Matemàtiques orientades a les ensenyances acadèmiques.

3º B d'ESO
Capítol 3: Successions

www.apuntesmareaverde.org.es

Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez i Milagros Latasa Asso

Revisor: Javier Rodrigo i Nieves Zuasti

Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF

Traducció al valencià: Pedro Podadera IES Juan de Garay

Successions. 3º B d'ESO

Índex

1. SUCCESSIONS DE NOMBRES REALS

1.1. DEFINICIONS

1.2. FORMES DE DEFINIR UNA SUCCESSIÓ

2. PROGRESSIONS ARITMÈTIQUES

2.1. TERME GENERAL D'UNA PROGRESSIÓ ARITMÈTICA

2.2. SUMA DELS TERMES D'UNA PROGRESSIÓ ARITMÈTICA

3. PROGRESSIONS GEOMÈTRIQUES

3.1. TERME GENERAL D'UNA PROGRESSIÓ GEOMÈTRICA

3.2. PRODUCTE DELS TERMES D'UNA PROGRESSIÓ GEOMÈTRICA

3.3. SUMA DELS TERMES D'UNA PROGRESSIÓ GEOMÈTRICA

3.4. APLICACIONS DE LES PROGRESSIONS GEOMÈTRIQUES

Resum

Què tenen en comú conceptes tan dispars com el nombre de conills fills engendrats per una parella de conills, l'estructura d'un floc de neu o l'interés que obtenim en depositar determinada quantitat de diners en una entitat financera?

Darrere d'aquests casos ens trobem amb el concepte de successió. Les successions numèriques tenen gran importància i utilitat en moltíssims aspectes de la vida real, algun dels quals aniràs descobrint al llarg d'aquest tema.

Autores: Fernanda Ramos i Milagros Latasa
Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

1. SUCCESSIONS DE NOMBRES REALS

1.1. Definicions

Una **successió** de nombres reals és una seqüència ordenada de nombres.

Exemple:

- Les següents seqüències són successions:
  a) 1, 2, 3, 4, 5, 6,…
  a) 2, 4, 6, 8, 10, 12,…
  b) $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$

S'anomena **terme d'una successió** a cada un dels elements que constitueixen la successió.

Per representar els diferents termes d'una successió s'usa una mateixa lletra amb distints subíndexs. Aquests subíndexs indiquen el lloc que ocupa aqueix terme en la successió.

Exemple:

- En la successió a) tindríem que: $a_5 = 5$, ja que és el terme de la successió que ocupa el cinqué lloc.
- En la successió b), el tercer terme, es denotaria b_3 i correspondria al 6
- En la successió c), per exemple $c_2 = \frac{1}{2}$

El realment important a l'hora d'anomenar els termes d'una successió és el subíndex perquè denota el lloc que ocupen en la successió. Les lletres amb què es designa la successió són distintes per a successions distintes i solen ser lletres minúscules.

S'anomena **terme general d'una successió** al terme que ocupa el lloc *n*-ésimo i s'escriu amb la lletra que denote a la successió (per exemple *a*) amb subíndex *n*: (a_n)

Exemple:

- Als casos que estem considerant, els termes generals de les successions serien: a_n, b_n y c_n.

Si ens fixem, els valors que prenen els subíndexs són nombres naturals, però els termes de la successió no tenen per què ser-lo, és a dir, els valors que pren la successió són nombres reals. Per això, podem definir successió de nombres reals de forma més rigorosa com:

Definició:

S'anomena **successió de nombres reals** a una aplicació que fa correspondre a cada nombre natural un nombre real.

Activitats resoltes

- *En les successions anteriors, observem que:* $a_{1003} = 1003$, $b_{12} = 24$ *i* $c_{37} = \frac{1}{37}$

Activitats proposades

1. Escriu els deu primers termes de les successions següents:

a) –1, –2, –3, –4,…

b) 1, 4, 9, 16,…

c) 1, 3, 5, 7,…

1. Escriu el terme que ocupa el lloc 100 de cada una de les successions anteriors.

2. Sabem que un cos amb densitat suficient que cau lliurement sobre la Terra té una velocitat que augmenta 9,8 m/s. Si en el primer segon la seua velocitat és de 15 m/s, escriu en el teu quadern la velocitat en els segons indicats en la taula. Observes alguna regla que et permeta conéixer la velocitat al cap de 20 segons? Representa gràficament aquesta funció.

Temps en segons	1	2	3
Velocitat en m/s	15		

1.2. Formes de definir una successió

Hi ha diverses formes de definir una successió:

1. **Donant una propietat que complisquen els termes d'aqueixa successió**

Exemple:

- Successió dels nombres parells: 2, 4, 6, 8, 10,…
- Successió dels nombres primers: 2, 3, 5, 7, 11,..
- Successió dels nombres naturals acabats en 9: 9, 19, 29, 39, ...
- Successió dels quadrats dels nombres naturals: 1, 4, 9, 16,…

1. **Donant el seu terme general o terme *n*-èsim**:

És una expressió algebraica en funció de *n.*

Exemple:

- $a_n = n^2 + 3$

Sabent açò, podem construir els termes de la successió sense més que substituir *n* per els nombres naturals. Així, tindríem:

$$a_1 = 1^2 + 3 = 4$$

$$a_2 = 2^2 + 3 = 7$$

$$a_3 = 3^2 + 3 = 12$$

$$a_4 = 4^2 + 3 = 19$$

.....

- $d_n = (-1)^n \frac{1}{n}$

$$d_1 = (-1)^1 \frac{1}{1} = -1$$

$$d_2 = (-1)^2 \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$d_3 = (-1)^3 \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$d_4 = (-1)^4 \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

2. <u>Per una llei de recurrència</u>:

És una expressió que permet obtindre un terme a partir dels anteriors

Exemple:

- La successió:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,...

coneguda com a successió de Fibonacci s'obté amb la següent llei de recurrència:

$$a_1 = a_2 = 1,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

És a dir, cada terme, excepte els dos primers, s'obté com a suma dels dos anteriors.

Activitats resoltes

- *Siga la successió de terme general:* $a_n = 2n + 3$.

  Els seus cinc primers termes són: $a_1 = 5$, $a_2 = 7$, $a_3 = 9$, $a_4 = 11$, $a_5 = 13$

- *Donada la successió en forma recurrent:* $a_1=1$, $a_n = a_{n-1} + 3$

  Els seus quatre primers termes són:

$a_1 = 1$ (ja ve donat),

$a_2 = 1 + 3 = 4$,

$a_3 = 4 + 3 = 7$,

$a_4 = 7 + 3 = 10$

Activitats proposades

3. Escriu els quatre primers termes de les successions següents:

a) $a_n = 2n^2+1$

a) $b_n = \frac{4n-1}{3n}$

b) $c_1 = 1$, $c_n = 3c_{n-1} + 5$

c) $d_1=2$, $d_2=5$, $d_n = 2d_{n-1} + d_{n-2}$

4. Escriu l'expressió del terme general de les successions següents:

a) {–1, 1, –1, 1, –1, 1, –1, 1,…}

a) {0, 3, 8, 15, 24, 35,…}

b) {2, 4, 6, 8, 10,…}

c) $\{\frac{1}{4}, \frac{3}{5}, \frac{5}{6}, \frac{7}{7}, \frac{9}{8}, \ldots\}$

5. En una successió el primer terme és 2 i els altres s'obtenen sumant 4 al terme anterior. Trobar els 6 primers termes de la successió.

