Capítol 9: Àlgebra

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Raquel Caro

Revisor: Pedro Luis Suberviola i Sergio Hernández

Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF

Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Índex

Resum

A l'època d'El *Quixot*, a la porta de les barberies, es llegia el cartell següent: *“ALGEBRISTA I SANGRADOR” I* això, per què?

La paraula “*Àlgebra*” és una paraula àrab que utilitzà el matemàtic *Al-Khwarizmi*. Si aconsegueixes llegir aqueix nom veuràs que et sona a una altra paraula: “*algoritme*”.

Cap a l'any 825 escrigué un llibre titulat: *Al-jabr w'almuqabalah* La paraula àrab *jabr* significa restaurar. El llibre tractava d'àlgebra, de sumes i altres operacions, però com els barbers també restauraven ossos, per això es deien algebristes.

Autora: Raquel Caro
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

1. LLENGUATGE ALGEBRAIC

1.1. Lletres i nombres

Ja saps que:

Al nostre voltant ens trobem amb multitud de símbols el significat dels quals coneixem, com els senyals de circulació o alguns logotips.

El **llenguatge algebraic** aconsegueix que puguem expressar missatges als quals les lletres representen variables de valor desconegut. Utilitza lletres, nombres i operacions per a representar una informació.

Exemple:

- Ja has utilitzat el llenguatge algebraic per a indicar l'àrea d'un rectangle de base *b* i altura *h*: A = $b \cdot h$; la longitud d'una circumferència de radi *r*: $L = 2\pi r$, per exemple.

Per a cada situació podem utilitzar la lletra que vulguem, encara que, quan parlem de alguna cosa desconeguda, la lletra més utilitzada és la ***x***.

El mateix *Al-Khwarizmi* usà originàriament la paraula "*cosa*", (per exemple, en compte de 2*x* deia "*el doble d'una cosa*"), que en àrab sona com "*šay*" i que es traduí a l'espanyol com "*xei*". D'ací procedix la *x* actual.

Exemple:

- La meitat de l'edat d'una persona $x/2$
- El doble d'un nombre menys 7 $2x–7$.

Les expressions que ens permeten expressar mitjançant lletres i nombres una situació s'anomenen **expressions algebraiques.**

Activitats resoltes

- Expressa els següents frases en llenguatge algebraic:

El triple d'un nombre	$3x$
El producte de dos nombres consecutius	$x \cdot (x+1)$
L'edat de Pere fa 3 anys	$x - 3$
La diferència de dos nombres	$a - b$

Activitats proposades

1. Expressa les següents frases en llenguatge algebraic:
   a) El triple d'un nombre més la seua meitat.
   b) L'edat d'una persona d'ací a 10 anys.
   c) La sisena part d'un nombre menys el seu quadrat.
   d) La diferència entre dos nombres consecutius.

2. Un mag li proposa un joc a Adela: Pensa un nombre, suma-li 7, multiplica el resultat per 2, resta-li 10 i resta-li el nombre. Dis-me què t'ix. Adela digué 9. I el mag li contestà immediatament: El nombre que pensares és 5. Endevina com ho sabé el mag.

3. Vols ser el teu ara el mag? Inventa un joc i escriu-lo, per a poder endevinar el nombre pensat.

Autora: Raquel Caro
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

1.2. Coeficient i part literal

Ja saps que:

Una **expressió algebraica** pot estar formada per un o més sumands que es denominen **termes** o **monomis**. Una suma de monomis és un **polinomi**. En un monomi la **part literal** són les lletres i s'anomena **coeficient** al nombre pel qual van multiplicades.

Exemple:

- A l'expressió $7x$, el coeficient és 7 i la part literal x. En $9xy^2$ el coeficient és 9 i la part literal xy^2.

Per a poder sumar o restar dos monomis han de ser **semblants**, és a dir, tindre la mateixa part literal.

Exemple:

- Suma $9xy^2 + 7xy^2 = 16xy^2$. En canvi no es pot sumar $5x + 3y$ perquè no són semblants

Activitats resoltes

- Assenyala els coeficients, les parts literals i el nombre de monomis de l'expressió algebraica:

$$6a - 3b + c + 8$$

Aquesta expressió algebraica té 4 termes o 4 monomis: $6a$, $-3b$, c i 8. Els coeficients són +6, –3, + 1 i +8 respectivament. Les parts literals són a, b i c. L'últim terme no té part literal.

- Assenyala al polinomi i calcula la seua suma $8x + 5x - 2x$ quins són els coeficients. Els coeficients són 8, 5 i –2; la seua suma és $11x$.

1.3. Valor numèric d'una expressió algebraica

Si a les lletres d'una expressió algebraica li'ls dóna un valor concret, es pot calcular el **valor numèric** de la dita expressió.

Activitats resoltes

- Calcula el valor numèric de l'expressió $7x + 3$ quan x val 2.

Cal substituir a l'expressió, x pel seu valor, 2.
Per tant: $7 \cdot 2 + 3 = 14 + 3 = 17$, que és el valor numèric quan x val 2.

1.4. Equivalència i simplificació d'expressions algebraiques

L'expressió algebraica $5x + 4x$ és equivalent a l'expressió $9x$, que és la seua expressió més simplificada.

Activitats proposades

4. Assenyala el coeficient, la part literal i el nombre de termes o monomis dels polinomis següents:

a) $3 - 14xy$ b) $2a + 6b - 9c$ c) $6xy + 8$ d) $2xy + 6 - 4y$

5. Calcula el valor numèric dels polinomis següents:

a) $6x + 4y$ para $x = 3$, $y = 2$.
b) $2 - 3a$ para $a = -5$.
c) $5a + 9b - 7c$ para $b = -1$, $a = -1$ y $c = +2$.

Autora: Raquel Caro
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

1.5. Polinomis. Suma i producte

Monomis. Polinomis

Unes expressions algebraiques de gran utilitat són els **polinomis**, la versió més simple i, dels quals al mateix temps, generadora d'ells són els **monomis**.

Un **monomi** ve donat pel producte de nombres i indeterminades. Anomenarem **coeficient** d'un monomi al nombre que multiplica a la indeterminada, o indeterminades; la indeterminada, o indeterminades, conformen la part **literal** del monomi.

Exemples:

- L'expressió que ens proporciona el triple d'una quantitat, $3 \cdot x$, és un monomi amb una única variable, x, i coeficient 3.
- L'àrea del cercle, πr^2, és un monomi amb indeterminada, r i coeficient π. La seua part literal és r^2.

Atenent a l'exponent de la variable, o variables, adjudicarem un **grau** a cada monomi d'acord amb el criteri següent:

- Quan hi haja una única indeterminada, el grau del monomi serà l'exponent de la seua indeterminada.
- Si apareixen diverses indeterminades, el grau del monomi serà la suma dels exponents d'aqueixes indeterminades.

Exemples:

- $3x$ és un monomi de grau 1 en la variable x.
- πr^2 és un monomi de grau 2 en la indeterminada r.
- $7a^2b^3$ és un monomi de grau 5 en a i b.

Un nombre pot ser considerat com un monomi de grau 0.

Un **polinomi** és una expressió construïda a partir de la suma de monomis. El **grau d'un polinomi** vindrà donat pel major grau dels seus monomis.

Exemples:

- $\frac{1}{5} \cdot x^2 - 7 \cdot x^3 + 2$ és un polinomi de grau 3 en la variable x.
- $4 \cdot x^2 \cdot y^3 - 7 + 3 \cdot y^2$ és un polinomi de grau 5 en x i y.
- $x - 2 \cdot y + 6 \cdot z$ és un polinomi de grau 1 en x, y i z.

Tant en aquesta secció ens limitarem, bàsicament, a considerar polinomis amb una única variable. És habitual escriure els diferents monomis d'un polinomi de manera que els seus graus vagen en descens per a, amb aquest criteri, apreciar al seu primer monomi quin és el grau del polinomi.

L'aspecte genèric d'un polinomi en la variable x és

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

on els coeficients a_k són nombres. El monomi de grau zero, a_0, rep el nom de **terme independent**. Direm que un polinomi és **mònic** quan el coeficient del seu terme de major grau és igual a 1.

Autora: Raquel Caro
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Exemples:

- $-3x^4+\frac{1}{5}x^2+2$ és un polinomi de grau 4 en la variable x , el terme independent del qual és 2 .

Activitats proposades

6. Per a cada un dels següents polinomis destaca el seu grau i els monomis que el constitueixen:

a) $3x^6 + 7x^2 - x$ b) $7x^3 + 8x^5 - 6x^2$ c) $3xy^6 + 7xy^2 - 2xy$

Com ocorre amb qualsevol expressió algebraica, si fixem, o triem, un valor concret per a la variable d'un polinomi apareix un nombre: el **valor numèric** del polinomi per a aqueix valor determinat de la variable. Si hem anomenat p a un polinomi, a l'avaluació de p en, per exemple, el nombre -3 la denotarem per $p(-3)$, i llegirem *"p de menys tres"* o *"p en menys tres"*. Amb aquest criteri, si p és un polinomi la indeterminada del qual és la variable *x*, podem referir-nos a ell com p o *p(x)* indistintament.

D'aquesta manera apreciem que un polinomi pot ser entès com una manera concreta d'assignar a cada nombre un altre nombre.

