

4tB ESO

Capítol 8:

TRIGONOMETRIA

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-039136

Fecha y hora de registro: 2014-04-07 18:20:55.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa



Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Más información en <http://www.dmrighs.com>



www.apuntesmareaverde.org.es



Autores: M^a Fernanda Ramos Rodríguez y M^a Milagros Latasa Asso

Revisora: Nieves Zuasti

Il·lustracions: Banc d'imatges d'INTEF, M^a Milagros Latasa y Fernanda Ramos

Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

Índex

1. SISTEMES DE MESURA D'ANGLES

- 1.1. SISTEMA SEXAGESIMAL
- 1.2. SISTEMA INTERNACIONAL

2. RAONS TRIGONOMÈTRIQUES D'UN ANGLE AGUT

- 2.1. RAONS TRIGONOMÈTRIQUES DIRECTES D'UN ANGLE AGUT
- 2.2. RELACIONS FONAMENTALS.
- 2.3. ALTRES RAONS TRIGONOMÈTRIQUES. ALTRES RELACIONS
- 2.4. RAONS TRIGONOMÈTRIQUES DE 30° , 45° I 60° .
- 2.5. RESOLUCIÓ DE TRIANGLES RECTANGLES.
- 2.6. APLICACIONS DE LA RESOLUCIÓ DE TRIANGLES RECTANGLES AL CÀLCUL DE DISTÀNCIES.

3. RAONS TRIGONOMÈTRIQUES D'UN ANGLE QUALSEVOL

- 3.1. CIRCUMFERÈNCIA TRIGONOMÈTRICA. QUADRANTS.
- 3.2. RAONS TRIGONOMÈTRIQUES D'UN ANGLE QUALSEVOL
- 3.3. REDUCCIÓ AL PRIMER QUADRANT.

4. RESOLUCIÓ DE TRIANGLES QUALSSEVOL

- 4.1. TEOREMA DEL SINUS.
- 4.2. TEOREMA DEL COSINUS.
- 4.3. RESOLUCIÓ DE TRIANGLES QUALSSEVOL.

Resum

Etimològicament *trigonometria* significa *mesurament de triangles*. El seu objectiu és establir les relacions matemàtiques entre les mesures dels costats d'un triangle amb les amplituds dels seus angles, de manera que resulte possible calcular les unes mitjançant les altres.

Els primers escrits relacionats amb ella que apareixen a la història es remunten a l'època babilònica de què es conserven uns llistons amb mesuraments de costats i angles de triangles rectangles. La trigonometria s'aplica des dels seus orígens en agrimensura, navegació i astronomia ja que permet calcular distàncies que és impossible obtenir per mesurament directe.

En aquest capítol estudiaràs les primeres definicions trigonomètriques i coneixeràs algunes de les seues aplicacions.



*Inscripció babilònica. Museu
Pèrgam de Berlín*

1. SISTEMES DE MESURA D'ANGLES

1.1. Sistema sexagesimal

Recordaràs que al sistema sexagesimal de mesura d'angles, la unitat és el **grau sexagesimal** que es defineix com la part de circumferència que queda en dividir per tres-cents seixanta un angle complet. Té dos divisors que són el **minut** que és dividir un grau en seixanta parts i el **segon** que és dividir un minut en seixanta parts. Recorda la notació que s'empra en aquest sistema:

$$1^\circ = 1 \text{ grau sexagesimal}; 1' = 1 \text{ minut sexagesimal}; 1'' = 1 \text{ segon sexagesimal.}$$

Com a conseqüència de la definició:

$$1 \text{ angle complet} = 360^\circ; 1^\circ = 60'; 1' = 60''.$$

1.2. Sistema internacional

Al sistema internacional, la unitat de mesura d'angles és el **radian**.

El **radian** és un angle tal que qualsevol arc que se li associe mesura exactament el mateix que el radi utilitzat per a traçar-lo.

Es denota per **rad**.

A un angle complet li correspon un arc de longitud $2\pi R$, a un radian un arc de longitud R , llavors:

$$\text{Nr de radians d'un angle complet} = \frac{2\pi R}{R} = 2\pi \text{ rad}$$

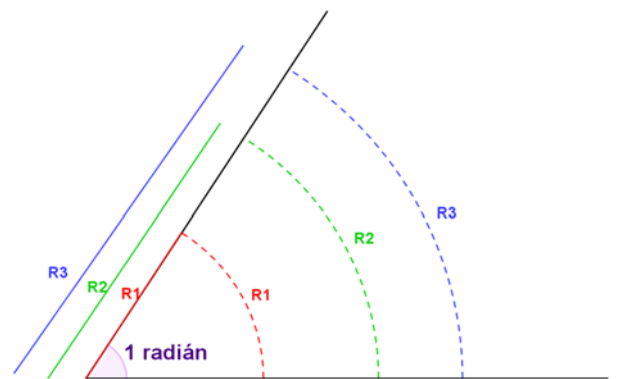
I la relació amb el sistema sexagesimal l'obtenim a partir de l'angle complet:

$$1 \text{ angle complet} = 360^\circ = 2\pi \text{ rad} \Leftrightarrow 1 \text{ angle pla} = 180^\circ = \pi \text{ rad}$$

Per aquesta relació s'obté que $1 \text{ rad} \cong 57, 216^\circ \cong 57^\circ 12' 58''$.

Activitats proposades

- Expressa en radians les mesures següents: 45° , 150° , 210° , 315° .
- Expressa en graus sexagesimals: $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{\pi}{5}$, $\frac{3\pi}{8}$ radians.
- Dos angles d'un triangle mesuren respectivament 40° i $\frac{\pi}{3}$ radians. Calcula en radians el que mesura el tercer angle.
- Un angle d'un triangle isòsceles mesura $\frac{5\pi}{6}$ radians. Calcula en radians la mesura dels altres dos.
- Dibuixa un triangle rectangle isòsceles i expressa en radians la mesura de cada un dels seus angles.



RAONS TRIGONOMÈTRIQUES D'UN ANGLE AGUT

2.1. Raons trigonomètriques directes d'un angle agut

Comencem per considerar un angle agut qualsevol, utilitzarem una lletra grega α (alfa) per a denotar-lo.

És sempre possible construir un triangle rectangle de manera que α siga un dels seus angles. Siga $\triangle ABC$ un d'aquests triangles i situem al vèrtex B , l'angle α .

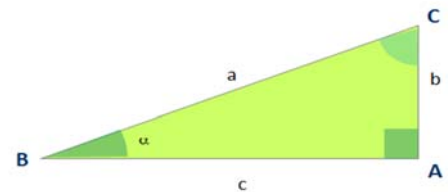
Es defineixen les raons trigonomètriques directes de l'angle α : sinus, cosinus i tangent com:

$$\begin{aligned} \text{sinus de } \alpha &= \sin \alpha = \sin \hat{B} = \frac{\text{catetoposat}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a} \\ \text{cosinus de } \alpha &= \cos \alpha = \cos \hat{B} = \frac{\text{catetadjacent}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a} \\ \text{tangent de } \alpha &= \tan \alpha = \tan \hat{B} = \frac{\text{catetoposat}}{\text{catetadjacent}} = \frac{b}{c} \end{aligned}$$

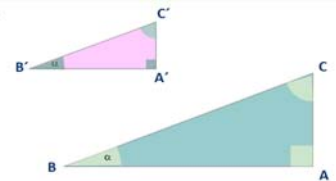
També s'utilitzen les expressions $\text{tg } \alpha$ i $\text{tag } \alpha$ com a símbols de la tangent de α .

Aquesta definició no depèn del triangle triat. Anem a demostrar-ho. Per a això considerem un altre triangle rectangle $\triangle A'B'C'$ amb α al vèrtex B' .

Segons el segon criteri de semblança de triangles $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ són semblants perquè tenen dos angles iguals 90° i α . Per tant els costats d'ambdós són proporcionals:



Sovint s'anomenen els angles d'un triangle amb la mateixa lletra majúscula que el vèrtex corresponent.



$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

El sinus és independent del triangle en què és mesura

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \Rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \Rightarrow$$

El cosinus és independent del triangle en què és mesura

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \frac{a}{a'} &= \frac{c}{c'} \Rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{c}{c'} \Rightarrow \\ \frac{b}{b'} &= \frac{c}{c'} \Rightarrow \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Rightarrow \end{aligned} \right.$$

La tangent és independent del triangle en què és mesura

$$\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Rightarrow \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Rightarrow$$

Activitats resoltes

- Calcula les raons trigonomètriques dels angles aguts d'un triangle rectangle $\triangle ABC$ els catets de les quals mesuren $b = 30 \text{ cm}$ i $c = 40 \text{ cm}$.
- Calculem en primer lloc el valor de la hipotenusa $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 30^2 + 40^2 = 900 + 1600 = 2500 \Rightarrow a = \sqrt{2500} = 50 \text{ cm}$.
 $\sin \hat{B} = \frac{30}{50} = \frac{3}{5} = 0,6$; $\cos \hat{B} = \frac{40}{50} = \frac{4}{5} = 0,8$; $\tan \hat{B} = \frac{30}{40} = \frac{3}{4} = 0,75$.
 $\sin \hat{C} = \frac{40}{50} = \frac{4}{5} = 0,8$; $\cos \hat{C} = \frac{30}{50} = \frac{3}{5} = 0,6$; $\tan \hat{C} = \frac{40}{30} = \frac{4}{3}$.