6. Un satèl·lit artificial es va posar en òrbita a les 17 hores i 30 minuts. Tarda a fer una volta completa a la seua òrbita 87 minuts. A) Completa al teu quadern la taula adjunta. B) Escriu una expressió general que et permeta conéixer l'hora en què ha completat la volta *n*-èsima. C) Busca una expressió que et permeta conéixer l'hora en funció de l'hora de l'òrbita anterior. D)Busca una expressió que et permeta conéixer l'hora en funció de la primera. E) Quantes voltes completes haurà donat 20 dies més tard a les 14 hores?

Nr d'òrbites	1	2	3	4	5	6
Hora en què l'ha completat						

2. PROGRESSIONS ARITMÈTIQUES

Exemple:

- *Alicia té en set dies un examen de Matemàtiques. Decideix preparar-lo fent cada dia tres exercicis més que el dia anterior. Comença hui fent dos exercicis. Si escrivim els exercicis que va fent Alicia a mesura que passen els dies, són:* 2, 5, 8, 11, 14,…

Observem que els termes de la successió van augmentant en una quantitat constant: 3. Aquest tipus de successions s'anomenen *progressions aritmètiques*.

Una **progressió aritmètica** és una successió de nombres reals en què la diferència entre dos termes consecutius de la successió és constant. A aquesta constant se l'anomena **diferència de la progressió i** se sol denotar amb la lletra *d*.

D'una altra forma, en una progressió aritmètica es verifica:

$$\boldsymbol{a_{i+1} - a_i = d}$$

sent *i* qualsevol nombre natural

És a dir, cada terme s'obté sumant a l'anterior la diferència, *d*:

$$\boldsymbol{a_{i+1} = a_i + d}$$

Exemple:

- La successió formada per els nombres naturals: {1, 2, 3, 4, 5,…} és una progressió aritmètica, ja que cada terme s'obté sumant 1 al terme anterior.

Activitats resoltes

- Si $a_1 = 3$ i $d = 2$, veurem com s'escriuen els cinc primers termes de la progressió aritmètica:

  $a_1 = 3$,

  $a_2 = a_1 + d = 3 + 2 = 5$

  $a_3 = a_2 + d = 5 + 2 = 7$

  $a_4 = a_3 + d = 7 + 2 = 9$

  $a_5 = a_4 + d = 9 + 2 = 11$

Activitats proposades

7. Assenyala raonadament si la següent successió és una progressió aritmètica:

{1, 10, 100, 1000, 100000, ….}.

8. Calcula els tres primers termes d'una progressió aritmètica sabent que el primer és 1 i la diferència és –2.

2.1. Terme general d'una progressió aritmètica

Una progressió aritmètica, igual que ocorre amb totes les successions, queda perfectament definida si coneixem el seu terme general. Anem a calcular-lo utilitzant la definició que hem vist de progressió aritmètica i suposant coneguts el primer terme a_1 i la diferència de la successió, d.

a_1 donat

$a_2 = a_1 + d$

$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d$

$a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d$

$a_5 = a_4 + d = a_1 + 3d + d = a_1 + 4d$

…….

De forma general:

$a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-2)\cdot d + d = a_1 + (n-1)\, d$

Per tant, el **terme general d'una progressió aritmètica** és:

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1)\, d}$$

Generalitzant aquest resultat, podem calcular el terme general d'una progressió aritmètica coneixent d i un altre terme de la progressió, no necessàriament el primer:

Més general, el **terme general d'una progressió aritmètica** és:

$$\boldsymbol{a_n = a_k + (n-k)\, d}$$

Sent a_k el terme de la progressió que ocupa el lloc k.

NOTES

1. **Depenent del valor de *d*, ens podem trobar amb distints tipus de progressions aritmètiques:**
   a) Si $d > 0$,la progressió és creixent, és a dir, cada terme és major que els anteriors. Per exemple: {2, 4, 6, 8, …}
   a) Si $d < 0$,la progressió és decreixent, és a dir, cada terme és menor que els anteriors. Per exemple: {12, 9, 6, 3, …}
   b) Si $d = 0$, la progressió és constant, és a dir, tots els seus termes són iguals. Per exemple: {4, 4, 4, 4, …}

1. **Depenent de les dades que tinguem, calcularem el terme general d'una progressió aritmètica d'una forma o una altra:**
   a) Si coneixem a_1 i d, hem vist que: $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$

a) Si coneixem un terme qualsevol a_i i d, sabem que: $a_n = a_k + (n - k)\ d$

b) Si coneixem dos termes qualssevol a_r i a_s, ens faltaria la diferència d per a poder aplicar la fórmula anterior. Però, com sabem que:

$$a_n = a_r + (n - r)\cdot d \quad \text{i que} \quad a_n = a_s + (n - s)\cdot d$$

podem aïllar d en funció de r, s, a_r i a_s i ens queda: $d = \dfrac{a_r - a_s}{r - s}$

Activitats resoltes

- *Trobar el terme general d'una progressió aritmètica el primer terme del qual és* 7 *i la seua diferència també és* 7.

  N'hi ha prou amb substituir en la fórmula donada: $a_n = a_1 + (n - 1)\cdot d = 7 + (n - 1)7 = 7 + 7n - 7 = 7n$.

- *Calcula el terme que ocupa el lloc* 15 *en una progressió aritmètica el primer terme de la qual és* 2 *i la diferència és* 3.

  En aquest cas, $a_{15} = a_1 + (15 - 1)\cdot d = 2 + 14\cdot 3 = 2 + 42 = 44$.

- *Calcula el primer terme d'una progressió aritmètica amb* $a_5 = 6$ y $d = -2$.

  $a_5 = a_1 + (5 - 1)\cdot d$. Aïllem $a_1 = a_5 - 4d = 6 - 4\cdot(-2) = 14$.

Activitats proposades

9. Donada una progressió aritmètica dos dels termes de la qual són: $a_3 = 4$ i $a_{10} = 18$:

a) Calcula la seua diferència.

a) Calcula el seu terme general.

10. Calcula el primer terme d'una progressió aritmètica amb diferència 2 i $a_{30} = 60$.

11. Quin és el terme general d'una progressió aritmètica amb $a_{22} = 45$ i $d = 3$?

12. Els costats d'un pentàgon estan en progressió aritmètica de diferència 5. Sabent a més que el seu perímetre és 65, calcula el valor dels costats.

13. Calcula els 5 primers termes d'una progressió aritmètica de primer terme 2 i de diferència 3. Representa'ls gràficament. Observa que la seua representació gràfica és un conjunt de punts aïllats que estan sobre una recta.

14. Calcula l'expressió general de les progressions aritmètiques:

a) De diferència $d = 2{,}5$ i de primer terme 2.
a) De diferència $d = -2$ i de primer terme 0.
b) De diferència d'1/3 i de segon terme 5.
c) De diferència $d = 4$ i de cinqué terme 1.

15. Quants múltiples de 7 estan compresos entre el 4 i el 893?

2.2. Suma dels termes d'una progressió aritmètica

A una progressió aritmètica, la suma de dos termes equidistants és constant.

