MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Dolores Vázquez Torrón

CIUG COMISIÓN INTERUNIVERSI DE GALICIA	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2024–2025** MATERIA: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE **JUNIO**

O exame consta de 4 preguntas de resposta obrigatoria, puntuadas cada unha con 2,5 puntos: a primeira sen apartados optativos e as tres seguintes con posibilidade de elección entre apartadoss.
El examen consta de 4 preguntas de respuesta obligatoria, puntuadas cada una con 2,5 puntos: la primera sin apartados optativos y las tres siguientes con posibilidade de elección entre apartados.

Problema 1:

PREGUNTA 1. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD. (2,5 puntos)

CONTEXTO

En la actualidad, existen varias empresas de cosméticos orientadas hacia el público juvenil que elaboran cremas para la piel. Una empresa quiere comercializar una nueva crema para reducir los brotes de acné, para lo que ha contratado los servicios de una compañía de publicidad. Los publicistas proponen lanzar una primera campaña empleando anuncios en prensa escrita y buzoneo. Una vez finalizada esta primera campaña, si la probabilidad de que la nueva crema sea conocida entre el público juvenil es menor que 0,6, pasarán a una segunda campaña colocando cartelería luminosa en lugares estratégicos.

Después de analizar los datos de la primera campaña, han llegado a las siguientes conclusiones: la probabilidad de que el público juvenil conozca la nueva crema por los anuncios en prensa escrita es 0,3 y la probabilidad de que sea conocida por buzoneo es 0,4. Puede suponerse que son independientes los sucesos "conocer la nueva crema por prensa escrita" y "conocer la nueva crema por buzoneo".

Responda estos tres apartados: 1.1., 1.2. y 1.3.

1.1. ¿Lanzará la empresa la segunda campaña de publicidad**?**
1.2. Suponga que la empresa ha decidido emplear la cartelería luminosa. De los que conocen la nueva crema por buzoneo el 25% también la conocen por la cartelería luminosa, y entre los que conocen la nueva crema por la cartelería luminosa, el 20% también la conocen por buzoneo. De los tres medios empleados (prensa escrita, buzoneo y cartelería luminosa), ¿cuál ha sido el que ha tenido mayor impacto para que la nueva crema sea conocida?
1.3. ¿Son incompatibles los sucesos "conocer la nueva crema por prensa escrita" y "conocer la nueva crema por buzoneo"?

Problema 2:

PREGUNTA 2. ÁLGEBRA. (2,5 puntos)

Responda uno de estos dos apartados: 2.1. o 2.2.

2.1. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2.1.1. Calcule la matriz inversa de A, A^{-1}.
2.1.2. Calcule la inversa de la matriz traspuesta de A, $(A^t)^{-1}$, utilizando el apartado anterior.
2.1.3. Despeje y calcule el valor de X en la siguiente ecuación matricial $AX - A^t = X$.

2.2. Se considera el sistema de inecuaciones dado por:

$$x \geq y - 4 \qquad x + y \leq 8 \qquad 3x + 2y \geq -2 \qquad x - 2 \leq 2y$$

2.2.1. Represente gráficamente la región factible determinada por el sistema de inecuaciones anterior y calcule sus vértices.
2.2.2. Justifique si los puntos $P(-1,1)$ y $Q(5,1)$ pertenecen o no a la región anterior.
2.2.3. Determine, si existen, los máximos y los mínimos de la función $f(x, y) = 2x - 4y$ sujeta a las restricciones definidas por el sistema de inecuaciones anterior.

Problema 3:

PREGUNTA 3. ANÁLISIS. (2,5 puntos)

Responda uno de estos dos apartados: 3.1. o 3.2.

3.1. Dada la siguiente función

$$B(t) = (4 - t)(t - 1)^2 \qquad , \qquad 0 \le t \le 4 .$$

3.1.1. Estudie el crecimiento y decrecimiento de la función y sus máximos y mínimos, si existen.
3.1.2. Estudie sus intervalos de concavidad y convexidad y sus puntos de inflexión, si existen.
3.1.3. Represente la gráfica de la función $B(t)$.

3.2. Dada la función $f(x) = ax^2 + bx - 3$, siendo a,b números reales.

3.2.1. Calcule a y b sabiendo que dicha función pasa por el punto $(4, 5)$ y tiene un mínimo en $x = 1$.
3.2.2. Para $a = 1$ y $b = -2$, calcule el área limitada por $f(x)$ y la recta $y = x - 3$.

