\frac{1}{108290}$$

- *Quina és la probabilitat d'aconseguir un full (independentment de la seua composició)?*

A l'exemple anterior hem calculat la probabilitat d'aconseguir un full concret: el full AAA22.

Però per a aconseguir un full arbitrari tenim 13 possibilitats d'elecció per a les 3 cartes del mateix valor i 12 per a triar les altres 2 cartes (clar, ja no podem usar el valor que hem triat per al trio). Així, hi ha 13 · 12 possibilitats d'aconseguir un full concret.

Com un full fixat es podia obtindre de 24 formes diferents (ho hem calculat a l'exemple anterior), el total de casos favorables és

Casos favorables = 13 · 12 · 24 = 3744.

I així

$$P(full)=\frac{3744}{2598960}=\frac{78}{54145}.$$

Activitats proposades

6. a) S'anomena *trio* a la jugada que consisteix en 3 cartes del mateix valor i altres dos de diferent valor al d'aqueixes 3 i a més amb diferents valors entre si. Calcula la probabilitat d'obtindre un trio *d'asos* en una jugada de 5 cartes.

b) Calcula la probabilitat d'obtindre un *trio* qualsevol.

7. a) S'anomena escala *de color* a una jugada composta per 5 cartes del mateix pal ordenades consecutivament. Calcula la probabilitat d'obtindre aquesta escala *de color*:

b) Calcula la probabilitat d'obtindre una escala *de color* qualsevol.

8. S'anomena *color* a una jugada composta per 5 cartes del mateix pal que no són consecutives. Calcula la probabilitat d'obtindre *color* en una jugada.

2. APROFUNDINT A LA TEORIA

2.1. Combinatòria per a poder comptar

Els exemples que hem fet al principi del capítol mostren l'important que és el domini de la combinatòria per a comptar els casos favorables i els casos possibles que tenim. A manera de recordatori, incloem un quadre extret del resum del capítol anterior:

Permutacions	Influeix només **l'orde**. $P_n = n!$	$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.
Variacions amb repetició	Influeix **l'orde** i els **elements**. Els elements poden **repetir-se**. $VR_{m,n} = m^n$.	$VR_{2,4} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$
Variacions sense repetició	Influeix **l'orde** i els **elements**. Els elements NO poden repetir-se. $V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}$	$V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{6!}{3!} = 120$
Combinacions	Influeixen només els **elements**. $C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} = \frac{m!}{(m-n)! \cdot n!} = \binom{m}{n}$	$C_{9,7} = \binom{9}{7} = \frac{9!}{2! \cdot 7!} = 36$

2.2. Nomenclatura en probabilitat

És molt important anomenar a cada cosa pel seu nom. La precisió i el llenguatge en Matemàtiques poden convertir en senzill una cosa que, en principi, podria parèixer molt complicada.

Un **experiment aleatori** és una acció (experiment) el resultat de la qual depèn de l'atzar.

A cada un dels resultats possibles d'un experiment aleatori li anomenarem **cas** o **succés elemental**.

El conjunt de tots els casos possibles s'anomena **espai mostral** o **succés segur**.

Un **succés** és un subconjunt de l'espai mostral.

Si S és un succés es verifica el **succés contrari** de S sempre que no es verifica S. El representarem per S^C.

Es diu que dos successos són **successos independents** si que es verifique un d'ells no afecta la probabilitat de verificació de l'altre.

Exemple:

- *Experiments aleatoris:*

  a) Triar una persona a l'atzar i veure en quin dia de la setmana ha nascut.

  b) Traure una carta de la baralla de pòquer i veure de quin pal és.

  c) Llançar un dau de parxís i observar el nombre de la cara superior.

  d) Llançar 3 monedes a l'aire i observar la posició en què cauen.

- *Espais mostrals*. Per als experiments de l'exemple anterior els espais mostrals són, respectivament:

  a) {dilluns, dimarts, dimecres, dijous, divendres, dissabte, diumenge}

  b) {piques, cors, trèvols, diamants}

  c) {1, 2, 3, 4, 5, 6}

  d) {CCC, CCX, CXX, XXX}

- *Successos contraris*. Usarem els experiments (a), (b), (c), (d) d'aquest exemple.

a) El succés contrari a "un dia del cap de setmana" és {dilluns, dimarts, dimecres, dijous, divendres}

b) El succés contrari a "carta roja" és {piques, trèvols}

c) El succés contrari a "nombre múltiple de 3" és {1, 2, 4, 5}

d) El succés contrari a "ixen les 3 cares" és {CCX, CXX, XXX}

- *Successos independents*. Usarem els experiments (a), (b), (c), (d) d'aquest exemple.

a) Els successos "haver nascut en cap de setmana" i "haver nascut en dilluns" són independents. Els successos "haver nascut en cap de setmana" i "haver nascut en diumenge" són dependents.

b) Els successos "obtindre una carta roja" i "obtindre una carta de piques" són independents. Els successos "obtindre una carta roja" i "obtindre una carta de cors" són dependents.

c) Els successos "obtindre un nombre parell" i "obtindre un 5" són independents. Els successos "obtindre un nombre parell" i "obtindre un 6" són dependents.

d) Els successos "obtindre tres cares" i "obtindre tres creus" són independents. Els successos "Obtindre tres resultats iguals" i "obtindre tres creus" són dependents.

Com la unió d'un succés i el seu **succés contrari** és el succés segur, es té que

$$P(S^C) = 1 - P(S).$$

Quan dos successos són independents, la probabilitat que es done el **succés intersecció** (açò és, que es verifiquen ambdós successos al mateix temps) és el producte de les probabilitats de cada un d'ells

Si A i B són **independents**,

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Activitats proposades

9. Es consideren els següents experiments aleatoris:

1) Es tenen 5 fitxes de Scrabble formant la paraula CASAS. Es fiquen en una bossa i s'extrauen 3 fitxes.
2) Es mescla una baralla de pòquer, es talla i es mira el valor de la carta superior.
3) Un portamonedes conté 4 monedes de 5 cèntims, 2 monedes de 10 cèntims i 1 moneda de 20 cm. S'extrauen a l'atzar dues monedes d'ell.
4) Dels 30 alumnes d'una classe es tria un a l'atzar. Se li pregunta en quin mes ha nascut.

a) Descriu els espais mostrals de cada un dels 4 experiments aleatoris anteriors.

b) Indica els successos contraris a
   1. {AAC}
   2. {A, 2, 3, 4, 5}
   3. Traure una quantitat parell de cèntims.
   4. Haver nascut en un mes en què segur que és estiu.

a) Són independents aquests parells de successos?
   1. {AAC} i {{ASA}, {CAS}}
   2. "Obtindre un 6" i "obtindre un nombre parell"
   3. "Obtindre una quantitat parell de cèntims" i "traure dues monedes de 5 cèntims"
   4. "Haver nascut en un mes que segur és d'estiu" i "haver nascut al juny"

El llenguatge és molt important a l'hora de **comprendre** què ens estan demanant en cada cas.

2.3. No tots els successos tenen la mateixa probabilitat

Hi ha casos en què intuïm perfectament que no tots els successos tenen la mateixa probabilitat. Per exemple, si llancem un dau, la probabilitat d'obtindre un nombre parell és 1/2 mentres que la d'obtindre un múltiple de 3 és 1/3.

Altres vegades ens pot costar més.

Exemple

- *Considera l'experiment aleatori "mesclar una baralla, tallar i mirar el color de les dues cartes que han quedat dalt".*

  a) Si escrivim l'espai mostral veurem que és {RR, RN, NN}. Clar: o bé les dues cartes són roges, o bé les dos són negres, o bé hi ha una de cada color.

  b) Però… i si haguérem escrit el color de cada carta, per orde d'aparició? En aquesta situació, els casos possibles serien {RR, RN, NR, NN}.

Com el llenguatge que utilitzem és imperfecte, per a un mateix experiment podem considerar dos espais mostrals distints. No hi ha problema en això sempre que sapiem què ens estan preguntant i què hem de fer.

En realitat, el RN que hem escrit en (a) es correspon amb els casos RN i NR de (b).

Treballant amb l'espai mostral de (b) tots els casos són equiprobables mentres que si treballem amb l'espai mostral de (a) els successos RR i NN tenen probabilitat 1/4 mentres que RN té probabilitat 1/3.