Exemples:

- Si avaluem el polinomi $p\equiv -3x^4+\frac{1}{5}x^2+2$ en $x=5$ ens trobem amb el nombre

$$p(5)=-3\cdot 5^4+\frac{1}{5}\cdot 5^2+2=-3\cdot 625+5+2=-1875+7=-1868$$

Activitats proposades

7. Considerem el polinomi $p(x) = 3x^6 + 7x^2 - x$. Troba els següents valors numèrics de *p*: *p*(0), *p*(1), *p*(–1), *p*(2).

Suma de polinomis

Com un polinomi és una suma de monomis, la suma de dos polinomis és un altre polinomi. A l'hora de sumar dos polinomis procedirem a sumar els monomis de la mateixa part literal.

Exemples:

- La suma dels polinomis $-3x^4+\frac{1}{5}x^2+2$ i $-x^4+4x^2-5x-6$ és el polinomi

$$\left(-3x^4+\frac{1}{5}x^2+2\right)+(-x^4+4x^2-5x-6)=(-3x^4-x^4)+\left(\frac{1}{5}x^2+4x^2\right)-5x+(2-6)=$$

$$=(-3-1)\cdot x^4+\left(\frac{1}{5}+4\right)\cdot x^2-5x+(2-6)=-4x^4+\frac{21}{5}x^2-5x-4$$

- $(5x^2-3x+1)+(x^2+4x-7)=(5x^2+x^2)+(-3x+4x)+(1-7)=6x^2+x-6$

Al següent exemple sumarem dos polinomis disposant-los, adequadament, un sobre un altre.

Exemple:

$$\begin{array}{rrrrrrr} & 4x^5 & +2x^4 & +x^3 & -5x^2 & +x & +4 \\ + & -7x^5 & & +4x^3 & +5x^2 & -3x & -6 \\ \hline & -3x^5 & +2x^4 & +5x^3 & & -2x & -2 \end{array}$$

Autora: Raquel Caro
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Producte de polinomis

Una altra operació que podem realitzar amb polinomis és la multiplicació.

El resultat del producte de polinomis sempre serà un altre polinomi. Encara que en un polinomi tenim una indeterminada, o variable, com ella adopta valors numèrics, a l'hora de multiplicar polinomis utilitzarem les propietats de la suma i el producte entre nombres, en particular la propietat distributiva del producte respecte de la suma; així, tot queda en funció del producte de monomis, qüestió que resolem amb facilitat:

$$ax^n \cdot bx^m = abx^{n+m}$$

Exemples:

- $(-5)x^2 \cdot 2x^4 = (-5) \cdot 2 \cdot x^{2+4} = -10x^6$
- $5x^3 \cdot (-4) = 5 \cdot (-4) \cdot x^3 = -20x^3$

També podem materialitzar el producte de polinomis tal com multipliquem nombres enters:

Exemple:

$$\begin{array}{rrrrrrr}
 & & & -2x^3 & & +x & +4 \\
\times & & & & x^2 & -3x & +1 \\
\hline
 & & & -2x^3 & & +x & +4 \\
 & & 6x^4 & & -3x^2 & -12x & \\
 & -2x^5 & & +x^3 & +4x^2 & & \\
\hline
 & -2x^5 & +6x^4 & -x^3 & +x^2 & -11x & +4
\end{array}$$

Activitats proposades

8. Realitza les següents sumes de polinomis:

a) $(-x^3 + x - 5) + (2x^2 + 5x + 4) + (-4x^3 - 2x^2 + 3x)$

b) $(x^2 + 4) + (-2x + 4) + (-6x^3 + 3x^2 + x + 1) - x^2$

9. Efectua els següents productes de polinomis:

a) $(-2x) \cdot (3x^2 - 4)$

b) $(2x^3 + 1) \cdot (-4x + 5)$

c) $(4x^3 - x^2 - 1) \cdot (2x + 6)$

d) $(-1) \cdot (8x^2 + 7x - 9)$

Autora: Raquel Caro
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

2. EQUACIONS DE PRIMER GRAU

2.1. El llenguatge de les equacions

Ja saps que:

Una **equació** és una igualtat entre dues expressions algebraiques.

Exemple:

- Si tenim dues expressions algebraiques: $7x + 3$ i $5x + 2$, i les unim amb el signe igual obtenim una equació: $7x + 3 = 5x + 2$.

Les expressions que hi ha a cada costat de l'igual s'anomenen **membres** de l'equació. Totes les equacions tenen dos membres: l'expressió que està a l'esquerra del signe igual s'anomena **primer membre** i la que està a la dreta, **segon membre**.

Les lletres que contenen les equacions algebraiques (les "parts literals" de les seues dues expressions) s'anomenen **incògnites**, que significa literalment "*desconegudes*". Si totes les lletres són iguals, es diu que l'equació té només una incògnita.

Exemple:

- $6x - 1 = 5x + 8$ és una equació amb una sola incògnita, mentre que
- $4x + 2y = 1$ o $3x - 8 = 9y$ són equacions amb dues incògnites: x i y.

El **grau** d'una equació és el major exponent que apareix en alguna de les seues incògnites.

Exemple:

- $2x - 7 = 3x + 2$ és una equació de primer grau, mentre que $4x + 5xy^2 = 8$ és una equació de tercer grau ja que el monomi $5xy^2$ té grau 3 (1 + 2 = 3).

Activitats proposades

10. Còpia al teu quadern la següent taula i completa-la:

Equació	Primer membre	Segon membre	Incògnites
$4x - 5 = 6x - 7$			
	$3x + 2$	$x - 9$	
$8a + 7 = 65$			
	$4x - 3y$	$2 + y$	

11. Indica el nombre d'incògnites de les equacions següents:

a) $x - 2y = 3x + 4$; b) $5x + 6y^2 = 7$ c) $8a + 9a^2 = 1$ d) $2x + 3x^2 = 4$.

12. Indica el grau de les equacions següents:

a) $5x - 6 = 7x + 8$; b) $9x + y^2 = 13$ c) $x + 2x^2 = 3$ d) $4x + 5xy^2 = 6$

2.2. Equacions equivalents. Resolució d'equacions

Solució d'una equació:

Una **solució** d'una equació és un nombre que, quan la incògnita pren aqueix valor, es verifica la igualtat, és a dir, els dos termes de l'equació valen el mateix.

Algunes equacions només tenen una solució, però altres poden tindre diverses.

Resoldre una equació és trobar totes les seues possibles solucions numèriques.

Activitats resoltes

- Si et fixes en l'equació: $7x - 3 = 5x + 9$, veuràs que en donar-li valors a x la igualtat no sempre es compleix.

Per exemple, per a $x = 1$, el primer membre val $7 \cdot 1 - 3 = +4$, mentre que el valor del segon membre és: $5 \cdot 1 + 9 = 5 + 9 = 14$. Per tant 1 **no** és solució de l'equació.

Per a $x = 6$, el primer membre pren el valor: $7 \cdot 6 - 3 = 42 - 3 = 39$; i el segon membre: $5 \cdot 6+9= 30+9=39$. Per tant 6 és una **solució** de l'equació.

Si es desconeix la solució d'una equació, resulta molt pesat resoldre-la provant un nombre darrere d'un altre.

Per això el que es fa habitualment és transformar-la en altres **equacions equivalents** més senzilles.

Equacions equivalents són les que tenen les mateixes solucions.

Sabies que totes les solucions de totes les expressions algebraiques possibles, de qualsevol grau, formen el que es denomina els "***nombres algebraics***"? Per exemple, són algebraics tots aquests nombres: 1, 2, 1/3, 7/5, $\sqrt{2}$, $\sqrt{\frac{2}{3}}$, etc. Encara que la immensa majoria dels nombres que utilitzem en la nostra vida quotidiana són algebraics, has de saber que realment hi ha molts, moltíssims més nombres "no algebraics" que ja aniràs coneixent, encara que algun ja coneixes com al nombre π.

Exemple:

- $3x - 7 = 11$ és equivalent a $3x = 18$, ja que la solució d'ambdues equacions és $x = 6$.

Per a obtindre equacions equivalents es tenen en compte les propietats següents:

- Si es **suma** o es **resta** als dos membres d'una equació una mateixa quantitat, s'obté una equació equivalent.
- Si es **multipliquen** o **divideixen** els dos membres d'una equació per una mateixa quantitat (diferent de zero), s'obté una equació equivalent.

Activitats resoltes

- Resol l'equació $3x + 9 = x - 5$ transformant-la en una altra més senzilla equivalent.

Transformar una equació fins que les seues solucions es facen evidents s'anomena "*resoldre l'equació*". Seguint aquests passos intentarem resoldre l'equació: $3x + 9 = x - 5$.

1) Sumem als dos membres $-x$ i restem als dos membres 9: $3x - x + 9 - 9 = x - x - 5 - 9$.

2) Fem operacions i aconseguim una altra equació que té al primer membre els termes amb x i al segon, els termes sense x: $3x - x = - 5 - 9$.

3) Efectuem les sumes al primer membre i al segon: $2x = -14$.

4) Aïllem x dividint els dos membres per 2: $\frac{2x}{2} = \frac{-14}{2}$ d'on $x = -7$.

5) Comprova que totes les equacions que hem obtingut en aquest procés són equivalents i que la seua solució és $x = -7$.

