2n ESO

CAPÍTOL 3: POTÈNCIES I ARRELS

www.apuntesmareaverde.org.es

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Autora: Ana Lorente

Revisora: Irene García Saavedra

Il·lustracions: Banc d'imatges de l'INTEF

Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

1. POTÈNCIES

2. OPERACIONS AMB POTÈNCIES I PROPIETATS

3. ARRELS

Per a treballar amb nombres molt grans, per a calcular la superfície d'una habitació quadrada o el volum d'un cub ens va a resultar útil a usar les potències. En aquest capítol repassarem com operar amb elles.

Si coneixem la superfície d'un quadrat o el volum d'un cub i volem saber quin és el seu costat utilitzarem les arrels. En aquest capítol revisarem el que ja coneixes per a poder usar-les amb un poc de soltesa.

Arquimedes, al seu tractat *L'arenari* conta una manera per a expressar nombres molt grans, com el nombre de grans d'arena que hi ha a tota la Terra. És, efectivament, un nombre molt gran, però no infinit. Imagina que tota la Terra està formada per grans d'arena. Pots calcular el seu volum coneixent el seu radi que és de 6500 km. Estima quants grans d'arena caben en 1 mm^3. Estima que, per exemple, caben 100 grans. Ja saps calcular quants hi ha! Però en aquest capítol aprendràs a escriure aqueix nombre tan gran.

Autora: Ana Lorente
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

1. POTÈNCIES

Recorda que:

Ja coneixes les potències. En aquest apartat revisarem la forma de treballar amb elles.

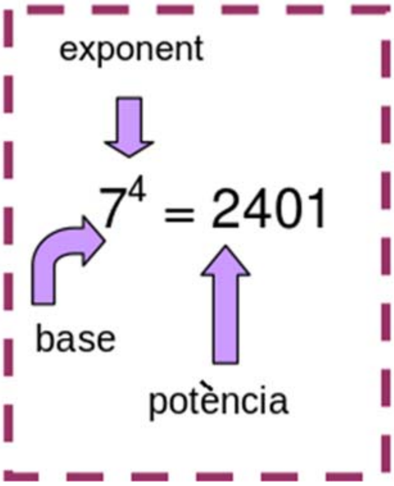
1.1. Concepte de potència. Base i exponent

Exemple:

- Joan guarda 7 boletes en una bossa, cada 7 bosses en una caixa i cada 7 caixes en un calaix. Té 7 calaixos amb boletes, quantes boletes té?

Per a esbrinar-lo has de multiplicar 7 x 7 x 7 x 7 que ho pots escriure en forma de potència: 7^4, que es llig 7 elevat a 4.

$$7 \times 7 \times 7 \times 7 = 7^4 = 2401 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7.$$



Una **potència** és una forma d'escriure de manera abreviada una multiplicació de factors iguals. La **potència** a^n de base un nombre natural a i exponent natural n és un producte de n factors iguals a la base:

$$a^n = a \cdot a \cdot a \ldots^{n \text{ factors}} \ldots\ldots \cdot a \qquad (n > 0)$$

El factor que es repeteix és la **base** i el nombre de vegades que es repeteix és **l'exponent**. Al resultat se l'anomena **potència.**

Activitats proposades

1. Calcula mentalment les següents potències i escriu el resultat al teu quadern:

a) 5^2 b) 3^4 c) 10^6 d) 4^3 e) 1^7 f) 1000^3

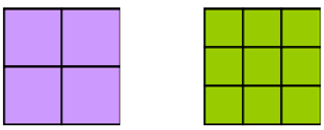
2. Calcula al teu quadern les potències següents:

a) 3^7 b) 7^5 c) 2^{10} d) 9^5 e) 25^3 f) 16^4.

1.2. Quadrats i cubs

Ja saps que:

- Si un quadrat té 2 quadradets per costat Quants quadradets conté aqueix quadrat? El nombre de quadradets que caben és $2 \cdot 2 = 2^2 = 4$. L'àrea d'aquest quadrat és de 4 unitats. I si té 3 quadradets per costat Quants quadradets conté aqueix quadrat? El nombre de quadradets que caben és $3 \cdot 3 = 3^2 = 9$. L'àrea d'aquest quadrat és de 9 unitats.



$100 = 2^2 \cdot 5^2$
és un quadrat perfecte i la seua arrel quadrada és
$2 \cdot 5 = 10$.
$4900 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$
és un quadrat perfecte i la seua arrel és
$2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$.
Són quadrats perfectes.
$36 = 2^2 \cdot 3^2$
$81 = 3^2 \cdot 3^2$
Ho són també 121, 3600 i 900?

• De quants cubets està compost el cub gran si hi ha 3 al llarg, 3 a l'ample i 3 a l'alt? El nombre de cubets és $3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3 = 27$. El volum d'aquest cub és 27 unitats.

Recorda que:

Per aquesta relació amb l'àrea i el volum de les figures geomètriques, les potències d'exponent 2 i d'exponent 3 reben noms especials:

Les potències d'exponent 2 s'anomene **quadrats** i les d'exponent 3 s'anomenen **cubs**.

