1r ESO

Capítol 12: Taules i gràfiques. El pla cartesià. Coordenades.

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Concha Fidalgo y Javier Brihuega

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Traducció al valencià: Departament de Matemàtiques de l'Institut Juan de Garay

Índex

Resum

L'estudi de les relacions entre dues magnituds i la seua representació mitjançant **taules i gràfiques** és de gran utilitat per a descriure, interpretar, predir i explicar fenòmens naturals i quotidians que es relacionen de manera funcional.

Moltes vegades necessitarem que les dades arreplegats en una taula siguen representats gràficament i utilitzarem el **sistema de referència cartesià**.

*El sistema de referència cartesià s'anomena així en honor al filòsof, científic i matemàtic francés **René Descartes** que va viure entre els anys 1596 i 1650. Descartes va voler fonamentar el seu pensament filosòfic en la necessitat de prendre un «punt de partida» sobre el qual edificar tot el coneixement. En Geometria, Descartes també va començar prenent un "punt d'origen" per a poder representar la geometria plana.*


René Descartes

En aquest tema aprendrem a utilitzar el llenguatge **gràfic** per a interpretar i descriure situacions del món que ens rodeja. També estudiarem les **funcions** entre dues magnituds variables, en les que una té una relació de dependència de l'altra. *Descartes, Newton i Leibniz ja van establir la idea de funció com a dependència entre dues quantitats variables.*

Així, els continguts que tractarem ens van a permetre treballar amb les distintes formes de representar algunes situacions funcionals: numèrica, gràfica, verbal o a través d'una expressió algebraica (com les que acabem d'estudiar en el tema anterior) i les distintes formes de traduir una expressió d'un a un altre llenguatge.

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Institut Juan de Garay

1. EL PLA CARTESIÀ. COORDENADES

1.1. Sistema de referència cartesià.

Constantment ens trobem amb situacions en què hem d'indicar la localització d'objectes o llocs respecte d'altres coneguts i, de vegades, les seues posicions en un pla o mapa. Per a entendre'ns és molt important que tinguem una referència comuna.

Si vols indicar a uns amics que no coneixen el teu barri, on es troba una botiga determinada o l'Institut on estudies, bastarà amb que els indiques la seua posició amb les referències que utilitzeu tots.

Exemple 1:

- Lluis viu en la casa marcada en roig en el pla adjunt i estudia en un Institut pròxim marcat a verd en el pla.

Per indicar als seus amics francesos on està el seu Institut els dóna les indicacions següents:

"En eixir de ma casa aneu cap a la dreta i creueu dos carrers, després cap a l'esquerra creueu un carrer i ja heu arribat"

Les referències esquerra i dreta així com la idea de creuar un carrer són comuns a tots nosaltres, a més fixa't que en l'esquema la línia que indica el camí és molt clara

En Matemàtiques, en la majoria de les ocasions, utilitzem sistemes de referència cartesians que també s'utilitzen en Ciències Socials per a treballar els mapes i els plans.

Un **sistema de referència cartesià consisteix** en dues rectes numèriques (vegeu capítol *4*) perpendiculars, anomenades **eixos**. El punt en què es tallen els eixos és l'origen del sistema, també anomenat **origen de coordenades.**

Normalment el representem amb un eix vertical i l'altre horitzontal. A l'eix horitzontal li denominem **eix d'abscisses** o també eix X i al vertical **eix d'ordenades** o eix Y.

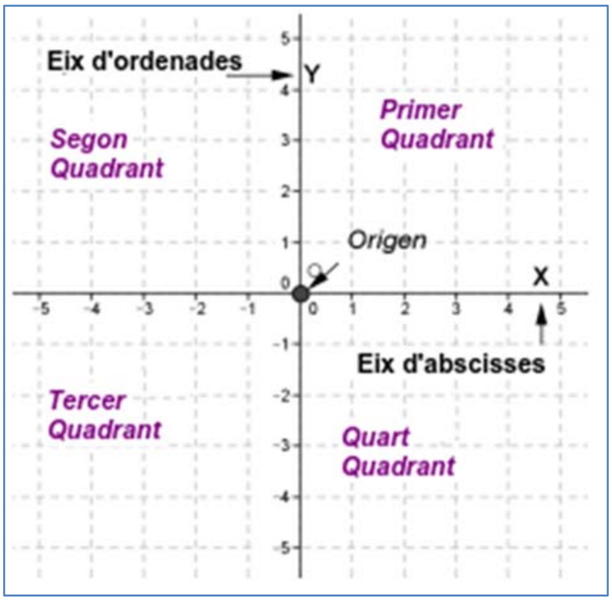
En tallar-se els dos eixos, el pla queda dividit en quatre zones, que es coneixen com a quadrants:

-Primer quadrant: Zona superior dreta

-Segon quadrant: Zona superior esquerra

- Tercer quadrant: Zona inferior esquerra

-Quart quadrant: Zona inferior dreta



Sistema de referència cartesià

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Institut Juan de Garay

Exemple 2:

- "Si estàs situat sobre la X que apareix en el mapa, segueix 3 llegües a l'Est i després 2 llegües al Nord. Allí està soterrat el tresor"

Nota: La llegua és una antiga unitat de longitud que expressa la distància que una persona pot caminar durant una hora. La llegua castellana es va fixar originàriament en 5.000 vares castellanes, és a dir, 4,19 km

Les referències Nord, Sud, Est i Oest ens defineixen un sistema de referència cartesià on l'Origen és el punt marcat amb la X.

Activitats resoltes

a) Marca al pla el punt on es troba el tresor i com s'arribaria a ell des del punt X

Solució:

Activitats proposades

b) Descriu i marca en el pla adjunt com arribaries a:

a) Cap Sud

b) Badia Nord

c) Platja Lletja

Material fotocopiable

Illa del Tresor

Font: Banc d'Imatges i sons de l'INTEF.
Coleccions: Robert Louis Stevenson L'illadel tresor. L'illa del tresor: El mapa del tresor, Il·lustrador: Loren

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Institut Juan de Garay

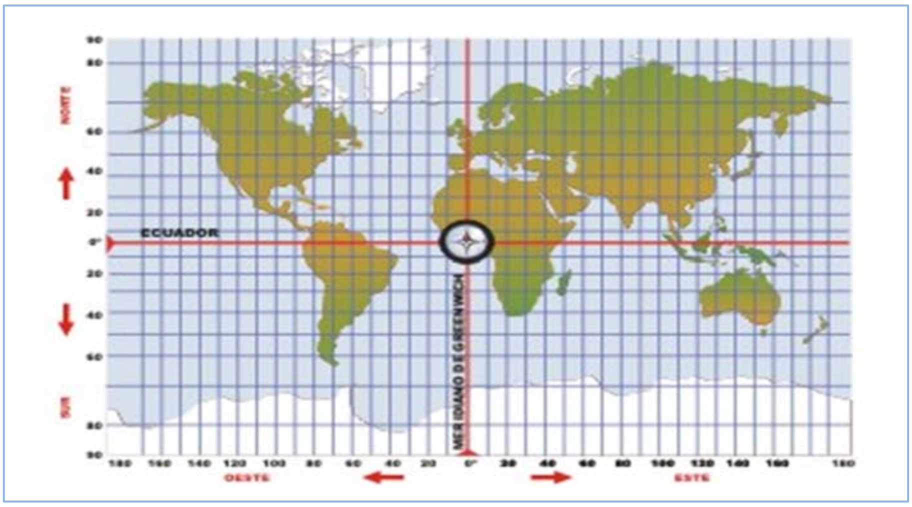
c) En el mapa indica en quin quadrant es troben els següents països:

a) Africa del Sud

b) Estats Units

c) Argentina

d) Índia

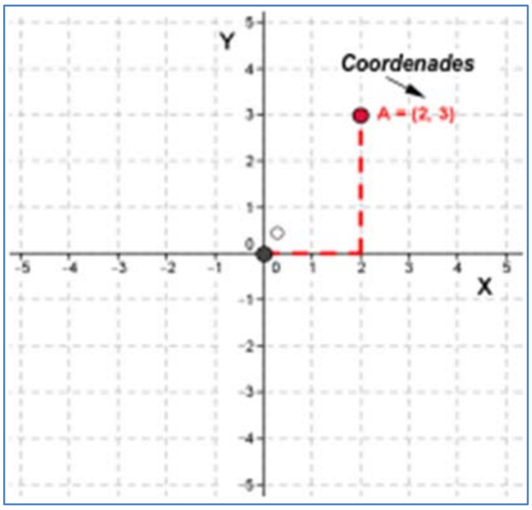


1.2. Coordenades. Representació i identificació de punts.

En les activitats anteriors hem descrit com arribaríem a alguns punts a partir d'un sistema de referència. Per a arribar a un punt, partint de l'Origen del sistema de referència, hem recorregut una determinada quantitat cap a la dreta o l'esquerra i després un altre cap amunt o cap avall. Així cada punt quedarà determinat per un parell de nombres als que anomenarem **coordenades del punt**.

Les **coordenades d'un punt A** són un parell ordenat de nombres **(*x*, *y*)**, sent ***x*** la primera coordenada que l'anomenarem **abscissa** i ens indica la quantitat a què el dit punt es troba de l'eix vertical. La segona coordenada és la ***Y***, anomenada **ordenada** i ens indica la quantitat a què el dit punt es troba de l'eix horitzontal.

Quan aquesta quantitat siga cap a l'esquerra o cap avall la indicarem amb un nombre **negatiu** i si és cap amunt o a la dreta la indicarem amb un **positiu**, de la mateixa manera que féiem en representar els nombres a la recta.



Exemple 3:

- Al gràfic el punt A té coordenades (2, 3).

Exemple 4:

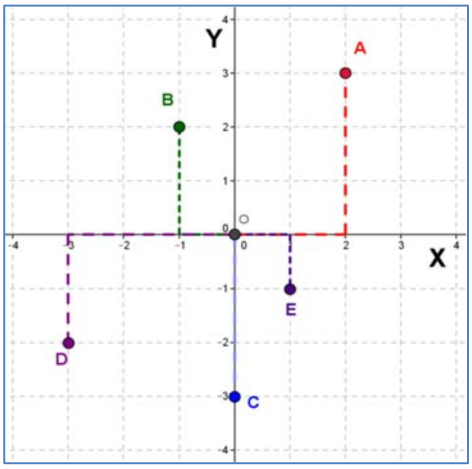
- A la primera Activitat resolta el TRESOR es troba en el punt de coordenades (3, 2).
- A l'Activitat proposada 2 el Cap Sud es troba en el punt de coordenades (1, –3), la Badia Nord al punt (2, 5) i Platja Lletja al punto (0, –1).