És a dir, si els subíndexs naturals p, q, r i s verifiquen que $p + q = r + s$, doncs: $a_p + a_q = a_r + a_s$

La ***demostració*** d'aquesta propietat és molt senzilla:

$$a_p + a_q = a_1 + d\cdot(p - 1) + a_1 + d\cdot(q - 1) = 2a_1 + d\cdot(p + q - 2)$$

$$a_r + a_s = a_1 + d\cdot(r - 1) + a_1 + d\cdot(s - 1) = 2a_1 + d\cdot(r + s - 2)$$

I com: $p + q = r + s$, aleshores: $a_p + a_q = a_r + a_s$

Volem calcular la suma dels n termes d'una progressió aritmètica, S_n. És a dir:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

Aplicant la propietat commutativa de la suma, tenim que:

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots\ldots + a_3 + a_2 + a_1$$

Sumant aquestes dues igualtats terme a terme obtenim:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots\ldots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Com s'observa, els subíndexs corresponents a cada parell de termes entre parèntesis sumen n+1, per la qual cosa la suma dels seus termes serà sempre la mateixa, doncs:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots\ldots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1) = n\cdot(a_1 + a_n)$$

Aïllant S_n :

$$S_n = \frac{n\cdot(a_1 + a_n)}{2}$$

La **suma** dels n primers termes d'una **progressió aritmètica** ve donada per:

$$S_n = \frac{n\cdot(a_1+a_n)}{2}.$$

Activitats resoltes

- *Suma els* 30 primers *termes de la progressió aritmètica:* $a_n = \{17, 13, 9, 5, 1, \ldots\}$.

  Observem que $d = -4$. Per a aplicar la fórmula de la suma hem de calcular primer el terme que ocupa el lloc 30, a_{30}:

  $a_{30} = a_1 + (n - 1)d = 17 + (30 - 1)\cdot(-4) = 17 + 29\cdot(-4) = -99$

  Doncs: $S_{30} = 30\cdot\frac{17+(-99)}{2} = -1230$

- *Troba la suma dels nombres imparells menors que* 1000.

  Hem de tindre en compte que els nombres imparells formen una progressió aritmètica de diferència 2 i a més: $a_1 = 1$, $n = 500$, $a_{500} = 999$

  Donc: $S_{500} = 500 \cdot \frac{1+999}{2} = 250000$.

Activitats proposades

16. Suma els 10 primers termes de la progressió aritmètica: {–5, 4, 13, 22, 31, 40, …}

17. Troba la suma dels 50 primers múltiples de 3.

18. En una successió aritmètica d'un nombre imparell de termes el central val 12, quant valdrà la suma del primer més l'últim?

19. L'amo d'un pou contracta a un saurí per a conéixer la profunditat a què es troba l'aigua i aquest dictamina que a 5 m hi ha aigua en abundància. Demana un pressupost a un contractista, que li diu que el primer metre li costarà 50 euros i per cada mig metre més 6 euros més que pel mig anterior. Quant li costarà el pou si es compleixen les prediccions?

20. Antoni s'ha comprat un mòbil, però no pot pagar-lo al comptat. Paga 60 euros cada setmana, però el venedor li puja 5 euros cada setmana en concepte de pagament ajornat. Aconsegueix pagar-lo en 10 setmanes. Quant li va costar? Quant va pagar de més? Quin percentatge suposa aquest recàrrec sobre el preu de venda?

21. Un nadador s'entrena en una piscina de 50 m i vol controlar les pèrdues de velocitat per cansament. Cronometra en cinc dies consecutius els temps que tarda a fer 2, 5, 8, 11, 14 llargs. A) Troba el terme general de la successió a_n que dóna els metres recorreguts en el dia n. B) Quants metres haurà nadat en els dits cronometratges?

3. PROGRESSIONS GEOMÈTRIQUES

Exemple:

- *Un pare planeja ficar en una vidriola* 1 € *el dia que el seu fill xiquet de bolquers complisca un any i duplicar la quantitat en cada un dels seus aniversaris.*

  És a dir, la successió els termes de la qual són els diners que fica en la vidriola cada any és: {1, 2, 4, 8, 16,…}.

Observem que els termes de la successió van augmentant de manera que cada terme és l'anterior multiplicat per 2. Aquest tipus de successions s'anomenen progressions geomètriques.

Una **progressió geomètrica** és una successió de nombres reals en què el quocient entre cada terme i l'anterior és constant. A aquesta constant es denomina **raó de la progressió** i se sol denotar amb la lletra *r*. És a dir, $\frac{a_{i+1}}{a_i} = r$sent *i* un nombre natural i sempre que a_i siga diferent de zero.

O el que és el mateix, cada terme s'obté multiplicant l'anterior per la raó *r*:

$$a_{i+1} = a_i \cdot r$$

Exemple:

- La successió: {1, 3, 9, 27, 81,…} és una progressió geomètrica, ja que prenent dos termes qualssevol consecutius, sempre s'obté el mateix quocient, que és 3, raó de la progressió.

  3 : 1 = 9 : 3 = 27 : 9 = 81 : 27 = 3

3.1. Terme general d'una progressió geomètrica

Una progressió geomètrica, per ser una successió, queda totalment definida si coneixem el seu terme general. Anem a obtindre-lo sense més que aplicar la definició de progressió geomètrica:

$a_2 = a_1 \cdot r$

$a_3 = a_2 \cdot r = a_1 \cdot r \cdot r = a_1 \cdot r^2$

$a_4 = a_3 \cdot r = a_1 \cdot r^2 \cdot r = a_1 \cdot r^3$

$a_5 = a_4 \cdot r = a_1 \cdot r^3 \cdot r = a_1 \cdot r^4$

………

$a_n = a_{n-1} \cdot r = a_1 \cdot r^{n-2} \cdot r = a_1 \cdot r^{n-1}$

Per tant, el **terme general d'una progressió geomètrica** és:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

Generalitzant aquest resultat, podem calcular el terme general d'una progressió geomètrica coneixent *r* i un altre terme de la progressió, no necessàriament el primer:

Més general, el **terme general d'una progressió geomètrica** és:

$$a_n = a_k \cdot r^{n-k}$$

sent a_k el terme de la progressió que ocupa el lloc *k*.

Exemple:

- La successió $a_n = 3 \cdot 5^{n-1}$ és una progressió geomètrica.

NOTES

1. **Depenent del valor de *r*, ens podem trobar amb distints tipus de progressions geomètriques:**

   a) Si $r > 1$, la progressió és creixent, és a dir, cada terme és major que els anteriors. Per exemple: {2, 4, 8, 16, …}

   a) Si $0 < r < 1$, la progressió és decreixent, és a dir, cada terme és menor que els anteriors. Per exemple: {90, 30, 10, 10/3, 10/9, …}

   b) Si $r < 0$, la progressió és alternada, és a dir, els seus termes van canviant de signe segons el valor de n. Per exemple: {–2, 4, –8, 16, …}

   c) Si $r = 0$, la progressió és la progressió formada per zeros a partir del segon terme. Per exemple: {7, 0, 0, 0, }

   d) Si $r = 1$, la progressió és la progressió constant formada pel primer terme: {2, 2, 2, 2 ,…}

1. **Depenent de les dades que tinguem, calcularem el terme general d'una progressió geomètrica d'una forma o una altra:**

   a) Si coneixem a_1 i r, hem vist que: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$.

   a) Si coneixem un terme qualsevol a_k i r, sabem que: $a_n = a_k \cdot r^{n-k}$

   b) Si coneixem dos termes qualssevol a_p i a_q, amb a_p no nul, ens falta conéixer la raó r per a poder aplicar la fórmula anterior. Però, com sabem que:

   $$a_n = a_p \cdot r^{n-p} \quad \text{i que} \quad a_n = a_q \cdot r^{n-q}$$

   podem aïllar r en funció de p, q, a_p i a_q i ens queda: $r = \sqrt[q-p]{\dfrac{a_q}{a_p}}$

Activitats resoltes

- *Trobar el terme general d'una progressió geomètrica el primer terme del qual és* 7 i *la seua raó també és* 7.

  N'hi ha prou amb substituir en la fórmula donada: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 7 \cdot 7^{n-1} = 7^n$.