Activitats proposades

3. Escriu al teu quadern el quadrat i el cub dels deu primers nombres naturals.

4. Indica quins de les següents potències són quadrats i quins són cubs:

a) 7^2 b) 11^2 c) 5^3 d) 5^4 e) 8^2 f) 16^3 g) 10^2

1.3. Lectura de potències

Recorda que:

Les potències es poden llegir de dues maneres:

Exemple:

a) Així 3^2 es pot llegir 3 elevat a 2 i també es llig 3 al quadrat.

b) 11^3 es pot llegir 11 elevat a 3 i també es llig 11 al cub.

c) 6^4 es pot llegir 6 elevat a 4 i també es llig 6 a la quarta.

d) 27^5 es pot llegir 27 elevat a 5 i també es llig 27 a la cinquena.

1.4. Potències d'u i de zero

Recorda que:

Una potència de qualsevol base diferent de zero elevada a zero és igual a 1.

Exemple:

- $9^0 = 1$ $8725^0 = 1$ $1^0 = 1$.

$$\boxed{5^0 = 1}$$

U, elevat a qualsevol exponent, és igual a 1.

Exemple:

- $1^2 = 1 \cdot 1 = 1$ $1^3 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$ $1^{35} = 1$ $1^0 = 1$.

$$\boxed{1^{37} = 1}$$

Zero, elevat a qualsevol exponent diferent de zero, és igual a 0.

Exemple:

- $0^2 = 0 \cdot 0 = 0$ $0^3 = 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$ $0^{35} = 0$.

$$\boxed{0^{54} = 0}$$

Autora: Ana Lorente
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Observació: 0^0 no se sap quant val, es diu que és una *indeterminació*.

Activitats proposades

5. Llig de dues maneres distintes les potències següents:

a) 8^3 b) 3^2 c) 16^4 d) 48^2 e) 4^5 f) 6^6.

6. Calcula mentalment:

a) 1^{6562}; b) 0^{8526} c) 9327^0 d) 0^{3782}; e) 1^{1000}; f) 9761^0.

7. Completa la taula següent al teu quadern:

a	a^2	a^3	a^4	a^5
2				
	9			
		64		
			1	
				0

1.5. Potències de 10. Notació científica.

Les potències de base 10 tenen una propietat molt particular, són iguals a la unitat seguida de tants zeros com indica l'exponent:

Exemple:

$10^1 = 10$

$10^2 = 10 \cdot 10 = 100$

$10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1.000$

$10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10.000$

$$\mathbf{10^8 = 100\ 000\ 000}$$

Sabries trobar 10^7 sense fer cap operació?

La unitat seguida de zeros és igual a una potència de 10.

Recorda que:

Açò ens permet expressar qualsevol nombre en **forma polinòmica** usant potències de 10.

$$8735 = 8 \cdot 1000 + 7 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 5 = 8 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 5$$

Un nombre en notació **científica** s'expressa com un nombre diferent de zero, multiplicat per una potència de base 10.

Autora: Ana Lorente
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

$a \cdot 10^n$

Exemple:

- Observa com s'utilitza la notació científica als exemples següents:

a) A la Torre Eiffel hi ha 2.500.000 reblons= $25 \cdot 10^5$ reblons

b) La massa de la Terra és:

$$M_T = 5\ 980\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ \text{g} = 598 \cdot 10^{25}\ \text{g}$$

c) La superfície del globus terrestre és de 500 milions de quilòmetres quadrats, per tant és igual a: 500.000.000 km^2 = $5 \cdot 10^8$ km^2.

Activitats proposades

8. Busca els exponents de les potències següents:

a) $10^{\square}$ = 100.000 b) $10^{\square}$ = 100.000.000 c) $10^{\square}$ =1000.

9. Expressa en forma polinòmica usant potències de 10:

a) 82.345 b) 3.591.825 c) 700.098 d) 2.090.190.

10. Calcula:

a) $3 \cdot 10^6$ b) $5 \cdot 10^8$ c) $2 \cdot 10^4$ d) $34 \cdot 10^5$.

11. Utilitza la **calculadora** per a obtindre potències successives d'un nombre. Si marques un nombre, a continuació dues vegades seguides la tecla de multiplicar i després la tecla igual obtens el quadrat del nombre.

a) Comprova-ho. Marca **8 * * =** , què obtens?

b) Continua polsant la tecla igual i obtindràs les potències successives:

8 * * = = =...

c) Utilitza la teua calculadora per a obtindre les potències successives de 2.

d) Torna a utilitzar-la per a obtindre les potències successives de 31 i anota-les al teu quadern.

Autora: Ana Lorente
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

2. OPERACIONS AMB POTÈNCIES I PROPIETATS

2.1. Producte de potències de la mateixa base

Recorda que:

Per a calcular el **producte** de dues o més potències de la mateixa base, es deixa la mateixa base i se sumen els exponents.