Problema 4:

PREGUNTA 4. TRES BLOQUES DE LA MATERIA. (2,5 puntos)

Responda uno de los siguientes apartados: 4.1., 4.2. o cualquiera de los apartados no escogidos de las preguntas 2 y 3 (2.1, 2.2, 3.1 o 3.2)

4.1. Sean A y B dos sucesos tales que:

$$P(A) = 0{,}40,\ P(A \cap B) = 0{,}21 \text{ y } P(A|B) = 0{,}60.$$

4.1.1. Calcule $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ y $P(\bar{B}|A)$.
4.1.2. Justifique si los sucesos A y B son o no independientes.

4.2. Una encuesta realizada a 100 individuos de una población revela que 80 de ellos están satisfechos con el servicio de su compañía eléctrica.

4.2.1. Calcule un intervalo con un 95% de confianza para la proporción de individuos satisfechos con el servicio de su compañía eléctrica.
4.2.2. Si se sabe que 8 de cada 10 individuos están satisfechos con el servicio de su compañía eléctrica y se toma una muestra de 100 individuos, ¿cuál es la probabilidad de que la proporción de individuos satisfechos con el servicio de su compañía eléctrica sea superior al 87%?

Autora: Dolores Vázquez Torrón.
www.apuntesmareaverde.org.es

CIUG COMISIÓN INTERUNIVERSI DE GALICIA	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2024–2025** MATERIA: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE **JUNIO**

O exame consta de 4 preguntas de resposta obrigatoria, puntuadas cada unha con 2,5 puntos: a primeira sen apartados optativos e as tres seguintes con posibilidade de elección entre apartadoss.

Problema 1:

PREGUNTA 1. ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE. (2,5 puntos)

CONTEXTO

Na actualidade, existen varias empresas de cosméticos orientadas cara ao público xuvenil que elaboran cremas para a pel. Unha empresa quere comercializar unha nova crema para reducir os brotes de acne, para o que contratou os servizos dunha compañía de publicidade. Os publicistas propoñen lanzar unha primeira campaña empregando anuncios en prensa escrita e *buzoneo*. Unha vez finalizada esta primeira campaña, se a probabilidade de que a nova crema sexa coñecida entre o público xuvenil é menor que 0,6, pasarán a unha segunda campaña colocando carteis luminosos en lugares estratéxicos.

Despois de analizar os datos da primeira campaña, chegaron ás seguintes conclusións: a probabilidade de que o público xuvenil coñeza a nova crema polos anuncios en prensa escrita é 0,3 e a probabilidade de que sexa coñecida por buzoneo é 0,4. Pode supoñerse que son independentes os sucesos "coñecer a nova crema por prensa escrita" e "coñecer a nova crema por *buzoneo*".

Responda estes tres apartados: 1.1., 1.2. e 1.3.

1.1. Lanzará a empresa a segunda campaña de publicidade?

1.2. Supoña que a empresa decidiu empregar carteis luminosos. Dos que coñecen a nova crema por *buzoneo* o 25% tamén a coñecen polos carteis luminosos, e entre os que coñecen a nova crema polos carteis luminosos, o 20% tamén a coñecen por *buzoneo*. Dos tres medios empregados (prensa escrita, *buzoneo* e carteis luminosos), cal foi o que tivo maior impacto para que a nova crema sexa coñecida?

1.3. Son incompatibles os sucesos "coñecer a nova crema por prensa escrita" e "coñecer a nova crema por *buzoneo*"?

Problema 2:

PREGUNTA 2. ÁLXEBRA. (2,5 puntos)

Responda un destes dous apartados: 2.1. ou 2.2.

2.1. Dada a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2.1.1. Calcule a matriz inversa de A, A^{-1}.

2.1.2. Calcule a inversa da matriz trasposta de A, $(A^t)^{-1}$, utilizando o apartado anterior.

2.1.3. Despexe e calcule o valor de X na seguinte ecuación matricial $AX - A^t = X$.

2.2. Considérase o sistema de inecuacións dado por:

$$x \geq y - 4 \qquad x + y \leq 8 \qquad 3x + 2y \geq -2 \qquad x - 2 \leq 2y$$

2.2.1. Represente graficamente a rexión factible determinada polo sistema de inecuacións anterior e calcule os seus vértices.

2.2.2. Xustifique se os puntos $P(-1,1)$ e $Q(5,1)$ pertencen ou non á rexión anterior.

2.2.3. Determine, se existen, os máximos e os mínimos da función $f(x, y) = 2x - 4y$ suxeita ás restricións definidas polo sistema de inecuacións anterior.

Problema 3:

PREGUNTA 3. ANÁLISE. (2,5 puntos)

Responda un destes dous apartados: 3.1. ou 3.2.