- *Calcula el terme que ocupa el lloc* 5 *en una progressió geomètrica el primer terme de la qual és* 2 i *raó* 3.

  En aquest cas, $a_5 = a_1 \cdot r^{n-1} = 2 \cdot 3^{5-1} = 2 \cdot 3^4 = 162$.

- *Calcula el primer terme d'una progressió geomètrica amb* $a_3 = 6$ i $r = -2$.

  Aïllem a_1 de $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ i tenim: $a_1 = \frac{a_n}{r^{n-1}}$.

  Per a $n = 3$, tenim: $a_1 = \frac{a_3}{r^2} = \frac{6}{(-2)^2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.

Activitats proposades

22. Esbrina la raó d'una progressió geomètrica el primer terme de la qual és 27 i el quart és 8.

23. El quart terme d'una progressió geomètrica és 1/9 i la raó 1/3. Troba el primer terme.

24. Troba el sisé terme de la següent progressió geomètrica: $\{\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, \ldots\}$

25. Donada una progressió geomètrica dos dels termes de la qual són: $a_3 = -8$ i $a_6 = -2048$

a) Calcula la seua raó.

a) Calcula el seu terme general.

26. Una certa classe d'alga, anomenada *clorella*, es reprodueix duplicant la seua quantitat cada dos hores i mitja. Al cap d'altres dos hores i mitja torna a duplicar la seua quantitat, i així successivament. Si es té en el moment inicial un quilo, al cap de dos hores i mitja hi ha dos quilos. A) Fes una taula de valors en què indiques per a cada període de reproducció el nombre de quilos de *clorella*. B) Indica el terme general. C) Al cap de 4 dies, han transcorregut 40 períodes, consideres possible aquest creixement?

2.2. Producte dels termes d'una progressió geomètrica

En una progressió geomètrica, el producte de dos termes equidistants és constant.

És a dir, si els subíndexs naturals p, q, t i s verifiquen que $p + q = t + s$, doncs: $a_p \cdot a_q = a_t \cdot a_s$

La demostració d'aquesta propietat és molt senzilla:

$$a_p \cdot a_q = a_1 \cdot r^{p-1} \cdot a_1 \cdot r^{q-1} = a_1^2 \cdot r^{p-1} \cdot r^{q-1} = a_1^2 \cdot r^{p+q-2}$$

$$a_t \cdot a_s = a_1 \cdot r^{t-1} \cdot a_1 \cdot r^{s-1} = a_1^2 \cdot r^{t-1} \cdot r^{s-1} = a_1^2 \cdot r^{t+s-2}$$

I com: $p + q = t + s$, aleshores: $a_p \cdot a_q = a_t \cdot a_s$

Volem calcular el producte dels n termes d'una progressió geomètrica, P_n. És a dir:

$$P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots\ldots \cdot a_{n-2} \cdot a_{n-1} \cdot a_n$$

Aplicant la propietat commutativa del producte, tenim que:

$$P_n = a_n \cdot a_{n-1} \cdot a_{n-2} \cdot \ldots\ldots \cdot a_3 \cdot a_2 \cdot a_1$$

Multiplicant aquestes dues igualtats:

$$P_n^2 = (a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots\ldots \cdot a_{n-2} \cdot a_{n-1} \cdot a_n) \cdot (a_n \cdot a_{n-1} \cdot a_{n-2} \cdot \ldots\ldots \cdot a_3 \cdot a_2 \cdot a_1)$$

$$P_n^2 = (a_1 \cdot a_n) \cdot (a_2 \cdot a_{n-1}) \cdot (a_3 \cdot a_{n-2}) \cdot \ldots\ldots \cdot (a_{n-2} \cdot a_3) \cdot (a_{n-1} \cdot a_2) \cdot (a_n \cdot a_1)$$

Com s'observa, els subíndexs corresponents a cada parell de termes entre parèntesis sumen $n+1$, per la qual cosa el producte serà sempre el mateix en cada factor, aleshores:

$$P_n^2 = (a_1 \cdot a_n)^n$$

Aïllant P_n:

$$P_n = \pm\sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n} = \pm a_1 \cdot r^{\frac{n-1}{2}}$$

El signe serà positiu o negatiu depenent de la progressió.

El **producte** dels n primers termes d'una **progressió geomètrica** ve donat per:

$$\boldsymbol{P_n} = \pm\sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n} = \pm a_1 \cdot r^{\frac{n-1}{2}}$$

Activitats resoltes

- *Troba el producte dels set primers termes d'una progressió geomètrica el primer terme del qual és* $a_1 = -1/8$ i raó $r = 2$

  Observem que tots els termes de la successió són tots negatius, per la qual cosa el producte d'un nombre parell de termes és positiu i que el producte d'un nombre imparell és negatiu. Calculem a_7 per a poder utilitzar la fórmula deduïda anteriorment:

  $a_7 = a_1 r^{n-1} = -\frac{1}{8} \cdot 2^{7-1} = (-1/8) \cdot 2^6 = -8$

  Aleshores: $P_7 = \pm\sqrt{[(-1/8)(-8)]^7} = -1$

Activitats proposades

27. El primer terme d'una progressió geomètrica és 3 i el huité 384. Troba la raó i el producte dels 8 primers termes.

28. Calcula el producte dels 5 primers termes de la progressió: 3, 6, 12, 24, …

3.3. Suma dels termes d'una progressió geomètrica

A) Suma d'un nombre limitat de termes consecutius d'una progressió geomètrica

Exemple:

- Joan ha comprat 20 llibres, pel 1r ha pagat 1 €, pel 2º, 2 €, pel 3º, 4 €, pel 4º, 8 € i així successivament. Com podem saber el que ha pagat en total sense necessitat de fer la suma?

Es tracta d'una progressió geomètrica amb $a_1 = 1$ i $r = 2$. Es tractaria de calcular: $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{20}$. Anem a veure-ho en general, per a una progressió geomètrica qualsevol:

Volem calcular: $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$
Per a això, multipliquem aquesta igualtat per r:

$r \cdot S_n = r \cdot a_1 + r \cdot a_2 + r \cdot a_3 + \ldots + r \cdot a_{n-1} + r \cdot a_n$

Però com: $a_2 = r \cdot a_1$
$a_3 = r \cdot a_2$
$a_4 = r \cdot a_3$
....
$a_n = r \cdot a_{n-1}$

La igualtat anterior queda:

$r \cdot S_n = a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n + r \cdot a_n$

Restant:

$r \cdot S_n \;=\; a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n + r \cdot a_n$
$-\;\; S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$

$r \cdot S_n - S_n = -a_1 + r \cdot a_n$
$(r-1) \cdot S_n = r \cdot a_n - a_1 \rightarrow S_n = \frac{r \cdot a_n - a_1}{r-1}$ sempre que $r \neq 1$, i com $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$
Aleshores:
$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r-1}$ sempre que $r \neq 1$.

La **suma** dels n primers termes d'una progressió **geomètrica** ve donada per:

$$S_n = \frac{r \cdot a_n - a_1}{r-1} = \frac{a_1(r^n - 1)}{r-1} \text{ sempre que } r \neq 1.$$

Es considera $r \neq 1$ ja que si $r = 1$ la progressió és la progressió constant formada pel primer terme: $\{a_1, a_1, a_1, a_1, \ldots\}$ i $S_n = n \cdot a_1$

Analitzem la suma segons els distints valors de r:

a) Si $|r| > 1$, els termes en valor absolut creixen indefinidament i el valor de S_n ve donat per la fórmula anterior.

a) Si $|r| < 1$, la suma dels seus termes quan n és gran s'aproxima a $S_n \approx \frac{a_1}{1-r}$, ja que si en

$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r-1}$, elevem la raó $|r| < 1$ a una potència, quant major siga l'exponent n, menor serà el valor de r^n i si n és prou gran, r^n s'aproxima a 0. Per això,

$$S_n \approx \frac{a_1 \cdot (-1)}{r-1} = \frac{a_1}{1-r}$$

b) Si $r = -1$, els termes consecutius són oposats:$\{a_1, -a_1, a_1, -a_1, \ldots\}$ i S_n és igual a zero si n és parell, i igual a a_1 si n és imparell. La suma de la sèrie oscil·la entre aqueixos dos valors.