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$7^3 \cdot 7^4 = 7^{3+4} = 7^7$$

Exemple:

- $6^2 \cdot 6^3 = (6 \cdot 6) \cdot (6 \cdot 6 \cdot 6) = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^{2+3} = 6^5$

2.2. Quocient de potències de la mateixa base

Recorda que:

El **quocient** de potències de la mateixa base és igual a una altra potència de la mateixa base i d'exponent, la diferència dels exponents.

$$a^n : a^m = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$8^7 : 8^4 = 8^{7-4} = 8^3$$

Exemple:

- $3^5 : 3^3 = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 3} = 3^{5-3} = 3^2$

2.3. Elevar una potència a una altra potència

Recorda que:

Per a elevar una **potència** a una altra potència, es deixa la mateixa base i es multipliquen els exponents.

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$(9^3)^4 = 9^{3.4} = 9^{12}$$

Exemple:

- $(5^5)^3 = (5^5) \cdot (5^5) \cdot (5^5) = (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) = 5^{15}$

Activitats proposades

12. Aplica les propietats de les potències al teu quadern:

a) $8^{10} \cdot 8^2$	b) $5^{23} \cdot 5^3$	c) $2^5 \cdot 2^3 \cdot 2^6$	d) $10^5 \cdot 10^7 \cdot 10^9$
e) $(6^3)^2$	f) $(4^2)^4$	g) $(3^0)^6$	h) $(7^3)^2$
i) $9^{10} : 9^2$	j) $3^{23} : 3^3$	k) $11^8 : 11^3$	l) $5^{30} : 5^9$

m) $14^4 : 14^4$ n) $1^{35} : 1^{35}$ o) $7^3 : 7^0$ p) $8^4 \cdot 8^0$

13. T'has preguntat per què un nombre elevat a 0 és igual a 1. Analitza l'operació següent:

$$\text{i també } \frac{25}{25} = \frac{5^2}{5^2} = 5^{2-2} = 5^0$$

Per aqueix motiu es diu que tot nombre diferent de zero elevat a zero és igual a u.

2.4. Potència d'un producte

Recorda que:

La potència d'un **producte** és igual al producte de cada un dels factors elevats al mateix exponent.

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

Exemple:

- $(6 \cdot 7)^3 = 6^3 \cdot 7^3$.

2.5. Potència d'un quocient

Recorda que:

La potència d'un **quocient** és igual al quocient de cada un dels factors elevats al mateix exponent.

$$(a : b)^n = a^n : b^n$$

Exemple:

- $(7 : 9)^3 = 7^3 : 9^3$

2.6. Potències de nombres enters

Recorda que:

Per a calcular la **potència d'un nombre enter** es multiplica la base per si mateixa tantes vegades com indique l'exponent.

Exemple:

- $(+3)^4 = (+3) \cdot (+3) \cdot (+3) \cdot (+3) = +81$
- $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$

Convé tindre en compte algunes particularitats que ens ajuden a abreviar el càlcul:

Les potències de **base positiva** són nombres positius.

Les potències de **base negativa** i exponent **parell** són nombres positius.

Les potències de **base negativa** i exponent **imparell** són nombres negatius

$(+2)^4 = +16$ $(-2)^4 = +16$

$(-2)^5 = -32$

Exemple:

- $(-4)^2 = +16$
- $(-4)^3 = -64$

Activitats proposades

14. Calcula:

a) $(5 \cdot 2)^7$ b) $(64 : 4)^3$.

15. Calcula **mentalment**

a) $2^3 \cdot 2^3$ b) $3^2 \cdot 3^2$ c) $5^2 \cdot 5^2$

d) $10^{31} \cdot 10^{40} \cdot 10^4 \cdot 10^2$ e) $1^{20} \cdot 1^{27} \cdot 1^{18}$ f) $0^{41} \cdot 0^{86}$.

16. Escriu en forma d'una única potència

a) $7^5 \cdot 7^6 \cdot 7^4$ b) $6^4 \cdot 6^6 \cdot 6^7$ c) $5^{20} \cdot 5^{17}$ d) $8^6 \cdot 2^5 \cdot 2^3$.

17. Calcula **mentalment**

a) $2^3 \cdot 2^2 \cdot 2$ b) $1^4 \cdot 1^6 \cdot 1^7$ c) $10^{15} \cdot 10^5$ d) $0^2 \cdot 0^6 \cdot 0^{12}$.

18. Calcula **mentalment**

a) $10^5 \cdot 10^3 \cdot 10^2$ b) $0^3 \cdot 0^7 \cdot 0^8$ c) $1^{46} \cdot 1^{200}$ d) $5^5 \cdot 2^5$.

19. Escriu en forma d'una única potència i calcula:

a) $2^5 \cdot 5^5$ b) $10^3 \cdot 3^3$ c) $2^6 \cdot 5^6$ d) $10^5 \cdot 5^5$.

20. Escriu en forma d'una única potència:

a) $\frac{3^7 \cdot 3^{11} \cdot 3^0}{3^5 \cdot 3^3}$ b) $\frac{1{,}6^6 \cdot 1{,}6^{20} \cdot 1{,}6^1}{1{,}6^{15} \cdot 1{,}6^9}$ c)

21. Escriu en forma d'una única potència:

a) $\frac{(-3)^7 \cdot (-3)^{11} \cdot (-3)^0}{(-3)^5 \cdot (-3)^3}$ b) $\frac{(-1{,}6)^6 \cdot (-1{,}6)^{20} \cdot (-1{,}6)^1}{(-1{,}6)^{15} \cdot (-1{,}6)^9}$ c)

22. Calcula utilitzant la **calculadora**

a) $41^3 \cdot 41^2 \cdot 41$ b) $53^3 \cdot 53^2$ c) $5'2^2 \cdot 5'2$ d) $27^3 \cdot 27$.