Nota: El cap Sud es troba en el quart quadrant i la seua ordenada és una quantitat negativa perquè des de l'origen ha d'anar cap al Sud, açò és, ha de baixar. I la Platja Lletja es troba en l'eix d'ordenades cap al Sud, per això la seua abscissa és 0 i la seua ordenada negativa.

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Institut Juan de Garay

Activitats resoltes

d) Indica quals són les coordenades dels punts marcats en el gràfic adjunt:



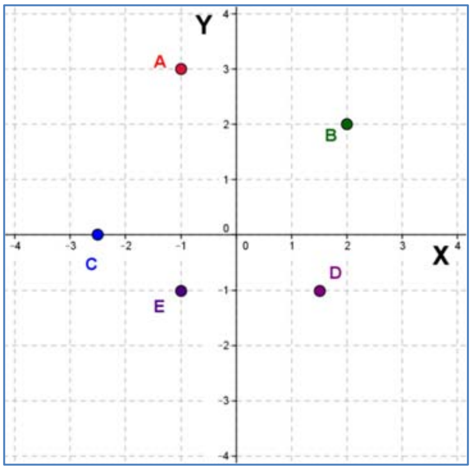
Solució

A = (2, 3); B = (–1, 2); C = (0, –3); D = (–3, –2) i E = (1, –1)

e) Dibuixa un sistema de referència cartesià i en ell marca els punts següents:

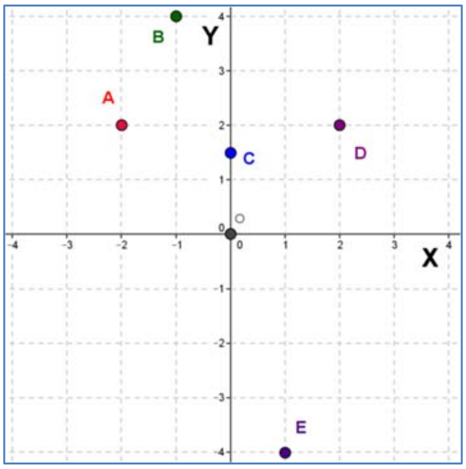
A = (–1, 3); B = (2, 2); C = (–2'5, 0), D = (1'5, –1) i E = (–1, –1)

Solució



Activitats proposades

f) Indica quals són les coordenades dels punts marcats en el gràfic adjunt:



g) Dibuixa un sistema de referència cartesià i en ell marca els punts següents:

A = (–4, 2); B = (–3, –3); C = (–0'5, 0'5) i D = (0, –2)

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Institut Juan de Garay

2. TAULES I GRÀFIQUES

2.1. Relació entre dues magnituds. Taules de valors

Moltes vegades tenim una relació entre dues magnituds que ens ve donada per la correspondència entre les quantitats de cada una d'elles. Aquesta relació pot ser de proporcionalitat, com vam estudiar al capítol 10, també pot estar donada per una expressió verbal o definida per una fórmula o equació com acabem d'estudiar al capítol 11.

D'una relació entre dues magnituds podem obtindre un conjunt de dades, relacionades dos a dos, que si les ordenem a una taula ens facilita la seua interpretació.

Una **taula de valors** és una taula en la què situem ordenadament les quantitats corresponents de dues magnituds relacionades.

Exemple 5:

- Els 100 metres llisos és una carrera en què s'ha de recórrer 100 metres, lliures de tot obstacle, amb la major rapidesa possible. Es considera, en general, com la competició de carreres de velocitat més important.

  Els millors atletes la realitzen en un temps d'al voltant de 10 segons de duració corrent cada 10 metres en una mitjana d'1 segon.

Longitud (m)	10	20	50	70	90	100
Temps (s)	1	2	5	7	9	10

Nota: La taula també es pot posar en sentit vertical

longitud (m)	temps (s)
10	1
20	2
50	5
70	7
90	9
100	10

En algunes ocasions la relació entre dues magnituds ens la poden indicar directament mitjançant la seua taula de valors

Exemple 6:

- *"La sopa estava molt calenta, així que la vaig deixar refredar durant cinc minuts, la temperatura de la sopa, segons es refredava, la indica la taula següent"*

Temps (min)	0	1	2	3	4	5
Temperatura (°C)	80	60	50	44	40	39

Exemple 7:

- Les notes de Matemàtiques i Tecnologia, a la segona avaluació, d'un grup de 1r d'E.S.O. van ser les arreplegues a la taula següent:

Matemàtiques	6	7	10	6	5	6	9	7	5	8	3	8	9	1	5	5	4	6	5	9	6	10	6	3	4	1	8	6	9	7
Tecnologia	5	6	7	8	6	8	7	6	4	10	2	8	10	1	5	6	7	10	3	5	8	10	9	3	5	1	6	5	5	8

Altres vegades desconeixem quals són les magnituds amb què estem treballant, tan sols coneixem els valors relacionats, i les solem indicar amb les lletres X i Y

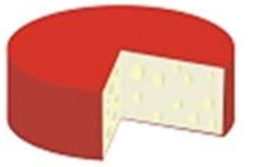
Exemple 8:

- A la taula adjunta tenim la relació entre la magnitud **X** i la magnitud **Y**

X	–2	–1	0	1	2	3
Y	2	3	4	5	6	7

Activitats resoltes

- El preu d'un quilo de formatge especial de cabra, de la serra de Madrid, és de 18 € i es ven al pes. Construeix una taula de valors, amb sis quantitats diferents, que relacione el pes del formatge amb el seu preu.



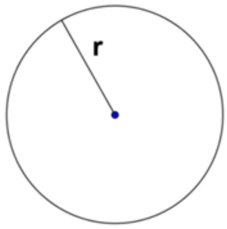
Solució

Com ens demanen sis quantitats diferents triarem algunes que ens pareixen quotidianes fins a un quilo, per exemple, 100 g, 250 g (quart de quilo), 500 g (mig quilo), 625 g, 750 g i 1000 g.

Com el preu i el pes són magnituds proporcionals sabem (capítol 10) completar la taula.

Pes (g)	100	250	500	625	750	1000
Preu (€)	1,80	4,50	9	11,25	13,50	18

- Com saps l'àrea d'un cercle es pot calcular mitjançant la fórmula $A = \pi r^2$, on r és el radi del cercle (utilitzem π = 3,14). Construeix una taula de valors des d'un radi d'1 cm a un de 5 cm, de centímetre en centímetre.



Solució

Ens demanen que elaborem una taula per als valors del radi 1, 2, 3, 4 *i* 5. Per a *això substituïm* r *en la fórmula per cada un d'aqueixos valors i obtenim per a*

$\boldsymbol{r} = 1 \rightarrow \boldsymbol{A} = 3{,}14 \cdot 1^2 = 3{,}14$; *per a* $\boldsymbol{r} = 2 \rightarrow \boldsymbol{A} = 3{,}14 \cdot 2^2 = 12{,}56; \ldots$

Radi (cm)	1	2	3	4	5
Àrea (cm²)	3,14	12,56	28,26	50,24	78,50

Activitats proposades

h) Construeix una taula de valors, amb cinc quantitats diferents, que relacione el consum d'un cotxe i els quilòmetres que recorre sabent que el seu consum mitjà és de 5 litres cada 100 quilòmetres.

i) Construeix una taula de valors, amb cinc quantitats diferents, en que es relacione el costat d'un quadrat i la seua superfície.

j) Construeix una taula de valors, amb sis quantitats diferents, que represente la situació següent: *"Una companyia de telefonia cobra 5 cèntims d'euro per establiment de telefonada i 4 cèntims per minut parlat"*

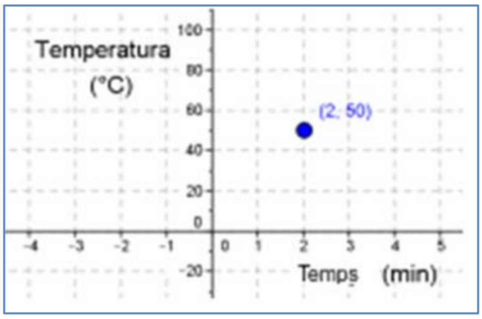
Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Institut Juan de Garay

2.2. Representant punts. Les gràfiques.

Cada parell de dades corresponents d'una relació entre dues magnituds els podem **representar** en un sistema cartesià

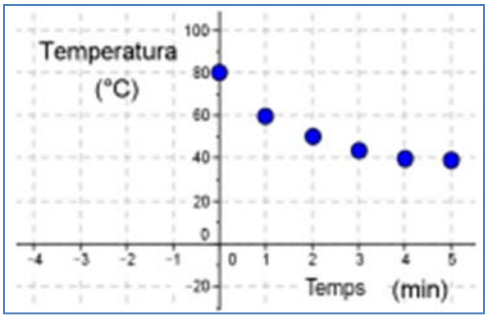
Exemple 9:

- A la relació de l'exemple 6 véiem que als 2 minuts, la sopa tenia una temperatura de 50 °C.



Aquest parell de nombres són les coordenades d'un punt (2, 50) en un sistema de referència cartesià en què a l'eix d'abscisses representem la magnitud *Temps* mesurada en minuts i a l'eix d'ordenades representem la magnitud *Temperatura* mesurada en graus centígrads.

Si representem a un sistema de referència cartesià tots els parells de dades d'una taula de valors obtenim una **gràfica**.

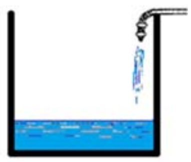


Si representem tots els parells de dades de la taula de valors de l'exemple anterior obtenim la següent gràfica:

En ocasions podríem haver donat moltes més dades en la taula de valors i en representar-los ens quedaria quasi una línia. En aquests casos la **gràfica**, unint **els punts**, estaria constituïda per **una línia** que en moltes situacions seria **contínua**.