Activitats resoltes

- *Trobar la suma dels* 11 primers *termes d'una progressió geomètrica sabent que el primer terme és* –2 *i la raó* –3.

  $S_n = \frac{r \cdot a_n - a_1}{r-1} = \frac{(-2)[(-3)^{11}-1]}{-3-1} = -88574.$

- *Trobar la suma dels* 7 primers *termes d'una progressió geomètrica sabent que el seté terme és* 20480*, el primer és* 5 *i la raó és* 4.

  Ara utilitzem la fórmula: $S_n = \frac{r \cdot a_n - a_1}{r-1}$

  Substituint:

  $S_7 = \frac{r a_7 - a_1}{r-1} = \frac{20480 \cdot 4 - 5}{4-1} = 27305.$

Activitats proposades

29. Un agricultor en la seua granja té 59049 litres d'aigua per a donar de beure als animals. Un dia va utilitzar la meitat del contingut, al següent la meitat del que li quedava i així successivament cada dia. Quants litres d'aigua va utilitzar fins al sisé dia?

30. Suma els quinze primers termes d'una progressió geomètrica en què $a_1 = 5$ i $r = ½$

A) Suma d'un nombre il·limitat de termes consecutius d'una progressió geomètrica

Què ocorrerà si repetim el procés anterior indefinidament? És a dir, què ocorrerà si sumem un nombre il·limitat de termes?

Depenent del valor de *r* serà possible o no obtindre la suma d'un nombre il·limitat de termes:

a) Si $r = 1$,la progressió és la progressió constant formada pel primer terme: {a_1, a_1, a_1, a_1,…} i si a_1 és positiu la suma dels termes serà cada vegada major (si fóra a_1 negatiu seria la suma cada vegada major en valor absolut, però negativa). Per tant, si el nombre de termes és il·limitat, aquesta suma serà infinita.

a) Si $|r| > 1$, els termes creixen indefinidament i el valor de S_n per a un nombre il·limitat de termes, també serà infinit.

b) Si $|r| < 1$, la suma dels seus termes s'aproxima quan *n* és gran a $S_n \approx \frac{a_1}{1-r}$.

   Observem que la suma no depén del nombre de termes, ja que en fer-se cada vegada més xicotets, arriba un moment en què no es consideren.

c) Si $r = -1$, els termes consecutius són oposats: {a_1, $-a_1$, a_1, $-a_1$,…} i S_n és igual a zero si *n* és parell, i igual a a_1 si *n* és imparell. La suma de la sèrie oscil·la entre aqueixos dos valors per a un nombre finit de termes. Per a un nombre de termes il·limitat no sabem si és parell o imparell, amb la qual cosa la suma no es pot realitzar llevat que $a_1 = 0$, cas en que $S = 0 = \frac{a_1}{1-r}$. En la resta dels casos diem que la suma d'infinits termes no existeix perquè el seu valor és oscil·lant.

d) Si $r < -1$, els termes oscil·len entre valors positius i negatius, creixent en valor absolut. La suma dels seus infinits termes no existeix perquè el seu valor també és oscil·lant.

En resum,

La **suma** d'un nombre **il·limitat** de termes d'una progressió **geomètrica** només pren un valor finit si $|r| < 1$, i aleshoress ve donada per: $S = \frac{a_1}{1-r}$. En la resta dels casos, o val infinit, o no hi ha perquè oscil·la.

Activitats resoltes

- *Calcula la suma de tots els termes de la progressió geomètrica el primer terme dels quals és* 4 i *la raó* 1/2.

  $S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{4}{1-\frac{1}{2}} = 8$

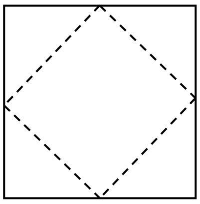
- *En una progressió geomètrica la raó és* 1/4 i *la suma de tots els seus termes és* 8. Quant *val el primer terme?*

  Aïllem a_1 de: $S = \frac{a_1}{1-r}$ i: $a_1 = S\,(1 - r) = 8 \cdot (1 - 1/4) = 6$

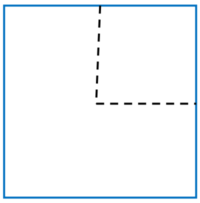
Activitats proposades

31. Calcula la suma dels infinits termes de la successió: 6, 3, 3/2, 3/4,…

32. Tenim a la mà un quadrat d'àrea 1. Tallem els quatre cantons pels punts mitjans dels costats. El nou quadrat, quina àrea té? Deixem els retalls damunt de la taula. Quina àrea de retalls hi ha sobre la taula? Amb el nou quadrat que tenim a la mà efectuem la mateixa operació de tallar els quatre cantons i deixar-les sobre la taula, i així successivament. Quina àrea tenen els successius quadrats que tinc a la mà? I els retalls que queden sobre la taula? Troba la suma de les infinites àrees de retalls així obtinguts.



33. De nou tenim un quadrat d'àrea 1 a la mà, i el tallem per les línies de punts com indica la figura. El tros major el deixem sobre la taula i ens quedem a la mà amb el quadrat, al què tornem a tallar de la mateixa manera. I així successivament. Quina àrea tenen els successius quadrats que tinc a la mà? Creixen o disminueixen? Escriu el terme general de la successió d'àrees que tenim a la mà. I els retalls que queden sobre la taula? Creix l'àrea o disminueix? Anem sumant àrees, calcula la suma d'aquestes àrees si haguérem fet infinits talls.



3.4. Aplicacions de les progressions geomètriques

Fracció generatriu

El curs passat vas estudiar com passar d'un decimal periòdic pur o periòdic mixt a una fracció. Ara utilitzarem les progressions geomètriques perquè comprengues millor el procés.

Exemple:

- *Si tenim un **nombre decimal periòdic pur**, el podem escriure com:*

$$2{,}37 = 2 + 0{,}37 + 0{,}0037 + 0{,}000037\ldots$$

O el que és el mateix:

$$2 + \frac{37}{100} + \frac{37}{100\cdot 100} + \frac{37}{100\cdot 100\cdot 100} + \ldots$$

on els sumands a partir del segon formen una progressió geomètrica de raó $r = \frac{1}{100} < 1$, la suma infinita del qual val: $S = \frac{a_1}{1-r}$. Per tant:

$$2 + \frac{\frac{37}{100}}{1-\frac{1}{100}} = 2 + \frac{\frac{37}{100}}{\frac{99}{100}} = 2 + \frac{37}{99} = \frac{198}{99} + \frac{37}{99} = \frac{235}{99}$$

- *Si tenim un **nombre decimal periòdic mixt**, s'utilitza un procés semblant:*

$$1{,}328 = 1{,}32 + 0{,}008 + 0{,}0008 + \ldots$$

O el que és el mateix:

$$1{,}32 + \frac{8}{1000} + \frac{8}{1000\cdot 10} + \frac{8}{1000\cdot 10\cdot 10} + \ldots$$

En aquest cas, els sumands a partir del segon formen una progressió geomètrica de raó $r = \frac{1}{10} < 1$. Per tant:

$$1{,}32 + \frac{\frac{8}{1000}}{1-\frac{1}{10}} = 1 + 0{,}32 + \frac{8}{900} = 1 + \frac{32}{100} + \frac{8}{900} = 1 + \frac{296}{900}$$

Nota

Amb aquest procés estem il·lustrant el concepte de fracció generatriu com a aplicació de les progressions geomètriques, però a efectes pràctics, és més còmode efectuar-lo segons el procés vist.