23. Calcula utilitzant la **calculadora**

a) $58^2 \cdot 58^3 \cdot 58$ b) $23^4 \cdot 23^2$ c) $0'6^3 \cdot 0'6^5$ d) $301^2 \cdot 301$.

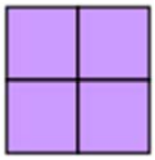
24. Calcula utilitzant la **calculadora**

a) $7{,}4^2 \cdot 7{,}4^3 \cdot 7{,}4$ b) $0{,}82^4 \cdot 0{,}82^2$ c) $7{,}35^3 \cdot 7{,}35^5$ d) $0{,}002^2 \cdot 0{,}002$.

Autora: Ana Lorente
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

3. ARRELS

3.1. Quadrats perfectes



- Si es vol construir un quadrat de costat 2, quants quadrats xicotets es necessiten?

Necessitem 4. El 4 és un **quadrat perfecte**. Observa que $2^2 = 4$.

- Si volem construir ara un quadrat de costat 3, quants quadrats xicotets necessitem? Necessitem 9. El 9 és també un quadrat perfecte. Observa que $3^2 = 9$.

Exemple:

- Quina és l'àrea d'un quadrat de 7 metres de costat?

La seua àrea val $7 \cdot 7 = 7^2 = 49$ metres quadrats.

3.2. Arrel quadrada. Interpretació geomètrica

Recorda que:

L'arrel quadrada **exacta** d'un nombre *a* és un altre nombre *b* el quadrat del qual és igual al primer:

$$\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b^2 = a$$

Exemple:

- En poder construir un quadrat de costat 2 amb 4 quadrats xicotets es diu que 2 és l'arrel quadrada de 4, ja que $2^2 = 4$, i per tant diem que 2 és *l'arrel quadrada* de 4, és a dir:

$$\sqrt{4} = 2.$$

Obtindre l'arrel quadrada exacta és l'operació oposada d'elevar al quadrat.

- Per tant com $3^2 = 9$ llavors $\sqrt{9} = 3$.
- En escriure $\sqrt{64} = 8$es diu que *l'arrel quadrada* de 64 és 8.

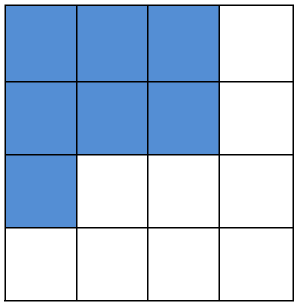
Al signe √ se li denomina **radical**, s'anomena **radicand** al nombre col·locat davall, en aquest cas 64 i es diu que el **valor de l'arrel** és 8.

Autora: Ana Lorente
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Exemple:

- Sabem que l'àrea d'un quadrat és 81, quant val el seu costat?

El seu costat valdrà l'arrel quadrada de 81. Com $9^2 = 81$, llavors l'arrel quadrada de 81 és 9. El costat del quadrat és 9.



Exemple:

- Es pot construir un quadrat amb 7 quadrats xicotets?

Observa que es pot formar un quadrat de costat 2, però sobren 3 quadrats xicotets, i que per a fer un quadrat de costat 3 falten 2 quadrats xicotets.

El nombre 7 no és un quadrat perfecte, no té arrel quadrada exacta perquè amb 7 quadrats xicotets no es pot construir un quadrat.

És més, aquells nombres naturals que no tenen arrel quadrada exacta, la seua expressió decimal és un nombre irracional, amb infinites xifres decimals no periòdiques.

Però podem afirmar que $2 < \sqrt{7} < 3$.

Com 4 és un quadrat perfecte i $\sqrt{4} = 2$, i 9 és també un altre quadrat perfecte i $\sqrt{9} = 3$, els nombres, 5, 6, 7, i 8 no són quadrats perfectes i la seua arrel quadrada és un nombre irracional.

Amb més dificultat es pot aproximar aqueixos valors, així $2{,}6 < \sqrt{7} < 2{,}7$, o podem obtindre més xifres decimals: $2{,}64 < \sqrt{7} < 2{,}65$, o bé $2{,}64575131 < \sqrt{7} < 2{,}64575132$. Podem trobar un valor aproximat de l'arrel.

Per a calcular arrels quadrades pots utilitzar la calculadora, amb la tecla

És important conèixer els quadrats perfectes, perquè mentalment, t'ajuda a saber entre quins valors enters està l'arrel quadrada que vols calcular.

Observa que:

El quadrat d'un nombre, positiu o negatiu, és sempre un nombre positiu. Després no hi ha l'arrel quadrada d'un nombre negatiu.

Activitats proposades

25. Escriu la llista dels 12 primers quadrats perfectes.

26. Calcula **mentalment** al teu quadern les arrels següents:

a) $\sqrt{49}$ b) $\sqrt{25}$ c) $\sqrt{100}$ d) $\sqrt{64}$ e) $\sqrt{81}$ f) $\sqrt{1}$ g) $\sqrt{0}$.