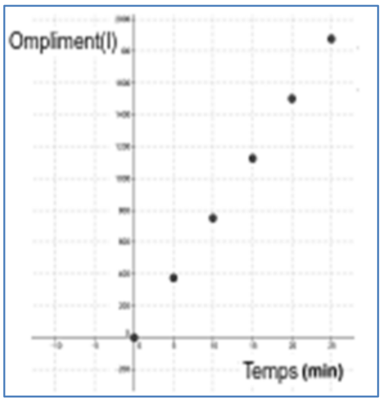
Exemple 10:

- Si omplim un depòsit d'aigua mitjançant un assortidor que aboca 75 litres d'aigua per minut podem calcular una taula de valors amb la quantitat d'aigua que va tenint el depòsit (ompliment) en relació al temps que ha anat passant.



temps (min)	0	5	10	15	20	25
ompliment (l)	0	375	750	1125	1500	1875

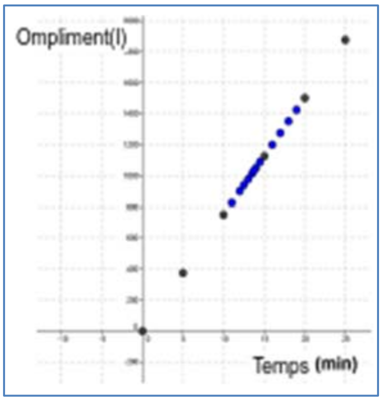
Dibuixem la seua gràfica a partir d'aquesta taula de valors



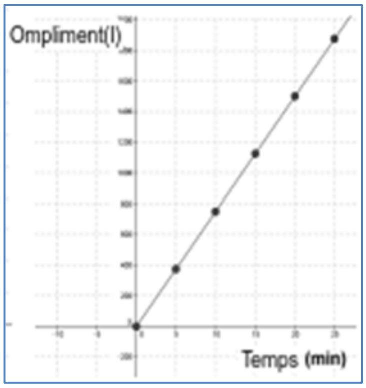
En aquesta ocasió tindria sentit mesurar la quantitat d'aigua que va

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Institut Juan de Garay

tenint el depòsit cada menys temps. Si ho representem podria quedar de la manera següent:



Si representàrem tots els possibles valors ens quedaria la següent gràfica:



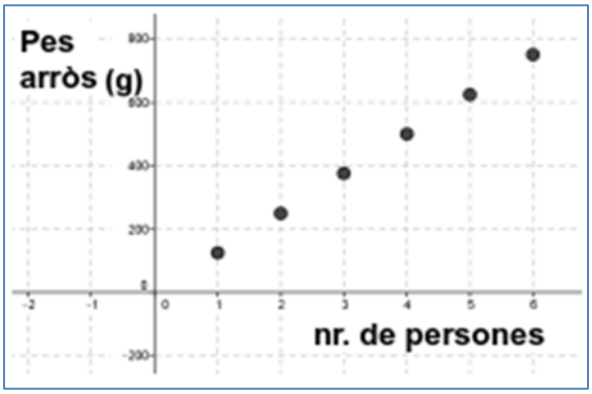
Nota: La gràfica comença, en el temps 0, en l'instant en què comencem a omplir el depòsit. No hi ha gràfica al tercer quadrant és perquè no té sentit un temps negatiu.

Exemple 11:

- A la situació següent: *"Una paella per a sis persones necessita 750 g d'arròs"* podem construir una taula de valors en què es relacionen el nombre de persones i la quantitat d'arròs que es necessita:

Nombre de persones	1	2	3	4	5	6
Pes arròs (g)	125	250	375	500	625	750

i podem construir una gràfica de punts amb aquests valors:



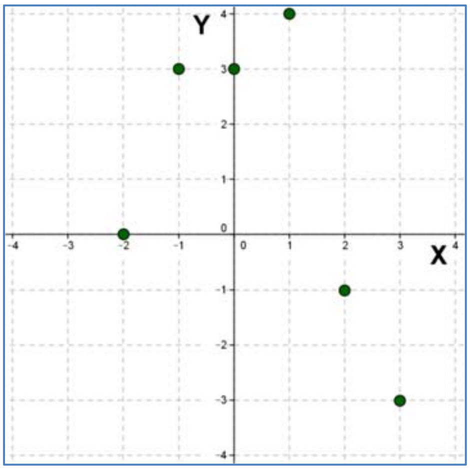
No obstant això no podem calcular valors intermedis (per a dues persones i mitja per exemple), perquè no podem dividir a una persona i, per tant, no té sentit unir els punts de la gràfica.

Exemple 12:

- També podem representar la relació entre les magnituds **X** e **I** de l'exemple 8 a partir de la seua

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Institut Juan de Garay

taula de valors:



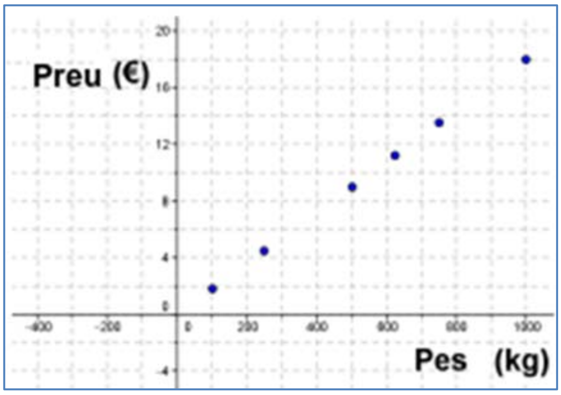
X	–2	–1	0	1	2	3
Y	0	3	3	4	–1	–3

Nota: En aquest cas no podem unir els punts, perquè al no conéixer quines són les magnituds ni quina és la relació entre elles, excepte en els punts que vénen determinats per la taula de valors, no podem saber, per exemple, quin valor tindria la magnitud Y si la magnitud X valguera 1,5.

Activitats resoltes

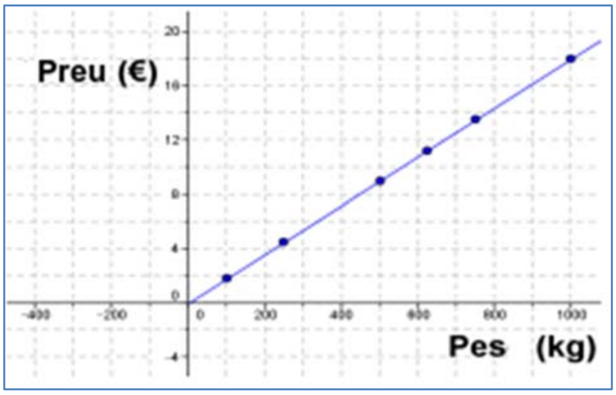
- Construeix una gràfica de punts a partir de les dades de la taula de valors de l'Activitat resolta 8 i, si és possible, uneix els seus punts:

Solució



Sí, en aquest cas és possible perquè podem calcular el preu per a qualsevol pes (és una relació proporcional).

La gràfica quedaria:

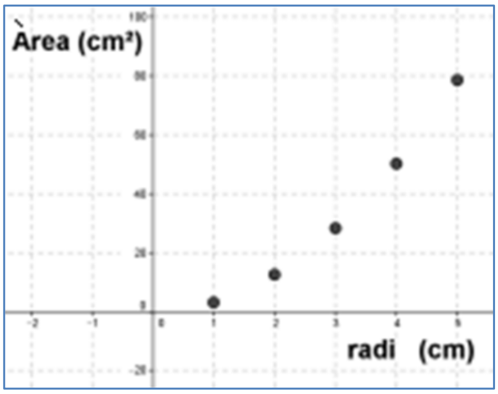


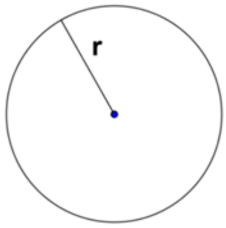
Nota: No hi ha gràfica al tercer quadrant perquè no té sentit un pes negatiu

- Construeix una gràfica a partir de les dades de la taula de valors de l'Activitat resolta 9 i, si és possible, construeix una gràfica unint els seus punts.

Solución:

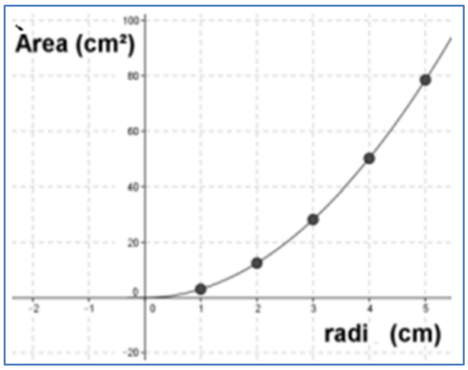
Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Institut Juan de Garay





Sí, és possible, perquè podem calcular l'àrea per a qualsevol radi.

La gràfica quedaria:



Nota: No hi ha gràfica al tercer quadrant perquè no té sentit un radi negatiu

Activitats proposades

k) Construeix una gràfica a partir de les dades de la taula de valors de l'Activitat proposada sobre el consum d'un cotxe i els quilòmetres que recorre sabent que el seu consum és de 5 litres cada 100 quilòmetres. Si és possible, construeix una gràfica unint els seus punts.

l) Construeix una gràfica a partir de les dades de la taula de valors de l'Activitat proposada sobre la relació entre el costat d'un quadrat i la seua superfície. Si és possible, construeix una gràfica unint els seus punts.

m) Construeix una gràfica a partir de les dades de la taula de valors de l'Activitat proposada sobre els costos en una companyia *de telefonia*. Si és possible, construeix una gràfica unint els seus punts.

n) En un rebut del gas de la vivenda de Joan ve la següent distribució de gasto:

Consum de gas: ....0,058 € per kw/h
Impost especial:............0,002 € per kw/h
Terme fixe: ....4,30 € per mes
Lloguer de comptador.... 2,55 €

La factura era de dos mesos, havia consumit 397 kw/h i el gasto ascendia a 34,97 €. Una altra factura anterior el gasto era de 26,15 € amb un consum de 250 kw/h.

Construeix una gràfica que relacione el consum de gas i el gasto. Té sentit unir els punts?

2.3. Gràfiques a partir de situacions.

En la majoria de les situacions que hem estudiat fins ara, hem pogut calcular els parells de valors relacionats, perquè es tractaven de relacions de proporcionalitat o de relacions donades per una fórmula

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Institut Juan de Garay

que coneixíem.

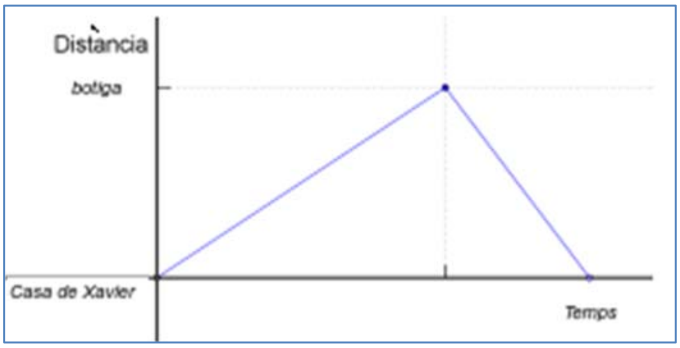
Açò no sempre ocorre. De vegades ens trobarem amb que ens descriuen una situació en què ens donen una informació entre dues magnituds sense aportar-nos a penes quantitats numèriques.