Activitats resoltes

- *Es tenen* 5 *fitxes de Scrabble formant la paraula* CASAS. *Es fiquen en una bossa i s'extrauen* 3 *fitxes. Dóna dos casos que siguen equiprobables i altres dos que no ho siguen.*

Són equiprobables {AAC} i {SSC}. No són equiprobables {AAC} i {CAS}.

- *Es mescla una baralla de pòquer, es talla i es sumen els valors de les dues cartes superiors* (assumim A = 1, J = 11, Q = 12, K = 13). Dóna *dos casos que siguen equiprobables i altres dos que no ho siguen.*

En aquest exemple l'espai mostral és {2, 3, ….., 26} (els nombres que poden obtindre's en sumar els valors de les dues cartes).

Són casos equipobables {2} i {26} o {3} i {25}. No són equiprobables {2} i {3}.

- *Dels 30 alumnes d'una classe es tria un a l'atzar. Se li pregunta en quin mes ha nascut. Dóna dos casos que siguen equiprobables i dos que no ho siguen.*

L'espai mostral és {gener, febrer, …, novembre, desembre}. En realitat no tots aquests casos són equiprobables. Per a saber-lo hem d'aproximar la probabilitat mitjançant la freqüència relativa i per a això és necessària l'estadística. L'any 2012 les dades de naixements a Espanya, per mesos es reflecteixen en aquesta taula:

gener	febrer	març	abril	maig	juny	juliol	agost	sept	octubre	nov	des
11.765	10.967	11.776	11.329	11.954	11.314	11.874	12.031	11.672	12.324	11.510	11.318

2.4. Ús de diagrames d'arbre

Ja s'ha utilitzat la representació en diagrama d'arbre per a generar variacions, combinacions o permutacions. Aqueix mateix tipus d'estructura és també útil quan cal calcular probabilitats.

Exemple

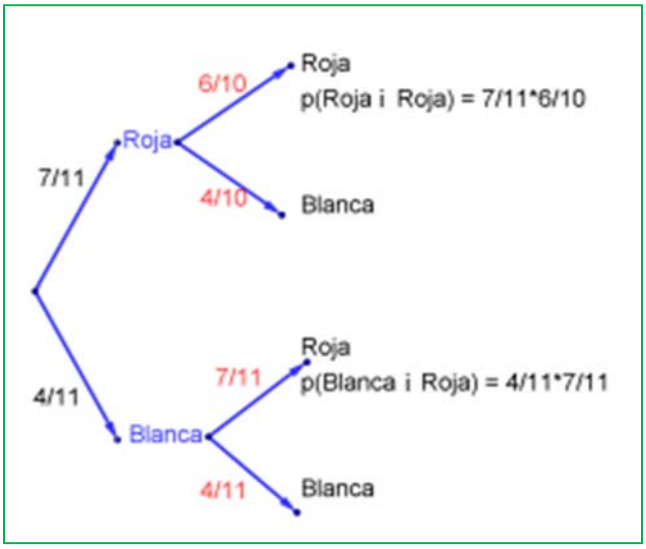
- *Tenim una caixa amb 7 boles roges i 4 boles blanques. Es trau una bola a l'atzar. Si és blanca es torna a ficar a la caixa. Si és roja es deixa fora. En aquestes condicions es trau una altra bola de la caixa. Quina probabilitat hi ha de que aquesta bola siga roja?*

Poden ocórrer dues coses: que la bola de la primera extracció siga roja o que siga blanca.

1.- Si la bola treta és roja (ocorre amb probabilitat 7/11) la bola quedarà fora i la composició de la caixa just abans de la segona extracció és de 6 boles roges i 4 boles blanques.

La probabilitat que en aquest moment de traure una bola roja és de 6/10.

2.- Si la bola treta és blanca (ocorre amb probabilitat 4/11), la bola es torna a ficar a la caixa i la composició d'aquesta abans de la segona extracció serà la mateixa que al principi. Així, la probabilitat que a la segona extracció isca una bola roja és de 7/11.

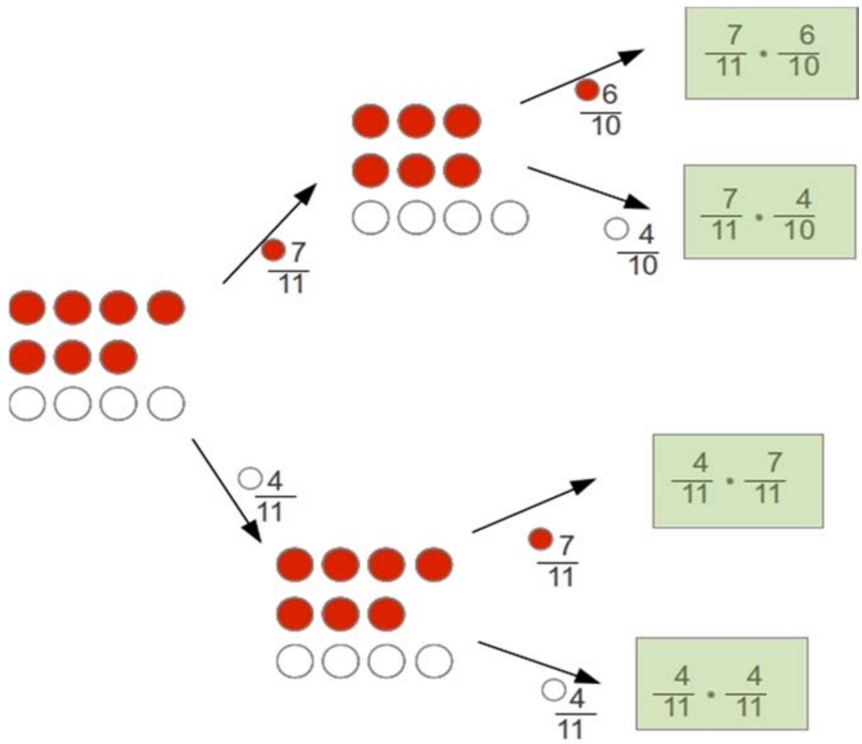


Es pot arribar a obtindre una bola roja a la segona extracció per dues vies: depenent del color de la bola que s'ha tret a la primera extracció.

La **probabilitat total** de què isca una bola roja a la segona extracció és:

$$P(roja) = \frac{7}{11}\cdot\frac{6}{10} + \frac{4}{11}\cdot\frac{7}{11} = \frac{411}{605}$$

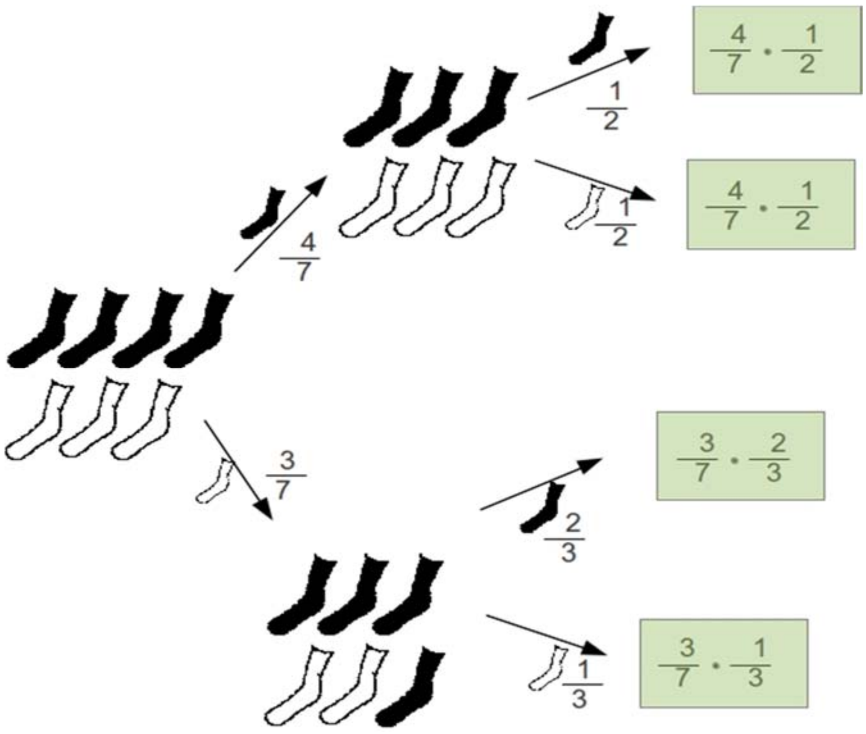
Tot aquest procés se sol resumir i simplificar utilitzant un **diagrama d’arbre:**



Activitat resolta

- *En un calaix tenim* 7 calcetins*:* 4 *negres i* 3 *blancs. Traiem, sense mirar, dos calcetins del calaix. Què és més probable, que siguen ambdós del mateix color o que siguen de colors distints?*

Farem un diagrama d’arbre calculant la probabilitat de cada cas.