- Resol l'equació $6 - x = 2x - 3$.

1) Sumem x i 3 per a passar a un membre els termes amb x i a l'altre membre els termes sense x:

$$6 - x + x + 3 = 2x + x - 3 + 3,$$

2) Fem operacions: $6 + 3 = 2x + x$

3) Efectuem les sumes: $9 = 3x$.

4) Aïllem x dividint els dos membres per 3: $3 = x$.

La solució de l'equació és $x = 3$.

5) Comprovem que en efecte és la solució: $6 - x = 2x - 3 \Rightarrow 6 - 3 = 3;\ 2 \cdot 3 - 3 = 3$.

El procediment utilitzat a les activitats és un mètode universal per a **resoldre** qualsevol equació de grau 1, és a dir, on x apareix sense elevar a un altre exponent com en x^2. Les equacions de primer grau tenen sempre una única solució, però en general, les solucions no tenen perquè ser nombres enters com als exemples.

Activitats proposades

13. Esbrina quin dels nombres és la solució de l'equació i escriu-lo al teu quadern:

Equació	Possibles solucions		Equació	Possibles solucions
$3x + 5 = x - 1$	2, –1, –3		$a^2 - 6 = -2$	–2, –6, 2
$x + 6 = 4x - 3$	3, –2, –3		$b - 4 = 8 - b$	3, 4, 6

14. Resol les equacions següents:

a) $5x - 1 = 3x - 4$ b) $7x + 9 = 5x - 6$ c) $6x + 8 = 14$ d) $3x - 9 = 2x - 11$

15. Tria entre les següents equacions totes les que siguen equivalents a l'equació $3x - 6 = x + 10$.

a) $x - 10 = 5$ c) $16 - x = 3x - 5x$ e) $4x = 32$ e) $2x = 10 + 6$ g) $8 = x$

16. Escriu dues equacions equivalents a cada una de les equacions següents:

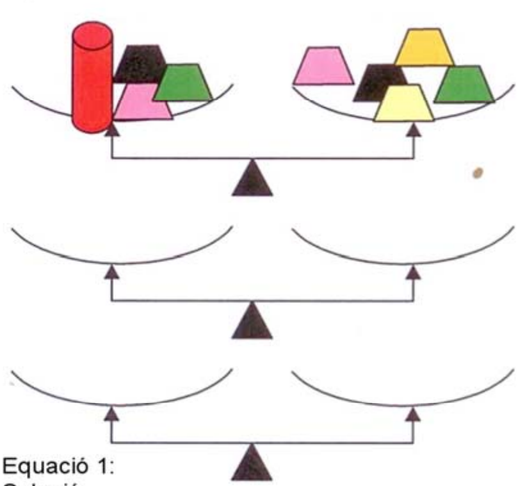
a) $2x - 5 = 13$ b) $3x = 15$ c) $5x + 12 = 7$ d) $x = -5$

Autora: Raquel Caro
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

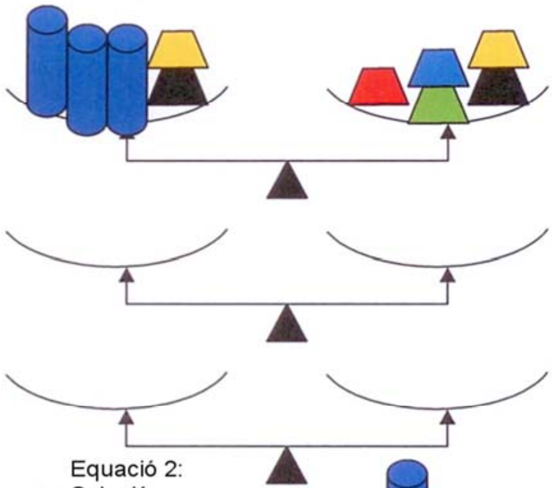
Material didàctic fotocopiable: Balances

a) Totes les peses són iguals a 1. Les balances estan equilibrades. Mantín sempre equilibrades les balances següents, fins a aconseguir conéixer quant pesa l'objecte cilíndric.

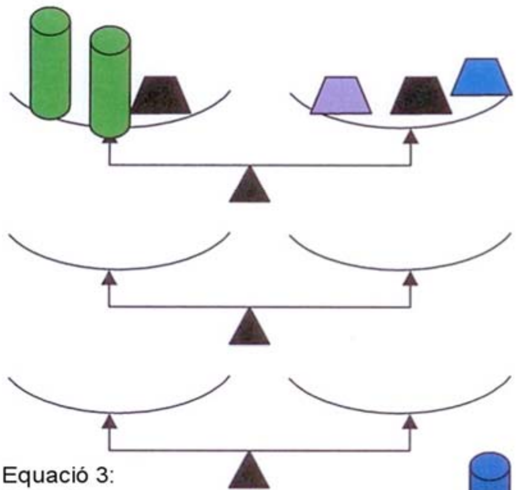
b) Escriu algebraicament la situació actual de cada balança, i totes les situacions intermèdies, fins a arribar a la solució.



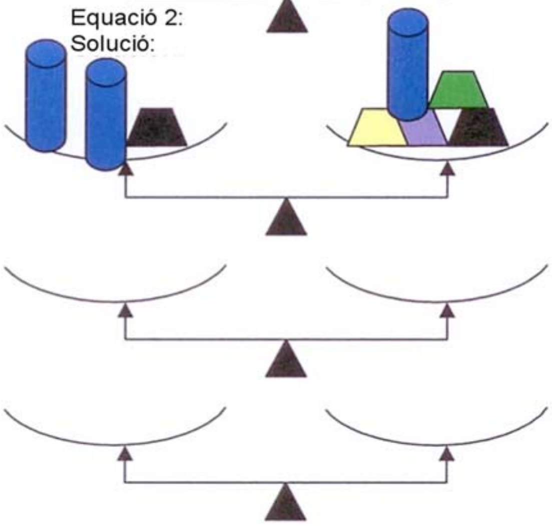
Equació 1:
Solució:



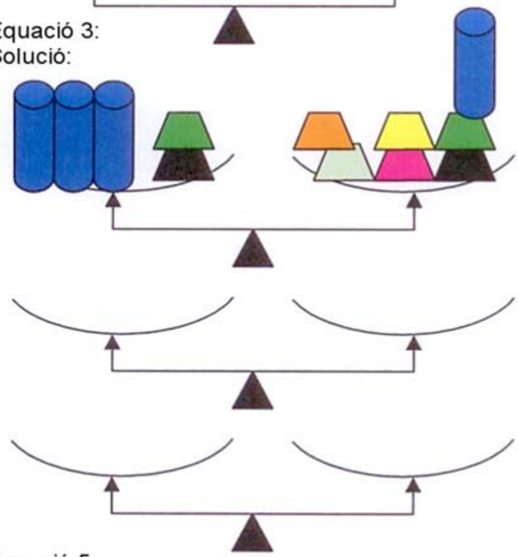
Equació 2:
Solució:



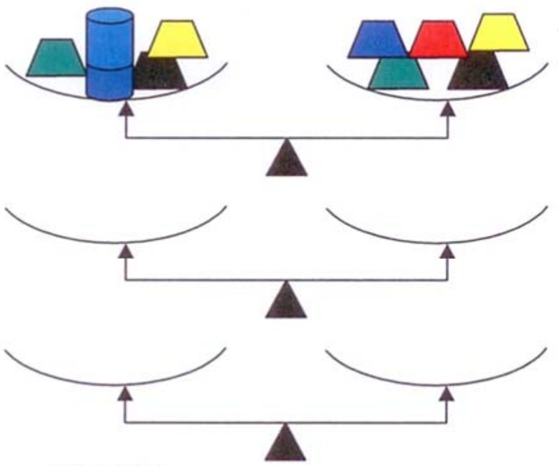
Equació 3:
Solució:



Equació 4:
Solució:



Equació 5:
Solució:



Equació 6:
Solució:

Autora: Raquel Caro
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

3. RESOLUCIÓ DE PROBLEMES MITJANÇANT EQUACIONS

3.1. Procediment

Ja saps que:

Molts problemes poden resoldre's mitjançant una equació.

Activitats resoltes

- Busca un nombre que sumat amb el seu següent done com resultat 9.

Per a resoldre-lo, segueix els passos següents:

Pas 1: Abans de començar a actuar, intenta entendre bé el problema

Llig amb molt atenció l'enunciat, i pregunta't:

Què et demanen? Quines dades tens?

Ens demanen un nombre. La **incògnita** és aqueix nombre. Anomena a aqueix nombre x. El seu següent, serà $x + 1$. Ens diuen que la suma d'ambdós és 9.

Pas 2: Busca una bona estratègia.

És un problema que volem resoldre mitjançant una equació. Escriu en llenguatge algebraic l'enunciat del problema i planteja una equació:

$$x + (x + 1) = 9.$$

Pregunta't si efectivament resol el problema rellegint l'enunciat.

Pas 3: Porta avant la teua estratègia

Ara sí, ara resol l'equació. Per a resoldre una equació convé seguir un orde d'actuació que ens ajude a no cometre errors, per a això seguim el procediment que acabem d'aprendre.

Lleva, si n'hi ha, parèntesi i denominadors: $x + x + 1 = 9$.