Moltes vegades **una situació quotidiana o relacionada amb fenòmens naturals descrita verbalment** es **pot representar mitjançant una gràfica** de manera directa.

Exemple 13:

- *Xavier ha d'anar a comprar a una botiga qualsevol allunyada de sa casa, com no té pressa decideix anar fent un passeig. Just quan arriba a la botiga se n'adona de que se li ha oblidat la cartera i no té diners per comprar. Corrent torna a sa casa a per la cartera.*

A partir d'aquest enunciat podem elaborar una gràfica com aquesta:

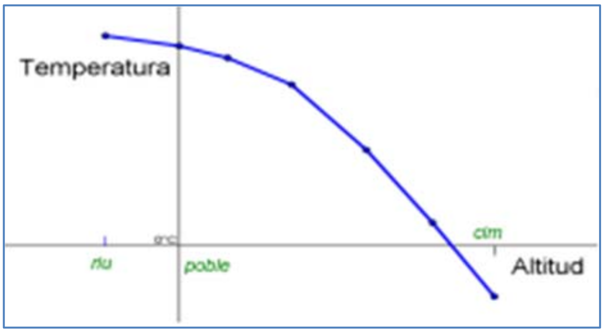


Nota: la distància entre la casa de Xavier i la botiga no la coneixem, però sabem que en la volta ha tardat menys temps que en l'anada.

Exemple 14:

- *La temperatura a una muntanya va descendint segons guanyem en altitud. Al cim arribem a temperatures sota zero.*

Podem representar una situació en què mesurem la temperatura segons pugem des d'un poble al cim d'una muntanya en una gràfica com la següent:



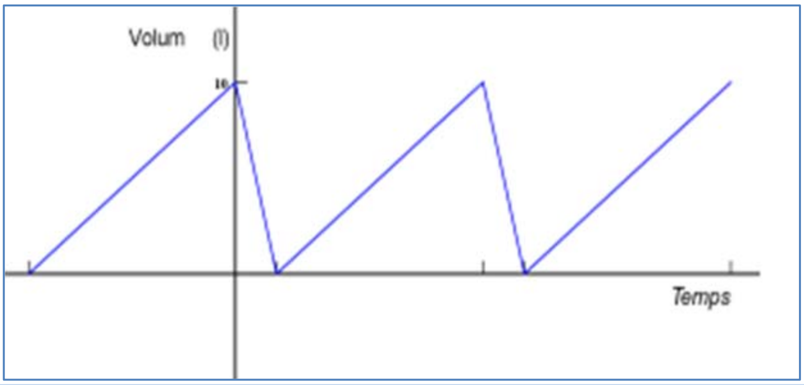
Al sistema de referència cartesià que hem establit, l'origen està en el poble i és per això pel que el riu té abscissa negativa, perquè està més davall. Al cim la temperatura és negativa i per això la seua ordenada és negativa.

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Institut Juan de Garay

Exemple 15:

- *A un establiment comercial, el depòsit d'aigua dels serveis públics va omplint-se a poc a poc fins a aconseguir els 10 L d'aigua i, en aqueix moment, es buida regularment. Quan està buit es repeteix el procés. A omplir-se tarda cinc vegades més temps que a buidar-se.*

Podem fer una gràfica que reflectisca la variació de la quantitat d'aigua (volum) del depòsit en funció del temps, a partir d'un moment en què el depòsit està ple.



L'origen del nostre sistema de referència cartesià aquesta en un moment amb el depòsit ple, el temps negatiu significa que és anterior a aqueix moment.

Les **gràfiques** ens donen una visió més clara de la situació que estem estudiant, a més d'elles podem obtindre una taula **de valors** i així fer una **interpretació** més precisa.

Exemple 16:

- En la situació anterior si considerem que tarda un minut a buidar-se el depòsit, tardarà cinc minuts a omplir-se i podem obtindre la següent taula de valors:

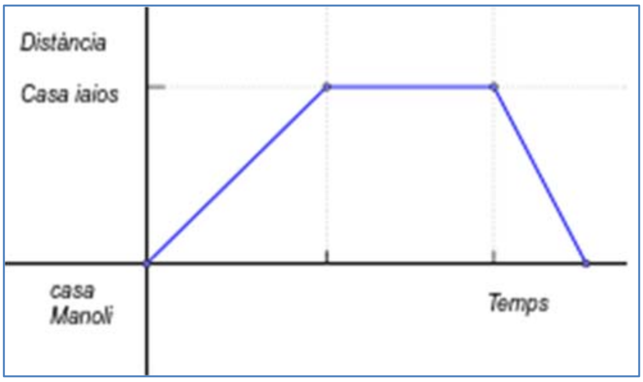
Temps (min)	–5	0	1	6	7	12
Volum (l)	0	10	0	10	0	10

Nota: el valor negatiu del temps vol dir que el depòsit va començar a omplir-se amb anterioritat a la situació inicial (origen) en el que el depòsit està ple.

Activitats resoltes

- Manoli va algunes vesprades a casa dels seus iaios on passa una bona estona amb ells. Després torna ràpidament a sa casa per a fer els deures abans de sopar. Construeix una gràfica d'aquesta situació

Solució:



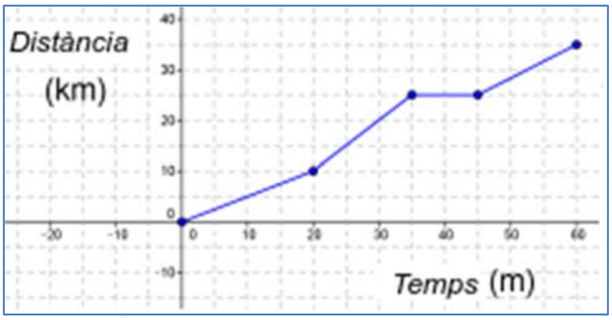
Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Institut Juan de Garay

- "Aquest estiu Joan va anar amb bicicleta a casa dels seus iaios que vivien en un poble pròxim, a 35 quilòmetres del seu. Als 20 minuts havia recorregut 10 km; en aqueix moment va començar a anar més de pressa i va tardar 15 minuts a recórrer els següents 15 km. Va parar a descansar durant 10 minuts i, després, va emprendre la marxa recorrent els últims 10 km en 15 minuts."

Construeix una gràfica d'aquesta situació i, a partir d'ella, confecciona una taula de valors.

Solució

La gràfica seria:



I la taula de valors:

Temps (min)	0	20	35	45	60
Distància (km)	0	10	25	25	35

Activitats proposades

o) *La família de Joaquin va anar un dia d'excursió al camp amb cotxe; després de passar el dia van tornar i a meitat de camí van parar durant una bona estona a posar gasolina i prendre uns refrescos. Al final van arribar a casa.*

Construeix una gràfica d'aquesta situació.

p) *Vanesa va eixir a donar un passeig, primer va anar a casa de la seua amiga Inés, que viu a 250 metres, i va tardar 6 minuts a arribar. La va haver d'esperar altres 6 minuts al seu portal i, després, van tardar 15 minuts a arribar al parc, que estava a 600 m, on van berenar i van xarrar durant mitja hora. Finalment Vanesa va tornar a casa ràpidament, perquè li havia telefonat sa mare. Només va tardar 5 minuts.*

Construeix una gràfica d'aquesta situació i, a partir d'ella, confecciona una taula de valors.

2. 4. Interpretació i lectura de gràfiques.

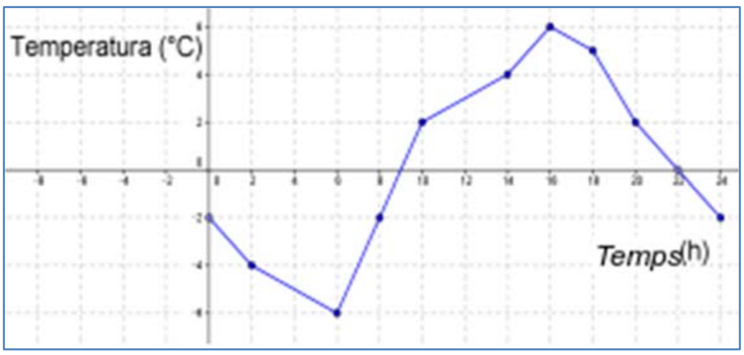
Les gràfiques resumeixen de manera eficaç la informació sobre la relació entre dues magnituds, per això se solen emprar molt, tant en situacions de caràcter científic o social, com en la informació que s'empra als mitjans de comunicació. La seua lectura i interpretació és per tant de molta utilitat.

De les coordenades dels punts d'una gràfica podem extraure dades molt interessants per a la comprensió de la situació que ens mostra la gràfica (l'ordenada més alta o més baixa, com es relacionen les magnituds,…)

Exemple 17:

- El gràfic adjunt mostra les temperatures al llarg d'un dia d'hivern en el pic de Peñalara.

A partir d'aquesta gràfica podem obtindre més informació sobre la situació plantejada. Així, per exemple podem veure que la temperatura mínima que es va arribar aqueix dia va ser de –6 °C a les 6 h del matí, ens ho indica el punt de coordenades (6, –6) que té l'ordenada menor de tots els punts de la gràfica. És un **mínim**.



Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Institut Juan de Garay

• De la mateixa manera podem veure que la temperatura més alta va ser de 6 °C, que es va arribar a les 16 h. El punt de coordenades (16, 6) així ens ho indica. És un **màxim**. Podem també afirmar que la temperatura va ser pujant des de les 6 h fins a les 16 h perquè les ordenades dels punts l'abscissa de les quals està entre aqueixes hores van creixent. És **creixent**.

Així mateix el punt (10, 2) ens indica que a les 10 h del matí feia una temperatura de 2 °C, temperatura que es va arribar també a les 20 h, encara que aquesta vegada baixant.