2.2. Relacions fonamentals

Si coneixem una de les raons trigonomètriques de l'angle α , és possible calcular les raons trigonomètriques restants, gràcies a les dues relacions trigonomètriques fonamentals següents:

PRIMERA RELACIÓ FONAMENTAL:

$$(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$$

que també veuràs escrita com $a\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ atés que les potències de les raons trigonomètriques solen escriure's amb el seu exponent sobre la última lletra de la seua notació i a continuació el nom de l'angle

La demostració és senzilla. Tornem al triangle inicial del paràgraf anterior:

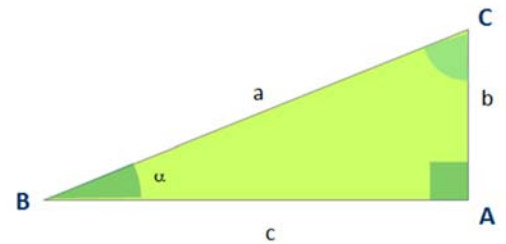
Pel teorema de Pitàgores $a^2 = b^2 + c^2$

Dividim a ambdós membres entre a^2 :

$$\frac{a^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2}$$

$$\sin\alpha = \frac{b}{a} \quad \Rightarrow 1 = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} \Rightarrow 1 = (\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2$$

$$\cos\alpha = \frac{c}{a}$$



SEGONA RELACIÓ FONAMENTAL:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Al mateix triangle anterior:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{b}{a} : \frac{c}{a} = \frac{b \cdot a}{c \cdot a} = \frac{b}{c} = \tan\alpha$$

Activitats resoltes

- Sabent que α és un angle agut, calcula les restants raons trigonomètriques de α als casos següents: a) $\sin\alpha = \frac{1}{5}$ b) $\tan\alpha = 3$

$$a) \quad \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \frac{1}{25} + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25} \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{24}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

$$b) \quad \left. \begin{array}{l} \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \\ \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \\ \sin\alpha = 3\cos\alpha \end{array} \right\} \Rightarrow (3\cos\alpha)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow 10\cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\text{per tant: } \sin\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

2.3. Altres raons trigonomètriques. Altres relacions

Altres raons trigonomètriques d'un angle α són la cosecant, la secant i la cotangent de α i les seues notacions són $\operatorname{cosec} \alpha$, $\operatorname{sec} \alpha$, $\operatorname{cotan} \alpha$.

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}; \operatorname{sec} \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}; \operatorname{cotan} \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}.$$

Amb la seua definició, apareixen noves identitats trigonomètriques, entre les que destaquen:

- $\sin \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha = 1$; $\cos \alpha \cdot \operatorname{sec} \alpha = 1$; $\tan \alpha \cdot \operatorname{cotan} \alpha = 1$.
- $\operatorname{sec}^2 \alpha = 1 + \tan^2 \alpha$
- $\operatorname{cosec}^2 \alpha = 1 + \cotan^2 \alpha$

La primera d'elles és evident per definició. La segona i la tercera tenen una demostració molt pareguda per la qual cosa trobaràs només una de les dues i l'altra com a activitat proposada

Demostració b):

A partir de $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, dividim a ambdós membres entre $\cos^2 \alpha$:

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \tan^2 \alpha + 1 = \operatorname{sec}^2 \alpha$$

Activitats proposades

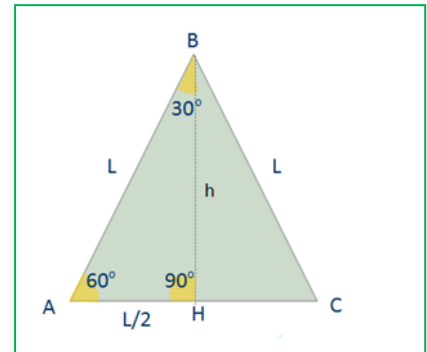
- Sabent que $\cos \alpha = \frac{1}{3}$, calcula els raons trigonomètriques secant, cosecant i cotangent de α .
- Si $\operatorname{cotan} \alpha = 2$, calcula les cinc raons trigonomètriques de l'angle α .
- Demuestra que $\operatorname{cosec}^2 \alpha = 1 + \cotan^2 \alpha$

2.4. Raons trigonomètriques de 30°, 45° i 60°.

RAONS TRIGONOMÈTRIQUES DE 30° I 60°

Considerem un triangle equilàter de costat L . Tracem l'altura corresponent al costat sobre el qual es recolza. Amb això queda dividit en dos triangles rectangles iguals els angles del qual mesuren 90°, 30° i 60°. A més la hipotenusa mesura L i un dels seus catets $L/2$. Pel teorema de Pitàgores podem obtenir el que ens falta:

$$h = \sqrt{L^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2} = \sqrt{L^2 - \frac{L^2}{4}} = \sqrt{\frac{3L^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}L}{2}$$



Calculem les raons trigonomètriques de 30° i 60° al triangle ABH :

$$\sin 60^\circ = \frac{h}{L} = \frac{\frac{\sqrt{3}L}{2}}{L} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \sin 30^\circ = \frac{L/2}{L} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{L/2}{L} = \frac{1}{2} \quad \cos 30^\circ = \frac{h}{L} = \frac{\frac{\sqrt{3}L}{2}}{L} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{h}{L/2} = \frac{2h}{L} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{3}L}{2}}{L} = \sqrt{3} \quad \tan 30^\circ = \frac{L/2}{h} = \frac{L/2}{\frac{\sqrt{3}L}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

RAONS TRIGONOMÈTRIQUES DE 45°

Ara treballarem amb un triangle rectangle isòsceles. Posem que els dos catets tenen una longitud L . Utilitzem novament el teorema de Pitàgores i obtenim el valor de la hipotenusa x en funció de L :

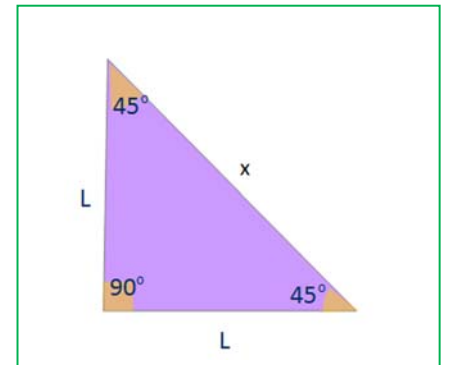
$$x = \sqrt{L^2 + L^2} = \sqrt{2L^2} = L\sqrt{2}$$

Ara podem calcular ja les raons trigonomètriques de 45°

$$\sin 45^\circ = \frac{L}{x} = \frac{L}{L\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{L}{x} = \frac{L}{L\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{L}{L} = 1$$



	Sinus	Cosinus	Tangent
30°	1/2	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1/2	$\sqrt{3}$

2.5. Resolució de triangles rectangles.

- **Resoldre un triangle** és calcular les amplituds dels tres angles i les longituds dels tres costats.
- Al cas que el triangle segueixca rectangle podem considerar tres casos depenent de les hipòtesis o dades inicials. En cada un d'ells hi ha diverses formes d'obtenir la solució. Descriurem una en cada cas:

Primer cas: És coneixen un angle \hat{B} i la hipotenusa a :

- Com $\hat{A} = 90^\circ$ $\hat{C} = 90^\circ - \hat{B}$

- Ara a partir dels raons trigonomètriques de \hat{B} o \hat{C} , obtenim els costats que ens falten. També podem utilitzar el teorema de Pitàgores quan coneguem un dels dos catets.

$$\sin \hat{B} = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a \sin \hat{B} \quad \cos \hat{B} = \frac{c}{a} \Rightarrow c = a \cos \hat{B}$$

Segon cas: És coneixen un angle \hat{B} i un catet b :

- Com $\hat{A} = 90^\circ$ $\hat{C} = 90^\circ - \hat{B}$

- També en aquest cas les raons trigonomètriques de \hat{B} o \hat{C} serveixen per a obtenir almenys un dels costats i pot utilitzar-se el teorema de Pitàgores quan trobem el valor d'un costat més. Una forma de resolució és:


$$\operatorname{tg} \hat{B} = \frac{b}{c} \Rightarrow c = \frac{b}{\operatorname{tg} \hat{B}} \quad \sin \hat{B} = \frac{b}{a} \Rightarrow a = \frac{b}{\sin \hat{B}}$$

Tercer cas: És coneixen dos costats:

- En aquest cas utilitzarem en primer lloc el teorema de Pitàgores per a calcular el tercer costat, tant si el que falta és un catet com si és la hipotenusa. Seguint amb el triangle de la figura:

- $a^2 = b^2 + c^2$

Per a obtenir el primer dels angles aguts, calcularem en primer lloc una de les seues raons trigonomètriques, per exemple $\sin \hat{B} = \frac{b}{a}$ i per a conèixer el valor de l'angle, aïllem escrivint: $\hat{B} = \arcsin \frac{b}{a}$ que vol dir "angle el sinus del qual és $\frac{b}{a}$ " i que s'obté amb la calculadora activant el

comandament \sin^{-1} el que aconseguirem amb la seqüència  $\frac{b}{a}$.