Capitalització composta

L'interés compost l'estudiaràs detingudament en el capítol 6,però pero ara és interessant que sàpies que llavors usaràs les progressions geomètriques per a calcular-lo, i que tens un full de càlcul per a fer les operacions.

Si depositem en una entitat financera una quantitat de diners C_0 durant un temps t'i un rèdit r donat en tant per u, obtindrem un benefici: $I = C_0\cdot r\cdot t$ anomenat **interés.**

La principal característica de la capitalització composta és que els interessos que es generen en un any, passen a formar part del capital inicial i produeixen interessos als períodes següents.

Aleshores:

- Al final del *primer any*, el capital serà el capital inicial C_0 junt amb els interessos produïts durant aqueix any. És a dir:

$$C_1 = C_0 + I = C_0 + C_0 \cdot r \cdot 1 = C_0 \cdot (1 + r)$$

- Al final del segon *any*, el capital que tindrem serà el capital que teníem en finalitzar el primer any més els interessos produïts aqueix segon any. És a dir:

  $C_2 = C_1 + C_1 \cdot r \cdot 1 = C_1 \cdot (1 + r) = C_0 \cdot (1 + r) \cdot (1 + r) = C_0 \cdot (1 + r)^2$

Observant els capitals obtinguts: C_1, C_2, …, C_n concloem que es tracta d'una progressió geomètrica de raó $(1 + r)$. Per tant:

- L'*any n-èsim*, tindrem:

El capital final obtingut després de n anys donat un capital inicial C_0 *i* un rèdit r donat en tant per u, és:

$$\boldsymbol{C_n = C_0 \cdot (1 + r)^n}$$

Activitats resoltes

- *Vegem la fracció generatriu de* $23,\overline{45}$ com a *aplicació de les progressions geomètriques.*

$$23,\overline{45} = 23 + 0,45 + 0,0045 + 0,000045 + \ldots$$

O el que és el mateix:

$$23 + \frac{45}{100} + \frac{45}{100 \cdot 100} + \frac{45}{100 \cdot 100 \cdot 100} + \ldots$$

on els sumands a partir del segon formen una progressió geomètrica de raó $r = \frac{1}{100} < 1$, la suma infinita del qual val: $S = \frac{a_1}{1-r}$. Per tant:

$$23 + \frac{\frac{45}{100}}{1-\frac{1}{100}} = 23 + \frac{\frac{45}{100}}{\frac{99}{100}} = 23 + \frac{45}{99} = \frac{2277}{99} + \frac{45}{99} = \frac{2322}{99} = \frac{258}{11}.$$

- *Depositem en un banc* 1500 € *al* 3,5 % *de capitalització composta durant tres anys. Quants diners tindríem en finalitzar el tercer any?*

  Utilitzem l'expressió: $C_t = C_0 \cdot (1 + r)^t$ on $C_0 = 1500$ €, $r = 0,035$ perquè és el tant per u i $t = 3$ anys. Per tant: $C_t = C_0 \cdot (1 + r)^t = 1500(1 + 0,035)^3 = 1663,08$ €

Activitats proposades

34. Calcula la fracció generatriu del nombre 4,561

35. Un empresari acudeix a una entitat financera per a informar-se sobre com invertir els 6000 € de beneficis que ha tingut en un mes. Li plantegen dues opcions.

a) Mantindre aqueix capital durant 5 anys al 3,5 % anual o

a) Rebre el 5 % del capital durant els dos primers anys i el 3 % els tres anys restants. Quina opció li interessa més?

CURIOSITATS. REVISTA

A) L'inventor de l'escacs

Ja vam vore al capítol sobre potències la legenda sobre els escacs. Ara pots utilitzar els teus coneixements sobre progressions per fer els càlculs:

Compte la llegenda com l'inventor dels escacs va presentar el seu invent a un príncep de l'Índia. El príncep va quedar tan impressionat que va voler premiar-li generosament, per a la qual cosa li va dir: "Demana'm el que vullgues, que t'el donaré".

L'inventor dels escacs va formular la seua petició de la manera següent :

"Desig que m'entregues un gra de blat per la primera casella del tauler, dos per la segona, quatre per la tercera, huit per la quarta, setze per la cinquena, i així successivament fins la casella 64".

La sorpresa va ser quan el secretari del príncep va calcular la quantitat de blat que representava la petició de l'inventor, perquè tota la Terra sembrada de blat era insuficient per a obtindre el blat que demanava l'inventor.

Quin tipus de progressió s'utilitza? Aritmètica o geomètrica? Quina és la raó?

Quants trilions de grans de blat demanava aproximadament?

Podries trobar el total de grans de blat utilitzant fórmules i usant la calculadora?

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{62} + 2^{63}$$

Potències de 2 al tenis

L potències de 2 també apareixen als tornejos de tenis. En molts ejos s'enfronten els jugadors de la manera següent: En la final en dos jugadors; en la semifinal hi ha quatre; en els quarts de final hi uit jugadors. Així, en cada ronda addicional la quantitat de jugadors uplica, tal com ocorria amb els grans de blat en el tauler d'escacs. Si el torneig tinguera 25 rondes, t'imagines quants hi hauria? Perquè, podrien participar quasi tots els habitants d'Espanya!! i amb 33 rondes, podrien participar tots els habitants del planeta!!

Successió de *Fibonacci*

Per als que penseu que és impossible veure Matemàtiques fora de l'aula i molt menys en la naturalesa, vos presentem un dels més bells conceptes matemàtics estretament relacionat amb la naturalesa i l'art.

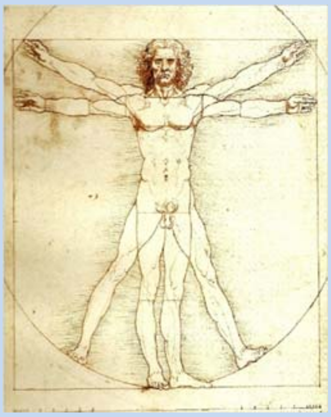
Es tracta d'una successió molt simple, en la que cada terme és la suma dels dos anteriors.

La successió comença pel nombre 1,

I segueix amb 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584…, ja que 1 = 0 + 1; 2 = 1 + 1; 3 = 1 + 2; 5 = 2 + 3; 8 = 3 + 5; 13 = 5 + 8; 21 = 8 + 13… etc.

Una de les propietats més curioses, és que el quocient de dos nombres consecutius de la sèrie s'aproxima a l'anomenada **"secció àuria" o "divina proporció".**

Aquest nombre, descobert pels renaixentistes, és = 1,61803…, i se l'anomena amb la lletra grega ϕ. La successió formada pels quocients de nombres consecutius de la successió de *Fibonacci* s'acosta ràpidament, cap al nombre auri. Els grecs i renaixentistes estaven fascinats amb aquest nombre i el consideraven l'ideal de la bellesa.



De fet, *Leonardo da Vinci* en la seua obra L'home de *Vitrubio utilitza* aquest nombre per a aconseguir les perfectes proporcions de la seua obra.