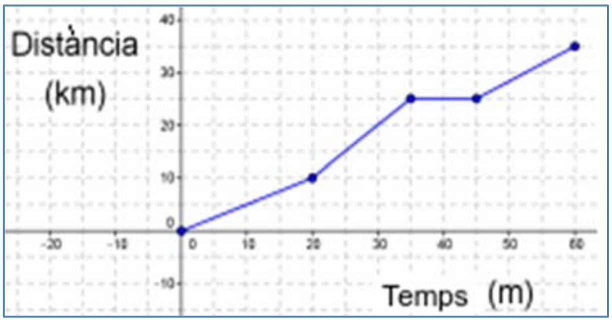
El fet de que de 10 h a 14 h pujara la temperatura menys que en hores anteriors (gràfica menys inclinada) va poder ser degut a causes climatològiques concretes, com que es posara la boira, i després, de 14 a 16 h, hi ha una pujada ràpida (va poder eixir el sol). La gràfica ens indica que qualsevol cosa així va poder passar.

A partir dels 16 hores la temperatura baixa, la gràfica és **decreixent**.

La temperatura és de 0 ºC cap a les 9 hores i a les 22 hores. (0, 9) i (0, 22) Són els punts en què la gràfica curta a l'eix d'abscisses. A l'eix d'ordenades el talla en (-2, 0).

Exemple 18:

- L'activitat resolta que ens descriu el recorregut de Joan de camí a casa dels seus iaios. La gràfica que dibuixem i resumeix el viatge era la que figura a la dreta.



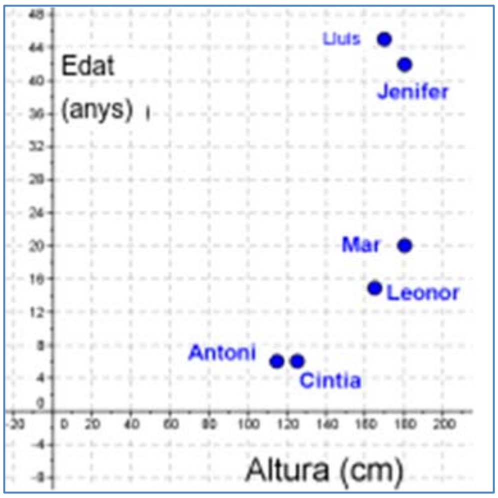
Viatje de Joan a casa dels seus iaios

De la gràfica, a més del que ja coneixíem i que ens ajude a dibuixar-la, podem extraure, d'una simple ullada més informació.

Per exemple, si mirem a la gràfica podem observar que en el quilòmetre 20 portava 30 minuts pedalejant, o que als 10 minuts havia recorregut 5 quilòmetres, que el tram més ràpid va ser dels 20 als 35 minuts (es veu major inclinació), o que en el minut 40 estava parat.

És una gràfica **contínua**, perquè podem dibuixar-la sense alçar el llapis.

Exemple 19:



- La gràfica següent ens indica la relació entre l'edat i l'estatura dels membres d'una família.

Si observem els punts d'aquesta gràfica veurem que Jenifer i Lluis són els punts (180, 43) i (170, 45) i representen als pares que tenen 43 i 45 anys i mesuren 180 i 170 cm respectivament.

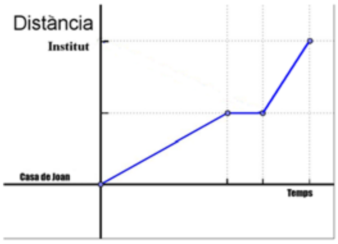
Els xicotets Antoni i Cintia són bessons de 6 anys i mesuren 115 i 125 centímetres. Mar té 20 anys i mesura 180 cm, representada pel punt (180, 20) i, finalment Leonor mesura 165 i té 15 anys.

De la gràfica també podem deduir que Mar i sa mare, Jenifer, són els més alts de la família, que Lluis és el de més edat i que Cintia mesura 10 centímetres més que el seu germà bessó.

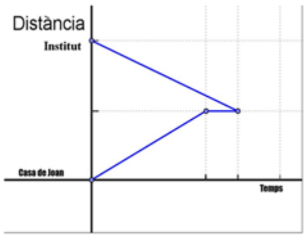
Activitats resoltes

- Observant les gràfiques de davall, determina quin és la que millor s'ajusta a la situació següent:

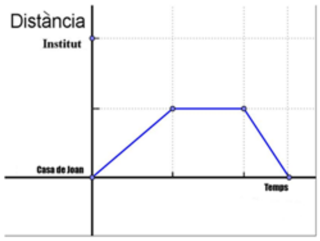
"Antoni va a l'Institut cada matí des de sa casa, un dia es troba amb un amic i es queda xarrant una estoneta. Com se l'ha fet tard ix corrent per a arribar a temps a la primera classe"



Gràfica 1



Gràfica 2



Gràfica 3

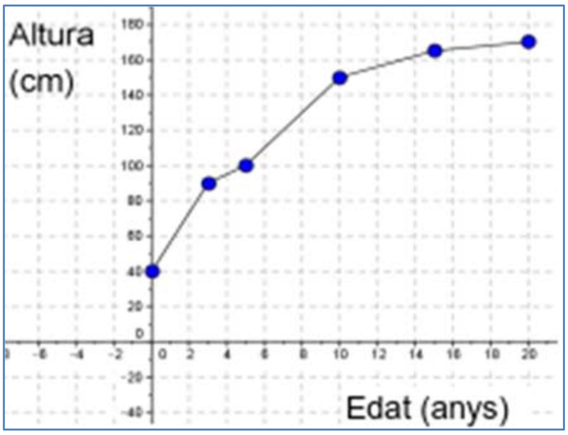
Solució

La gràfica 1 és **la que més s'ajusta perquè**: el segment horitzontal indica que durant un temps xicotet no va avançar en distància, açò és que estava parat, i la inclinació del tercer segment és major que la del primer, la qual cosa indica que en menys temps va recórrer més distància, açò és, que va ser més ràpid.

La gràfica 2 **no pot ser**, perquè Juan no pot estar a dos llocs distints, al mateix temps, al mateix moment. Aquesta gràfica indica, per exemple, que en l'instant inicial (temps 0) Juan està en sa casa i en l'institut al mateix temps.

La gràfica 3 **no pot ser**, ja que la gràfica ens indica que Juan torna a sa casa després de xarrar amb el seu amic i no va a l'institut.

- La gràfica següent ens mostra la variació de l'estatura de Laura amb relació a la seua edat.



Observant la gràfica contesta a les preguntes següents:

a) A quina edat medeix 1 metre?

b) Quant medeix en nàixer?

c) Quant medeix als 10 anys? I als 20?

d) En quin període va créixer menys?

Solució:

a) Mirant a la gràfica observem que el punt (5,100) és el que ens demanen perquè l'ordenada és 100 (1 metre), després Laura tenia 5 anys.

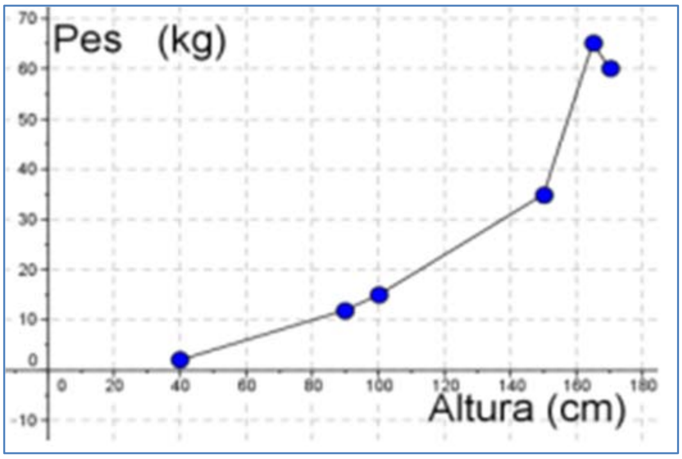
b) El punt que representa el naixement és el (0, 40) després va mesurar 40 centímetres

c) De la mateixa manera observem que als 10 anys mesurava 155 centímetres i als 20 anys 170.

d) En la gràfica observem que el tram menys inclinat és el que va dels 15 als 20 anys, això vol dir que en aqueix tram Laura va créixer menys.

Activitats proposades

q) La gràfica següent ens mostra la variació del pes de Laura amb relació a la seua estatura al llarg de la seua vida.



Analitza la gràfica, comenta la situació i respon a les preguntes següents:

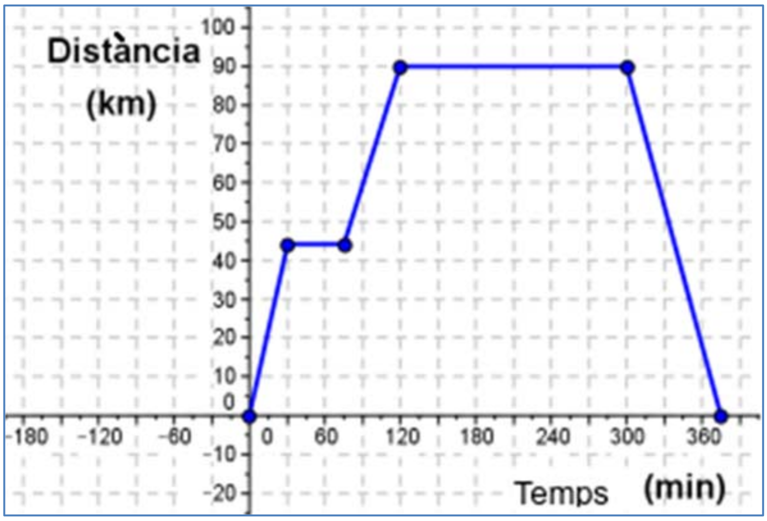
a) Quant pesava quan mesurava un metre? I quan mesurava 150 cm?

b) Quant mesurava quan pesava 55 kg?

c) A quina altura pesava més? Laura va aprimar-se en algun moment?

r) La següent gràfica representa una excursió amb autobús d'un grup de 1r d'E.S.O. a Toledo, passant per Aranjuez.

Sabent que Toledo està a 90 km de l'Institut i Aranjuez a 45 km:



a) Quant temps van parar en Aranjuez? I a Toledo?

b) Quant temps van tardar a arribar a Toledo? i a tornar a l'Institut?

c) Si van eixir a les 9 h del matí A quina hora van tornar? A les deu i mitja on es trobaven?