Anàlogament, si partim de $\cos \hat{B} = \frac{c}{a}$ o bé $\operatorname{tg} \hat{B} = \frac{b}{c}$ l'angle \hat{B} és $\hat{B} = \arccos \frac{c}{a}$ o $\hat{B} = \arctan \frac{b}{c}$

- que obtindrem amb els seqüències  $\frac{c}{a}$ o bé  $\frac{b}{c}$.

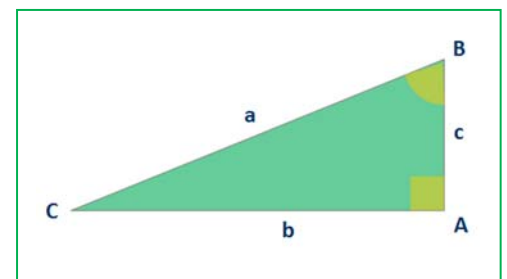
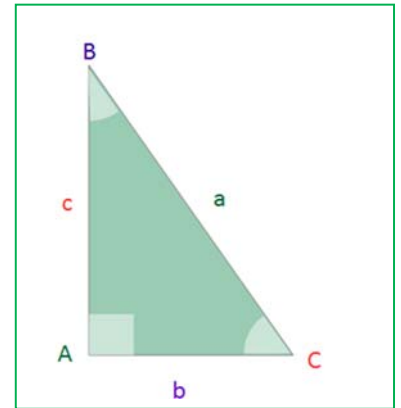
Activitats resoltes

- Resoldre el triangle ABC amb angle recte en A als dos casos següents:

- a) $\hat{B} = 42^\circ$ i la hipotenusa $a = 12$ m.
- b) Els catets mesuren 12 dm i 5 dm.

a) Càlcul dels angles: $\hat{A} = 90^\circ$; $\hat{B} = 42^\circ$; $\hat{C} = 90^\circ - 42^\circ = 48^\circ$

Càlcul dels costats: $\operatorname{sen} 42^\circ = \frac{b}{12} \Rightarrow b = 12 \operatorname{sen} 42^\circ \approx 8,03$ m.



- $\cos 42^\circ = \frac{c}{12} \Rightarrow c = 12 \cos 42^\circ \approx 8,92\text{m}$

b) Càlcul de la hipotenusa: $a^2 = b^2 + c^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169 \Rightarrow a = \sqrt{169} = 13 \text{ dm}$

Càlcul dels angles: $\hat{A} = 90^\circ$; $\hat{B} = \arctan \frac{12}{5} = 67^\circ 22' 48''$; $\hat{C} = 90^\circ - 67^\circ 22' 48'' = 22^\circ 37' 12''$.

2.6. Aplicacions de la resolució de triangles rectangles al càlcul de distàncies

Resolució de triangles rectangles

La resolució de triangles rectangles pot aplicar-se directament en alguns casos al càlcul de distàncies.

Activitats resoltes

- Calcular l'altura d'un arbre sabent que determina una ombra de 3,5 metres quan els rajos de sol formen un angle de 30° amb el sòl.

La raó trigonomètrica de 30° que relaciona el costat conegut i el que ens demanen és la tangent:

$$\tan 30^\circ = \frac{h}{3,5} \Rightarrow h = 3,5 \tan 30^\circ = 3,5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 2,02 \text{ m.}$$

Tècnica de la doble observació

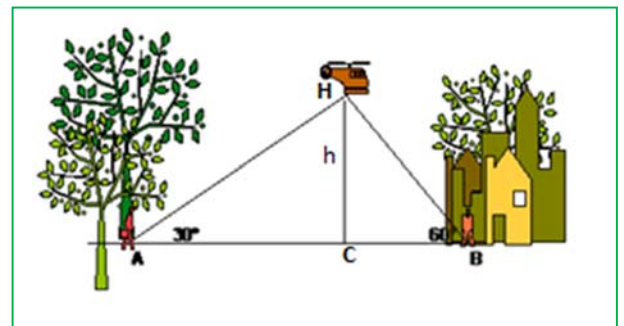
S'utilitza per a calcular altures d'objectes als què resulta difícil arribar com per exemple, edificis, muntanyes, objectes a l'extrem oposat d'un carrer, etc....

Precisem d'un instrument per a mesurar angles. Habitualment s'utilitza l'anomenat **teodolit**. La tècnica consisteix a prendre la mesura de l'angle que forma una visual dirigida al punt més alt de l'objecte a mesurar amb l'horitzontal, des de dos punts distints i situats a una distància coneguda per a nosaltres.

Apareixen aleshores dos triangles rectangles amb un costat comú que és l'altura a mesurar. És possible plantejar un sistema d'equacions en el plantejament del qual és clau la definició de les raons trigonomètriques d'un angle agut. Vegem alguns exemples:

Activitats resoltes

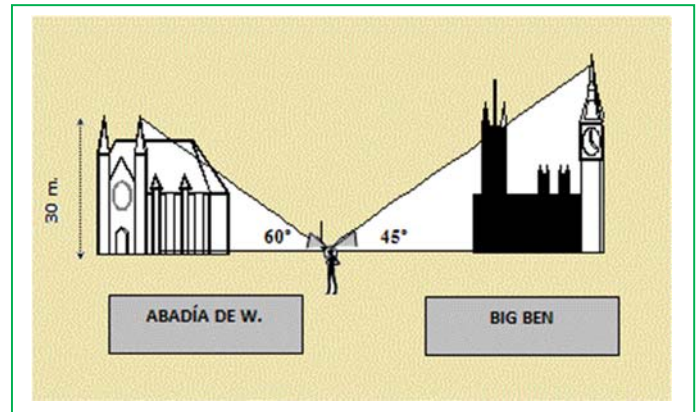
- Dues persones, separades **30** metres veuen un helicòpter. La persona situada en A dirigeix una visual a la base del mateix que forma amb el sòl un angle de 30° . També la persona situada en B dirigeix la seua vista al mateix punt obtenint un angle de 60° . A quina altura vola l'helicòpter?
- Siga h aquesta altura. Les visuals i el sòl determinen dos triangles rectangles $\triangle AHC$ i $\triangle BHC$ als que:
- $AC + CB = 30 \Rightarrow CB = 30 - AC$ i si fem $AC = x$



- $\tan 30^\circ = \frac{h}{x} \Rightarrow h = x \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} x$
 - $\tan 60^\circ = \frac{h}{30-x} \Rightarrow h = (30-x) \tan 60^\circ = \sqrt{3} (30-x)$
- $$x = (30-x) \cdot 3 \Rightarrow 4x = 90 \Rightarrow x = \frac{90}{4} = \frac{45}{2} = 22,5 \text{ m}$$
- $$h = \frac{\sqrt{3}}{3} x = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{45}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{2} \approx 13 \text{ m}$$
- \Rightarrow Substituint, arribem a la solució

- En un viatge d'alumnes de 4º d'E.S.O. a Londres, alguns dels viatgers van fer pràctiques de trigonometria. (Ja saps, sempre hi ha un teodolit a mà).

En conèixer que les torres de l'Abadia de Westminster tenen **30** metres d'altura, van decidir aprofitar els seus coneixements per a calcular l'altura de la coneguda torre Big Ben. Des d'un punt intermediari entre ambdós edificis es veu el punt més alt de l'Abadia amb angle de **60º**, i el Big Ben amb un angle de **45º**. Si la distància entre les bases de les torres dels dos edificis és de **50** metres, quin va ser el resultat dels seus càlculs?, a quina distància és trobava de cada edifici? (Nota: Les dades son totalment ficticies)



Al triangle esquerre determinat per l'Abadia: $\tan 60^\circ = \frac{30}{x} \Rightarrow x = \frac{30}{\tan 60^\circ} = \frac{30}{\sqrt{3}} = \frac{30\sqrt{3}}{3} = 10\sqrt{3} \text{ m}$

Al triangle que determina el Big Ben:

$$\tan 45^\circ = \frac{h}{50 - 10\sqrt{3}} \Rightarrow h = (50 - 10\sqrt{3}) \tan 45^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = 50 - 10\sqrt{3} \text{ m} \approx 32,7 \text{ m}$$

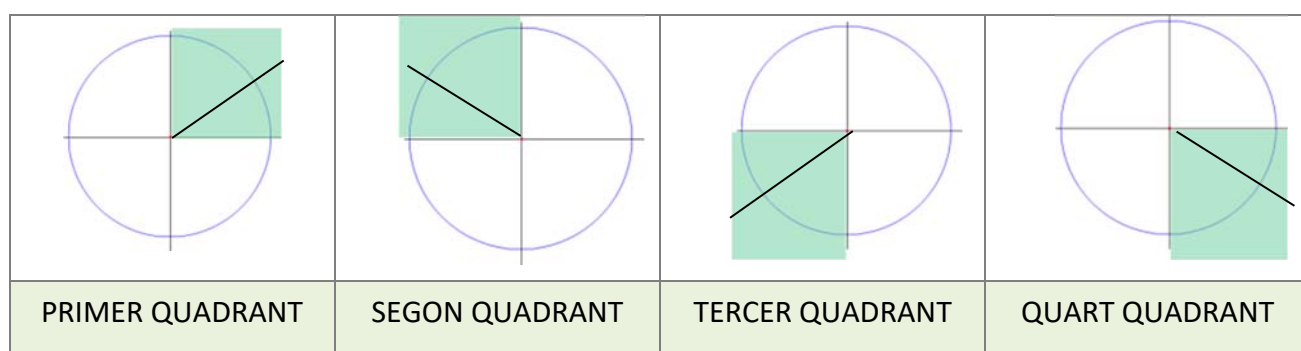
3. RAONS TRIGONOMÈTRIQUES D'UN ANGLE QUALSEVOL

3.1. Circumferència trigonomètrica. Quadrants

S'anomena **circumferència trigonomètrica** o **goniomètrica** a una circumferència de radi unitat centrada a l'origen de coordenades.