27. Calcula **mentalment** al teu quadern les aproximacions enteres de les arrels següents:

a) $\sqrt{51}$ b) $\sqrt{27}$ c) $\sqrt{102}$ d) $\sqrt{63}$ e) $\sqrt{80}$ f) $\sqrt{2}$ g) $\sqrt{123}$.

28. Indica quines arrels quadrades seran nombres naturals, quines, números irracionals i quines no existeixen:

a) $\sqrt{36}$ b) $\sqrt{-25}$ c) $\sqrt{-100}$ d) $\sqrt{32}$ e) $\sqrt{-7}$ f) $\sqrt{10}$ g) $\sqrt{100}$.

3.3. Arrel *n*-èsima d'un nombre

Recorda que:

- Com $2^3 = 8$ es diu que $\sqrt[3]{8} = 2$que es llig: l'arrel *cúbica* de 8 és 2. El **radicand** és 8, el valor de **l'arrel** és 2 i 3 és **l'índex**.

$\sqrt[3]{8}$**= 2 perquè 2³ = 8**

L'***arrel enèsima*** d'un nombre *a*, és un altre nombre *b*, la potència enèsima del qual és igual al primer.

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

Exemple:

- Per ser $27 = 3^3$, es diu que 3 és l'arrel *cúbica* de 27, és a dir $\sqrt[3]{27} = 3$.
- Per ser $16 = 2^4$, es diu que 2 és l'arrel *quarta* de 16, és a dir $\sqrt[4]{16} = 2$.

Observa que:

Si *n* és un nombre parell, la potència *n*-èsima d'un nombre, positiu o negatiu, és sempre un nombre positiu, per tant no hi ha l'arrel *n*-èsima d'un nombre negatiu.

Però si *n* és un nombre imparell, la potència *n*-èsima d'un nombre, si pot ser negativa.

Exemple:

- $\sqrt[3]{-27} = -3$ja que $(-3)^3 = -27$.
- $\sqrt[5]{-32} = -2$ja que $(-2)^5 = -32$.
- $\sqrt[4]{-16}$no existeix ja que cap nombre, elevat a 4, done -16.

3.4. Introduir factors en el radical

Recorda que:

Per a introduir un nombre dins del radical s'eleva el nombre a l'índex de l'arrel i es multiplica pel radicand.

Exemple:

- $10\sqrt{3} = \sqrt{10^2 \cdot 3} = \sqrt{300}$

3.5. Extraure factors del radical

Recorda que:

Per a extraure nombres d'un radical és necessari descompondre el radicand en factors:

Exemple:

- $\sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} = \sqrt{2^4 \cdot 5} = 2^2\sqrt{5}$

3.6. Suma i resta de radicals

Recorda que:

Diem que dos radicals són semblants si tenen el mateix índex i el mateix radicand.

Per a sumar i restar radicals, aquests han de ser semblants; en aqueix cas, s'operen els coeficients i es deixa el mateix radical.

Atenció, un error molt comú: l'arrel d'una suma (o una resta) **NO** és igual a la suma (o la resta) de les arrels:

$$10 = \sqrt{100} = \sqrt{64+36} \neq \sqrt{64} + \sqrt{36} = 8 + 6 = 14$$

Activitats proposades

29. Calcula mentalment al teu quadern les arrels següents:

a) $\sqrt[4]{81}$ b) $\sqrt[4]{16}$ c) $\sqrt[3]{64}$ d) $\sqrt[3]{8}$ e) $\sqrt[3]{1000}$ f) $\sqrt[5]{1}$ g) $\sqrt[3]{0}$.

30. Introduir els següents factors al radical:

a) $2 \cdot \sqrt[4]{5}$ b) $10 \cdot \sqrt[3]{3}$ c) $2 \cdot \sqrt[3]{4}$ d) $5 \cdot \sqrt[5]{4}$ e) $3 \cdot \sqrt[3]{7}$.

31. Extraure els factors que es puga del radical:

a) $\sqrt[3]{10000x^9y^3}$ b) $\sqrt[5]{100000}$ c) $\sqrt[4]{81a^8b^6c^4}$ d) $\sqrt[3]{1000a^7b^4}$.

32. Calcula:

a) $3\sqrt{8} + 5\sqrt{32} - 6\sqrt{2}$ b) $4\sqrt{27} + 3\sqrt{3} - 2\sqrt{81}$.

Autora: Ana Lorente
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

CURIOSITATS. REVISTA

Història de l'escacs

Conta la llegenda que un súbdit va ensenyar a jugar als escacs al príncep persa Sisso, fill de Dahir, i li va agradar tant el joc que va prometre regalar-li el que demanara. El súbdit va dir, vull un gra de blat per la primera casella del tauler, dos per la segona, el doble per la tercera, així fins a arribar a la casella 64.

A Sisso no li va parèixer una demanda excessiva, i no obstant això no hi havia blat suficient al regne per a pagar això!

a) Com s'ha de representar el càlcul?

b) Quants grans de blat li donen per la casella primera? I per la casella segona? I per la tercera? I per la suma de les tres primeres caselles?

c) Quants grans de blat corresponen a la casella 10?

d) I a la 64? Utilitza la calculadora per a intentar calcular aqueix nombre, què ocorre?