La probabilitat que obtinguem dos calcetins negres és 2/7, de que obtinguem 2 calcetins blancs és 1/7. Així tenim que la probabilitat d'obtindre dos del mateix color és 3/7, enfront de la probabilitat d'obtindre dos de colors distints, que és 4/7.

És més probable traure un parell de calcetins de colors distints.

Observació

També podríem haver resolt aquest problema mitjançant la *Llei de Laplace*.

Casos possibles: $C_{7,2} = \binom{7}{2} = 21.$

Casos favorables a traure 2 calcetins negres: $C_{4,2} = \binom{4}{2} = 6.$

Casos favorables a traure 2 calcetins blancs: $C_{3,2} = \binom{3}{2} = 3.$

Casos favorables: 6 + 3 = 9.

Probabilitat $= \frac{casos favorables}{casos possibles} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$

Com traure un calcetí de cada color és el succés contrari a aquest, la seua probabilitat és $1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$. És més probable aquest cas.

Recorda que els problemes de Matemàtiques es poden abordar des de diferents punts de vista. L'important és que sigues capaç de resoldre'ls. Per això és important conèixer més d'un mètode. En unes ocasions serà millor utilitzar un i en altres serà millor usar un mètode alternatiu. Per això has d'estudiar diverses "ferramentes" que t'ajuden a resoldre els problemes que apareixen.

Activitats proposades

10. Elabora un arbre de probabilitats per a calcular la probabilitat d'obtindre *doble parella* en una jugada de 5 cartes de pòquer. (*Doble parella* consisteix en 2 parells de cartes del mateix valor, diferents entre si, i una carta indiferent, de valor diferent dels dos anteriors. Per exemple, AA 33 Q).

11. Al portamonedes tinc 3 monedes d'un cèntim, 2 de 5 cèntims, 3 de 10 cèntims, 1 de 20 i 1 de 50 cèntims. Trac 3 monedes a l'atzar. Quina és la probabilitat que obtinga un nombre parell de cèntims?

2.5. Probabilitat condicionada

Als casos de diagrames d'arbre, en cada pas apareixen probabilitats que estan condicionades a un pas anterior. A l'exemple de la secció 2.4 la probabilitat que a la segona extracció la bola siga roja condicionada a què a la primera extracció havia eixit una bola roja era 6/10, mentres que la probabilitat de traure una bola roja a la segona extracció, sabent que a la primera havia eixit una bola blanca era 7/11.

En molts casos la probabilitat que cal determinar és una **probabilitat condicionada** a la verificació d'un succés anterior.

La probabilitat de verificació del succés A condicionada a la verificació del succés B es representa per *P*(*A/B*).

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Exemples

- *Al llançament d'un dau ha eixit un nombre parell. Calcula la probabilitat que siga un* 6.

No cal formalitzar açò així, però per a acostumar-nos a la notació donarem noms als successos que intervenen:

A = Obtindre un 6 = {6}

B = Obtindre nombre parell = {2, 4, 6}

Els casos possibles són {2, 4, 6} (perquè ens diuen que ha eixit un número parell)

L'únic cas favorable és { 6}

Així doncs

P(traure 6 condicionat *a parell*) = $\frac{casosfavorables}{casospossibles} = \frac{1}{3}$

També podríem haver calculat açò amb àlgebra de successos:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$$

- El 40 % de la població fuma, i el 10 % fuma i és hipertens. Quina és la probabilitat que un fumador siga hipertens?

Assumirem que els percentatges de població es corresponen amb probabilitats. Així, la probabilitat de que un individu triat a l'atzar siga fumador és 0,4 i la probabilitat que siga fumador i hipertens és 0,1. D'aquesta manera

A = Ser fumador i hipertens

B = Ser fumador

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}1}{0{,}4} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

Com $P(A) = 0{,}1 \neq P(A/B) = 0{,}25$ els successos "*ser fumador*" i "*ser hipertens*" són successos dependents.

Activitats proposades

12. Un analista esportiu, que s'equivoca el 20 % de les vegades, ha dit que el nostre equip favorit guanyarà la lliga. L'analista de la competència, que s'equivoca el 25 % de les vegades, ha dit que el nostre equip favorit no guanyarà la lliga. Segons eixos comentaris. Quina probabilitat hi ha de que el nostre equip guanye la lliga?

13. Una companyia de productes avícoles empaqueta dotzenes d'ous en tres llocs diferents. El 40 % de la producció té lloc en la planta A, el 25 % en B i la resta en C. Un control de qualitat ens diu que un 5% dels paquets elaborats en A, un 10 % dels de B i un 8 % dels de C contenen algun ou esclafat. Quina probabilitat hi ha de que ens toque una dotzena d'ous amb algun ou esclafat?

14. En un institut amb 300 alumnes s'està estudiant si la qualificació obtinguda en *Castellà* té a veure amb la qualificació obtinguda en *Matemàtiques*. Després de fer una enquesta, s'obtenen els resultats següents:

		Matemàtiques		
		Excel·lent	**Notable**	**Un altre**
Castellà	**Excel·lent**	110	25	18
	Notable	40	70	40
	Un altre	10	5	2

Es tria un alumne a l'atzar. Quina és la probabilitat que haja tingut un excel·lent en *Castellà*, si l'ha tingut en *Matemàtiques*?

Quina és la probabilitat que haja tingut un excel·lent en *Matemàtiques*, si l'ha tingut en *Castellà*?

3. CÀLCUL DE PROBABILITATS

3.1. Exemples comuns

Activitats resoltes

- En un calaix tinc un parell de calcetins rojos, un parell de calcetins negres i un parell de calcetins blancs. En fer la maleta, amb les presses, agarre 3 calcetins sense mirar. Quina probabilitat tinc d'haver agafat 2 del mateix color?

Agafaré 2 del mateix color sempre que no agarre els 3 de colors diferents.

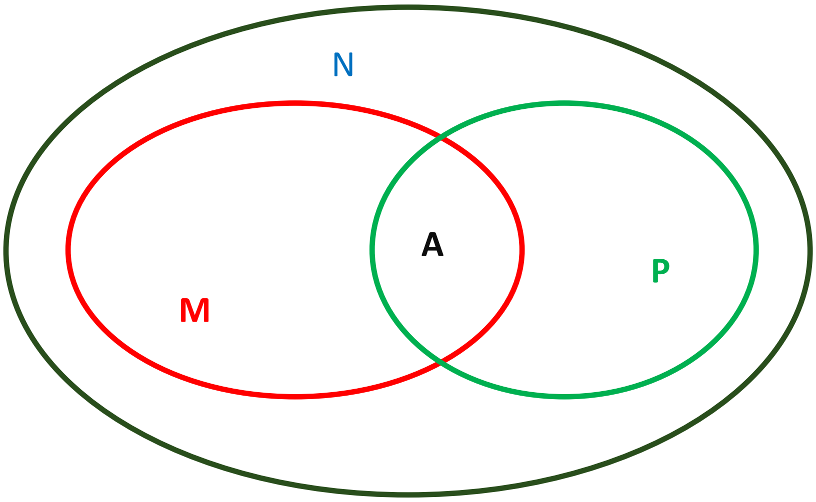
Em dóna igual el color del primer que trac. Per al segon em serveixen 2 d'entre 5. I en la tercera extracció, com necessite un color diferent, em serveixen 2 d'entre 4.

Així la probabilitat del succés contrari és $\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{1}{5}$.

Per això la probabilitat demanada és $\frac{4}{5}$.

- Es fa un estudi de consum en una població. Es descobreix que al 80 % de les persones a qui els agrada el gelat de pistatxo també els agrada el de mango i que al 80 % de les persones a qui els agrada el gelat de mango també els agrada el de pistatxo. Al 60 % d'aqueixa població no li agraden els gelats de mango ni de pistatxo. Es tria a l'atzar una persona d'aqueixa població. Quina és la probabilitat que li agrade tant el gelat de mango com el de pistatxo?