És possible representar qualsevol angle a la circumferència trigonomètrica. Per això sempre es pren un costat fix que és la semirecta definida per la part positiva de l'eix d'abscisses; el segon costat és la semirecta variable que corresponga segons la seua mesura. El sentit d'un angle es mesura d' OX^+ a la semirecta variable que determina la seua amplitud. S'entén que per a un angle negatiu coincideix amb el dels agulles d'un rellotge analògic i per a un angle positiu, el contrari.

La circumferència trigonomètrica divideix al pla en quatre regions que es denominen quadrants.



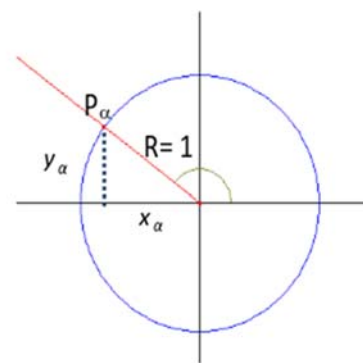
3.2. Raons trigonomètriques d'un angle qualsevol

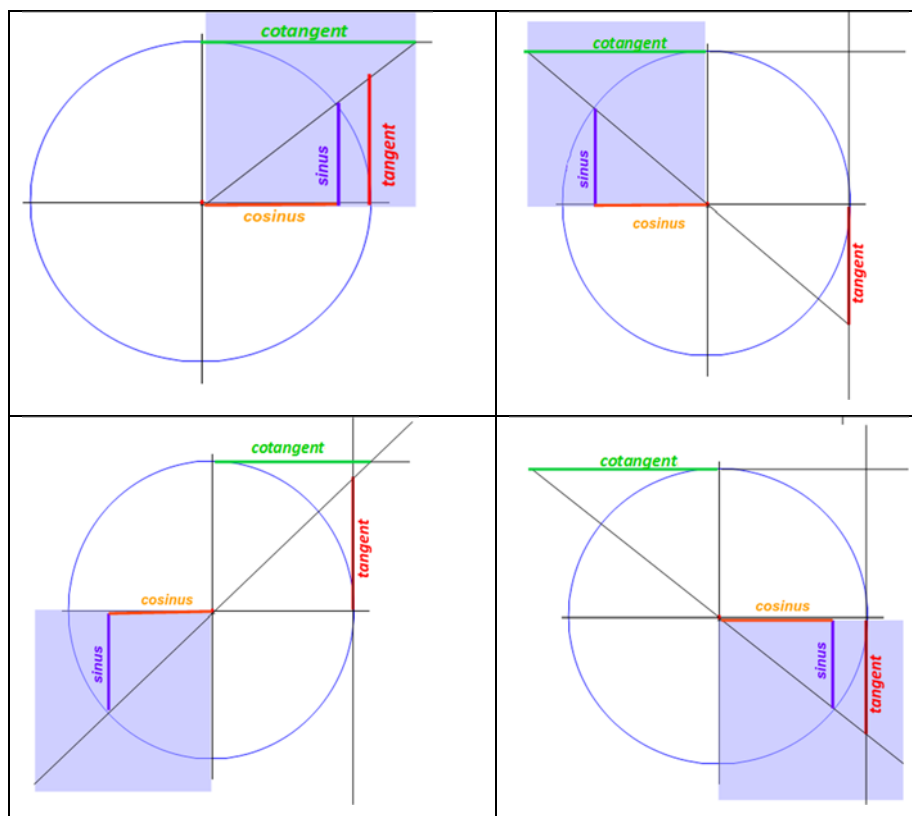
La semirecta variable que defineix un angle α a la circumferència trigonomètrica és clau per a la definició d'un angle qualsevol. La dita semirecta talla a la circumferència a un punt $P_\alpha (x_\alpha, y_\alpha)$ a partir del que és defineix:

$$\sin\alpha = \frac{y_\alpha}{R} = \frac{y_\alpha}{1} = y_\alpha; \cos\alpha = \frac{x_\alpha}{R} = \frac{x_\alpha}{1} = x_\alpha; \tan\alpha = \frac{y_\alpha}{x_\alpha}.$$

Es conserva la definició per a angles aguts que són angles del primer quadrant i s'amplia a angles de qualsevol signe i amplitud.

A més, aquesta definició permet tindre una representació geomètrica del sinus i el cosinus d'un angle que coincideix amb els segments y_α , x_α , ordenada i abscissa del punt P_α . Les rectes tangents a la circumferència goniomètrica als punts (1,0) i (0,1) proporcionen també representacions geomètriques de la tangent i cotangent que són els segments determinats per aquestes tangents geomètriques, l'eix OX i la semirecta corresponent a cada angle.

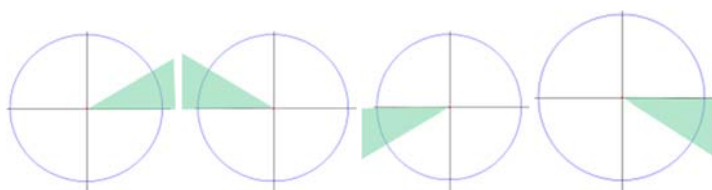




3.3. Reducció al primer quadrant

Els angles α dels quadrants segon, tercer o quart poden relacionar-se amb angles aguts β que podem situar al primer quadrant i que tenen raons trigonomètriques amb els mateixos valors absoluts que els angles α inicials.

Aquestes relacions permeten obtenir les raons trigonomètriques de qualsevol angle α en funció d'un del primer quadrant β . En cada cas calcularem l'amplitud de la zona ombrejada.



Als casos en què desitgem obtenir quins angles corresponen a una raó trigonomètrica donada, resulta especialment important ja que, encara que fem ús de la calculadora, aquesta ens tornarà un únic valor i, no obstant això, hi ha infinits angles solució d'aquest problema. Gràcies a allò que descriurem en aquest epígraf, podrem trobar-los sense dificultat.

Per a fer més còmoda l'explicació considerarem que a partir de P es mesuren les raons trigonomètriques de l'angle α i a partir de P' les de l'angle β

Has de pensar que els angles d'aquests quadrants no sempre són positius ni tenen un valor absolut menor que 360° .

Observa que, si el seu valor absolut és major que 360° , equival al nombre de voltes que t'indique el quocient sencer de la divisió entre 360° més el residu de la divisió.

El signe d'un angle depèn només de la forma de recórrer-lo (mesurat des de la part positiva de l'eix OX cap a la semirecta que el defineix).

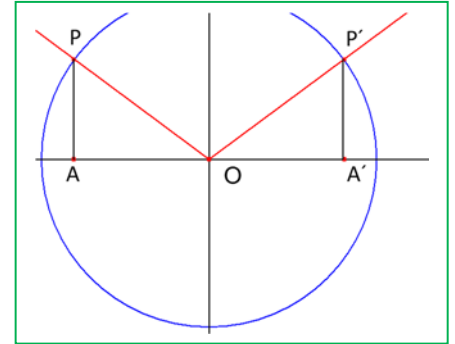
ANGLES DEL SEGON QUADRANT

Construïm els triangles rectangles OPA i $OP'A'$ iguals de manera que la hipotenusa seguisca en ambdós casos el radi de la circumferència goniomètrica i a més $\beta = \text{angle } AOP = \text{angle } A'OP'$

$$\sin\alpha = \overline{AP} = \overline{A'P'} = \sin\beta$$

$$\cos\alpha = \overline{AO} = -\overline{A'O'} = -\cos\beta$$

I dividint membre a membre, obtenim: $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\beta}{-\cos\beta} = -\tan\beta$

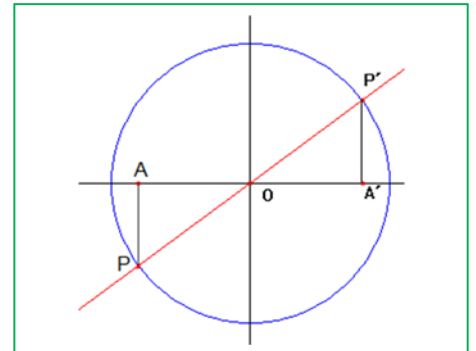
**ANGLES DEL TERCER QUADRANT**

També en aquest cas els triangles rectangles OPA i $OP'A'$ son iguals. La seua hipotenusa és el radi de la circumferència goniomètrica i els seus catets els segments determinats pels coordenades dels punts P i P' . La construcció és realitzada a més de manera que $\beta = \text{angle } AOP = \text{angle } A'OP'$

$$\sin\alpha = \overline{AP} = -\overline{A'P'} = -\sin\beta$$

$$\cos\alpha = \overline{AO} = -\overline{A'O'} = -\cos\beta$$

I dividint membre a membre, obtenim: $\tan\alpha = \frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha} = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \tan\beta$