El secret

A l'hotel d'una xicoteta ciutat d'uns 1000 habitants arriba un famós cantant intentant passar desapercebut.

Quan entra a la seua habitació, un empleat creu reconèixer-li i s'afanya a comentar-ho amb tres companys.

Les tres persones en arribar a les seues cases (en el que tarden 10 minuts) parlen amb els seus veïns i veïnes, telefonen a amics i amigues i cada un conta la notícia a altres tres persones.

Aquestes al seu torn, als següents 10 minuts, cada una d'elles conta la notícia a 3 persones.

El rumor passa dels uns als altres, i d'aquesta manera, una hora després la notícia és sabuda per quantes persones?

Té possibilitats el cantant de passar desapercebut en alguna part de la ciutat?

Endevina

a) Quin és el nombre més gran que pot escriure's utilitzant quatre uns?

b) Quin és el nombre més gran que pot escriure's utilitzant quatre dosos?

c) I cinc dosos?

Altres nombres enormes

Un mosquit femella posa al dia 200 ous de què ixen femelles, que al cap de 3 dies ja són nous mosquits femelles capaços de posar ous. Utilitza la teua calculadora per a anar obtenint la població de mosquits femelles: a) Al cap de 3 dies, 200 noves femelles, i al cap de 6 dies? I als 9 dies? I en un mes (de 30 dies)?

Observa en què poc de temps la teua calculadora comença a escriure coses rares. Ja no li cap aqueix nombre tan gran! Té un **creixement exponencial**. Si els mosquits no tingueren enemics i no tingueren competència pels aliments, prompte ocuparien tot l'espai.

Autora: Ana Lorente
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

RESUM

Potència	Una potència a^n de base un nombre real a i exponent natural n és un producte de n factors iguals a la base	$7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^3$. 7 és la base i 3 l'exponent
Quadrats i cubs	Les potències d'exponent 2 s'anomenen quadrats i les d'exponent 3, cubs	7^2 és 7 al quadrat i 7^3 és 7 al cub.
Potències d'1 i de 0	Qualsevol nombre diferent de zero elevat a 0 és igual a 1. El nombre 1 elevat a qualsevol nombre és igual a 1. El nombre 0 elevat a qualsevol nombre diferent de zero és igual a 0.	$145^0 = 1$; $1^{395} = 1$; $0^{7334} = 0$.
Potències de base 10	Una potència de base 10 és igual a la unitat seguida de tants zeros com a unitats té l'exponent. La unitat seguida de zeros és igual a una potència de 10.	$10^6 = 1.000.000$ $10000000 = 10^7$
Notació científica.	Per a escriure un nombre en notació científica s'expressa com un nombre diferent de zero, multiplicat per una potència de base 10.	$3\,000\,000 = 3 \cdot 10^6$.
Producte de potències de la mateixa base	Per a multiplicar potències de la mateixa base es deixa la mateixa base i se sumen els exponents.	$9^2 \cdot 9^3 = (9 \cdot 9) \cdot (9 \cdot 9 \cdot 9) = 9^{2+3} = 9^5$
Quocient de potències de la mateixa base	Per a dividir potències de la mateixa base, es deixa la mateixa base i es resten els exponents.	$23^8 : 23^7 = 23^{8-7} = 23^1$
Elevar una potència a una altra potència	Per a calcular la potència d'una altra potència, es deixa la mateixa base i es multipliquen els exponents.	$(5^4)^6 = 5^{24}$
Arrel quadrada	L'arrel quadrada d'un nombre a és un altre nombre b que en elevar-lo al quadrat ens dóna a.	$\sqrt{9} = 3$ $\sqrt{81} = 9$
Arrel *n*-èsima	$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$	$\sqrt[3]{8} = 2 \Leftrightarrow 2^3 = 8$
Introduir i extraure factors en radicals	$10\sqrt[3]{2} = \sqrt{10^3 \cdot 2} = \sqrt{2000}$	$\sqrt[4]{405} = \sqrt[4]{81 \cdot 5} = 3\sqrt[4]{5}$

Autora: Ana Lorente
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

EXERCICIS I PROBLEMES de 2º d'ESO

Potències

1. Escriu en forma de potències de 10:

a) Un milió b) Un bilió c) Una centena de miler

2. Calcula al teu quadern les potències següents:

a) 25^0 b) 10^6 c) $5 \cdot 10^4$ d) 2^4 e) 4^2

f) 10^2 g) 10^5 h)10^{12} i) 10^6 j)6^3

3. Escriu al teu quadern una aproximació de les següents quantitats, mitjançant el producte d'un nombre per una potència de 10.

a) 600000000 b) 250000000 c) 914000000000

4. Escriu al teu quadern una aproximació abreviada de les quantitats següents:

a. La distància de la Terra al Sol → 150 000 000 km

b. El nombre d'àtoms que hi ha en un gram d'oxigen.