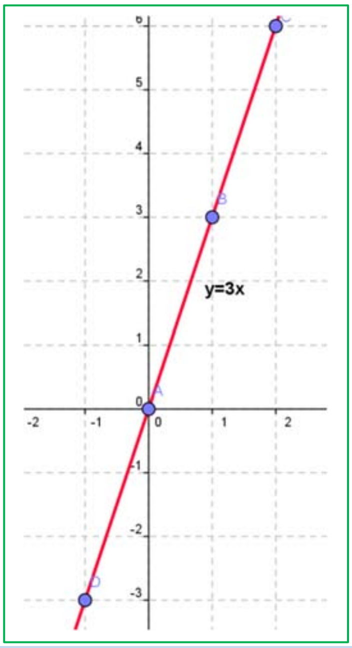
d) Fes una descripció verbal del viatge

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Institut Juan de Garay

2.5. Una funció important. La funció lineal o de proporcionalitat directa.

Dues magnituds són directament **proporcionals** quan en multiplicar o dividir a la primera per un nombre, la segona queda multiplicada o dividida pel mateix nombre.

En realitzar el quocient de qualsevol dels valors d'una variable i els corresponents de l'altra, obtenim la **raó de proporcionalitat directa *k***.



Exemple:

- *Representa gràficament la relació de proporcionalitat donada en la taula següent:*

Magnitud A (*x*)	–3	–2	0	1	2
Magnitud B (*y*)	–9	–6	0	3	6

En calcular la raó de proporcionalitat s'obté:

$$k = \frac{-9}{-3} = \frac{-6}{-2} = \frac{3}{1} = \frac{6}{2} = 3$$

La relació es defineix així: $y = 3x$.

La representació gràfica en el pla cartesià de dues magnituds **directament proporcionals** és una **recta** que passa per l'origen de coordenades.

Es pot escriure la relació entre la magnitud A (x) i la magnitud B (y) com $y = kx$ on k és la **raó de proporcionalitat**.

En representar gràficament una relació de proporcionalitat directa obtenim una recta que passa per l'origen de coordenades.

A aquestes rectes que passen per l'origen de coordenades i tenen com a equació $y = kx$ també les anomenem funcions lineals.

Activitats proposades

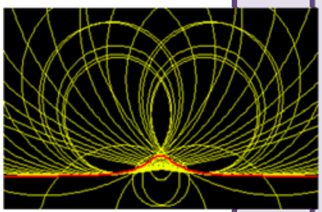
s) María vol comprar una cinta que val a 2 euros el metre. Representa gràficament el que haurà de pagar segons els metres de cinta que compre.

t) Representa gràficament la funció $y = 2x$.

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Institut Juan de Garay

CURIOSITATS. REVISTA

La Bruixa d'Agnesi

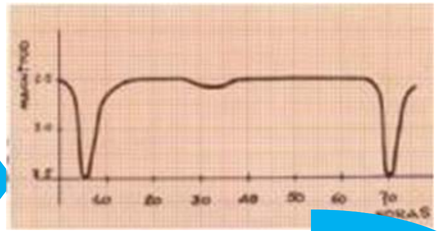


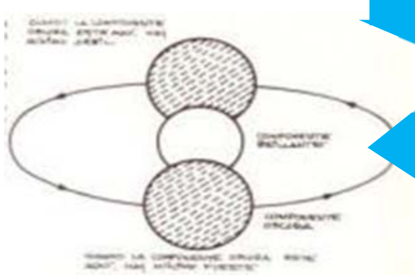
Existeix una función que s'anomena la Bruixa d'Agnesi. Maria Gaetana Agnesi va ser una matemàtica italiana que va escriure un llibre per que els seus germans pugueren aprendre matemàtiques. Eren 21 germans! Eixe llibre va ser tan bo, tan clar en les seues explicacions que es va emprar durant molt de temps en les universitats de tota Europa. Per fer això va haver que traduïr-lo. El traductor de l'italià a l'anglès, que admiraba molt a Maria Gaetana, va fer una mala traducció, i una de les funcions del llibre va apa-
réixer amb el nom de Bruixa (en lloc de *versiera*). Des

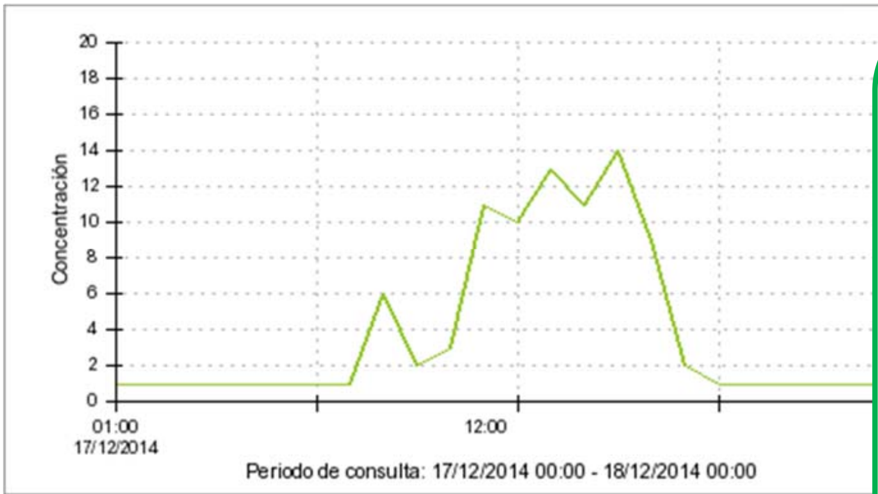
La llum de les estreles

Els astrònoms han de deduir el que saben de les estreles mesurant la llum que ens arriba d'elles. En la constel·lació de Perseu hi ha una estrela el brillantor de la qual varia segons la gràfica adjunta amb un període de 65 hores. Llavors han deduït que no es tracta d'una única estrela sinó d'una estrela doble, dues estreles molt pròximes, una més brillant i l'altra més fosca que giren una al voltant de l'altra.

Intenta ser un astrònom o astrònoma i explicar el comportament d'aqueixa estrela doble.







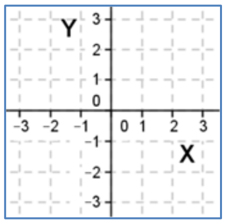
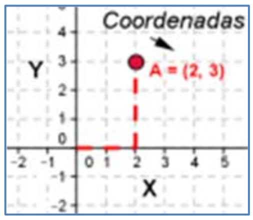
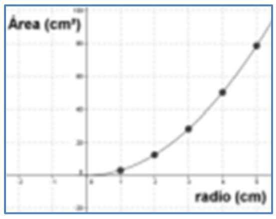
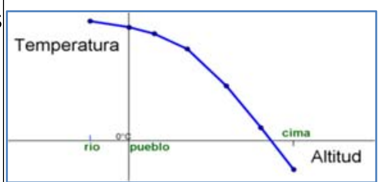
Qualitat de l'aire

La gràfica indica l'evolució **de l'ozó** en l'estació de qualitat de l'aire de Casa de Camp de Madrid durant un dia, el 18 de desembre de 2014. Observa com puja en les hores centrals del dia.

En la pàgina de la Comunitat de Madrid pots conéixer com està la qualitat de l'aire en cada moment i saber quins són els valors llindars que no s'haurien de sobrepassar.

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Institut Juan de Garay

RESUM

<table>
<tr><th></th><th></th><th>Ejemplos</th></tr>
<tr><td>Sistema de referència cartesià</td><td>Dues rectes numèriques perpendiculars, anomenades Eixos, que es tallen en un punt anomenat Origen. L'eix horitzontal es denomina eix d'abscisses, i a l'eix vertical, eix d'ordenades.</td><td>
 ,</td></tr>
<tr><td>Coordenades</td><td>És un parell ordenat de nombres (x, y), que ens indica on es troba el punt respecte al sistema de referència cartesià que estem utilitzant.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Taula de valors</td><td>Taula en què situem ordenadament les quantitats corresponents de dues magnituds relacionades.</td><td><table><tr><td>Temps (min)</td><td>0</td><td>30</td><td>80</td><td>100</td></tr><tr><td>Distància (km)</td><td>0</td><td>10</td><td>20</td><td>30</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Gràfica</td><td>Si representem en un sistema de referència cartesià tots els parells de dades d'una taula de valors obtenim una gràfica.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Gràfiques a partir de situacions</td><td>Una situació quotidiana o relacionada amb fenòmens naturals descrita verbalment es pot representar mitjançant una gràfica</td><td>
</td></tr>
</table>

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Institut Juan de Garay

EXERCICIS I PROBLEMES de 1r d'ESO

El pla cartesià. Coordenades

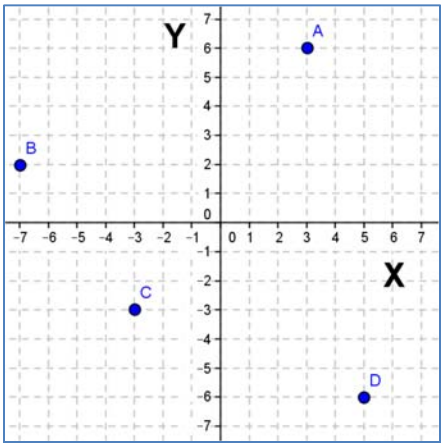
1. Representa al teu quadern els punts següents en un sistema de referència cartesià:

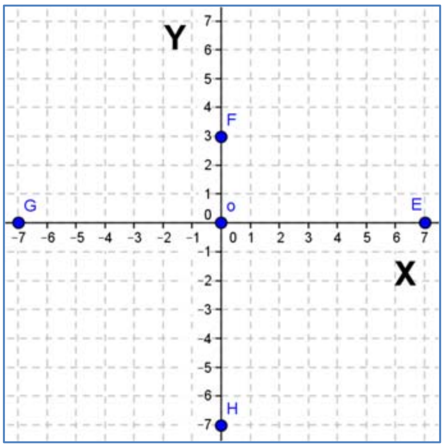
A = (3, 4) B = (– 3, 1) C = (– 1, – 3) D = (4,– 2) O = (0, 0)

2. Representa al teu quadern, a un altre sistema aquests altres punts:

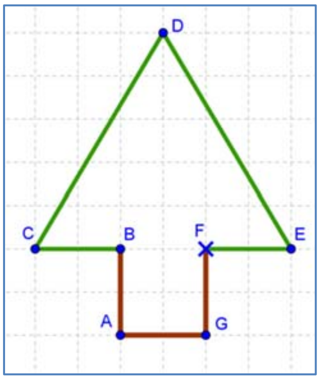
E = (6, 0) F = (2, 0) G = (– 3, 0) H = (– 7, 0)

3. Escriu al teu quadern les coordenades dels punts següents:





Analitza les coordenades de cada punt, els seus signes, els seus valors, etc. Tenen quelcom especial les coordenades dels punts E, F, G i H? I el punt O té coordenades? Com s'anomena aquest punt?