**ANGLES DEL QUART QUADRANT**

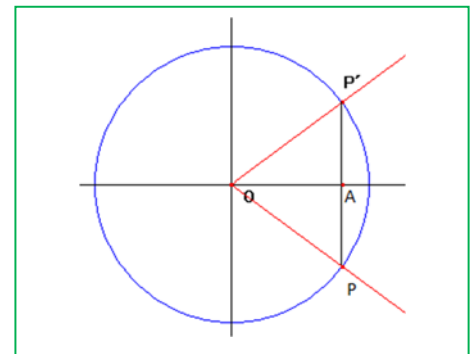
Finalment construïm els triangles rectangles OPA i $OP'A$ iguals de manera anàloga a allò que s'ha descrit als dos casos anteriors, observant que, en aquest cas $A = A'$.

$$\sin\alpha = \overline{AP} = -\overline{AP'} = -\sin\beta$$

$$\cos\alpha = \overline{AO} = \cos\beta \text{ en ambdós casos}$$

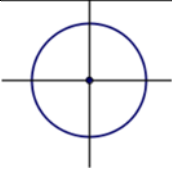
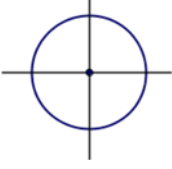
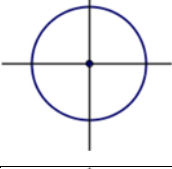
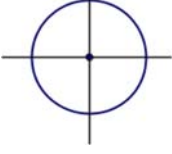
I dividint membre a membre, obtenim:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\sin\beta}{\cos\beta} = -\tan\beta$$



Activitats proposades

9. Situa al quadrant que corresponga i expressa en funció d'un angle agut, el sinus, cosinus i tangent dels angles següents:

Angle	quadrant	sinus	cosinus	tangent
165°				
-230°				
315°				
3625°				

10. Utilitza la calculadora i allò que s'ha après en aquest epígraf per a trobar tots els angles positius menors que 360° el sinus dels quals és de 0,4.
11. Ídem tots els angles negatius menors en valor absolut que 360° la tangent dels quals val 2.
12. Ídem tots els angles compresos entre 360° i 720° el cosinus dels quals val 0,5.

ANGLES DETERMINATS PELS SEMIEIXOS.

Els angles $0^\circ + 360^\circ n$; $90^\circ + 360^\circ n$; $180^\circ + 360^\circ n$; $270^\circ + 360^\circ n$ estan determinats per semieixos de coordenades i els seus raons trigonomètriques es mesuren a partir de punts dels eixos. Aquests punts són, respectivament $P_1(1, 0)$, $P_2(0, 1)$, $P_3(-1, 0)$ i $P_4(0, -1)$ amb el que s'obté amb facilitat:

$$\sin(0^\circ + 360^\circ n) = 0; \cos(0^\circ + 360^\circ n) = 1; \tan(0^\circ + 360^\circ n) = 0.$$

$$\sin(90^\circ + 360^\circ n) = 1; \cos(90^\circ + 360^\circ n) = 0; \tan(90^\circ + 360^\circ n) \text{ no existeix}$$

$$\sin(180^\circ + 360^\circ n) = 0; \cos(180^\circ + 360^\circ n) = -1; \tan(180^\circ + 360^\circ n) = 0$$

$$\sin(270^\circ + 360^\circ n) = -1; \cos(270^\circ + 360^\circ n) = 0; \tan(270^\circ + 360^\circ n) \text{ no existeix}$$

4. RESOLUCIÓ DE TRIANGLES QUALSSEVOL

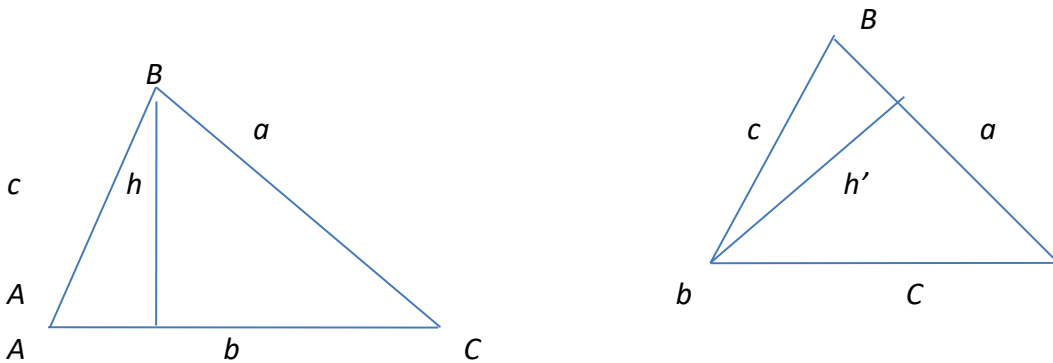
Les definicions de sinus, cosinus i tangent que hem aplicat en triangles rectangles no és poden aplicar en triangles no rectangles. Per a resoldre triangles no rectangles s'apliquen dos teoremes molt importants en trigonometria: el teorema del sinus i teorema del cosinus.

4.1. Teorema del sinus

El **teorema del sinus** afirma que en tot triangle és compleix que els costats son proporcionals als sinus dels angles oposats. És a dir,

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$

Considerem el triangle ABC i tracem dues altures qualssevol h i h' que divideixen al triangle no rectangle a dos triangles rectangles.



Aplicant la definició de sinus als triangles en què intervé h :

$$\sin \hat{A} = \frac{h}{c} \rightarrow h = c \sin \hat{A}$$

$$\sin \hat{C} = \frac{h}{a} \rightarrow h = a \sin \hat{C}$$

Per tant:

$$c \sin \hat{A} = a \sin \hat{C} \rightarrow \frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$

Aplicant la definició de sinus als triangles en què intervé h' :

$$\sin \hat{B} = \frac{h'}{c} \rightarrow h' = c \sin \hat{B}$$

$$\sin \hat{C} = \frac{h'}{b} \rightarrow h' = b \sin \hat{C}$$

Per tant:

$$c \sin \hat{B} = b \sin \hat{C} \rightarrow \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$

Llavors, és dedueix que: $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$

Notes

Si el triangle és obtusangle, un raonament anàleg ens porta a les mateixes formules.

Podem resoldre fàcilment triangles utilitzant el teorema del sinus si coneixem:

- dos angles (és a dir, tres angles) i un costat
- dos costats i l'angle oposat a un d'ells.

Activitats resoltes

- Resoldre el següent triangle $B = 30^\circ$, $a = 4 \text{ cm}$ i $b = 5 \text{ cm}$.

Coneixem dos costats i l'angle oposat a un d'ells, b .

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} \rightarrow \frac{4}{\sin \hat{A}} = \frac{5}{\sin 30^\circ} \rightarrow \sin \hat{A} = \frac{4 \cdot (1/2)}{5} = 0,4$$

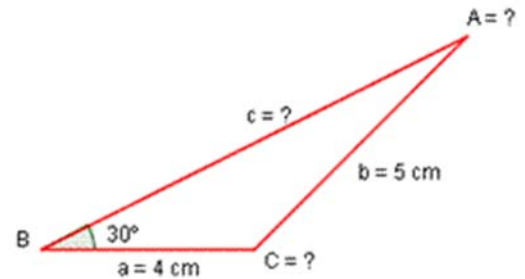
Per tant: $\hat{A} = \arcsin 0,4 = 23,58^\circ$

L'angle $\hat{C} = 180^\circ - (23,58^\circ + 30^\circ) = 126,42^\circ$.

Per a calcular el costat c tornem a aplicar el teorema del sinus:

$$\frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} \rightarrow \frac{5}{\sin 30^\circ} = \frac{c}{\sin 126,42^\circ}$$

$$\text{Llavors: } c = \frac{5 \cdot \sin 126,42^\circ}{\sin 30^\circ} = 8,1 \text{ cm}$$



4.2. Teorema del cosinus

El **teorema del cosinus** afirma que en un triangle $\triangle ABC$ qualsevol és compleix que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

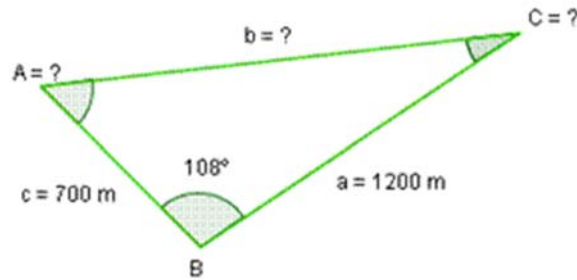
$b^2 = a^2 + c^2 - 2acc \cos \hat{B}$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2abc \cos \hat{C}$ L'any que ve estudiaràs la demostració d'aquest teorema. De moment només veurem algunes dels seus aplicacions.

Notes

- Si et fixes, el teorema del cosinus és una generalització **del teorema de Pitàgores**. És a dir, quan el triangle és rectangle, el teorema del cosinus i el teorema de Pitàgores és el mateix.
- Podem utilitzar el teorema del cosinus si en un triangle coneixem:
 - els tres costats,
 - dos costats i l'angle oposat a un d'ells
 - dos costats i l'angle que formen.