Per a posar al primer membre els termes amb x, i al segon els que no la tenen, fes **el mateix als dos costats**, resta 1 als dos membres: $x + x + 1 – 1= 9 – 1$, després $x + x = 9 – 1$. Opera: $2x = 8$.

Aïlla:

Per a aïllar la x, es fa el mateix als dos costats, es divideixen per 2 ambdós membres: $2x/2 = 8/2$, per tant, $x = 4$.

Pas 4: Comprova el resultat. Pensa si és raonable.

En efecte, comprova que: $4 + 5 = 9$.

Activitats proposades

17. La suma de tres nombres consecutius és igual al doble del major més 3. Calcula els dits nombres.

18. La mare d'Àlvar té el triple de l'edat del seu fill, i aquest té 32 anys menys que sa mare. Quants anys tenen cada un?

3.2. Problemes numèrics

Activitats resoltes

- En un xicotet hotel hi ha 50 habitacions simples i dobles. Si en total té 87 llits, quantes habitacions són simples i quantes són dobles?

Segueix els passos per a la resolució de problemes.

Pas 1: Abans de començar a actuar, intenta entendre bé el problema

Anomena x al nombre d'habitacions simples. El nombre d'habitacions dobles és $34 - x$. El nombre de llits és 54.

Pas 2: Busca una bona estratègia.

Escriu en forma d'equació la informació de l'enunciat:

$$x + 2(34 - x) = 54.$$

Pas 3: Porta avant la teua estratègia

Resol l'equació. Lleva parèntesi:

$$x + 68 - 2x = 54.$$

Per a posar al primer membre els termes amb x i al segon els termes sense x, resta 68 als dos membres:

$$x + 68 - 2x - 68 = 54 - 68.$$

Fes les operacions:

$$-x = -14$$

Per a aïllar la x divideix els dos membres per -1:

$$x = -14/-1 = 14.$$

Pas 4: Comprova el resultat. Pensa si és raonable.

Hi ha 14 habitacions simples. Per tant hi ha $34 - 14 = 20$ habitacions dobles. Per tant el nombre de llits és 54 perquè:

$$14 + 2\cdot 20 = 54.$$

- En una granja hi ha 50 animals entre gallines i conills, i entre tots els animals sumen 120 potes. Quantes gallines hi ha a la granja?

Pas 1: Abans de començar a actuar, intenta entendre bé el problema

Anomena x al nombre de gallines, i com hi ha 50 animals en total, conills tindrem $50 - x$.

Com una gallina té 2 potes i un conill 4, tindrem en total $2x + 4(50 - x)$ potes.

Pas 2: Busca una bona estratègia.

Com sabem que el nombre total de potes és 120, podem escriure aquesta equació:

Autora: Raquel Caro
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

$$2x + 4(50 - x) = 120$$

Pas 3: Porta avant la teua estratègia

Resol l'equació. Lleva parèntesi:

$$2x + 200 - 4x = 120$$

Si restem 200 en ambdós costats obtenim:

$$2x + 200 - 4x - 200 = 120 - 200$$

Operand obtenim:

$$-2x = -80$$

Dividint per –2 en ambdós costats resolem l'equació:

$$-2x/-2 = -80/-2 \text{ per tant } x = 40.$$

Pas 4: Comprova el resultat. Pensa si és raonable.

Hi ha 40 gallines i 10 conills perquè $50 - x = 50 - 40 = 10$.

Les potes de 40 gallines i 10 conills sumen $40 \cdot 2 + 10 \cdot 4 = 80 + 40 = 120$

Activitats proposades

19. Un mag li digué: Pensa un nombre, suma-li 12, multiplica per 2 el resultat, resta 20 i divideix per 2. Dis-me que t'ix. Digué 35. I el mag li contestà immediatament: El nombre que pensares és 33. Endevina com ho sabé el mag. (Suggeriment: escriu prèviament la cadena d'operacions).

20. Pensa un nombre, multiplica-lo per 10, resta-li el nombre que has pensat i divideix el resultat entre 9. Has obtingut el nombre que pensares! Busca el truc: escriu algebraicament, anomena *x* al nombre, l'expressió algebraica de les operacions realitzades, i endevina com ho sabé el mag.

21. Si la suma de tres nombres consecutius és 63, de quins nombres es tracta? (Suggeriment: il·lustra la situació amb una balança equilibrada. Mantín equilibrada fins a aconseguir l'equació equivalent que ens done el resultat).

22. Hem comprat 8 llibres iguals i hem pagat amb un bitllet de 50 €. Si ens han tornat 10 €, quant costava cada llibre?

Autora: Raquel Caro
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

3.3. Problemes de geometria

Molts problemes de geometria es poden resoldre per mètodes algebraics, utilitzant equacions.

Activitats resoltes

- Es vol dibuixar un triangle de 55 cm de perímetre, de manera que un costat siga el doble d'un altre, i el tercer siga el triple del menor menys 5 cm.

Pas 1: Abans de començar a actuar, intenta entendre bé el problema

Dibuixa un triangle, pensant en les dades de l'enunciat.

Anomenem x al costat menor, d'aquesta manera pots definir els altres dos costats. El costat mitjà és $2x$. El costat major és $3x - 5$

Pas 2: Busca una bona estratègia.

Com el perímetre és 55, es pot plantejar l'equació: $x + 2x + (3x - 5) = 55$

Pas 3: Porta avant la teua estratègia

Es resol l'equació: $x + 2x + 3x - 5 + 5 = 55 + 5$; $x + 2x + 3x = 60$; $6x = 60$.

Per tant $x = 60 / 6 = 10$ és la longitud del costat menor. Els altres dos costats mesuren $2x = 20$ i $3x- 5=25$.

Solució: Els costats del triangle mesuren 10 cm, 20 cm i 25 cm.

Pas 4: Comprova el resultat. Pensa si és raonable.

Sumant els tres costats, 10 + 20 + 25 = 55, obtenim el perímetre del triangle, 55.

Activitats resoltes

- Tens un rectangle d'altura x cm i de base $2x + 3$. Si a la base d'aquest rectangle li lleven 2 cm i a l'altura li afigen 5 cm, es converteix en un quadrat. Quines dimensions té?

Pas 1: Abans de començar a actuar, intenta entendre bé el problema

Dibuixa un rectangle amb les condicions del problema. L'expressió $2x + 3 - 2$ expressa els 2 cm que li lleva a la base i $x + 5$ expressa els 5 cm que li afigen a l'altura.

Pas 2: Busca una bona estratègia.

Si s'ha format un quadrat com els costats són iguals ambdues expressions han de ser equivalents:
$2x + 3 - 2 = x + 5$

Pas 3: Porta avant la teua estratègia

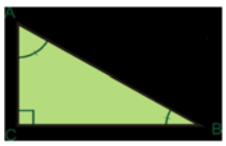
Resol l'equació: $2x + 3 - 2 - x - 3 + 2 = x - x - 3 + 2 + 5$; $2x - x = 4$; $x = 4$

Solució: x = 4 cm és la longitud de l'altura del rectangle. Per tant, $2 \cdot 4 + 3 = 11$ cm mesura la base del rectangle.

Pas 4: Comprova el resultat. Pensa si és raonable.

En efecte, a l'altura li sumem 5, 4 + 5 = 9, i a la base li restem 2, 11 – 2 = 9, s'obté un quadrat.

Activitats proposades



23. Cada un dels costats iguals d'un triangle isòsceles és igual al doble del tercer costat menys 3 cm. Calcula la seua mesura si el perímetre del triangle és 84 cm.

24. Calcula l'àrea d'un triangle rectangle, sabent que els seus catets sumen 20 cm i el catet major mesura 4 cm més que el menor.

25. Calcula la mesura dels angles aguts d'un triangle rectangle, sabent que l'angle major és igual al triple del menor menys 6º.

Autora: Raquel Caro
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

3.4. Altres problemes

Activitats resoltes

- Si tenim 21 bitllets de 5 € i de 10 € que sumen en total 170 €, quants bitllets tenim de cada classe?

Pas 1: Abans de començar a actuar, intenta entendre bé el problema

Anomena x al nombre de bitllets de 5 € i la resta, 21 – x, serà el nombre de bitllets de 10 €.

Pas 2: Busca una bona estratègia.

Planteja l'equació que expressa la suma en euros dels dos tipus de bitllets:

$5 \cdot x + 10 (21 – x) = 170$

Pas 3: Porta avant la teua estratègia

Per a resoldre l'equació, el primer, llevarem parèntesi: $5x + 210 – 10x = 170$

Deixa al primer membre tots els termes amb *x*, i en el segon els que no tenen *x*:

$5x – 10x + 210 – 210 = – 210 + 170$

Fes operacions: $– 5x = – 40$

Aïlla la incògnita: $x = (– 40) : (– 5) = + 8$

Per tant, tenim 8 bitllets de 5 €, i 21 – 8 = 13 és el nombre de bitllets de 10 €.

Pas 4: Comprova el resultat. Pensa si és raonable.

Comprovem que $8 \cdot 5 = 40$ € i $13 \cdot 10 = 130$ €. I que, en efecte, 40 + 130 = 70 €.

Solució: Tenim 8 bitllets de 5 € i 13 bitllets de 10 €.