4. Dibuixa, a l'arbre del gràfic, un sistema de referència cartesià, amb l'origen en el punt F.

a) Indica les coordenades dels punts marcats al gràfic.

b) Indica en quin quadrant, o eix, està cada punt.

5. Representa els següents punts a un sistema de referència cartesià:

M = (3, –10) R = (–3, –10) V = (–3, 10) Z = (3, 10)

Uneix aquests punts en orde alfabètic i finalment uneix l'últim amb el primer. Quin polígon obtens? Calcula l'àrea i el perímetre d'aquest polígon.

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Institut Juan de Garay

6. El dibuix mostra el mapa de Mesopotàmia en l'antiguitat.

a. Representa un sistema de referència cartesià, amb origen en Babilònia.

b. Tria les unitats més adequades per a cada eix.

c. Indica quines coordenades tenen les ciutats de Jerusalem, Persèpolis i Uruk.

7. Representa els següents punts en un sistema de referència cartesià:

A = (–3, –2); B = (–3, –3); C = (–1, 5); D = (2, 3); E = (2, –2);

F = (–1, –2); G = (–1, 0); H = (–2, 0); I = (–2, –2)

a) Uneix aquests punts en orde alfabètic i finalment uneix l'últim amb el primer.

b) Indica en quin quadrant, o eix, està cada punt.

8. Al teu quadern, tria dos punts en cada quadrant i quatre punts en cada eix, dóna'ls un nom i escriu les coordenades que té cada punt.

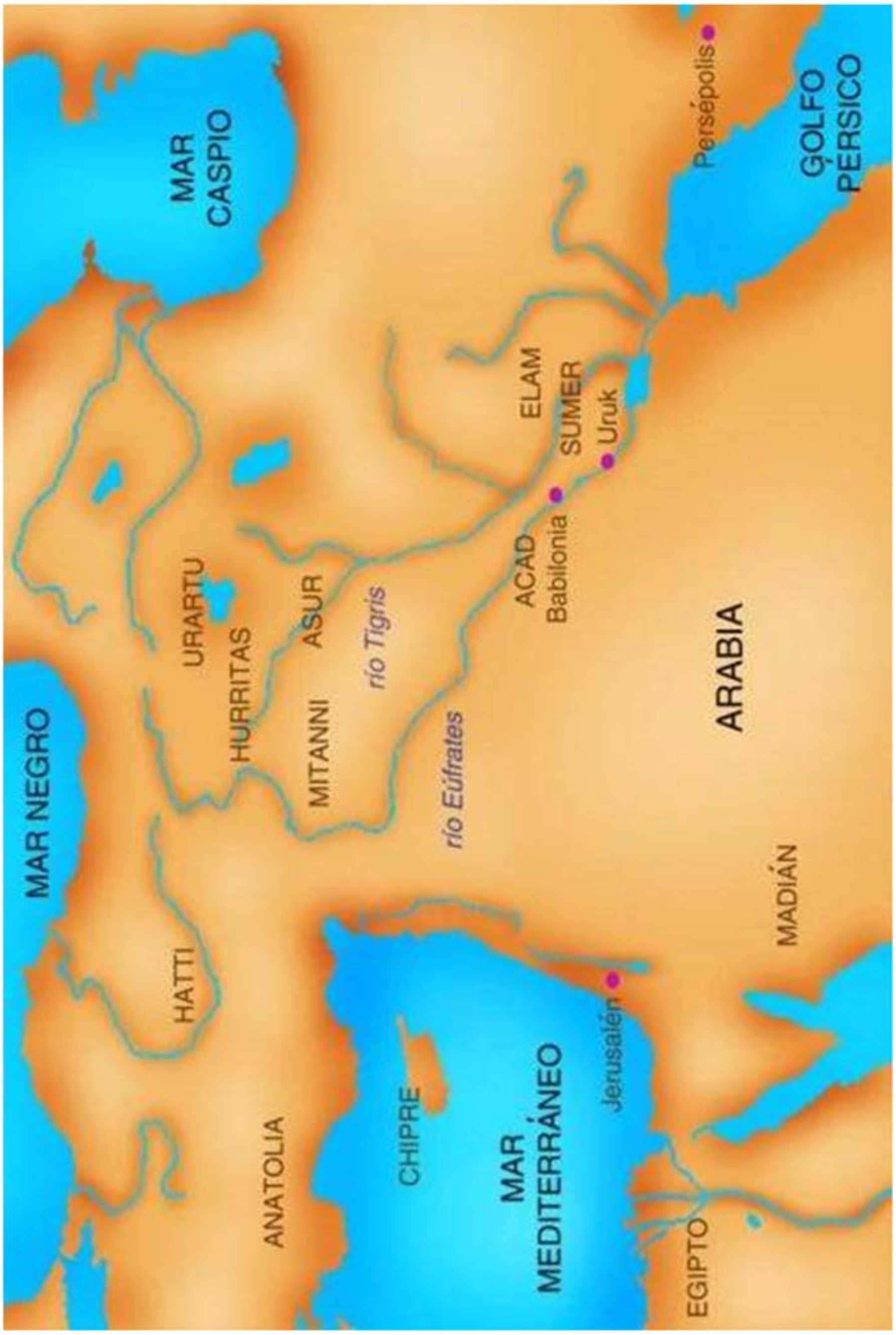
9. El gràfic mostra el pla d'una ciutat. En ell tens marcat el sistema de coordenades cartesianes i les unitats.

u) a. Indica les coordenades del Centre Cultural i del Centre de Salut respecte a aquests eixos.

b. Quina carrer està a les coordenades

(–1, 3)? I a les coordenades (0, –1)?

Material fotocopiable

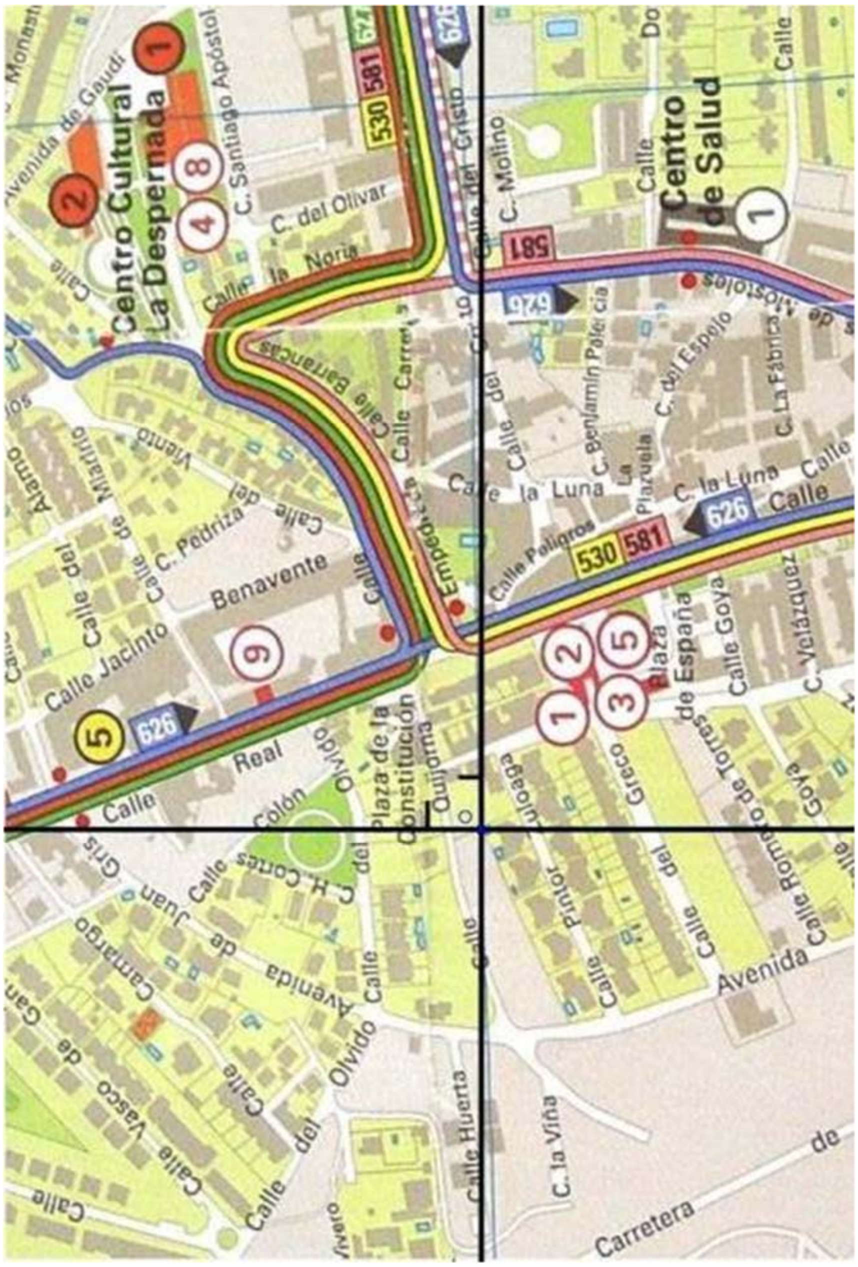


Mapa de Mesopotàmia

Font: Banc d'Imatges i sons de l'INTEF.

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Institut Juan de Garay

Material fotocopiable



Pla d'una ciutat

Font: Banc d'Imatges i sons de l'INTEF.

Taules i Gràfiques

10. La següent taula de valors relaciona el pes en quilograms de raïm i el seu preu en euros. Copia-la al teu quadern i completa-la.

Pes (Kg)	1,5		3,6		6,5
Preu (€)	2,7	3,6		9	

11. Construeix una gràfica de punts a partir de les dades de la taula de valors de l'exercici 10 i, si és possible, construeix la gràfica unint els seus punts.