Activitats resoltes

- Resoldre el següent triangle del què coneixem $B = 108^\circ$, $c = 700 \text{ m}$ i $a = 1200 \text{ m}$:



$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B} \text{ per tant } b = \sqrt{1200^2 + 700^2 - 2 \cdot 700 \cdot 1200 \cdot \cos 108} \rightarrow b = 1564,97 \text{ m.}$$

Amb a , b i c coneguts, calculem l'angle C:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C} \rightarrow \cos \hat{C} = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{-2 \cdot a \cdot b} = \frac{700^2 - 1200^2 - 1564,97^2}{-2 \cdot 1200 \cdot 1564,97} = 0,9 \rightarrow \hat{C} = 25,18^\circ$$

L'angle \hat{C} també es podria calcular utilitzant el teorema del sinus.

$$\text{Per a calcular } \hat{A}: \hat{A} = 180^\circ - (108^\circ + 25,18^\circ) = 46,82^\circ.$$

Activitats proposades

13. Calcula la longitud del costat a d'un triangle, sabent que $C = 25^\circ$, $b = 7$ cm i $c = 4$ cm.

14. Calcula els angles del triangle de costats: $a = 6$, $b = 8$ i $c = 5$.

4.3. Resolució de triangles qualssevol

Els ferramentes bàsiques per a resoldre triangles qualssevol són els teoremes del sinus i el cosinus que s'han vist anteriorment. El pròxim curs s'ampliarà breument la resolució d'aquests triangles, estudiant casos en què no existirà solució o casos en què hi haja dues solucions.

També és plantejaran problemes de càlcul de distàncies entre punts inaccessibles.

CURIOSITATS. REVISTA**ELS NOSTRES SENTITS ENS ENGANYEN?**

La foto mostra un tram de carretera cap a l'horitzó. Totes les línies són rectes, la fotografia no enganya, però els nostres sentits, sí. Segons la nostra percepció, aquestes línies es tallen a un punt de l'horitzó, encara que nosaltres, quan estem en aqueixa situació, sabem que no és així. Llavors, per què ho veiem així? Per dues raons: perquè la llum viatja en línia recta i perquè la nostra percepció visual es basa en els angles, la qual cosa fa que l'amplària de la carretera disminuïska amb la distància.

Però ara, que coneixes les relacions entre angles i costats d'un triangle, sabràs raonar si els objectes disminueixen la seua dimensió de forma inversament proporcional a la distància a què es troben.

**Sabies que...?**

El teorema del sinus es va utilitzar al segle XIX per a mesurar de forma precisa el meridià de París i així poder definir el metre.

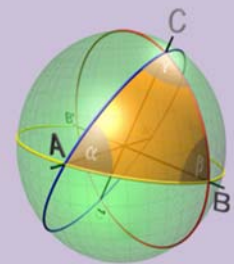
TRIGONOMETRIA ESFÈRICA

La trigonometria esfèrica estudia els triangles que es formen sobre una superfície esfèrica

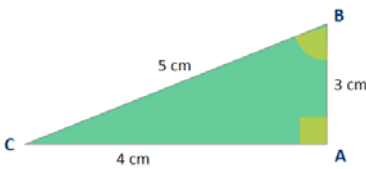
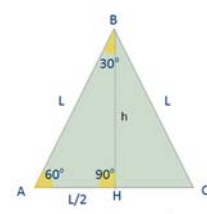
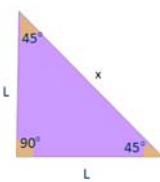
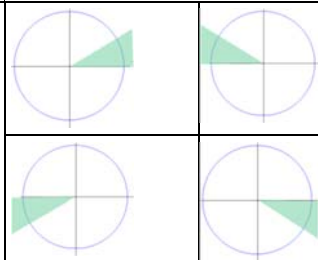
En la trigonometria esfèrica la distància més curta entre dos punts no és una recta, sinó un arc.

Els angles d'un triangle esfèric sumen més de 180°

És la base de la navegació i l'astronomia. Curiós, no?



RESUM

					Exemples
Radian	És un angle tal que qualsevol arc que se li associe mesura exactament el mateix que el radi utilitzat per a traçar-lo. És denota per rad. Nr. de radians d'un angle complet = 2π rad				90° són $\pi/2$ rad
Raons trigonomètriques d'un angle agut	$\sin\alpha = \frac{\text{catetoposat}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$ $\cos\alpha = \frac{\text{catetadjacent}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$ $\tan\alpha = \frac{\text{catetoposat}}{\text{catetadjacent}} = \frac{b}{c}$				 $\sin C = \frac{3}{5}, \cos C = \frac{4}{5}$
Relacions fonamentals	<ul style="list-style-type: none"> $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$ $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ 				$(\sin 30^\circ)^2 + (\cos 30^\circ)^2 =$ $= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$
Altres raons trigonomètriques	$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} \operatorname{sec}\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \operatorname{cotan}\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$				$\operatorname{cosec} 90^\circ = 1$ $\operatorname{sec} 90^\circ$ No existeix $\operatorname{cotan} 45^\circ = 1$
Raons trigonomètriques de $30^\circ, 45^\circ$ i 60°		<i>sinus</i>	<i>cosinus</i>	<i>tangent</i>	 
	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	
	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	
	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	
Reducció al primer quadrant	Les raons trigonomètriques de qualsevol angle α poden expressar-se en funció de les d'un angle agut β				
Reducció al primer quadrant	2n QUADRANT	$\sin\alpha = \sin\beta \cos\alpha = -\cos\beta$			$\sin 135^\circ = \sin 45^\circ$ $\sin 200^\circ = -\sin 20^\circ$ $\cos(-60^\circ) = \cos 60^\circ$
	3r QUADRANT	$\sin\alpha = -\sin\beta \cos\alpha = -\cos\beta$			
	4t QUADRANT	$\sin\alpha = -\sin\beta \cos\alpha = \cos\beta$			

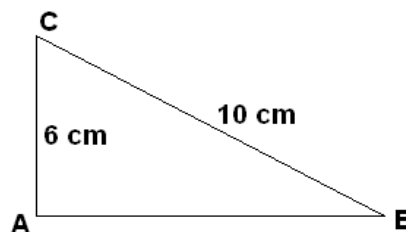
Resolució de triangles	<p>Resoldre un triangle és calcular les mesures dels seus angles i dels seus costats.</p> <ul style="list-style-type: none"> • <u>Si el triangle és rectangle</u>, usarem les definicions de les raons trigonomètriques, el teorema de Pitàgores i el resultat que afirma que la suma dels angles d'un triangle és 180° • <u>Si el triangle no és rectangle</u>, a més del resultat de que la suma dels angles d'un triangle és 180°, usarem els teoremes del sinus i el cosinus. 	
Teorema del sinus	<p>En un triangle $\triangle ABC$ qualsevol:</p> $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$	
Teorema del cosinus	<p>En un triangle $\triangle ABC$ qualsevol:</p> $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos\hat{A}$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2accos\hat{B}$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2abcos\hat{C}$	

EXERCICIS I PROBLEMES

- Expressa les següents mesures d'angles en radians:
a) 30° b) 60° c) 100° d) 330°
- Quant mesura en graus sexagesimals un angle d'1 rad? Aproxima el resultat amb graus, minuts i segons.
- Troba la mesura en graus dels següents angles expressats en radians:
a) π b) $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{5\pi}{6}$ d) 2π
- Usant la calculadora troba el sinus, el cosinus i la tangent de :
a) 28° b) 62°

Trobes alguna relació entre els raons trigonomètriques d'ambdós angles?

- Troba el sinus i el cosinus dels angles B i C del dibuix. Quina relació trobes?



- En un triangle rectangle ABC amb angle recte en A , si $\tan B = 1,2$ i $b = 3$ cm, quant mesura c ?
- Treballant amb angles aguts, és cert que a major angle li correspon major sinus?
I per al cosinus?
- Usant la calculadora troba el sinus, el cosinus i la tangent de 9° i 81° . Trobes alguna relació entre les raons trigonomètriques d'ambdós angles?
- Si a és un angle agut i $\cos a = 0,1$, quant valen els altres dues raons trigonomètriques?
- Comprovar les relacions trigonomètriques fonamentals amb 30° , 45° i 60° sense utilitzar decimals ni calculadora.
- Si a és un angle agut i $\tan a = 0,4$, quant valen les altres dues raons trigonomètriques?

12. Completa al teu quadern la següent taula sabent que α és un angle agut.

sen α	cos α	tg α
	0,7	
1/3		
		2

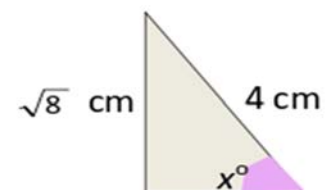
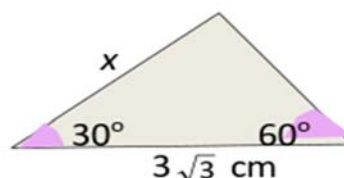
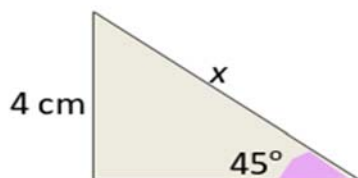
13. És rectangle un triangle els costats del qual mesuren 12, 13 i 5 cm? En cas afirmatiu determina el sinus, cosinus i tangent dels dos angles aguts.

14. Els catets d'un triangle rectangle mesuren 5 i 12 cm. Calcula les raons trigonomètriques dels seus angles aguts. Quina amplitud tenen?