Activitats proposades

26. Dues motocicletes ixen al mateix temps de dos punts que disten 420 km, en la mateixa direcció però en sentit contrari. La primera porta una velocitat de 60 km/h i la segona, de 80 km/h. Quant temps tardaran a encreuar-se?

Ajuda: Fes un diagrama per a comprendre l'enunciat

Solució: Tarden 3 hores a encreuar-se.

27. Dos cotxes ixen de dos punts situats a 560 km de distància, un a la trobada de l'altre. El primer porta una velocitat de 70 km/h i el segon de 90 km/h. Quantes hores tarden a encreuar-se?

28. Si en el portamonedes tenim 16 monedes de 10 cent i de 20 cèntims d'euro, i en total reunim 2 €, quantes monedes de cada classe tenim?

29. Si un bolígraf val el triple del preu d'un llapis, he comprat un total de 7 llapis i bolígrafs, i he pagat en total 5,50 €, quants bolígrafs i quants llapis he comprat?

30. Neus té una parella d'hàmsters amb una ventrada de diverses cries. Li regala a un amiga la meitat de les cries. A un segon amic li regala la meitat de les cries que li queden més mitja cria. L'única cria que li queda es la regala a un tercer amic. Quantes cries formaven la ventrada?

31. Dues amigues, Maite i Anna, van anar a visitar una granja en què hi havia gallines i conills. En eixir Anna li preguntà a Maite: Saps quantes gallines i quants conills hi havia. No, digué Maite, però hi havia en total 72 ulls i 122 potes. Esbrina el nombre de gallines i de conills de la granja.

32. D'un depòsit ple de líquid es trau la mitat del contingut, després la tercera part de la resta i queden encara 1600 litres. Calcula la capacitat del depòsit.

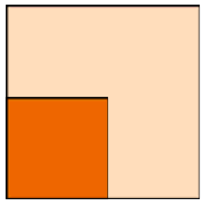
Autora: Raquel Caro
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

4. EQUACIONS DE 2n GRAU

Hi ha equacions de segon grau que ja saps resoldre. El curs pròxim estudiaràs com resoldre-les totes. Però en aquest curs aprendrem a resoldre algunes. Per exemple, el següent problema ja saps resoldre'l:

Activitats resoltes

- S'augmenta el costat d'un taulell quadrat en 3 *cm* i la seua àrea ha quedat multiplicada per 4, Quin costat tenia el taulell?



Plantegem l'equació:

$$(x + 9)^2 = 16x^2$$

Aquesta equació si saps resoldre-la! $x + 9 = 4x \to 9 = 3x$, per tant el costat és de 3 *cm*.

Hi ha una altra solució, $x + 9 = -4x \to 9 = 5x = -9 \to x = -9/5$, que no té sentit com a costat d'un quadrat.

Estudiarem de forma ordenada aquestes equacions.

4.1. Concepte d'equació de 2n grau

Una **equació de segon grau** és una equació polinòmica en la que la major potència de la incògnita és 2. Les equacions de segon grau es poden escriure de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

on a, b i c són nombres reals, amb $a \neq 0$.

Exemple 1:

- Són equacions de 2n grau per exemple

$$5x^2 - 8x + 3 = 0; \qquad -6x^2 + 2x + -9 = 0; \qquad x^2 - 25x - 1,1 = 0.$$

Exemple 2:

- Els coeficients de les equacions de 2n grau són nombres, per tant poden ser fraccions o arrels. Per exemple:

$$\frac{3}{5}x^2 - 4x + \frac{1}{2} = 0 \;; \quad \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{3}{4} = 0 \;; \quad -2,7x^2 + 3,5x - 0,2 = 0; \quad \sqrt{2}x^2 + 3x - \sqrt{5} = 0.$$

Activitats proposades

33. Indica si són equacions de segon grau les equacions següents:

a) $5x^2 - \sqrt{2}x + 8 = 0$ c) $3x^2 - 5 = 0$ e) $2x^2 - \frac{3}{x} = 0$

b) $7xy^2 - 2 = 0$ d) $6 - 8,3x = 0$ f) $2x^2 - 3\sqrt{x} + 4 = 0$

34. A les següents equacions de segon grau, indica qui són *a*, *b* i *c*.

a) $7 - 8x^2 + 2x = 0$ b) $-6x^2 + 9x = 0$

c) $4x^2 - 5 = 0$ d) $x^2 - 3x + 5 = 0$

4.2. Resolució d'equacions de 2º grau incompletes

Anomenem **equació de 2n grau incompleta** a aquella equació de segon grau en què el coeficient *b* val 0 (falta *b*), o el coeficient *c* val 0 (falta *c*).

Exemple:

- L'equació de 2n grau $3x^2 - 15 = 0$ és incompleta perquè el coeficient $b = 0$, és a dir, falta *b*.
- L'equació de 2n grau $3x^2 - 15x = 0$ és incompleta perquè no té *c* , és a dir, $c = 0$.

Les equacions de 2n grau incompletes es resolen d'una manera o una altra depenent del tipus que siguen.

Si el coeficient *b* = 0: Aïllem la incògnita normalment, com fèiem a les equacions de primer grau:

$$ax^2 + c = 0 \Rightarrow ax^2 = -c \Rightarrow x^2 = \frac{-c}{a} \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{-c}{a}} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

Si el coeficient *c* = 0: Traiem *x* factor comú:

$$ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x\,(ax + b) = 0.$$

Perquè el producte de dos factors valga zero, un dels factors ha de valdre zero.

Per tant $x = 0$, o $ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = \frac{-b}{a}$

Exemples:

- A l'equació $2x^2 - 50 = 0$ falta la *b* . Per a resoldre-la aïllem la incògnita, és a dir, x^2 :

$$2x^2 - 50 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 50 \Rightarrow x^2 = 50/2 = 25$$

Una vegada que arribem ací, ens falta llevar aqueix quadrat que porta nostra incògnita. Per a això, farem l'arrel quadrada en els 2 membres de l'equació:

$$x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$$

Així hem obtingut les dues solucions de la nostra equació, 5 i –5. En efecte, $2\cdot 5^2 - 50 = 2\cdot 25 - 50 = 0$, i $2\cdot(-5)^2 - 50 = 2\cdot 25 - 50 = 0$

- A l'equació $3x^2 - 21x = 0$ falta la *c* . Per a resoldre-la, traiem *x* factor comú:

$$3x^2 - 21x = 0 \Rightarrow 3x(x - 7) = 0$$

Una vegada que arribem ací, tenim dues opcions

1) $3x = 0 \Rightarrow x = 0$.
2) $x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7$.

Així hem obtingut les dues solucions de l'equació $x = 0$ i $x = 7$.

Activitats resoltes

- Resol l'equació de 2n grau $2x^2 - 72 = 0$:

Solució : Es tracta d'una equació de 2n grau incompleta on falta la *b* . Per tant, aïllem la incògnita: $2x^2 - 72 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 72 \Rightarrow x^2 = 72/2 = 36 \Rightarrow x = \pm\sqrt{36} = \pm 6$. Les arrels són 6 i –6.

- Resol l'equació de 2n grau $x^2 + 11x = 0$:

Solució : Es tracta d'una equació de 2n grau incompleta on falta la *c* . Per tant, traiem factor comú:

$x^2 + 11x = 0 \Rightarrow x(x + 11) = 0$ i obtenim les dues solucions: $x = 0$ i $x + 11 = 0 \Rightarrow x = -11$.

Activitats proposades

35. Resol les següents equacions de 2n grau incompletes:

a) $3x^2 + 9x = 0$ b) $2x^2 - 8 = 0$ c) $x^2 - 81 = 0$ d) $2x^2 + 5x = 0$

4.3. Resolució d'equacions de 2n grau completes

S'anomena **equació de segon grau completa** a aquella que té valors diferents de zero para a , b i c .

Per a resoldre les equacions de segon grau completes, usarem la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Aquesta fórmula ens permet calcular les dues solucions de la nostra equació.

Anomenarem **discriminant** a la part de la fórmula que està a l'interior de l'arrel:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Activitats resoltes

- Resol l'equació de segon grau $x^2 - 5x + 6 = 0$

Solució : Primer hem de saber qui són a, b i c: $a = 1$; $b = -5$; $c = 6$

Substituint aquests valors a la nostra fórmula, obtenim:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

Per tant, les nostres dues solucions són:

$$x_1 = \frac{5+1}{2} = 3 \quad ; \quad x_2 = \frac{5-1}{2} = 2$$

En efecte, $3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$, i $2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$, per tant 3 i 2 són solucions de l'equació.

Activitats proposades

36. Resol les següents equacions de 2n grau completes:

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$ b) $2x^2 + 5x - 7 = 0$ c) $3x^2 - 8x + 2 = 0$ d) $x^2 - x - 12 = 0$

5. SISTEMES D'EQUACIONS LINEALS

5.1. Concepte de sistema d'equacions lineals

Un **sistema d'equacions lineals** amb dues incògnites es pot expressar de la forma:

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

On *a, b, a''* i *b''* són nombres reals que es denominen **coeficients** i *c* i *c''* també són nombres reals anomenats **termes independents**.

Anomenem **solució** del sistema al parell de valors (x , y) que satisfan les dues equacions del sistema.

Es diu que dos sistemes d'equacions són **equivalents**, quan tenen la mateixa solució.