Calcularem els percentatges de la població a qui li agrada el gelat de mango i de pistatxo. Representarem totes les dades amb diagrames de Venn.



Considerem

M = Percentatge de persones a qui els agrada el gelat de mango

P = Percentatge de persones a qui els agrada el gelat de pistatxo

A = Percentatge de persones a qui els agraden ambdós gelats (pistatxo i mango)

N = Percentatge de persones a qui no els agrada ni el gelat de pistatxo ni el de mango

Sabem que A = 0,8 · P i també que A = 0,8 · M. Per tant, M = P.

Ara podem referir tot a X, el nombre total d'individus de la població.

El nombre de persones a qui els agrada almenys un d'aqueixos tipus de gelat és:

$$M + P - A = 2M - 0{,}8M = 1{,}2M$$

Però sabem que això coincideix amb el 60 % de la població. Així 1,2M = 0,4$X \Rightarrow$ M = $\frac{4}{5}X$

I, finalment, $A = 0{,}8 \cdot \frac{1}{3}X = \frac{4}{15}X$.

Amb el que la probabilitat que a la persona triada a l'atzar no li agrade ni el gelat de pistatxo ni el de mango és:

$$P = \frac{casosfavorables}{casospossibles} = \frac{\frac{4}{15}X}{X} = \frac{4}{15}$$

- *En la loteria primitiva s'aposten* 6 *nombres d'entre* 49. *Jugant una sola aposta, quina és la probabilitat que et toque un premi de* 5 *encerts més complementari?*

El nombre de casos possibles són les combinacions de 49 elements presos de 6 en 6: $C_{49,6}$.

Els casos favorables han d'incloure necessàriament al *nombre complementari*. Les altres 5 posicions s'han d'omplir amb 5 dels 6 elements de la combinació guanyadora. Així, el nombre de casos favorables ve donat per les combinacions de 6 elements presos de 5 en 5: $C_{6,5}$.

Així, $.P(5 + complementari) = \frac{C_{6,5}}{C_{49,6}} = \frac{6}{13983816} = \frac{1}{2330636}$

- *En un IES hi ha Batxillerat diürn i Batxillerat nocturn. En diürn estudien* 2/3 *dels alumnes i el terç restant ho fa en nocturn. La quarta part dels alumnes de nocturn i la cinquena dels de diürn utilitza un mitjà de transport per a anar a l'institut. La resta arriba caminant. Es tria a l'atzar un estudiant d'aqueix institut. Quina probabilitat hi ha de que vaja a classe caminant?*

2/3 Diürn
- 4/5 Caminant
- 1/5 Transport

1/3
- 3/4 Caminant
- 1/4 Transport

La probabilitat que un alumne acudisca a classe caminant és $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{47}{60}$.

- Després de tornar de Dublín, al portamonedes tenim 6 monedes d'euro procedents d'Espanya i 9 d'Irlanda. Hem de pagar 3 euros. Quina probabilitat hi ha de fer-ho amb monedes del mateix país?

Tenim 6 monedes d'euro d'Espanya, 9 d'Irlanda.

Hem de prendre 3 monedes a l'atzar.

Els casos possibles són les combinacions de 15 elements presos de 3 en 3. $C_{15,3} = 455.$

Els casos favorables provenen d'agafar les 3 monedes espanyoles o les tres irlandeses. Així resulta:

$$C_{6,3} + C_{9,3} = 20 + 84 = 104.$$

Per tant, la probabilitat demanada és $\frac{104}{455}$.

- Un tafur juga amb una baralla trucada de 48 cartes. Trau una carta, la mira, la torna a ficar a la baralla i mescla. Repeteix aquest procediment altres 2 vegades més. La baralla està preparada de tal manera que el fet d'una de les tres cartes vistes siga una figura té una probabilitat de 19/27 Quantes figures té la seua baralla?

Anomenarem *x* al nombre de figures que hi ha a la baralla trucada. La probabilitat de no obtindre figura a la primera carta és $\frac{48-x}{48}$, la de no obtindre a la segona torna a ser la mateixa probabilitat i el mateix amb la tercera. Així la probabilitat de no obtindre cap figura és $\left(\frac{48-x}{48}\right)^3$.

Com *no obtindre cap figura* és el succés contrari *d'obtindre alguna figura*, la seua probabilitat és:

P(*no obtindre cap figura*) = 1 – *P*(obtindre *figura*) = $1-\frac{19}{27}=\frac{8}{27}.$

Així hem arribat a l'equació $\left(\frac{48-x}{48}\right)^3 = \frac{8}{27} = \frac{2^3}{3^3}$

D'on

$\frac{48-x}{48}=\frac{2}{3}$, aïllant en aqueixa equació resulta *x* = 16.

Activitats proposades

15. Una bossa conté 9 boles roges i 6 boles negres. S'extrau a l'atzar una d'elles i se substitueix per dos de l'altre color. Després d'això s'extrau una segona bola. Quina probabilitat hi ha de que la segona bola siga roja? Quina probabilitat hi ha de que la segona bola siga del mateix color que la primera?

16. Al menjador escolar la probabilitat que no hi haja pasta una setmana és 1/3; la probabilitat que hi haja pollastre és 3/5 i la probabilitat que hi haja pasta i pollastre és 4/7. Calcula la probabilitat que no hi haja ni pasta ni pollastre. Calcula la probabilitat que no hi haja pollastre sabent que hi ha hagut pasta.

17. Tenim a la butxaca monedes procedents de 3 països: espanyoles (60 %), franceses (30 %) i alemanyes (la resta). El 30 % de les monedes espanyoles i el 20 % de les franceses són de 50 cèntims. També sabem que del total de monedes, el 30 % són de 50 cèntims. S'extrau una moneda a l'atzar. Quina probabilitat hi ha de que siga una moneda francesa de 50 cèntims? Quina probabilitat hi ha de que siga una moneda de 50 cèntims, sabent que és alemanya?

18. En una classe hi ha 24 alumnes i 16 alumnes. Es formen equips de treball de 5 persones. Calcula la probabilitat de formar un equip en les condicions següents:

a) tots els participants són del mateix sexe.

b) a l'equip hi ha almenys 3 xiques.

c) a l'equip hi ha exactament 3 xiques.

d) a l'equip hi ha 3 estudiants d'un sexe i 2 d'un altre.

3.2. Coses sorprenents

Portem tot el capítol insistint en el fet que no tenim prou desenrotllat el sentit de la probabilitat. És necessari educar la intuïció en aquest sentit. Per això hi ha fets que sent totalment explicables des de les Matemàtiques, ens continuen pareixent paradoxals. Comentarem breument tres exemples.

Activitats resoltes

- *Encara que parega una casualitat, per tindre l'any 365 dies, és molt probable que en la teua classe hi haja 2 alumnes que celebren el seu aniversari el mateix dia. Ho has comprovat?*

La probabilitat que això ocórrega en un grup de 23 persones la probabilitat és 1/2. En un grup de 30 persones la probabilitat és major de 0,7 i en un grup de 40 persones és 0,89.

Com podem calcular-ho?

Més fàcil que calcular la probabilitat que hi haja una coincidència és calcular la probabilitat del succés contrari: que no hi haja coincidències.

Suposarem en aquest exemple que hi ha la mateixa probabilitat d'haver nascut en un dia o en un altre (encara que sapiem que, en realitat, no és així).

➢ Suposem que tenim 2 persones. La primera haurà nascut un dia. Perquè no coincidisca la data de naixement de la segona tenim 364 possibilitats d'elecció. Així la probabilitat que no hi haja una coincidència en un grup de 2 persones és $\frac{364}{365}$.

➢ Si ara tenim 3 persones i no volem que hi haja coincidències, hi ha 364 possibilitats per a triar la segona persona i 363 per a triar la tercera. Així aquesta probabilitat és:

$$\frac{364}{365}\cdot\frac{363}{365}$$

➢ Anàlogament, la probabilitat que en un grup de 4 persones no hi haja coincidències és:

$$\frac{364}{365}\cdot\frac{363}{365}\cdot\frac{362}{365}$$

➢ Seguint amb aquest raonament, arribem que la probabilitat que en un grup de 23 persones no hi haja coincidències és:

$$\frac{364}{365}\cdot\frac{363}{365}\cdots\frac{344}{365}\cdot\frac{343}{365}=0{,}4927$$

22 factores

Així que, la de que hi haja coincidències és 1 – 0,4927 = 0,5073, major del 50 %!