15. Si α és un angle agut tal que $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, calcula:

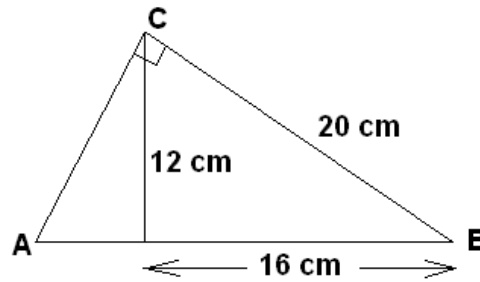
- Les restants raons trigonomètriques de α
- Les raons trigonomètriques de $180^\circ - \alpha$
- Les raons trigonomètriques de $180^\circ + \alpha$
- Les raons trigonomètriques de $360^\circ - \alpha$

16. Sense utilitzar calculadora, calcula el valor de x als següents triangles rectangles:



17. Beatriu subjecta un catxirulo amb una corda de 42 m. A quina altura es troba aquest al moment en què el cable tens forma un angle de $52^\circ 17'$ amb el sòl?

18. Calcula el sinus, cosinus i tangent de l'angle A al dibuix següent:



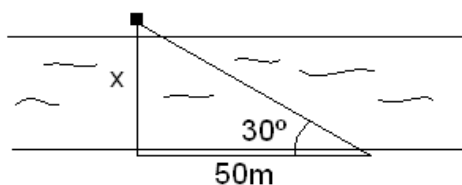
19. Si a és un angle del segon quadrant i $\cos a = -0,05$, quant valen les altres dues raons trigonomètriques?

20. Si a és un angle obtús i $\sin a = 0,4$, quant valen les altres dues raons trigonomètriques?

21. Dibuixa al teu quadern la taula següent i situa al quadrant que corresponga i expressa en funció d'un angle agut, el sinus, cosinus, tangent, secant, cosecant i cotangent dels següents angles. Si pots, calcula'ls:

Angle	quadrant	sinus	cosinus	tangent	secant	cosecant	cotangent
-225°							
150°							
-60°							
3645°							

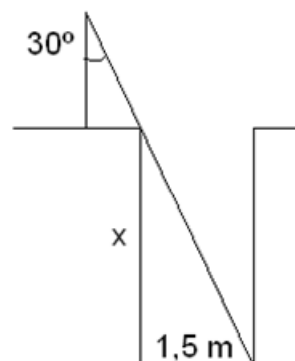
22. Calcula l'amplària del riu representat a la figura següent:



23. Esbrina l'altura de la torre d'una església si a una distància de 80 m, i mesurat amb un teodolit d'altura 1,60 m, l'angle d'elevació del paral·lamps que està a la part alta de la torre és de 23° .

24. Troba l'àrea d'un hexàgon regular de costat 10 cm.

25. Calcula la profunditat d'un pou de 1,5 m de diàmetre sabent l'angle indicat a la figura de la dreta.



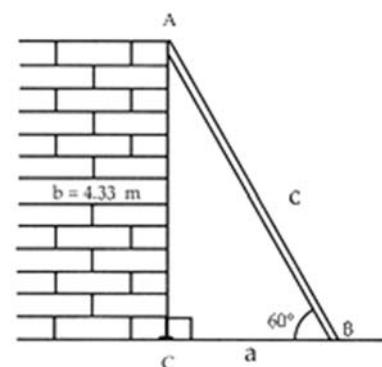
26. Quina és l'altura d'una muntanya el cim de la qual, si ens situem a una distància de 3000 m del peu de la seua vertical i mesurem amb un teodolit d'altura 1,50 m, presenta un angle d'inclinació de 49° .

27. Quin és l'angle d'inclinació dels rajos solars al moment en què un bloc de pisos de 25 m d'alçària projecta una ombra de 10 m de longitud?

28. Troba l'altura i l'àrea d'un triangle isòsceles la base del qual mesura 20 cm i l'angle desigual del qual val 26° .

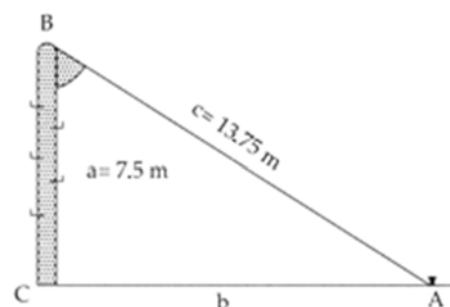
29. Troba l'àrea d'un dodecàgon regular de costat 16 cm.

30. Obtindre la longitud d'una escala recolzada en una paret de 4,33 m d'alçària que forma un angle de 60° respecte al sòl



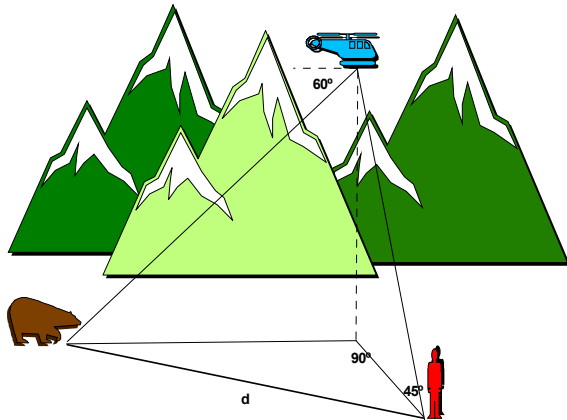
31. El fil d'un catxirulo totalment estés mesura 150 m, i forma un angle amb el sòl de 40° mentres el subjecte a 1,5 m del sòl. A quina altura del sòl està el catxirulo?

32. Per a mesurar l'altura d'un campanar a la base del qual no podem accedir, tendim una corda de 30 m de llarg des de l'alt de la torre fins a tensor-la al sòl, formant amb aquest un angle de 60° . Quina és l'altura del campanar?



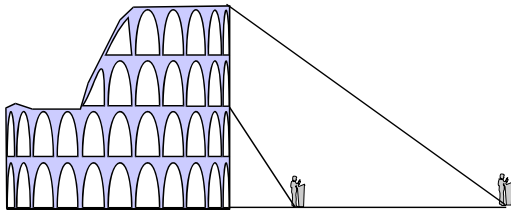
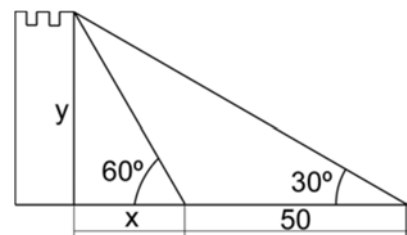
33. Obtindre l'angle que forma un pal de 7.5 m d'alt amb un cable tirant que va, des de la punta del primer fins al pis, i que té un llarg de 13.75 m

34. Dos amics observen des de sa casa un globus que està situat en la vertical de la línia que uneix les seues cases. La distància entre les seues cases és de 3 km. Els angles d'elevació mesurats pels amics són de 45° i 60° . Troba l'altura del globus i la distància d'ells al globus.



35. Un biòleg es troba al port de Somiedo fent un seguiment dels óssos terrosos. Compta amb l'ajuda d'un càmera i un pilot que volen en un helicòpter, mantenint-se a una altura constant de $40\sqrt{3}$ m. Al moment que descriu la figura, el càmera veu des de l'helicòpter a l'ós amb un angle de depressió (angle que forma la seua visual amb l'horitzontal marcat al dibuix) de 60° . El biòleg dirigeix una visual a l'helicòpter que forma amb el sòl un angle de 45° . Calcular la distància entre el biòleg i l'ós.

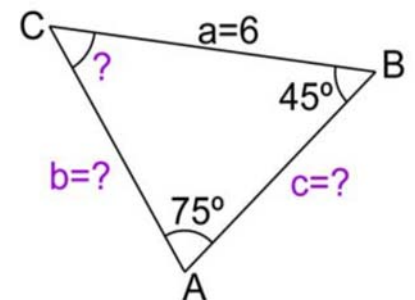
36. Des d'un cert lloc del sòl es veu el punt més alt d'una torre, formant la visual un angle de 30° amb l'horitzontal. Si ens acostem 50 m a la torre, aqueix angle és fa de 60° . Calcula l'alçària de la torre.



37. Amb un teodolit d'1 metre d'altura, dues persones pretenen mesurar l'altura del *Coliseu de Roma*. Una d'elles s'acosta a l'amfiteatre, separant-se **40 m**. de l'altra. Aquesta última obté que l'angle d'elevació del punt més alt és de **30°** . L'altra no divisa el Coliseu complet pel que mesura l'angle d'elevació al punt que marca la base del tercer pis , obtenint **60°** com resultat. Calcular l'altura del Coliseu i la distància dels dos observadors a la base del mateix.

38. Ressol el triangle: $a = 6$; $B = 45^\circ$; $A = 75^\circ$

39. Els pares de Pere tenen una parcel·la al camp de forma triangular els costats de la qual mesuren 20, 22 i 30 m. Pere vol calcular els angles. Quins són aqueixos angles?