Com pot ser que el quocient de dos nombres d'una seqüència inventada per l'home es relacione amb la bellesa? Perquè perquè la successió de Fibonacci està estretament relacionada amb la naturalesa. Es creu que Leonardo va trobar aquests nombres quan estudiava el creixement de les poblacions de conills. Suposem que una parella de conills tarda un mes a aconseguir l'edat fèrtil, i a partir d'aqueix moment cada vegada engendra una altra parella de conills, que al seu torn engendraran cada mes una parella de conills.

Quants conills hi haurà al cap d'un determinat nombre de mesos?

Doncs sí, cada mes hi haurà un nombre de conills que coincideix amb cada un dels termes de la successió de *Fibonacci*. Pareix màgia, veritat?

Perquè moltes plantes, com les pinyes o les margarides segueixen una disposició relacionada també amb la successió de *Fibonacci*, la qual cosa il·lustra la famosa frase de Galileu

"La naturalesa està escrita en llenguatge matemàtic".

RESUM

Concepte	*Definició*	*Exemples*
Progressió aritmètica	És una successió de nombres reals en què la diferència entre dos termes consecutius de la successió és constant. A aquesta constant se l'anomena diferència de la progressió i se sol denotar amb la lletra d.	2, 5, 8, 11, 14, 17, …
Terme general	$a_n = a_k + (n - k)$ sent a_k el terme que ocupa el lloc k	$a_n = 2 + 3n$
Suma dels n primers termes	$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$	$S_8 = (8/2) \cdot (2 + (2 + 3 \cdot 8)) =$ $4 \cdot (4 + 24) = 4 \cdot 28 = 112$
Progressió geomètrica	És una successió de nombres reals en què el quocient entre cada terme i l'anterior és constant. A aquesta constant es denomina raó de la progressió i se sol denotar amb la lletra r. És a dir, $\frac{a_{i+1}}{a_i} = r$ sent i un nombre natural.	3, 6, 12, 24, … 1, 1/2, 1/4, 1/8…
Terme general	$a_n = a_k \cdot r^{n-k}$ sent a_k el terme de la successió que ocupa el lloc k	$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ $a_n = 1 \cdot (1/2)^n$
Suma	- Per a $r \neq 1$,i un <u>nombre finit</u> de termes: $S_n = \frac{r \cdot a_n - a_1}{r-1} = \frac{a_1(r^n - 1)}{r-1}$ - Per a $r \neq 1$,i una quantitat <u>il·limitada</u> de termes: $S = \frac{a_1}{1-r}$	$S_8 = 3(2^8 - 1)/(2 - 1) =$ $3(256 - 1) = 3(255) = 765.$ $S = 1/(1 - 1/2) = 2$
Producte dels n primers termes	$P_n = \pm\sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n} = \pm a_1 \cdot r^{\frac{n-1}{2}}$	$P_9 = + \sqrt{(3 \cdot 3 \cdot 2^8)^9} = (3 \cdot 2^4)^9$

EXERCICIS I PROBLEMES

1. Calcula el terme que ocupa el lloc 100 d'una progressió aritmètica el primer terme del qual és igual a 4 i la diferència és 5.
2. El desé terme d'una progressió aritmètica és 45 i la diferència és 4. Troba el primer terme.
3. Sabent que el primer terme d'una progressió aritmètica és 4, la diferència 7 i el terme *n*-èsim 88, troba *n*.
4. Troba el primer terme d'una progressió aritmètica i la diferència, sabent que $a_3 = 24$ i $a_{10} = 66$.
5. El terme sisé d'una progressió aritmètica és 4 i la diferència 1/2. Troba el terme 20.
6. Calcula els costats d'un triangle rectangle sabent que les seues mesures, expressades en metres, estan en progressió aritmètica de diferència 3.
7. Troba tres nombres que estiguen en progressió aritmètica i tals que, augmentats en 5, 4 i 7 unitats respectivament, siguen proporcionals a 5, 6 i 9.
8. Calcula la suma dels múltiples de 59 compresos entre 1000 i 2000.
9. El producte de tres termes consecutius d'una progressió aritmètica és 80 i la diferència és 3. Troba els dits termes.
10. Quants termes cal sumar de la progressió aritmètica 2, 8, 14,... per a obtindre com resultat 1064?
11. La suma de *n* nombres naturals consecutius presos a partir d'11 és 1715. Quants termes hem sumat?
12. Sabent que el cinqué terme d'una progressió aritmètica és 18 i la diferència és 2, troba la suma dels nou primers termes de la successió.
13. La suma de tres nombres en progressió aritmètica és 33 i el seu producte 1287. Troba aquests nombres.
14. Tres nombres en progressió aritmètica tenen per producte 16640; el més xicotet val 20. Troba els altres dos.
15. El producte de cinc nombres en progressió aritmètica és 12320 i la seua suma 40. Troba aquests nombres sabent que són enters.
16. Calcula tres nombres sabent que estan en progressió aritmètica, que la seua suma és 18 i que la suma del primer i del segon és igual al tercer disminuït en dues unitats.
17. La suma dels onze primers termes d'una progressió aritmètica és 176 i la diferència dels extrems és 30. Troba els termes de la progressió.
18. Troba quatre nombres en progressió aritmètica, coneixent la seua suma, que és 22, i la suma dels seus quadrats, 166.
19. La diferència d'una progressió aritmètica és 4. El producte dels quatre primers termes és 585. Troba els termes.
20. Troba els sis primers termes d'una progressió aritmètica sabent que els tres primers sumen –3 i els tres últims 24.
21. En una progressió aritmètica l'onzé terme excedeix en 2 unitats al huité, i el primer i el nové sumen 6. Calcula la diferència i els termes mencionats.
22. En una progressió aritmètica, els termes segon i tercer sumen 19, i els termes cinqué i seté sumen 40. Troba'ls.
23. Sabent que les mesures dels tres angles d'un triangle estan en progressió aritmètica i que un d'ells medeix 100º, calcula els altres dos.
24. Troba les dimensions d'un ortoedre sabent que estan en progressió aritmètica, que sumen 78 m i que el volum de l'ortoedre és de 15470 m.
25. Els sis angles d'un hexàgon estan en progressió aritmètica. La diferència entre el major i el menor és 60º. Calcula el valor de cada angle.

26. Les longituds dels tres costats d'un triangle rectangle estan en progressió aritmètica i sumen 36 metres. Quant medeix cada costat?

27. Un coronel mana 5050 soldats i vol formar amb ells un triangle per a una exhibició, de manera que la primera fila tinga un soldat, la segona dos, la tercera tres, etc. Quantes files han d'haver-hi?

28. Pel lloguer d'una casa s'acorda pagar 800 euros al mes durant el primer any, i cada any s'augmentarà el lloguer en 50 euros mensuals. Quant es pagarà mensualment al cap de 12 anys?

29. Les edats de quatre germans formen una progressió aritmètica, i la seua suma és 32 anys. El major té 6 anys més que el menor. Troba les edats dels quatre germans.

30. Un esquiador comença la pretemporada d'esquí fent peses en un gimnàs durant una hora. Decideix incrementar l'entrenament 10 minuts cada dia. Quant temps haurà d'entrenar al cap de 15 dies? Quant temps en total haurà dedicat a l'entrenament al llarg de tot un mes de 30 dies?

31. En una sala de cine, la primera fila de butaques dista de la pantalla 86 dm, i la sisena, 134 dm. En quina fila estarà una persona si la seua distància a la pantalla és de 230 dm?