12. Construeix taules de valors, amb quatre quantitats diferents, que ens expressen les relacions següents:

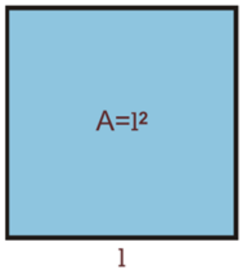
v) a. El costat d'un quadrat i la seua àrea

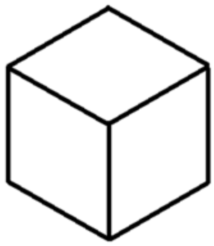
b. Un nombre i la quarta part del dit nombre.

c. Un nombre i el seu nombre oposat

d. Un nombre i el seu nombre invers.

e. L'aresta d'un cub i el seu volum





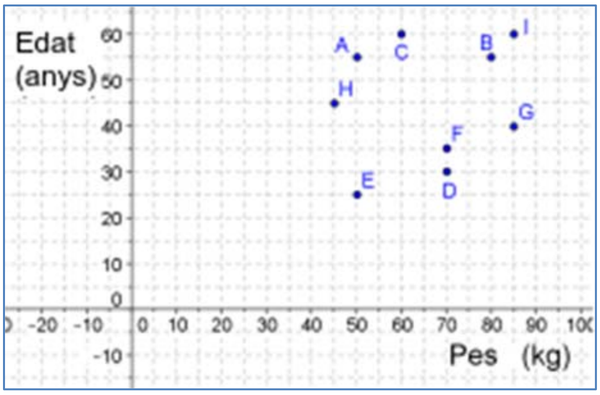
13. Copia al teu quadern i completa la següent taula de valors sabent que les magnituds P i Q són magnituds directament proporcionals:

P	0	1	2		7	9
Q				15	21	

14. La gràfica següent ens indica la relació entre l'edat i el pes dels professors d'un grup de 1º d'E.S.O. d'un Institut de Madrid.

Sabem que la professora de Matemàtiques és la més jove. La de Ciències de la Naturalesa té 35 anys. El professor de Ciències Socials és dels majors i dels que més pesen, i la d'Educació Física és la més prima.

Indica que punt de la gràfica correspon a cada un d'aquests quatre professors.



15. Fes una gràfica amb les dades de la taula següent:

X	0	1	2	5	7	9
Y	2	5	8	6	2	–2

16. Construeix gràfiques de punts a partir de les dades de les taules de valors que has realitzat a l'exercici 12 i, si és possible, construeix les gràfiques que resulten d'unir els seus punts. En cada apartat, indica en quins quadrants és possible tindre gràfica.

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Institut Juan de Garay

17. Construeix una gràfica de punts a partir de les dades de la taula de valors que has completat en l'exercici 13 i, si és possible, construeix la gràfica unint els seus punts.

18. Inventa quatre taules de valors, amb sis quantitats diferents, i representa les gràfiques corresponents. Fes que dues taules corresponguen a situacions reals i les altres dos no.

19. A un estudi de l'Institut Nacional d'Estadística de l'any 2012, ens indiquen el percentatge de llars espanyols que tenen accés a Internet en el període 2007 a 2012, aquestes dades vénen arreplegades a la taula següent:

Anys	2007	2008	2009	2010	2011	2012
Viviendes amb accés a Internet (%)	45	51	54	59	64	68

Representa aquestes dades en una gràfica de punts. Podríem unir aquests punts?

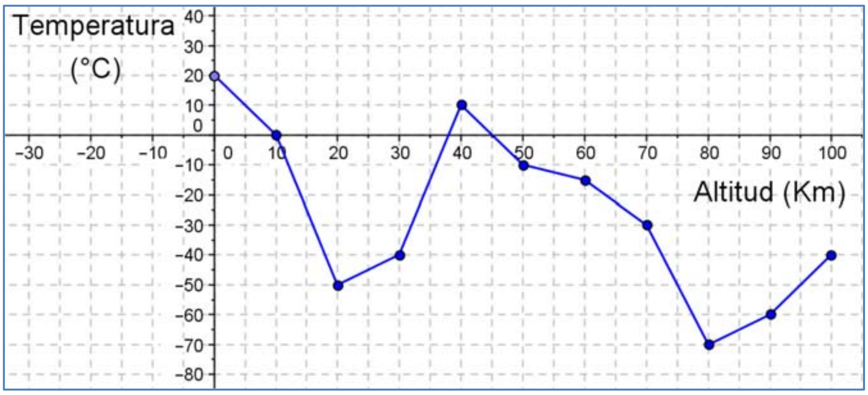
20. La gràfica següent mostra la temperatura que s'ha mesurat, en l'atmosfera, a distintes altituds.

w) a. A quines altituds la temperatura és de 0 ^{o}C?

b. Quina és la temperatura als 30 km d'altitud? i a nivell del mar (0 km)?

c. Quina és la temperatura més alta que s'ha mesurat? a quina altitud?

d. Quina és la temperatura més baixa que s'ha mesurat? a quina altitud?



Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Institut Juan de Garay

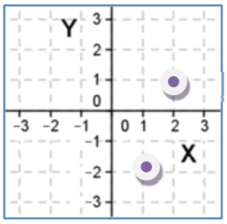
AUTOEVALUACIÓ de 1r d'ESO

1) El punt de coordenades A = (3, –1) està situat en el:

a) primer quadrant b) segon quadrant c) tercer quadrant d) quart quadrant.

2) Les coordenades dels punts indicats són:

a) (2, 1), (1, –2) b) (2, 1), (–1, 2). c) (1, 2), (–2, 1) d) (–2, 1), (2, 2)



3) Indica quina afirmació és falsa:

a) L'eix d'abscisses és horitzontal

b) L'eix d'ordenades és vertical

c) L'eix d'abscisses és perpendicular a l'eix d'ordenades

d) L'eix d'abscisses és l'eix Y

4) Els punts de coordenades A = (–3, 0), B = (–1, 0), C = (2, 0), D = (3, 0) estan tots ells en el:

a) eix d'ordenades b) primer quadrant c) eix d'abscisses d) segon quadrant

5) Els punts de coordenades A = (0, 0), B = (0, 1), C = (0, 2), D = (0, 3) estan tots ells en el:

a) eix d'ordenades b) primer quadrant c) eix d'abscisses d) segon quadrant

6) Els valors que completen la taula de proporcionalitat directa són:

Persones	1	4	8	
Kg de menjar	3			27

a) 6, 12, 8 b) 12, 24, 9 c) 8, 16, 12 d) 16, 32, 7

7) La següent taula de valors pot correspondre a:

X	3	9	15	27
Y	1	3	5	9

a) una proporcionalitat directa. b) una proporcionalitat inversa

c) la relació entre el costat d'un quadrat i la seua àrea d) la relació entre el radi del cercle i la seua àrea

8) Indica als casos següents aquell que NO és una funció:

a) La temperatura de la sopa al llarg del temps. b) Y = 2 X.

c) L'àrea d'un cercle com a funció del radi. d) L'àrea d'un quadrat i el seu color

9) Indica quina afirmació és falsa:

a) L'origen de coordenades és la intersecció entre l'eix d'abscisses i el d'ordenades.

b) En una funció a cada valor de la variable independent li correspon un únic valor de la variable dependent.

c) En una funció a cada valor de la variable dependent li correspon un únic valor de la variable independent.

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Institut Juan de Garay

PER AL PROFESSORAT

El concepte de funció és un dels conceptes bàsics en Matemàtiques i, al mateix temps, un dels més difícils d'adquirir pels estudiants de secundària. Açò no és estrany si analitzem com ha evolucionat el concepte al llarg de la història.

En la història de les Matemàtiques comença a plantejar-se el concepte de funció cap al segle XIV i ha sigut un dels què ha presentat més dificultat, sent en el segle XX un dels eixos de la investigació matemàtica. Inclús per als matemàtics del segle XVIII no estava molt clar el concepte de funció. Per exemple, en un article de *Jean Bernoulli* publicat en 1718 es troba aquesta primera definició: *"Una funció d'una variable és definida ací com una quantitat composta d'alguna manera per una variable i constants"*. Els matemàtics estaven disposats a acceptar dos tipus de funcions, les que venien donades per una fórmula o les que es traçaven arbitràriament dibuixant la seua gràfica. La idea abstracta de funció com a correspondència va tardar un temps a aparéixer. Va ser *Jean Baptiste Joseph Fourier* (1768 – 1830) en la seua obra *"La teoria analítica de la calor"* el motor per a l'aprofundiment del concepte de funció. Recordem que quan Fourier va exposar el seu desenrotllament d'una funció en sèrie trigonomètrica, va començar a discutir-se sobre què era una funció, quins podien ajustar-se a aqueix desenrotllament, i aquest fet va ser un catalitzador en la història de les Matemàtiques que, entre moltes altres coses, va portar a formalitzar aquest concepte. La noció moderna de funció és molt recent, podem datar-la en l'obra de *Peter Gustav Lejeune Dirichlet* (1805-1859) de 1837, on apareix la noció de funció com a correspondència, independent d'una representació analítica o geomètrica.

Al llarg de la història, aquest concepte s'ha anat desenrotllant a partir de l'estudi de fenòmens del món que ens rodeja i ha sigut expressat en distints llenguatges —verbal, gràfic, algebraic i numèric—. Per tant, per a poder aconseguir una aproximació significativa al sentit de les funcions, és necessari estudiar aquest concepte des de distints aspectes, utilitzant diferents llenguatges i treballant en distintes situacions.

Ja que les relacions funcionals es troben ben sovint en el nostre entorn, l'estudi de funcions, pels estudiants de 1r d'E.S.O., ha de començar amb el tractament d'aquelles situacions que existeixen en el seu entorn, sense oblidar les relacionades amb altres àrees de coneixement (les Ciències de la Naturalesa, les Ciències Socials, etc.).

Des de el primer curs d'E.S.O. els estudiants poden anar aproximant-se al concepte de funció interpretant els significats de les distintes expressions de les funcions. Aquests procediments s'han de treballar al llarg de tota l'etapa, i es van adquirint a mesura que augmenta la maduresa cognitiva i el camp d'experiència de l'estudiant.

La dificultat de visualització de la representació gràfica d'una funció pot salvar-se amb la utilització de programes informàtics específics com el Geogebra, o per aplicacions elaborades ja per alguns professors i que estan a disposició de tots, com les elaborades dins del Projecte Gauss (Institut Nacional de Tecnologies Educatives i de Formació del Professorat) o en pàgines personals d'aquests.

Bé utilitzant un sol ordinador en l'aula —amb la PDi o mitjançant la projecció de la pantalla—, o bé amb l'ús dels ordinadors pels estudiants en l'aula d'informàtica, aquests poden familiaritzar-se amb la forma de les gràfiques i la interpretació dels seus punts i és un suport inestimable per a acostar-se a la representació de funcions i al concepte de funció.

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Institut Juan de Garay