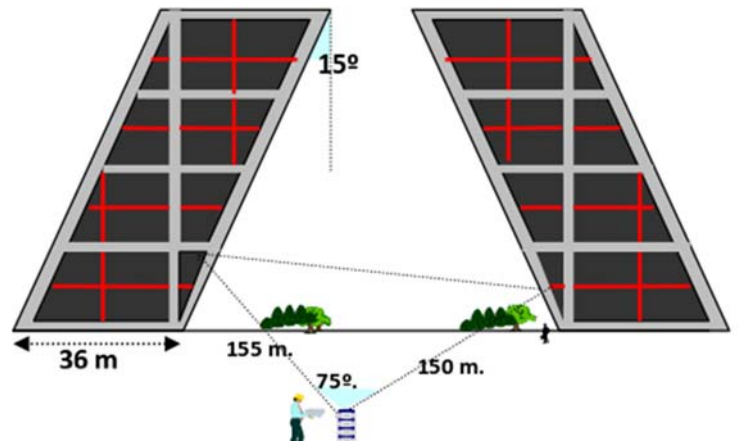


40. Estant situat a 100 m d'un arbre, veig la seua copa baix un angle de 30° . El meu amic veu el mateix arbre baix un angle de 60° . A quina distància està el meu amic de l'arbre?

41. Les conegudes *torres Kio* de Madrid són dues torres bessones que estan al Passeig de la Castellana, junt a la Plaça de Castilla. Es caracteritzen per la seua inclinació i representen una porta cap a Europa.

a) Amb les dades que apareixen a la figura, determina la seua altura.

b) Des de dues oficines situades en torres distintes s'han estés dos cables fins a un mateix punt que mesuren 155 i 150 metres i que formen un angle de 75° al punt de trobada. Quina distància en línia recta hi ha entre ambdues?



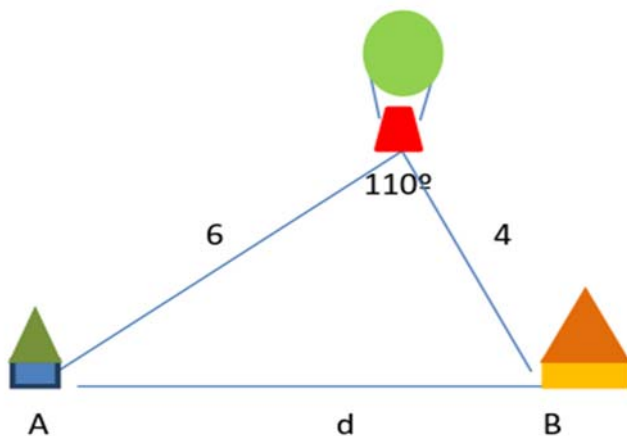
42. Tres pobles estan units per carreteres: $AB = 10$ km, $BC = 12$ km i l'angle format per AB i BC és de 120° . Quant disten A i C ?

43. Han de construir un túnel del punt A al punt B . És pren com a referència una antena de telefonia (C) visible des d'ambdós punts. És mesura llavors la distància $AC = 250$ m. Sabent que l'angle en A és de 53° i l'angle en B és de 45° calcula quina serà la longitud del túnel.

44. Calcula el costat d'un pentàgon regular inscrit en una circumferència de radi 6 m.

45. El punt més alt d'un repetidor de televisió, situat a la cima d'una muntanya, es veu des d'un punt del sòl P baix un angle de 67° . Si ens acostem a la muntanya 30 m el veiem baix un angle de 70° i des d'aqueix mateix punt veiem la cima de la muntanya baix un angle de 66° . Calcular l'altura del repetidor.

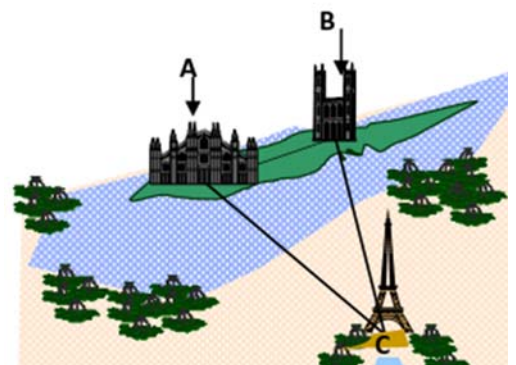
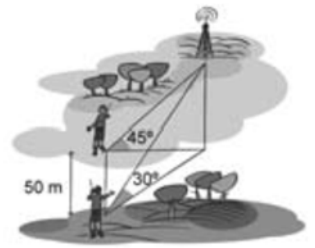
46. Des de l'alt d'un globus s'observa un poble A amb un angle de 50° . Un altre poble, B situat al costat i en línia recta s'observa des d'un angle de 60° . El globus és troba a 6 km del poble A i a 4 km de B . Calcula la distància entre A i B .



47. Ressol els triangles:

- a) $a = 20$ m; $B = 45^\circ$; $C = 65^\circ$
- b) $c = 6$ m, $A = 105^\circ$, $B = 35^\circ$
- c) $b = 40$ m; $c = 30$ m, $A = 60^\circ$.

48. Donat el triangle de vèrtexs A, B, C , i sabent que $A = 60^\circ$, $B = 45^\circ$ i que $b = 20$ m. Resoldre'l i calcula la seua àrea.
49. Calcula la longitud dels costats d'un paral·lelogram les diagonals del qual són de 20 i 16 m. i les diagonals formen entre si un angle de 37° .
50. Un triangle isòsceles amb base 30 m té dos angles iguals de 80° . Quant mesuren els altres dos costats?
51. Tres amics es situen en un camp de futbol. Entre Àlvar i Bartolo hi ha 25 m i entre Bartolo i Cèsar, 12 metres. L'angle format al cantó de Cèsar és de 20° . Calcula la distància entre Àlvar i Cèsar.
52. Un home que està situat a l'oest d'una emissora de ràdio observa que el seu angle d'elevació és de 45° . Camina 50 m cap al sud i observa que l'angle d'elevació és ara de 30° . Troba l'altura de l'antena.
53. Els braços d'un compàs mesuren 12 cm i formen un angle de 60° . Quin és el radi de la circumferència que pot traçar-se amb aqueixa obertura?
54. ESCRIU quatre angles amb el mateix sinus que 135° .
55. Troba dos angles que tinguen la tangent oposada a la de 340° .
56. Busca dos angles amb el mateix sinus que 36° i cosinus oposat.
57. Quins angles negatius, compresos entre -360° i 0° tenen el mateix sinus que 60° ?
58. A París i en l'île de la Cité és troben *Nôtre Dame* i la *Sainte Chapelle* a una distància de **200 metres**. Imaginem que un observador situat en A veu B i C amb un angle de 56° i que un altre, situat en B veu A i C amb un angle de 117° . Calcular les distàncies entre la torre *Eiffel* (C) i *Nôtre Dame* (B), així com entre la torre *Eiffel* (C) i la *Sainte Chapelle* (A).



AUTOAVALUACIÓ

- L'expressió en radians de 65° és :
 - 1,134 rad
 - $1,134\pi$ rad
 - 2,268 rad
 - $2,268\pi$ rad
- El valor de la hipotenusa en un triangle rectangle amb un angle de 25° i amb un dels catets de 3 cm és:
 - 3,3 cm
 - 7,1 cm
 - 6,4 cm
 - 2,2 cm
- Si α és un angle agut i $\sin\alpha = 0,8$, la tangent de α és:
 - 0,6
 - 0,6
 - 1,33
 - 1,33
- Selecciona l'opció correcta:

$\widehat{\tan A} = \frac{2}{3}$ significa que $\widehat{\sin A} = 2$ i $\widehat{\cos A} = 3$

 - La secant d'un angle sempre està compresa entre -1 i 1
 - Al segon i quart quadrants la tangent i cotangent d'un angle tenen signe negatiu
 - El sinus d'un angle és sempre menor que la seua tangent.
- Si el sinus d'un angle del segon quadrant és $\frac{4}{5}$, llavors la seua tangent i secant són respectivament:
 - $-\frac{3}{5}$ i $-\frac{5}{3}$
 - $\frac{3}{5}$ i $\frac{5}{3}$
 - $-\frac{4}{3}$ i $-\frac{3}{4}$
 - $\frac{4}{3}$ i $\frac{3}{4}$
- L'altura d'un edifici és de 50 m, la mesura de la seua ombra quan els rajos del sol tenen una inclinació de 30° amb l'horitzontal és de
 - 25 m
 - 100 m
 - $50\sqrt{3}$ m
 - $\frac{100\sqrt{3}}{3}$ m
- L'angle de 420° és un angle que se situa a
 - El primer quadrant
 - El segon quadrant
 - El tercer quadrant
 - El quart quadrant
- Si α és un angle agut i β és el seu suplementari, es compleix:
 - $\sin\alpha = -\sin\beta$ i $\cos\alpha = \cos\beta$
 - $\sin\alpha = \sin\beta$ i $\cos\alpha = -\cos\beta$
 - $\sin\alpha = \sin\beta$ i $\cos\alpha = \cos\beta$
 - $\sin\alpha = -\sin\beta$ i $\cos\alpha = -\cos\beta$
- Per a calcular l'altura d'una muntanya es mesura amb un teodolit des d'A l'angle que forma la visual a la cima amb l'horitzontal, que és $\widehat{A} = 30^\circ$. Avançant 200 m, es torna a mesurar i l'angle resulta ser $\widehat{B} = 35,2^\circ$. L'altura de la muntanya és de:
 - 825 m
 - 773 m
 - 595 m
 - 636 m
- Si el radi d'un pentàgon regular és 8 cm, la seua àrea mesura
 - 305,86 cm²
 - 340,10 cm²
 - 275,97 cm²
 - 152,05 cm²