Per als altres casos que hem comentat, pots fer tu els càlculs. Són semblants a què acabem de fer.

Activitats resoltes

L'Administració Pública acostuma a sortejar la lletra del cognom per la qual es començarà un procés. Pot ser l'orde d'actuació dels concursants a una oposició, al segle passat per a sortejar excedents de quota del servei militar, adjudicació de vivendes protegides o per a adjudicar places en un col·legi.

A pesar que els matemàtics insistim en el fet que aqueixos sortejos no són justos, ja que no tracten tots els individus per igual, l'Administració els continua realitzant (i inclús arriba a la testarrudesa defenent la seua equanimitat). Efectivament, els casos de l'espai mostral no són equiprobables.

Suposem que entre les jugadores de la Selecció Femenina de Bàsquet, que va guanyar l'Eurobasket 2013, se sorteja quina d'elles puja a arreplegar la copa, i es fa sortejant una de les 27 lletres de l'alfabet espanyol.

Cognom	Lletres amb les que guanyarà
Aguilar	yza
Domínguez	bcd
Gil	efg
Lima	hijkl
Nicholls	mn
Ouviña	o
Palau	pp
Queralt	r
Sancho	rs
Torrens	t
Valdemoro	uv
Xargay	xx

Veiem que Cindy Llima tindria una probabilitat de 5/27 de pujar a arreplegar la copa, enfront 1/27 d'Ouviña, Palau, Queralt, Torrens o Xargay.

Tristament aquest sistema es continua utilitzant. Inclús l'ha usat la Comunitat de Madrid per a assignar places en col·legis per al curs 2014/2015.

Activitat proposada

19. Suposa que se sorteja ser delegat de la teua classe pel mètode descrit abans. Qui tindria més probabilitat d'eixir? Hi ha algú que no tindria cap possibilitat? Fes-ho amb una llista de la teua classe.

3.3. Coses encara més sorprenents

Activitat proposada

20. Pren 2 cartolines de colors, cada una d'un color distint (per exemple, roja i blau) i retalla en cada una d'elles 3 rectangles de la mateixa grandària. Apega aqueixos rectangles entre si de manera que un siga roig-roig, un altre blau-blau i un altre roig-blau. Fica les 3 cartolines així preparades en un sobre i trau una a l'atzar, amb atenció de no mostrar ni més menys que un costat. Pregunta a un company que "*endevine*" el color de la cara que està oculta. Repeteix el procés amb tots els companys. Escriu els resultats de l'experiment en una taula com aquesta que copies en el teu quadern:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Ocult																														
Aposta																														
Ix																														
encerta?																														

Què observes? És millor dir que el color ocult és el mateix que el visible? O és pitjor?

Exemples

1.- La paradoxa de *Bertrand*.

En 1889 *Joseph Bertrand* va proposar l'experiment següent: tenim tres caixes en què hem introduït en una, una moneda de plata i una bronze, en una altra dues monedes de plata i en una altra dues monedes de bronze. Les monedes de plata i bronze són indistingibles al tacte. Es tria una caixa a l'atzar i es trau una moneda d'una d'ella. Es veu que la moneda és de plata. De quin material creus que és l'altra moneda de la caixa, plata o bronze?

En principi pensem que com veiem una moneda de plata, pot tractar-se de la caixa que conté dues monedes de plata o la que té una de cada tipus. Per això, ens inclinem a pensar que la probabilitat que l'altra moneda siga de plata o de bronze és la mateixa: 1/2.

Si pensem un poc més veurem que aquest problema és, en realitat, equivalent a l'activitat proposada amb la que hem començat aquesta secció. En compte de tindre cartolines amb colors diferents tenim caixes amb monedes de materials diferents. Les matemàtiques del problema són les mateixes en els dos casos. Així que, si has fet l'activitat anterior, ara tindràs arguments per a decidir que el més probable és que l'altra moneda de la caixa siga de plata.

En efecte, el que es tria a l'atzar és la caixa. La probabilitat d'haver triat una caixa amb dues monedes iguals és 2/3, mentres que la probabilitat de triar la caixa que té una moneda de cada tipus és només 1/3. Per això el més probable és que hagem triat una caixa amb les dues monedes iguals. Com veiem que una és de plata el millor que podem dir és que l'altra també ho és.

Aquest és un exemple típic de probabilitat condicionada, encara que no ho pareix.

2.- El problema de *Monty Hall*.

Monty Hall era el presentador del concurs de la televisió americana *Let's have a deal!* En aqueix concurs hi havia un premi final on es mostraven tres portes. Darrere d'una d'elles hi havia un cotxe i en cada una de les altres dos hi havia una cabra. Clar, els concursants el que volien era emportar-se el cotxe.

Monty Hall procedia sempre de la mateixa manera:

- deia al concursant que triara una porta: la A, la B o la C
- una vegada triada la porta pel concursant obria una de les que no havia triat i mostrava que darrere d'ella hi havia una cabra
- li donava al concursant l'oportunitat de canviar la seua elecció o mantindre's amb el que havia triat al principi

(Incís abans de continuar llegint: tu què faries?, canviaries?, mantindries la teua elecció?, dóna igual?, és millor una cosa que l'altra?)

Com ensenya una porta amb una cabra, el cotxe està o en la que tria el concursant o en l'altra, en principi al 50 %. En realitat la probabilitat no és del 50 %, com veurem ara.

Marilyn vos Savant és una persona que presumia (i es guanyava la vida utilitzant-ho) de tindre el rècord *Guinness* de quocient intel·lectual. Escrivia una columna en la revista *Parade* i en ella va dir que la millor estratègia era canviar l'elecció després que *Monty Hall* mostrara la cabra. Després de la publicació d'aquesta columna nombrosos matemàtics van escriure a la revista queixant-se de l'error. Per a tots era obvi que la probabilitat d'encert, tant si canviava l'elecció com si no ho feia, era 1/2.

La polèmica la va concloure *Paul Erdös* (un matemàtic hongarès un poc rar, que no tenia un domicili fix, ni un treball estable, però que va publicar un muntó de resultats matemàtics) donant raó a *vos Savant*, per a sorpresa de molts. Sí, alguns matemàtics (inclús alguns importants) s'havien equivocat en calcular probabilitats. No passa res, tots cometem errors.

Tornem al problema. Veuràs què simple és el raonament. En realitat hi ha 3 casos: "tries la porta del cotxe" "tries la de la cabra 1" o "tries la de la cabra 2". L'important és que realitzes aquesta elecció ABANS de que *Monty Hall* t'ensenye res.

- Suposem que has triat la porta amb el cotxe. *Monty Hall* t'ensenyarà la cabra 1 o la cabra 2. Si canvies perds. Si no canvies ganes.
- Suposem que tries la porta amb la cabra 1. *Monty Hall* t'ensenyarà la cabra 2. Si canvies ganes: només queda la porta que oculta al cotxe. Si no canvies perds.
- Suposem que tries la porta amb la cabra 2. *Monty Hall* t'ensenyarà la cabra 1. Si canvies ganes: només queda la porta que oculta al cotxe. Si no canvies perds.

Així, canviant la teua elecció després que *Monty Hall* òbriga la porta guanyaràs 2 de cada 3 vegades. Sorprès?

CURIOSITATS. REVISTA

Pascal i Fermat

Blaise Pascal (1623-1662) i Pierre de Fermat (1601-1655) van mantindre una interessant correspondència durant l'any 1654 que es podrien considerar l'inici de la Teoria de la Probabilitat a pesar de tractar-se de problemes de jocs i apostes. Són problemes proposats pel Cavaller de la Mérè que no era matemàtic.

U és aquest:

Un jugador aposta una bossa de monedes a què saca almenys un 6 en 8 llançaments d'un dau. Ha tirat ja el dau 3 vegades sense traure cap 6, i decideix deixar el joc, quina part de la bossa li correspondria?

Tu saps resoldre-ho. Fes un diagrama en arbre, i calcula en primer lloc la probabilitat que té el jugador de guanyar i la de que té de perdre en un principi.