37643750 000 000 000 000 000 àtoms

5. Troba al teu quadern:

a) $(2^5 : 2)^3 \cdot 2^4$ b) $(7^4)^2$ c) $6^5 : 3^5$

d) $(9 : 3)^5$ e) $(15 : 5)^3$ f) $(21 : 7)^3$

g) $(75 : 5)^4$ h) $(4 : 2)^5$ i) $8^2 : 2^5$

6. Calcula $(4^3)^2$ i 4^{3^2} Són iguals? La potenciació té la propietat associativa?

7. Escriu al teu quadern el resultat en forma de potència:

a) $36 \cdot 6^2$ b) $3^3 \cdot 81$ c) $36 : 6^2$

8. Factoritza i expressa com un producte de potències de base 2, 3 i 5:

a.) $12^7 : 6^7$ b) $(2^5 \cdot 2^2) : 16$ c) $(5^6 \cdot 36) : 10^4$ d) $(16 \cdot 4^2) : 2^5$

9. Calcula:

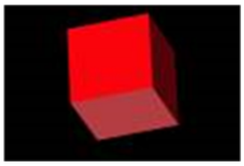
a) $(2 + 3)^2$ y $2^2 + 3^2$ Són iguals?

b) Calcula $6^2 + 8^2$ i $(6 + 8)^2$ Són iguals?

10. Calcula al teu quadern:

a) $2^3 + 2^4$ b) $3^5 - 3^4$ c) $5^3 \cdot 5^2$ d) $10^4 \cdot 10^3$ e) $7^4 : 7^2$ f) $10^5 : 10^3$

11. La superfície de la cara d'un cub mesura 36 cm quadrats. Quin és el seu volum?



12. Calcula al teu quadern:

a) $(2^3 \cdot 8 \cdot 2^5) : (2^6 \cdot 2^3)$ b) $(5^2 \cdot 5^4 \cdot 5) : (5 \cdot 5^2 \cdot 5)$

13. Calcula 5^3 i 3^5 Són iguals? Es poden intercanviar la base i l'exponent en una potència? Calcula $5 \cdot 3$ i $3 \cdot 5$ Són iguals?

14. Descompon en factors primers, utilitzant potències: 12; 36; 48; 100; 1000; 144.

15. Efectua les següents operacions amb potències donant el resultat en forma de potència d'una sola base, la que cregues més adequada en cada cas:

a) $(5^3 \cdot 5^2)^3$ b) $(16^2 : 4^3)^3$ c) $(9^2 : 3^3)^2$

d) $(2^5 : 2^2)^3$ e) $3{,}7^5 \cdot 3{,}7^2$ f) $(2{,}5^5 \cdot 2{,}5^2) : 2{,}5$

16. Efectua les següents operacions donant el resultat com una única potència:

a) $(7^{12} \cdot 49^3)^6$ b) $9^4 \cdot 27^2$ c) $(5^{10} \cdot 5^2)^2$

d) $(7^{10} : 7^2)^2$ e) $(9^5 \cdot 81^2)^3$ f) $(6^7 \cdot 36^5)^3$

17. Un camp quadrat mesura 3600 metres quadrats. Quants metres de tanca és necessari comprar per a tancar-lo?

18. A quin nombre cal elevar 2^2 per a obtindre 4^4? I per a obtindre 8^8?

19. Dibuixa quadrats de costats 5, 6, 7 i 10 i indica quants quadradets de costat 1 contenen.

Arrels

20. Calcula al teu quadern:

a) $\sqrt{121}$ b) $\sqrt{49}$ c) $\sqrt{1}$ d) $\sqrt{0}$

e) $\sqrt{169}$ f) $\sqrt{196}$ g) $\sqrt{36}$ h) $\sqrt{144}$

21. La superfície d'un quadrat és de 1000000 metres quadrats, Quant mesura el seu costat? I el seu perímetre?

22. Calcula al teu quadern les arrels següents:

a) $\sqrt[5]{32}$ b) $\sqrt[3]{1000}$ c) $\sqrt{625}$

d) $\sqrt[4]{81}$ e) $\sqrt[3]{27}$ f) $\sqrt{1000000}$

23. Extrau al teu quadern factors dels radicals següents:

a) $\sqrt{60}$ b) $\sqrt{250}$ c) $\sqrt[3]{125a^6b^5c^3}$ d) $\sqrt[3]{8a^4b^7c^1}$

e) $\sqrt{49b^5x^8}$ f) $\sqrt[3]{125b^6c^5}$ g) $\sqrt[3]{216b^4x^7}$ h) $\sqrt[4]{81b^5m^9}$

24. Introdueix els següents factors al radical:

a) $3x\sqrt{x}$ b) $5\sqrt{1005}$ c) $6\sqrt{32}$ d) $4\sqrt{20}$

e) $2\sqrt[3]{3}$ f) $7a\sqrt[3]{3}$ g) $5\sqrt[5]{2^4}$ h) $a\sqrt[3]{5}$

25. Dibuixa al teu quadern quadrats d'àrea 36, 49, 64 i 100 unitats.

26. Escriu el signe = o ≠ al buit:

a) $\sqrt{64+36}$ ▯ $\sqrt{64}+\sqrt{36}$. b) $\sqrt{9+16}$ ▯ $\sqrt{9}+\sqrt{16}$.