3.1. Dada a seguinte función

$$B(t) = (4-t)(t-1)^2 \qquad , \qquad 0 \le t \le 4 .$$

3.1.1. Estude o crecemento e decrecemento da función e os seus máximos e mínimos, se existen.
3.1.2. Estude os seus intervalos de concavidade e convexidade e os seus puntos de inflexión, se existen.
3.1.3. Represente a gráfica da función $B(t)$.

3.2. Dada a función $f(x) = ax^2 + bx - 3$, sendo a,b números reais.

3.2.1. Calcule a e b sabendo que dita función pasa polo punto $(4, 5)$ e ten un mínimo en $x = 1$.
3.2.2. Para $a = 1$ e $b = -2$, calcule a área limitada por $f(x)$ e a recta $y = x - 3$.

Problema 4:

PREGUNTA 4. TRES BLOQUES DA MATERIA. (2,5 puntos)

Responda un dos seguintes apartados: 4.1., 4.2. ou calquera dos apartados non escollidos das preguntas 2 e 3 (2.1, 2.2, 3.1 ou 3.2)

4.1 Sexan A e B dous sucesos tales que:

$$P(A) = 0{,}40,\ P(A \cap B) = 0{,}21 \text{ e } P(A|B) = 0{,}60.$$

4.1.1. Calcule $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ e $P(\bar{B}|A)$.
4.1.2. Xustifique se os sucesos A e B son ou non independentes.

4.2. Unha enquisa realizada a 100 individuos dunha poboación revela que 80 deles están satisfeitos co servizo da súa compañía eléctrica.

4.2.1. Calcule un intervalo cun 95% de confianza para a proporción de individuos satisfeitos co servizo da súa compañía eléctrica.
4.2.2. Se se sabe que 8 de cada 10 individuos están satisfeitos co servizo da súa compañía eléctrica e se toma unha mostra de 100 individuos, cal é a probabilidade de que a proporción de individuos satisfeitos co servizo da súa compañía eléctrica sexa superior ao 87%?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

PREGUNTA 1. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD. (2,5 puntos)

CONTEXTO

En la actualidad, existen varias empresas de cosméticos orientadas hacia el público juvenil que elaboran cremas para la piel. Una empresa quiere comercializar una nueva crema para reducir los brotes de acné, para lo que ha contratado los servicios de una compañía de publicidad. Los publicistas proponen lanzar una primera campaña empleando anuncios en prensa escrita y buzoneo. Una vez finalizada esta primera campaña, si la probabilidad de que la nueva crema sea conocida entre el público juvenil es menor que 0,6, pasarán a una segunda campaña colocando cartelería luminosa en lugares estratégicos.

Después de analizar los datos de la primera campaña, han llegado a las siguientes conclusiones: la probabilidad de que el público juvenil conozca la nueva crema por los anuncios en prensa escrita es 0,3 y la probabilidad de que sea conocida por buzoneo es 0,4. Puede suponerse que son independientes los sucesos "conocer la nueva crema por prensa escrita" y "conocer la nueva crema por buzoneo".

Responda estos tres apartados: 1.1., 1.2. y 1.3.

1.1. ¿Lanzará la empresa la segunda campaña de publicidad**?**

1.2. Suponga que la empresa ha decidido emplear la cartelería luminosa. De los que conocen la nueva crema por buzoneo el 25% también la conocen por la cartelería luminosa, y entre los que conocen la nueva crema por la cartelería luminosa, el 20% también la conocen por buzoneo. De los tres medios empleados (prensa escrita, buzoneo y cartelería luminosa), ¿cuál ha sido el que ha tenido mayor impacto para que la nueva crema sea conocida?

1.3. ¿Son incompatibles los sucesos "conocer la nueva crema por prensa escrita" y "conocer la nueva crema por buzoneo"?

Solución:

Llamamos A al suceso "conocer la nueva crema por prensa escrita" y B a "conocer la nueva crema por buzoneo". Como se suponen sucesos independientes se cumple $P(A\cap B)=P(A)P(B)=0.3\cdot 0.4=0.12$.

1.1. Debemos comprobar si $P(A\cup B)$ es mayor o menor de 0.6. Calculamos esta probabilidad.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.3+0.4-0.12=0.58<0.60$$

Al ser la probabilidad menor de 0.6 la empresa lanzará la segunda campaña.

1.2. Llamamos C al suceso "conocer la nueva crema por cartelería luminosa". Nos dicen que $P(C/B)=0.25$ y que $P(B/C)=0.20$.