Cada tirada és un succés independent (no depèn del que s'haja obtingut en les anteriors, així que segons Fermat si el jugador renúncia a una jugada té dret a 1/6 de la bossa.

Si renúncia a 2 llançaments llavors ha de ser indemnitzat amb 1/6 + 5/36.

La ruleta

William Jaggers va arribar a Montecarlo amb uns pocs francs a la butxaca i, durant un mes va anotar els nombres que eixien en cada ruleta, i en quatre dies va guanyar dos milions quatre-cents mil francs. *Jaggers* va aconseguir trencar la banca a *Montecarlo* analitzant les freqüències relatives de cada nombre de la ruleta i observant que s'havia desgastat quelcom del mecanisme d'una d'elles, amb la qual cosa tots els valors no tenien la mateixa probabilitat. Va apostar als nombres més probables i va guanyar.

Cavaller de la Meré

Al *Cavaller de la Meré* li agradava jugar i era un gran jugador, per això sabia que era favorable apostar, en tirar un dau "traure almenys un 6 en 4 tirades d'un dau" i que no ho era en tirar dos daus el "traure almenys un 6 doble en 24 jugades".

Es veu que havia jugat molt per a saber que les freqüències relatives li deien que el primer succés tenia una probabilitat superior a 0,5, i el segon la tenia inferior. Però no ho comprenia. No era matemàtic i només se sabia la regla de tres. Açò no és una proporcionalitat! Va dir 6 : 4 = 36 : 24. Però les freqüències relatives li deien que no era així, per la qual cosa va escriure a Pascal perquè li solucionara el problema.

Tu ja saps el suficient per a solucionar-li'l. Abans de continuar llegint, tracta de resoldre'l.

En lloc de calcular la probabilitat de *traure al menys un 6* en 4 *tirades*, calcula la probabilitat de *no traure un 6*, que és el seu succés contrari, i és $\left(\frac{5}{6}\right)^4$. Per tant la probabilitat de *traure al menys un 6* en 4 *tirades* és:

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0.5177 > 0.5.$$

Calculem de la mateixa manera la probabilitat de traure *al menys un sis doble* al llançar dos daus 24 vegades, calculant la del seu succés contrari, la de *no traure cap sis doble*: $\left(\frac{35}{36}\right)^{24}$, per tant traure al menys un 6 doble és:

$$1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0.4914 < 0.5.$$

Quant degué de jugar el Cavaller de la Meré per a donar-se compte de eixa xicoteta diferència en les probabilitats!

Si vols saber més, busca:

http://www.miscelaneamatematica.org/Misc34/caballero.pdfhttp://www.miscelaneamatematica.org/Misc34/caballero.pdf

L'inici de la Teoria de la Probabilitat, com ja saps, van ser els jocs d'atzar.

Galileo,

Al segle XVI va plantejar el problema següent: En tirar tres daus, per què és més probable obtindre que la suma de les cares superiors siga 10, que siga 9?

Continuava la reflexió amb les possibles descomposicions en aqueixes sumes:

9 = 3 + 3 + 3	10 = 4 + 3 + 3
9 = 4 + 3 + 2	10 = 4 + 4 + 2
9 = 4 + 4 + 1	10 = 5 + 3 + 2
9 = 5 + 2 + 2	10 = 5 + 4 + 1
9 = 5 + 3 + 1	10 = 6 + 2 + 2
9 = 6 + 2 + 2	10 = 6 + 3 + 1

En ambdós casos hi ha 6 descomposicions possibles, no obstant això, tirant moltes vegades els 3 daus comprovava que és més probable traure un 10.

Si fas un diagrama en arbre comprovaràs que totes aqueixes descomposicions no són igualment probable.

Per exemple: (3, 3, 3) té una probabilitat d'1/216, mentres que la suma 6 + 2 + 2, pot eixir amb tres successos (6, 2, 2), (2, 6, 2) i (2, 2, 6), després la seua probabilitat és 3/216.

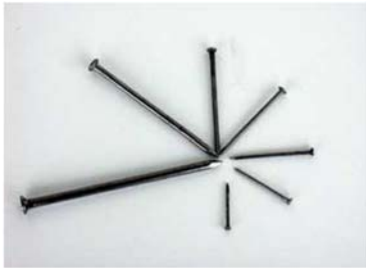
Calcula les probabilitats de cada una de les sumes i la de traure 10 i de traure 9.

RESUM

Experiment aleatori	El resultat depèn de l'atzar	Llançar una moneda, o un dau
Succés elemental	Cada un dels possibles resultats d'un experiment aleatori	Cara o creu serien successos elementals a l'experiment "llançar una moneda i observar el resultat"
Espai mostral	Conjunt de casos possibles	{cara, creu} {1, 2, 3, 4, 5, 6}
Succés	Subconjunt de l'espai mostral	{2, 4, 6}
Llei de *Laplace*	Si els successos elementals són equiprobables llavors : $P(S)=\frac{nombredecasosfavorablesalsuccésS}{nombredecasospossibles}$	En llançar un dau: *P*(traure 3) = 1/6 P(traure múltiple de 2) = 3/6.
Combinatòria	Utilitza la combinatòria (combinacions, variacions, variacions amb repetició...) per a comptar bé els casos favorables i els possibles	La probabilitat de tindre pòquer en una baralla francesa és: $P(pòquer)=\frac{13\cdot 12}{C_{52,2}}$
Diagrama en arbre	Problemes molt difícils pots resoldre'ls representant un diagrama en arbre	
Succés contrari	El succés contrari de S (S^c) es verifica si no es verifica S. $P(S^C) = 1 – P(S)$	Succés contrari de traure parell és {1, 3, 5} = 1 – 3/6 = 1/2.
Successos independents	Dos successos són independents si la probabilitat que es verifique un no queda afectada per que s'haja verificat l'altre.	La probabilitat de traure un 3, en tirar un dau i tornar a tirar-lo.
Intersecció de successos	Si A i B són independents $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. En general $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$	En una baralla espanyola la probabilitat de traure dos asos és (4/40) · (3/39)
Probabilitat condicionada	$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$	Probabilitat de traure un as havent-hi ja tret un altre as sense reemplaçament és 3/39
Unió de successos	Si A i B són incompatibles $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ En general $P(A \cup B) = P(A) + P(B) – P(A \cap B)$	En una baralla espanyola la probabilitat de traure un as o bé un or és (4/40)+ (10/49)–(1/40)= = 13/40

EXERCICIS I PROBLEMES

1. En una classe hi ha 15 xics i 18 xiques. Com no es presenta ningú per a ser delegat es fa un sorteig. Quina és la probabilitat que a la classe haja delegada?
2. En el portamonedes tenim 8 monedes d'1 cèntim, 3 monedes de 5 cèntims, 8 monedes de 10 cèntims i 5 monedes de 50 cèntims. Traiem una moneda a l'atzar, quina és la probabilitat que la quantitat obtinguda siga un nombre parell de cèntims?



3. En una caixa tenim mesclats 50 claus de 2 cm de llarg, 30 claus de 3 cm, 35 claus de 2,5 cm i 60 claus de 3,5 cm. Traiem a l'atzar un clau de la caixa (s'assumeix que tots els claus tenen la mateixa probabilitat de ser triats). Quina probabilitat hi ha de que el clau extret tinga la menor longitud?
4. En un institut de mil estudiants hi ha 700 que parlen anglès, 400 que parlen francès, 50 que parlen alemany, 200 que parlen anglès i francès, 30 que parlen anglès i alemany, 10 que parlen francès i alemany i 5 que parlen els tres idiomes. Es tria un estudiant a l'atzar. Quina és la probabilitat que parle només una llengua estrangera?