Exemple:

- *Són sistemes d'equacions lineals:*

$$\begin{cases} 3x-4y=-1 \\ 2x+5y=7 \end{cases};\quad \begin{cases} 5x+2y=7 \\ x-y=0 \end{cases};\quad \begin{cases} x+2y=3 \\ 7x-3y=4 \end{cases};\quad \begin{cases} 4y+2=3x \\ 7x-3=5y \end{cases}$$

- ***No** és un sistema lineal* $\begin{cases} 3xy+5y=7 \\ 4x-8xy=9 \end{cases}$ *perquè té termes en xy.*

- Tampoc ho és $\begin{cases} 3x^2+5y=7 \\ 4x-8y=9 \end{cases}$ perquè té un terme en x^2.

Activitats proposades

37. Raona si són o no sistemes d'equacions lineals els sistemes següents:

a) $\begin{cases} xy+7y=9 \\ 8x-5y=10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2y-3x=4 \\ 5x-6y=-7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 8x-9=5y \\ 4x+7y=2/3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x^2+y=2 \\ 3x+y^2=4 \end{cases}$

5.2. Resolució de sistemes pel mètode de substitució

El mètode **de substitució** consisteix a aïllar una incògnita d'una de les equacions del sistema i substituir l'expressió obtinguda a l'altra equació.

Així, obtenim una equació de primer grau en què podem calcular la incògnita aïllada. Amb el valor obtingut, obtenim el valor de l'altra incògnita.

Exemple:

- *Resoldrem el sistema* $\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ x+2y=3 \end{cases}$ *pel mètode de substitució:*

Aïllem x de la segona equació:

$$\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ x+2y=3 \Rightarrow x=3-2y \end{cases}$$

i la substituïm a la primera:

Autora: Raquel Caro
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

$2(3-2y)-3y=-1 \Rightarrow 6-4y-3y=-1 \Rightarrow -4y-3y=-1-6 \Rightarrow -7y=-7 \Rightarrow y=(-7)/(-7)=1$

Amb el valor obtingut de y, calculem la x:

$x = 3-2y \Rightarrow x = 3-2\cdot 1 = 1.$

Solució:

$$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

5.3. Resolució de sistemes pel mètode d'igualació

El **mètode d'igualació** consisteix a aïllar la mateixa incògnita de les dues equacions que formen el sistema i igualar els resultats obtinguts.

Així, obtenim una equació de primer grau en la que podrem calcular la incògnita aïllada. Amb el valor obtingut, calculem el valor de l'altra incògnita.

Exemple:

- *Resoldrem el sistema* $\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ x+2y=3 \end{cases}$ *pel mètode d'igualació:*

Aïllem la mateixa incògnita de les dues equacions que formen el sistema:

$$\begin{cases} 2x-3y=-1 \Rightarrow x=\dfrac{3y-1}{2} \\ x+2y=3 \Rightarrow x=3-2y \end{cases}$$

Igualem ara els resultats obtinguts i resolem l'equació resultant:

$$\frac{3y-1}{2}=3-2y \Rightarrow 3y-1=2(3-2y)=6-4y \Rightarrow 3y+4y=6+1 \Rightarrow 7y=7 \Rightarrow y=\frac{7}{7}=1$$

Amb el valor obtingut de y, calculem la x:

$x = 3-2y \Rightarrow x = 3-2\cdot(1) = 1$

Solució:

$$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

5.4. Resolució de sistemes pel mètode de reducció

El **mètode de reducció** consisteix a eliminar una de les incògnites sumant les dues equacions. Per fer això es multipliquen una o ambdues equacions per un nombre de manera que els coeficients de x o y siguen iguals però de signe contrari.

Exemple:

- *Resoldrem el sistema* $\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ x+2y=3 \end{cases}$ *pel mètode de reducció:*

Multipliquem la segona equació per -2 perquè els coeficients de la x siguen iguals però de signe contrari

Autora: Raquel Caro
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

i sumem les equacions obtingudes:

$$\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ x+2y=3 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-2)} \quad \xrightarrow{sumem} \begin{cases} 2x-3y=-1 \\ -2x-4y=-6 \end{cases}$$

$-7y = -7 \Rightarrow y = (-7)/(-7) = 1$

Amb el valor obtingut de y, calculem la x:

$2x - 3\cdot 1 = -1 \Rightarrow 2x = -1 + 3 = 2 \Rightarrow x = 2/2 = 1$

Solució:

$$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

Activitats proposades

38. Resol els següents sistemes pel mètode de substitució:

a) $\begin{cases} 2x+4y=-5 \\ 3x-6y=7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+4y=0 \\ 3x+6y=11 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x-7y=1 \\ 8x+7y=10 \end{cases}$

39. Resol els següents sistemes pel mètode d'igualació:

a) $\begin{cases} 6x+7y=8 \\ -2x+3y=-4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-3y=-5 \\ 4x+2y=14 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 7x-4y=3 \\ 3x+2y=5 \end{cases}$

40. Resol els següents sistemes pel mètode de reducció:

a) $\begin{cases} 3x+y=4 \\ 2x-5y=14 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x+3y=2 \\ 4x+y=7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+3y=0 \\ 3x-2y=13 \end{cases}$

Autora: Raquel Caro
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

CURIOSITATS. REVISTA

A)Quadrats màgics

Al quadre Melancolia del famós pintor alemany Albert Dürer (1471-1528) apareix aquest quadrat màgic en què totes les files, columnes i diagonals sumen el mateix, i a més aqueix mateix resultat s'obté sumant les quatre caselles centrals.

A més, les dues caselles del centre de la línia inferior indiquen l'any en què aquest quadrat màgic va ser resolt, 1514.

40. Confecciona un quadrat màgic de 3 x 3 caselles, col·locant els dígits de l'1 al 9 de manera que totes les files, totes les columnes, i totes les diagonals sumen el mateix.

B) EMMY NOETHER (1882 – 1935)

Emmy Noether

Emmy Noether va ser una famosa algebrista. Nasqué a Alemanya, filla de pares jueus. Son pare era catedràtic de matemàtiques a la Universitat i Emmy heretà d'ell la passió per les matemàtiques. No obstant això, per aquella època la Universitat no admetia que les dones desenvoluparen estudis científics, així que hagué d'aconseguir un permís especial perquè la deixaren assistir a les classes, encara que no tenia dret a examinar-se. Anys més tard, les lleis canviaren i pogué doctorar-se. Treballà amb els matemàtics alemanys més brillants i desenvolupà un teorema essencial per a la Teoria de la Relativitat en què estava treballant Albert Einstein. Davant de la situació política d'Alemanya, amb la pujada en poder de Hitler, hagué d'exiliar-se als Estats Units. Allí coincidí amb **Einstein** qui li dedicà aquestes paraules: *"Segons el parer dels matemàtics més competents que encara viuen, des que les dones començaren a rebre ensenyança superior, Emmy Noether ha tingut el geni creatiu més destacat que haja sorgit fins a la data de hui en el camp de la matemàtica"*.

C) DIOFANT

Diofant va ser un famós matemàtic grec del segle III d. C. A l'epitafi de la seua tomba escrigué:

Caminant! Ací jauen les restes de Diofant. Els nombres poden mostrar oh meravella! La duració de la seua vida, la sisena part de la qual constituí la bella infància.

Havia transcorregut a més una dotzena part de la seua vida quan es cobrí de borrissol la seua barba.

A partir d'ací, la setena part de la seua existència transcorregué en un matrimoni estèril.

Passà, a més un quinquenni i llavors li féu feliç el naixement de primogènit.

Aquest entregà el seu cos i la seua bella existència a la terra havent viscut la meitat del que son pare arribà a viure.

Per la seua banda, Diofant descendí a la sepultura amb profunda pena havent sobreviscut quatre anys al seu fill.

Dis-me, caminant, quants anys visqué Diofant.

41. a) Escriu en llenguatge algebraic l'epitafi de la tomba de Diofant

b) Resol l'equació. Comprova que Diofant visqué 84 anys.