27. Calcula al teu quadern:

a) $9\sqrt{20} + 2\sqrt{80} - 4\sqrt{180}$ b) $30\sqrt{27} + 9\sqrt{3} - 23\sqrt{12}$

c) $5\sqrt{2} - 7\sqrt{8} + 12\sqrt{50}$ d) $6\sqrt{28} - 2\sqrt{63} + 4\sqrt{7}$

28. Calcula al teu quadern:

a) $5 \cdot \sqrt{16} - 32 : 2^3 + 2\sqrt{144} + \sqrt{49}$ b) $3 \cdot 10^2 - 5 \cdot \sqrt{64} + 7^0$

c) $5 \cdot 3^2 - 2 \cdot (1 + \sqrt{36}) - 2$ d) $32 : 2^3 - 2 \cdot \sqrt{25} + 2^2$

Autora: Ana Lorente
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Problemes

29. Un xalet està edificat sobre una parcel·la quadrada de 7 225 m^2 d'àrea. Quant mesura el costat de la parcel·la?

30. L'hotel dels embolics: Un hotel tenia infinites habitacions totes ocupades. Un client graciós s'alça a la nit i obri totes les portes. Un altre client s'alça també i tanca les portes parells. Un tercer client s'alça i modifica les portes que són múltiples de 3, si estan obertes, les tanca, i si les troba tancades, les obri. Un quart client el mateix, però amb les que són múltiple de 4. I així tota la nit, tots els clients. Al matí següent com estan les portes? Quines portes estan obertes?

31. Calcula en quilòmetres i notació científica la distància que hi ha des de la Terra al Sol sabent que la velocitat de la llum és aproximadament de 300 000 km/s i que la llum del Sol tarda 8,25 minuts a arribar a la Terra.

32. Troba el volum d'un cub de 1,5 m d'aresta.

33. Una parcel·la és quadrada, i la mesura de la seua àrea és 8 100 m^2. Troba l'àrea d'una altra parcel·la el costat del qual siga el doble.

34. La superfície de la cara d'un cub mesura 49 cm quadrats. Quin és el seu volum?

35. Joan fa dissenys de jardins amb plantes formant quadrats. Li sobren 4 plantes en formar un quadrat i li falten 9 per a formar un altre amb una planta més per costat. Quantes plantes té? T'ajudarà a saber-ho fer un dibuix.

36. Manel té una habitació quadrada. Amb 15 taulells quadrades més tindria un taulell més per costat. Quantes té? T'ajudarà a saber-ho fer un dibuix.

37. **Arquimedes**, al seu tractat *L'arenari* comptava una manera per a expressar nombres molt grans, com el nombre de grans d'arena que hi ha en tota la Terra. És, efectivament, un nombre molt gran, però no infinit. Imagina que tota la Terra està formada per grans d'arena. Pots calcular el seu volum coneixent el seu radi que és de 6500 km. Recorda, el volum d'una esfera és $(4/3)\pi r^3$.

a) Calcula el volum de la Terra en km^3, i escriu aqueix volum en notació exponencial.

b) Passa el volum a mm^3, en notació exponencial.

c) Estima quants grans d'arena caben en 1 mm^3. Suposa que, per exemple, caben 100 grans.

d) Calcula quants caben en tota la Terra multiplicant el volum en mm^3 per 100.

e) Has obtingut $1{,}15 \cdot 10^{32}$ grans d'arena?

Autora: Ana Lorente
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

AUTOAVALUACIÓ de 2n

1. Quin és el resultat de les tres potències següents $(-2)^4$, $(-4)^3$ i $(-5)^2$

a) –16, –12, 25   b) 16, –64, 25   c) 32, –64, 10   d) –64, –32, –26

2. Quin és el resultat de l'operació $4\cdot10^2 + 5\cdot10^2$?

a) 900   b) $9\cdot10^4$ c) $20\cdot10^2$ d) 500

3. Escriu = (igual) o ≠ (distint) segons corresponga:

a) 3^3 □ 27   b) 1^{35} □ 35   c) 732^0 □ 732 d) 10^5 □ 50

4. Quina de les respostes correspon a la multiplicació $(-3)^3 \cdot (-3)^2 \cdot (-3)^5$?

a) $(-3)^{30}$ b) $(-9)^{10}$ c) 3^{10} d) –19683

5. Quina de les respostes correspon a la divisió $0'7^6$ **:** $0'7^4$?

a) $0'7^2$ b) $0'7^2$ c) $0'7^{10}$ d) 6/4

6. Quina de les solucions és la correcta per a l'operació $((-5) \cdot (-2) \cdot (-1))^3$?

a) –1000   b) –30   c) 100   d) 60

7. Tria la resposta que corresponga al resultat de $((-0'2)^2)^4$

a) $(0'2)^8$ b) $(-0'2)^6$ c) 0'032   d) –0'0016

8. L'arrel quadrada de 81 val?

a) 18   b) 8,7   c) 9   d) 3

9. Assenyala el nombre que no és quadrat perfecte:

a) 169   b) 441   c) 636   d) 1024   e) 700

10. El costat d'una superfície quadrada de 196 centímetres quadrats mesura:

a) 19 cm   b) 14 cm   c) 13 cm   d) 17 cm