5. La ruleta francesa consta dels nombres que van del 0 al 36. Si ix 0 guanya la banca. Decidim apostar a "parell" (guanyarem si ix un nombre parell no nul). Quina probabilitat tenim de guanyar l'aposta? I si apostem a 7? I si apostem a un nombre imparell?
6. Una bossa conté 7 boles blanques, 5 boles roges i 3 boles negres. S'extrauen dues boles al mateix temps. Quina és la probabilitat que siguen una blanca i una negra?
7. Una bossa conté 10 boles blanques, 9 boles roges i una bola negra. S'extrau una bola de la bossa. Després es trau una segona bola, sense tornar a ficar en la bossa la primera. Quina és la probabilitat que després de la segona extracció tinguem una bola blanca i una bola negra?
8. Una bossa conté 15 boles blanques, 4 boles roges i una bola negra. S'extrau una bola de la bossa. Després es trau una segona bola, sense tornar a ficar en la bossa la primera. Quina és la probabilitat que la primera bola siga blanca i la segona negra?
9. Una bossa conté 15 boles blanques, 4 boles roges i una bola negra. S'extrau una bola de la bossa. Després de mirar de quin color s'introdueix en la bossa de nou. Es trau una segona bola. Quina és la probabilitat que la primera bola siga blanca i la segona negra?
10. Una bossa conté 15 boles blanques, 4 boles roges i una bola negra. S'extrau una bola de la bossa. Després de mirar de quin color s'introdueix en la bossa de nou. Es trau una segona bola. Quina és la probabilitat que les dues vegades haja eixit la bola negra?
11. Una bossa conté 15 boles blanques, 4 boles roges i una bola negra. S'extrau una bola de la bossa. Després de mirar de quin color s'introdueix en la bossa de nou. Es trau una segona bola. Quina és la probabilitat que les dues vegades haja eixit una bola blanca?
12. A la loteria primitiva una aposta consisteix a marcar 6 caselles d'entre 49 possibles. El dia del sorteig s'extrauen 6 boles d'entre 49. Quina és la probabilitat que la teua aposta coincidisca amb la combinació guanyadora? Quina és la probabilitat que encertes un nombre? I la de que encertes 2 nombres?

13. Es reparteixen a l'atzar 5 cartes d'una baralla espanyola. Quina és la probabilitat que tingues 4 cartes del mateix nombre?

14. En una jugada es reparteixen 5 cartes. Quina és la probabilitat d'aconseguir tres asos i dos reis? Quina és la probabilitat de tindre tres cartes iguals? I una parella? I de tindre tres cartes iguals i les altres dos també iguals entre si?

15. En una jugada es reparteixen 5 cartes. S'anomena *escala de color* a una jugada composta per 5 cartes del mateix pal ordenades consecutivament. Calcula la probabilitat d'obtindre aquesta escala de color de trèvols.

16. En una jugada es reparteixen 5 cartes. S'anomena *color* a una jugada composta per 5 cartes del mateix pal que no són consecutives. Calcula la probabilitat d'obtindre *color* de trèvols.

17. Considera l'experiment aleatori "mesclar una baralla, tallar i mirar el color de les dues cartes que han quedat dalt". Quina és la probabilitat que ambdues tinguen el mateix color?

18. Tenim una caixa amb 12 boles roges i 8 boles blanques. Es trau una bola a l'atzar. Si és blanca es torna a ficar a la caixa. Si és roja es deixa fora. En aquestes condicions es trau una altra bola de la caixa. Quina probabilitat hi ha de que aquesta bola siga roja?

19. En un calaix tenim 10 calcetins: 6 negres i 4 blancs. Traiem, sense mirar, dos calcetins del calaix. Què és més probable, que siguen ambdós del mateix color o que siguen de colors distints?

20. Elabora un arbre de probabilitats per a calcular la probabilitat d'obtindre *doble parella* d'asos i tresos en una jugada de 5 cartes de pòquer. (*Doble parella* consisteix en 2 parells de cartes del mateix valor, diferents entre si, i una carta indiferent, de valor diferent dels dos anteriors. Per exemple, AA 33 Q).

21. En el portamonedes tinc 7 monedes d'un cèntim, 4 de 5 cèntims, 6 de 10 cèntims, 5 de 20 i 7 de 50 cèntims. Trac 3 monedes a l'atzar. Quina és la probabilitat que obtinga un nombre imparell de cèntims?

22. El 60 % d'una determinada població fuma, i el 12 % fuma i és hipertens. Utilitza aquestes freqüències per a obtindre probabilitats i determina si ser hipertens és dependent o independent de fumar. Quina és la probabilitat condicionada de què una persona fumadora siga hipertensa?

23. Un analista esportiu, que s'equivoca el 10 % de les vegades, ha dit que el nostre equip favorit guanyarà la lliga. L'analista de la competència, que s'equivoca el 20 % de les vegades, ha dit que el nostre equip favorit no guanyarà la lliga. Segons eixos anàlisis. Quina probabilitat hi ha de que el nostre equip guanye la lliga?

24. Una companyia de productes avícoles empaqueta dotzenes d'ous en tres llocs diferents. El 60 % de la producció té lloc a la planta A, el 30 % a B i la resta a C. Un control de qualitat ens diu que un 5 % dels paquets elaborats a A, un 7 % dels de B i un 10 % dels de C contenen algun ou esclafat. Quina probabilitat hi ha de que ens toque una dotzena d'ous amb algun ou esclafat?

25. En un calaix tinc un parell de calcetins rojos, un parell de calcetins negres i un parell de calcetins blancs. En fer la maleta, amb les presses, agarre 3 calcetins sense mirar. Quina probabilitat tinc d'haver agafat 2 del mateix color?

26. Es fa un estudi de consum en una població. Es descobreix que al 70 % de les persones a qui els agrada la melmelada de taronja també els agrada la de grosella i que al 80 % de les persones a qui els agrada la melmelada de grosella també els agrada la de taronja. Al 40 % d'aqueixa població no li agraden ni la melmelada de taronja ni la de grosella. Es tria a l'atzar una persona d'aqueixa població. Quina és la probabilitat que li agrade tant ambdues melmelades?

27. A la loteria primitiva s'aposten 6 nombres d'entre 49. Jugant a dues apostes, quina és la probabilitat que et toque un premi de 5 encerts més el complementari?

28. En un institut hi ha Batxillerat i Formació Professional. En Batxillerat estudien 1/3 dels estudiants i la resta ho fa en Formació Professional. La quarta part dels estudiants de Batxillerat i la sisena part dels Formació Professional utilitza un mitjà de transport per a anar a l'institut. La resta arriba caminant. Es tria a l'atzar un estudiant d'aqueix institut. Quina probabilitat hi ha de que vaja a classe utilitzant un mitjà de transport?

29. Un tafur juga amb una baralla trucada de 40 cartes. Trau una carta, la mira, la torna a ficar en la baralla i mescla. Repeteix aquest procediment altres 2 vegades més. La baralla està preparada de tal manera que el fet d'una de les tres cartes vistes siga una figura té una probabilitat de 19/27 Quantes figures té la seua baralla?

30. Una bossa conté 10 boles roges i 5 boles negres. S'extrau a l'atzar una d'elles i se substitueix per dos de l'altre color. Després d'això s'extrau una segona bola. Quina probabilitat hi ha de que la segona bola siga negra? Quina probabilitat hi ha de que la segona bola siga del mateix color que la primera?

31. Al menjador escolar la probabilitat que no hi haja creïlles una setmana és 1/5; la probabilitat que hi haja peix és 2/5 i la probabilitat que hi haja creïlles i peix és 1/10. Calcula la probabilitat que no hi haja ni creïlles ni peix. Calcula la probabilitat que no hi haja peix sabent que hi ha hagut creïlles.

32. En una classe hi ha 20 alumnes i 10 alumnes. Es formen equips de treball de 6 persones. Calcula la probabilitat de formar un equip: a) amb tot xiques, b) amb 3 xiques, c) amb tot xics, d) amb almenys 3 xiques.

33. Encara que parega una casualitat, per tindre l'any 365 dies, és molt probable que en una classe de 35 alumnes hi haja dos que celebren el seu aniversari el mateix dia. Calcula la dita probabilitat. El mateix si la classe té 20 estudiants.

34. Utilitza la taula per a obtindre una taula de contingència sobre els accidents de trànsit:

	En carretera (C)	En zona urbana (U)	Total
Amb víctimes (V)	34092	32295	66387
Només danys materials (D)	11712	20791	32503
Total	45804	53086	98890

Calcula P(V); P(D); P(C); P(U); P(V $\cap$ C); P(D $\cap$ U); P(U/V); P(V/U); P(V/C); P(C/V); P(C/D). Se sap que hi ha hagut un accident en carretera, quina és la probabilitat que haja tingut víctimes? Són independents els successos d'accident amb víctimes i accident en carretera?