RESUM

		!!br0ken!!
Expressió algebraica	Expressions que reflecteixen una situació mitjançant lletres i nombres	Àrea d'un rectangle = base per altura: $A = b \cdot a$
Valor numèric d'una expressió algebraica	Nombre que s'obté en substituir les lletres per nombres i fer les operacions.	El valor numèric de $x + 3x + 5$ per a $x=-2$ es: $-2 + 3(-2) + 5 -2 - 6 + 5 = -3$
Equació	Igualtat entre dos expressions algebraiques.	$3x - 1 = 2x + 5$
Incògnites	Lletres de valor desconegut que contenen una equació	A $3x - 1 = 2x + 5$ la incògnita és x.
Grau d'una equació	El major exponent de la incògnita.	L'equació $3x - 1 = 2x + 5$ és de primer grau. L'equació $3x^2 = 27$ és de segon grau.
Solució d'una equació	Nombre pel qual es pot substituir la incògnita perquè la igualtat siga certa.	Solució de $3x - 1 = 2x + 5$ és $x = 6$.
Resoldre una equació	És trobar la seua solució.	$\mathbf{3x - 1 = 2x + 5}$ $3x - 2x -1 + 1 = 2x - 2x + 5 +1$; $x = 6$
Equacions equivalents	Tenen les mateixes solucions	$2x - 5 = x + 2$ és equivalent a: $2x - x = 2 + 5$
Passos per a resoldre una equació:	Llevar parèntesi Llevar denominadors Agrupar els termes amb x a un membre i els termes sense x a l'altre. Operar Aïllar la x.	$\mathbf{(3x - 1) = 7/2}$ 1. $6x - 2 = 7/2$ 2. $12x - 4 = 7$ 3. $12x = 7 + 4$ 4. $12x = 11$ 5. $x = 11/12$
Passos per a resoldre un problema mitjançant equacions	Llegir l'enunciat. Escriure l'equació. Resoldre l'equació. Comprovar la solució.	Trobar un nombre que sumat a 7 dóna el mateix que el seu doble menys 3. 1) Comprendre l'enunciat 2) $x + 7 = 2x - 3$ 3) $x - 2x = -3 - 7$; $-x = -10$; $x = 10$ 4) $10 + 7 = 2 \cdot 10 - 3$
Equació de segon grau	És una equació algebraica en la que la major potència de la incògnita és 2. Té la forma: $ax^2 + bx + c = 0$ on a, b i c són nombres reals, amb $a \neq 0$.	$-3x^2 + 7x + -8 = 0$
Resolució d'equacions de 2n grau incompletes	Si $b = 0$, $ax^2 + c = 0$, aïllem la incògnita: $x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$. Si $c = 0$, $ax^2 + bx = 0$: $x = 0$ y $x = \frac{-b}{a}$	$2x^2 - 18 = 0$: $x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$ $3x^2 - 15x = 0 \Rightarrow 3x(x - 5) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$; $x_2 = 5$.
Resolució d'equacions de 2º grau completes	S'empra la fórmula: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x^2 - 5x + 6 = 0$: $x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2}$ $x_1 = 3$, $x_2 = 2$
Sistema d'equacions lineals	$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$	$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 7x - 3y = 4 \end{cases}$
Mètodes de resolució	**Substitució:** aïllar una incògnita i substituir a l'altra equació. **Igualació:** aïllar la mateixa incògnita a les dues equacions. **Reducció:** sumar les dues equacions, multiplicant-les per nombres adequats.	

Autora: Raquel Caro
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

EXERCICIS I PROBLEMES.

Llenguatge algebraic

1. Si anomenem x a l'edat de Lluís, expressa algebraicament:

a) Lola té l'edat que Lluís tenia fa 11 anys.

b) Jordi té l'edat que Lluís tindrà d'ací a 2 anys.

c) Els anys que falten perquè Lluís complisca 30 anys.

d) Carme té la meitat de l'edat de Lluís.

2. En una granja hi ha un nombre d'ovelles desconegut. Indica en llenguatge algebraic el nombre de potes i d'orelles que hi ha.

3. Escriu en llenguatge algebraic

a) L'edat de Cristina és doble que la que tindrà el seu germà d'ací a 5 anys

b) L'edat de Rafel és la tercera part que la que tenia la seua germana fa 3 anys.

4. Escriu al teu quadern utilitzant expressions algebraiques:

a) Raquel té x cromos

b) Pep té 10 cromos més que Raquel

c) Teresa té el triple de cromos que Pep

d) Carmela té el mateix nombre de cromos que Raquel i Pep junts

e) Marta té la mitat de cromos que Teresa.

5. Copia al teu quadern i relaciona cada enunciat verbal amb la seua expressió algebraica:

a) Sumar 9 al triple d'un cert nombre	1) $3x + 2(x + 1)$
b) Restem 7 a la meitat d'un nombre	2) $3x + 9$
c) El triple d'un nombre més el doble del següent	3) $8x$
d) El que ens tornen si paguem 20 € per una certa compra	4) $x/2 – 7$
e)El perímetre d'un octògon regular.	5) $x – 3$
f) L'edat d'algú fa 3 anys	6) $20 – x$

6. Calcula el valor numèric de les següents igualtats per al valor indicat de x:

a) $y = 0,5 + 3x$ per a x = 3 b) $y = 1,6x$ per a $x = 0,75$ c) $y = 4 + 1,5x$ per a $x = 2,1$

7. Simplifica les expressions següents:

a) $3a^2b – 2\,a^2\,b + 7\,a^2\,b$ b) 5xy + 7xy – 2xy c) 6x + 9x – 3x

d) 2x + 7x – 2y e) $3ab + 8ab – 6ab$

8. Realitza les operacions següents

a) 3x + 5x – 2y + 9y – 4x – 3y b) $(2x – 5\,x^2) – (3\,x^2 + 5x)$

c) 3(7x – 3) – 2(2x + 5) d) 2a – 5a + 7a – 8a + b

Autora: Raquel Caro
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Equacions de primer grau

9. Troba el nombre que falta:

a) O + 2 = 5 b) O + 3 = 1 c) O – 4 = 6 d) O – 4 = –1

10. Si Clara té x anys i sabem que encara no ha complit els 5, indica qui de les següents persones pot ser la mare de Clara:

Persona	*Edat en anys*
Júlia	$3x - 9$
Maria	$x^2 - 17$
Frederica	$3x + 5 + 7x + 6$
Elisa	$x - 2x + 9$

11. Resol **mentalment** les següents equacions i escriu la solució al teu quadern:

a) $x + 3 = 2$ b) $x - 2 = 3$ c) $x/5 = 1$ d) $x/3 + 2/3 = 4/3$

12. Tria entre les següents equacions totes les que siguen equivalents a l'equació 3x – 6 = x + 9.

a) $x + 10 = 17{,}5$ c) $8 - x = 3x - 5x$ e) $4x = 30$ g) $2x = 9 + 6$ i) $10 - 2{,}5 = x$

b) $6x + 2x = 60$ d) $5x - 6 = 3x + 9$ f) $-6 - 9 = x - 3x$ h) $3x = 15$ j) $x = 7{,}5$

13. Resol les equacions següents:

a) $2x - 5 = 4x - 7$ d) $x + 9 = 3x - 3$ g) $4x + 2 = 14$ i) $3x - 5 = 2x - 5$

b) $x - 12 = 7x + 6$ e) $5x - x + 7 = 2x + 15$ h) $3x - 4 = x + 18$ k) $3x - 4 + x = 8$

c) $x - 1 = x + 5x + 9$ f) $2x - 27 = x$ i) $4x - 6 = x + 9$ l) $3 - 10 = x + 1$

14. Escriu tres equacions equivalents a $2x - 3 = 5$.

15. Escriu tres equacions que tinguen com a solució $x = 7$.

16. Resol les equacions següents: (Suggeriment: il·lustra les equacions mitjançant balances).

a) $x - 5 = 9$ b) $x - 8 = 2$ c) $x - 3 = 4$ d) $x - 9 = 6$

17. Resol al teu quadern les equacions següents:

a) $2x + 4x = 54$ b) $4x - 3x = 16$ c) $5(x - 2) = 70$ d) $-5x - 2x = -49$

18. Resol les equacions següents:

a. $2x + 3 = 5$ b. $4x - 5 = x + 4$ c. $x/3 = -2$ d. $-2(3x - 4) = 2x + 5$

19. Resol les equacions següents:

a) $4x - 4 = 2x$ b) $2(x + 7) = x$ c) $x/3 + 2 = x$ d) $3(x + 3x) = x + 50$

20. Resol les equacions:

a) $x/2 - 2(x - 3x) = 27$ b) $2x - (2x - 3) + x = 4$ c) $7 = 1 + x/2$ d) $4 - x = 2 + x/2$

21. Resol:

a) $x / 3 = 7$; b) $3x = 9$; c) $x + 4 = 12$; d) $x - 7 = 1$

22. Practica en el teu quadern resolent les següents sèries d'equacions:

Autora: Raquel Caro
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

1ª sèrie

1) $x + 4 = 6$ 2) $x + 6 = 3$ 3) $15 = 11 + x$ 4) $7 = x + 3$ 5) $x + 8 = 4$

6) $x + 6 = 8$ 7) $x + 7 = 3$ 8) $8 + x = 16$ 9) $3 = 7 + x$ 10) $2 = x + 4$

2a sèrie

11) $x - 3 = 6$ 12) $x - 4 = 2$ 13) $4 = x - 1$ 14) $7 - x = 2$ 15) $6 - x = 4$

16) $3 = 9 - x$ 17) $x - 4 = 7$ 18) $x - 2 = 0$ 19) $8 - x = 3$ 20) $9 - x = 5$

3a sèrie

21) $3x = 6$ 22) $4x = 16$ 23) $6x = 18$ 24) $8 = 2x$ 25) $-12 = 3x$

26) $2x = -6$ 27) $4x = 11$ 28) $3x = 6$ 29) $9 = 3x$ 30) $18 = 6x$

4a sèrie

31) $x/5 = 1$ 32) $x/3 = 7$ 33) $x/-2 = 3$ 34) $x/5 = 2/3$ 35) $x/10= 3/2$

36) $x/7 = 2$ 37) $x/12 = 3/4$ 38) $x/3 = -2/9$ 39) $x/5 = -2$ 40) $x/7 = 3/14$

5a sèrie

41) $x + 3x = 16$ 42) $4x + 2x = 6$ 43) $6x = 8 + 10$ 44) $3x + 7 = 4$

45) $2x + 7 = 11 + 4x$ 46) $x +1 = 2x - 5 + 2x$ 47) $3x - 2 + 4x = 3 - 3x + 1$

48) $4x - 3 + x = 3x + 7$ 49) $x + 4 + 4x = 2 - 2x + 5$ 50) $6x + 4 - 2x = 3 + 2x - 7$