32. Calcula el terme onzé d'una progressió geomètrica el primer terme del qual és igual a 1 i la raó és 2.

33. El cinqué terme d'una progressió geomètrica és 81 i el primer és 1. Troba els cinc primers termes de la progressió.

34. En una progressió geomètrica de primer terme 7 i raó 2, un cert terme és 28672. Quin lloc ocupa el dit terme?

35. Sabent que el seté terme d'una progressió geomètrica és 1 i la raó 1/2, troba el primer terme.

36. En una progressió geomètrica se sap que el terme quinzé és igual a 512 i que el terme desé és igual a 16. Troba el primer terme i la raó.

37. Descompon el nombre 124 en tres sumands que formen progressió geomètrica, sent 96 la diferència entre el major i el menor.

38. El volum d'un ortoedre és de 3375 cm^3. Troba la longitud de les seues arestes, sabent que estan en progressió geomètrica i que l'aresta intermèdia mesura 10 cm més que la menor.

39. Troba el producte dels huit primers termes de la progressió 3, 6, 12, 24,...

40. Troba la suma dels deu primers termes de la progressió geomètrica 3, 6, 12, 24,...

41. La suma dels huit primers termes d'una progressió geomètrica és 17 vegades la suma dels quatre primers. Troba el valor de la raó.

42. Troba la suma dels termes de la progressió il·limitada: 8, 4, 2, 1,...

43. Troba tres nombres en progressió geomètrica sabent que la seua suma és 26 i el seu producte 216.

44. Calcula el producte dels onze primers termes d'una progressió geomètrica sabent que el terme central val 2.

45. Tres nombres en progressió geomètrica sumen 525 i el seu producte val un milió. Calcula'ls.

46. Determina quatre nombres en progressió geomètrica de manera que els dos primers sumen 0,5 i els dos últims 0,125.

47. Quants termes s'han pres en una progressió geomètrica, sabent que el primer terme és 7, l'últim 448 i la seua suma 889?

48. La suma dels set primers termes d'una progressió geomètrica de raó 3 és 7651. Troba els termes primer i seté.

49. Troba tres nombres en progressió geomètrica el producte del qual és 328509, sabent que el major excedeix en 115 a la suma dels altres dos.

50. Tres nombres estan en progressió geomètrica; el segon és 32 unitats major que el primer, i el tercer, 96 unitats major que el segon. Troba els nombres.

51. Troba els quatre primers termes d'una progressió geomètrica, sabent que el segon és 20 i la suma dels quatre primers és 425.

52. Troba els angles d'un quadrilàter, si se sap que estan en progressió geomètrica i que el major és 27 vegades el menor.

53. Les dimensions d'un ortoedre estan en progressió geomètrica. Calcula aquestes dimensions sabent que el seu perímetre és 420 m'i el seu volum 8000 m^3.

54. Divideix el nombre 221 en tres parts enteres que formen una progressió geomètrica tal que el tercer terme sobrepassa al primer en 136.

55. La suma de tres nombres en progressió geomètrica és 248 i la diferència entre els extrems 192. Troba els dits nombres.

56. Troba quatre nombres en progressió geomètrica sabent que la suma dels dos primers és 28 i la suma dels dos últims 175.

57. En una progressió geomètrica, els termes primer i quinzé són 6 i 54, respectivament. Troba el terme sisé.

58. Una progressió geomètrica té cinc termes, la raó és igual a la quarta part del primer terme i la suma dels dos primers termes és 24. Troba els cinc termes.

59. Troba x perquè $x - 1$, $x + 1$, $2(x + 1)$ estiguen en progressió geomètrica.

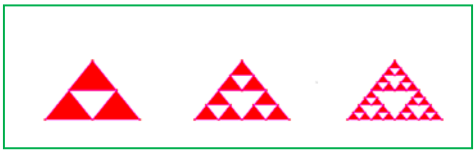
60. A una corda de 700 m de longitud se li donen dos talls, de manera que un dels trossos extrems té una longitud de 100 m. Sabent que les longituds dels trossos estan en progressió geomètrica, determina la longitud de cada tros.

61. Troba la fracció generatriu del nombre decimal 0,737373..., com a suma dels termes d'una progressió geomètrica il·limitada.

62. Es té un depòsit de vi que conté 1024 litres. L'1 d'octubre es va buidar la mitat del contingut; l'endemà es va tornar a buidar la mitat del que quedava, i així successivament tots els dies. Quina quantitat de vi es va traure el dia 10 d'octubre?

63. Donat un quadrat d'1 m de costat, unim dos a dos els punts mitjans dels seus costats; obtenim un nou quadrat, en el que tornem a efectuar la mateixa operació, i així successivament. Troba la suma de les infinites àrees així obtingudes.

64. Tres nombres la suma del qual és 36 estan en progressió aritmètica. Troba els dits nombres sabent que si se'ls suma 1, 4 i 43, respectivament, els resultats formen una progressió geomètrica.



65. *Triangle de Sierspinky*: Construirem un fractal. Es partix d'un triangle equilàter. S'uneixen els punts mitjans dels costats i es formen quatre triangles. S'elimina el triangle central. En cada un dels altres tres triangles es repeteix el procés. I així successivament. A la figura formada per iteració infinita se la denomina Triangle de Sierspinky, i és un fractal. Imagina que el primer triangle té una àrea A. Quan apliquem la primera iteració, l'àrea és (3/4)A. I en la segona? Escriu la successió de les àrees. És creixent o decreixent? Imagina ara que la longitud de cada costat del triangle inicial és L. Escriu la successió de les longituds. És creixent o decreixent?

AUTOEVALUACIÓ

1. Quina és la raó de la següent progressió geomètrica: a_n $5 \cdot 3^{n-1}$?

a) 5 b) 3 c) 2 d) No és una progressió geomètrica

2. En la successió de múltiples de 13, el 169 ocupa el lloc:

a) 1 b) 2 c) 13 d) 169

3. La suma dels deu primers termes de la progressió aritmètica: 7, 13, 19, 31,… és:

a) 170 b) 34 c) 19 d) 340

4. La successió 5, 15, 45, 135, 405, 1215...:

a) És una progressió geomètrica de raó 5 b) És una progressió aritmètica de diferència 5

c) És una progressió geomètrica de raó 3 d) És una progressió aritmètica de diferència 3.

5. Siga la successió: 2, 10, 50, 250, 1250... el seu terme general és:

a) $a_n = 2 \cdot 5^{n-1}$ b) $a_n = 2 \cdot 2^{n-1}$ c) $a_n = 5 \cdot 5^{n-1}$ *d)* $a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$

6. Quant sumen les potències de 2 compreses entre 2^1 i 2^{10}?

a) 1022 b) 2046 c) 1024 d) 2048

7. La progressió aritmètica el primer terme de la qual és 1 i la seua diferència 2, té com a terme general:

a) $a_n = 2n$ b) $a_n = 2n + 1$ c) $a_n = 2n – 1$ d) $a_n = 2n – 2$

8. Quin és el valor de la suma: 1 + 3 + 5 + 7 + ... + 999?

a) 500.000 b) 250.000 c) 50000 d) 25000

9. Maria està preparant l’examen de selectivitat. Per a no deixar tota la matèria per al final ha decidit estudiar cada dia el doble de pàgines que el dia anterior. Si el primer dia va estudiar tres pàgines, quantes haurà estudiat al cap de 7 dies?

a) 381 b) 192 c) 765 d) 378

10. A Robert li han tocat 6000 € en la loteria i decideix depositar-los en el banc a un tipus d’interés compost del 4 %. Quants diners tindrà al cap de 5 anys?

a) 6240 € b) 6104 € c) 7832,04 € d) 7299,92 €