35. Es realitzen estudis sobre una determinada malaltia i es coneix que la probabilitat que una persona la tinga és de 0,04. Una determinada prova detecta si una persona està malalta amb una probabilitat de 0,97, però també qualifica com a malalta, de vegades, a una persona sana amb una probabilitat de 0,01. Representa aquesta situació en un diagrama en arbre. Construeix la taula de contingència associada. Calcula la probabilitat que una persona sana siga detectada com a malalta.

36. En el control de qualitat d'un procés de fabricació se sap que la probabilitat que un circuit siga defectuós és 0,02. Un dispositiu per a detectar els defectuosos té una probabilitat de detectar-los de 0,9, però també qualifica com defectuosos a 0,03 dels correctes. Representa aquesta situació en un diagrama en arbre. Construeix la taula de contingència associada. Calcula la probabilitat que un circuit defectuós siga qualificat com correcte.

37. En una classe hi ha 25 xiques i 15 xics, i se sap que el 80 % de les xiques aproven les matemàtiques mentres que les aproven el 60 % dels xics. Utilitza aquests percentatges per a assignar probabilitats i calcula la probabilitat que hi ha en triar una persona de la classe a l'atzar que:

a) Siga xica i aprove les matemàtiques;

b) Siga xica o aprove les matemàtiques;

c) Siga xic i suspenga matemàtiques;

d) Haja aprovat les matemàtiques.

38. S'estudien les famílies de tres fills. Per a simplificar fem la hipòtesi que la probabilitat de xic siga igual a la de xica. Calcula la probabilitat dels successos següents:

a) A = El primer fill és xica.
b) B = Almenys hi ha un xic.
c) A $\cup$ B,
d) A $\cap$ B.

39. En una bossa hi ha 3 boles verdes, 4 boles roges i una bola blanca. Traiem dues boles de la bossa. Calcula la probabilitat dels successos: A = "alguna de les boles és verd", B = "ha eixit la bola blanca". Calcula també: P(A^c), P(B^c), P(A $\cup$ B) i P(A^c $\cap$ B). Són A i B successos incompatibles? Són successos independents?

40. Donats els successos A i B de probabilitats: P(A^c) = 3/5; P(A $\cap$ B) = 1/8; P(B $\cup$ A) = 3/4; calcula les probabilitats següents: P(A); P(B); P(B^c); P(B/A^c); P(A^c $\cap$ B^c); P(A/B). Són A i B successos independents?

41. Determina si són compatibles o incompatibles els successos A i B tals que:

a) $P(A) = 1/7$; $P(B) = 3/7$; $P(B \cup A) = 4/7$;

b) $P(A) = 1/5$; $P(B) = 0$;

42. Donats els successos A i B de probabilitats: $P(A^c) = 2/5$; $P(B) = 3/5$; $P(A^c \cap B^c) = 1/5$; calcula les probabilitats següents: $P(A)$; $P(B^c)$; $P(B \cup A)$; $P(B/A^c)$; $P(A \cap B)$; $P(A/B)$. Són A i B successos independents?

43. Dos tiradors al plat tenen unes marques ja conegudes. El primer encerta amb una probabilitat de 0,8 i el segon de 0,6. Es llança un plat i ambdós disparen. Expressa mitjançant un diagrama d'arbre i la taula de contingència associada les distintes possibilitats. Calcula: a) Quina probabilitat hi ha de que almenys un dels tiradors done al plat? b) Probabilitat que cap encerte? c) Sabem que el tir ha encertat al blanc, quina és la probabilitat que ho haja fet el primer tirador?

44. Es disposa de dues urnes A i B. L'urna A té 7 boles verdes i 3 grogues. L'urna B té 5 boles verdes i 7 grogues. Es trau una bola a l'atzar d'una de les dues urnes, també a l'atzar, i resulta ser groga. Calcula la probabilitat que siga de l'urna B. (*Ajuda*: Representa les possibilitats mitjançant un diagrama en arbre, escriu la taula de contingència associada i l'altre diagrama en arbre).

45. Se sap que en una certa població, la probabilitat de ser home i daltònic és un desè i la probabilitat de ser dona i daltònica és 1/20. La proporció de persones d'ambdós sexes és la mateixa. Es tria una persona a l'atzar.

a) Trobar la probabilitat que no siga daltònic.

b) Si la persona triada és dona, trobar la probabilitat que siga daltònica.

c) Quina és la probabilitat que la persona triada patisca daltonisme?

46. En un cert institut s'ofereix informàtica i teatre com a assignatures optatives. El grup A consta de 32 estudiants i el B té 30 estudiants. El 70 % del grup A ha triat teatre, així com el 40 % del grup B i el 60% de la resta del grup B ha triat informàtica.

a) Si es pregunta a un estudiant triat a l'atzar, trobar la probabilitat que haja triat informàtica.

b) Si un estudiant ha triat teatre, calcula la probabilitat que pertanya al grup B.

47. En una baralla espanyola de quaranta cartes s'han eliminat diverses cartes. Se sap que la probabilitat d'extraure un as entre les que queden 0,1, la probabilitat que isca una copa és 0,07 i la probabilitat que no siga ni as ni copa és 0,8.

a) Trobar la probabilitat que la carta extreta siga as o copa.

b) Calcular la probabilitat que la carta siga l'as de copes. Es pot afirmar que entre les cartes que no s'han eliminat està l'as de copes?

48. En una ciutat en què hi ha doble nombre d'hòmens que de dones, hi ha una epidèmia. El 10 % dels hòmens i el 5 % de les dones estan malalts. Es tria a l'atzar un individu. Calcular la probabilitat de:

a) que siga home.

b) que estiga malalt.

c) que siga home, sabent que està malalt.

AUTOAVALUACIÓ

1. En una bossa hi ha 6 boles negres i 3 boles blanques, la probabilitat de traure una bola negra és:

a) 1/2 b) 2/3 c) 1/3 d) 5/9

2. Indica quin dels següents experiments no és un experiment aleatori:

a) Llançar un clarió i anotar el nombre de trossos en què es trenca

b) Llançar un dau trucat i anotar el nombre de la cara superior

c) Creuar un carrer i estudiar si hi ha un atropell

d) Calcular el consum de gasolina d'un cotxe

3. L'espai mostral de llançar 3 monedes a l'aire i anotar si cauen en cara (C) o en creu (X) amb successos elementals equiprobables és:

a) {CCC, CCX, CXX, XXX} b) {3C, 2C, 1C, 0C}

c) {CCC, CCX, CXC, XCC, CXX, XCX, XXC, XXX} d) {CCC, CCX, CXC, XCC, CXX, XCX, XXC}

4. El succés contrari a traure almenys una cara en l'experiment anterior és:

a) {XXX} b) {CCC, CCX, CXX} c) {CXX, XCX, XXC } d) {CCC, CCX, CXC, XCC }

5. Indica quin dels següents successos no són independents:

a) Traure un or i traure un rei amb reemplaçament

b) Llançar una moneda i traure cara i tornar a llançar-la i tornar a traure cara

c) Llançar un dau i traure 6 i tornar a llançar-ho i tornar a traure 6

d) Llançar un dau i traure un múltiple de 2, i traure un 6

6. La probabilitat de no traure un as en una baralla de pòquer és:

a) 4/56 b) 52/56 c) 36/40 d) 1 – 36/40

7. La probabilitat que la suma de les cares superiors siga 7 de l'experiment tirar dos daus és:

a) 1/2 b) 7/36 c) 5/36 d) 2/3

8. En una bossa hi ha 7 boles roges i 4 blanques. Es trau una bola a l'atzar i si és blanca es torna a ficar a la bossa, mentres que si és roja es deixa fora. Es trau una altra bola de la bossa, la probabilitat que siga roja és:

a) 42/110 b) 28/121 c) 70/121 d) 411/605

9. En una bossa hi ha 4 boles roges i 3 blanques. Traiem sense mirar dues boles. La probabilitat que siguen del mateix color és:

a) 1/7 b) 2/7 c) 3/7 d) 4/7

10. En llançar un dau ha eixit un nombre parell, La probabilitat que siga un 6 és P(traure 6/ a parell):

a) 1/3 b) 1/6 c) 2/5 d) 3/6

Textos Marea Verde

Matemàtiques orientades a les ensenyances acadèmiques

4º B d'ESO

ÍNDEX

NOMBRES.

GEOMETRIA

FUNCIONS I ESTADÍSTICA

ÍNDEX