6a sèrie

51) $x/3 -2 = 4$ 52) $3x/5 + 4 = 3$ 53) $x/3 + 2x/3 = 7$ 54) $x/5 + 3x/5 = 9$

55) $x/2 + x/2 + 3 = 5$ 56) $3x/7 + 2x/7 + 3 = 6$ 57) $x + x/5 = 7$ 58) $x/2 + 5x/2 + 3 = 5$

59) $5 + x/7 = 21$ 60) $3 + x/3 = 9$

7a sèrie

61) $3 + 4(2 - x) = 9 - 2x$ 62) $5 - 2(x + 2) = x - 5$

63) $13 + 3(2x + 5) = 2(x + 3) - 1$ 64) $7 - 2(3x - 5) = 13 - 2(4x - 7)$

65) $5x - 3(2x - 4) = 36 - 3(4x + 6)$ 66) $2(3x - 5) - (2x + 1)= 17 - 3x$

67) $2(x + 4) + 3x = -34 - 3(5x + 6)$ 68) $5 - 2(7 - 2x) = x - 6$

69) $3x - 4(x - 1) = 8 - 5x$ 70) $5x - (2x + 3) = 2x - 5$

8a sèrie

71) $x/3 + x/6 = 12$ 72) $x/6 + x/3 + x/2 = 5$ 73) $(x - 3)/5 = 1$ 74) $x/2 - 3 = 4$

75) $(2x + 9)/3 = 7$ 76) $(2x + 9)/3 = x$ 77) $(x - 3)/5 = x$ 78) $5 + x/4 = 6$

79) $4x/3 + 5x/6 = x/3 + 2$ 80) $2x/3 + 7x/2 + 5x = 8 + x/6$

Problemes

23. Si un repartidor de comandes ha deixat els 2/5 dels paquets que portava a la primera casa, i encara li queden 100 kg per repartir, quants quilos tenia en un principi?

24. Resol mentalment els problemes següents:

a) Quants cromos tinc si el doble de què posseïsc és 20?

b) Quantes boletes tinc si en donar-me 7 tindré 37?

c) Quants discos tinc si en regalar 5 em queda una dotzena?

d) Manuel, d'ací a 6 anys tindrà 18. Quants anys té ara?

25. En una granja hi ha 70 animals entre gallines i conills, i entre els dos, sumen 180 potes. Quantes gallines hi ha a la granja?

26. Troba el nombre tal que el seu doble més tres siga igual que el seu triple menys dos.

27. Repartim 150 € entre tres persones de manera que la primera rep el doble que la segona i aquesta el triple que la tercera. Quant li correspon a cada una?

28. L'angle major d'un triangle mesura el doble que el menor i aquest 20 graus menys que el mitjà. Quant mesura cada un dels angles del triangle? (Recorda que els tres angles d'un triangle sumen 180 graus)

29. Si al quíntuple d'un nombre li restes tres obtens 27. Quin és el nombre?

30. Un nombre i el seu següent sumen 87. Quins són aqueixos nombres?

31. Un bolígraf costa el triple que un llapis. He comprat cinc llapis i quatre bolígrafs i m'han costat 2,40€. Quant costa un llapis? I un bolígraf?

32. Al meu portamonedes porte deu monedes, unes de 50 cèntims i altres de 20 cèntims. Si tinc 2,90€ en total, Quantes monedes de cada tipus tinc?

33. El perímetre d'un rectangle és de 120 metres i l'altura és 25 centímetres més llarga que la base. Quant mesuren la base i l'altura del rectangle?

34. Laura diu que si al triple de l'edat que té li restes la meitat, el resultat és 30. Quina edat té Laura?

35. Un fill té 12 anys i son pare 35. Quants anys deuen de passar perquè l'edat del pare siga el doble que la del fill?

36. Calcula la longitud del costat d'un triangle equilàter sabent que el seu perímetre és de 18 cm.

37. Calcula la longitud dels costats d'un triangle isòsceles sabent que el perímetre és 18 m i cada costat igual mesura 3 cm més que el costat desigual.

38. Si a la tercera part d'un nombre li sumes dos, obtens el mateix resultat que si al nombre li sumes un i divideixes entre dos.

39. El perímetre d'un triangle isòsceles mesura 30 centímetres. El costat desigual mesura la meitat d'un dels seus costats iguals. Quant mesura cada costat?

40. Hem comprat 12 articles entre taules i cadires. Quantes hem comprat de cada si cada taula costa 130 € i cada cadira 60 € i en total ens hi ha costat 750 €?

41. Quadrats màgics: En el quadro Melancolia del famós pintor alemany Albert Dürer (1471-1528) apareix aquest quadrat màgic en què totes les files, columnes i diagonals sumen el mateix, i a més aqueix mateix resultat s'obté sumant les quatre caselles centrals. A més, les dues caselles del centre de la línia inferior indiquen l'any en què aquest quadrat màgic va ser resolt, 1514. Confecciona un quadrat màgic de 3 x 3 caselles, col·locant els dígits de l'1 al 9 de manera que totes les files, totes les columnes, i totes les diagonals sumen el mateix.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

42. DIOFANT: Diofant va ser un famós matemàtic grec del segle III d. C. A l'epitafi de la seua tomba escrigué:

- Caminant! Ací jauen les restes de Diofant. Els nombres poden mostrar oh meravella! La duració de la seua vida, la sisena part de la qual constituí la bella infància.
- Havia transcorregut a més una dotzena part de la seua vida quan es cobrí de borrissol la seua barba.
- A partir d'ací, la setena part de la seua existència transcorregué en un matrimoni estèril.
- Passà, a més un quinquenni i llavors li féu feliç el naixement de primogènit.
- Aquest entregà el seu cos i la seua bella existència a la terra havent viscut la meitat del que son pare arribà a viure.
- Per la seua banda, Diofant descendí a la sepultura amb profunda pena havent sobreviscut quatre anys al seu fill.

Dis-me, caminant, quants anys visqué Diofant.

a) Escriu en llenguatge algebraic l'epitafi de la tomba de Diofant

b) Resol l'equació. Comprova que Diofant visqué 84 anys.

Equacions de segon grau

43. Resol les següents equacions de 2n grau

a) $x^2 + 5x - 6 = 0$ b) $7x^2 + 12x = 0$ c) $3x^2 + 75 = 0$

d) $x^2 - 2x + 7 = 0$ e) $6x^2 - 5x - 7 = 0$ f) $x^2 - 9 = 0$

Sistemes lineals

44. Resol els següents sistemes pel mètode de substitució:

a) $\begin{cases} 3x - 2y = -4 \\ 6x - 4y = -8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 2y = -4 \\ 9x - 6y = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - 2y = -4 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$

AUTOAVALUACIÓ

1. Els coeficients de l'expressió algebraica $8{,}3x - 2{,}5 + y$, són:

a) 8,3, 2,5 i 1 b) +8,3, –2,5 i +1 c) + 8,3 i – 2,5

2. El valor numèric de l'expressió algebraica 4 a + 3 b, quan $a = 5$ i $b = -2$, és:

a) 14 b) –14 c) 26

3. La solució de l'equació $3{,}4 + 5{,}2x - 8{,}1x = 9{,}4 + 7{,}3x$ és:

a) –10/17 b) +6/10,2 c) – 10/1,7

4. L'equació $x^2 = 4$ té de solucions:

a) 2 b) –2 c) 2 y –2

5. La suma de les edats de dues persones és de 50 anys i la seua diferència, 8 anys. Quina de les següents equacions ens permet calcular les seues edats?

a) $x + x + 8 = 50$ b) $x - 8 = 50$ c) $50 + x = 8 - x$

6. El perímetre d'un rectangle és 70 cm. Si la base és el triple de l'altura menys 5 cm, les dimensions del rectangle són:

a) 30 i 11 b) 20 i 9 c) 25 i 10

7. Tres nombres sumen 142. El mitjà és el doble del menor, i el major és triple del menor menys 8. Quina d'aquestes equacions ens permet trobar els nombres?

a) $2x + x + 3x = 142$ b) $x + 3x + 2x = 142 + 8$ c) $x + 2x + 3x = 142 - 8$

8. Tenim 20 monedes de 2 € i 1 €. Si en total tenim 30 €, de cada classe de monedes, tenim:

a) 9 i 12 b) 10 i 10 c) 12 i 6

9. Tres persones es reparteixen una quantitat de diners: la primera es queda amb 250 € més que la segona i la tercera es porta tant com la primera i la segona juntes menys 100 €. Si la quantitat a repartir és 2000 €, el resultat del repartiment és, respectivament:

a) 950 €, 400 € i 650 € b) 450 €, 650 € i 950 €

10. A quina distància dels seus respectius punts d'eixida s'encreuaran dos cotxes que ixen en sentit contrari des de dues ciutats que disten 540 km, si el primer va a 100 km/h i el segon a 80 km/h?

a) 340 km i 200 km b) 300 km i 240 km c) 420 km i 120 km