Nos piden calcular y comparar $P(A)$, $P(B)$ y $P(C)$.

$$P(C/B)=0.25\Rightarrow\frac{P(B\cap C)}{P(B)}=0.25\Rightarrow\frac{P(B\cap C)}{0.4}=0.25\Rightarrow P(B\cap C)=0.25\cdot 0.4=0.1$$

$$P(B/C)=0.20\Rightarrow\frac{P(B\cap C)}{P(C)}=0.20\Rightarrow\frac{0.1}{0.2}=P(C)\Rightarrow P(C)=0.5$$

Como $\left.\begin{array}{l} P(A)=0.3 \\ P(B)=0.4 \\ P(C)=0.5 \end{array}\right\} \Rightarrow P(A)<P(B)<P(C)$, el que ha tenido mayor impacto para que la nueva crema sea conocida es la cartelería luminosa.

1.3. Nos preguntan ¿Son incompatibles los sucesos A = "conocer la nueva crema por prensa escrita" y B = "conocer la nueva crema por buzoneo"?

Para ello debe ser $A\cap B=\varnothing$ y para ello debería ser $P(A\cap B)=0$.

Como $P(A\cap B)=0.12\neq 0$ los sucesos no son incompatibles.

Problema 2:

PREGUNTA 2. ÁLGEBRA. (2,5 puntos)

Responda uno de estos dos apartados: 2.1. o 2.2.

2.1. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2.1.1. Calcule la matriz inversa de A, A^{-1}.
2.1.2. Calcule la inversa de la matriz traspuesta de A, $(A^t)^{-1}$, utilizando el apartado anterior.
2.1.3. Despeje y calcule el valor de X en la siguiente ecuación matricial $AX - A^t = X$.

2.2. Se considera el sistema de inecuaciones dado por:

$$x \geq y - 4 \qquad x + y \leq 8 \qquad 3x + 2y \geq -2 \qquad x - 2 \leq 2y$$

2.2.1. Represente gráficamente la región factible determinada por el sistema de inecuaciones anterior y calcule sus vértices.
2.2.2. Justifique si los puntos $P(-1,1)$ y $Q(5,1)$ pertenecen o no a la región anterior.
2.2.3. Determine, si existen, los máximos y los mínimos de la función $f(x,y) = 2x - 4y$ sujeta a las restricciones definidas por el sistema de inecuaciones anterior.

Solución:

2.1.1. Comprobamos si la matriz A tiene determinante no nulo y por tanto existe su inversa.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 0 + 4 - 6 - 0 - 0 = -3 \neq 0$$

Al ser el determinante distinto de cero la inversa de la matriz A existe. La calculamos.

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^T)}{|A|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}}{-3} = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -7 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 7/3 & -4/3 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

2.1.2. Utilizamos que $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 7/3 & -4/3 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 7/3 & 1/3 \\ 2/3 & -4/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

2.1.3. Despejamos X en la ecuación matricial.

$$AX - A^t = X \Rightarrow AX - X = A^t \Rightarrow (A - I)X = A^t \Rightarrow X = (A - I)^{-1} A^t$$

Calculamos la inversa de la matriz $(A - I)$.

$$(A - I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$|A-I|=\begin{vmatrix}0&0&2\\2&0&0\\3&1&-2\end{vmatrix}=0+0+4-0-0-0=4\neq 0$$

$$(A-I)^{-1}=\frac{Adj\left((A-I)^t\right)}{|A-I|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}0&2&3\\0&0&1\\2&0&-2\end{pmatrix}}{4}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}0&1\\0&-2\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}0&1\\2&-2\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}0&0\\2&0\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}2&3\\0&-2\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}0&3\\2&-2\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}0&2\\2&0\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}2&3\\0&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}0&3\\0&1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}0&2\\0&0\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$(A-I)^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}0&2&0\\4&-6&4\\2&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1/2&0\\1&-3/2&1\\1/2&0&0\end{pmatrix}$$

Obtenemos la expresión de la matriz X.

$$X=(A-I)^{-1}A^t=\begin{pmatrix}0&1/2&0\\1&-3/2&1\\1/2&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&1\\2&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1/2&1/2\\1+2&2-3/2&3-3/2-1\\1/2&1&3/2\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}0&1/2&1/2\\3&1/2&1/2\\1/2&1&3/2\end{pmatrix}}$$

La matriz X tiene la expresión $X=\begin{pmatrix}0&1/2&1/2\\3&1/2&1/2\\1/2&1&3/2\end{pmatrix}$.

2.2.1. Representamos primero las rectas que delimitan la región factible.

$x = y - 4$

x	$y = x + 4$
-2	2
0	4
2	6

$x + y = 8$

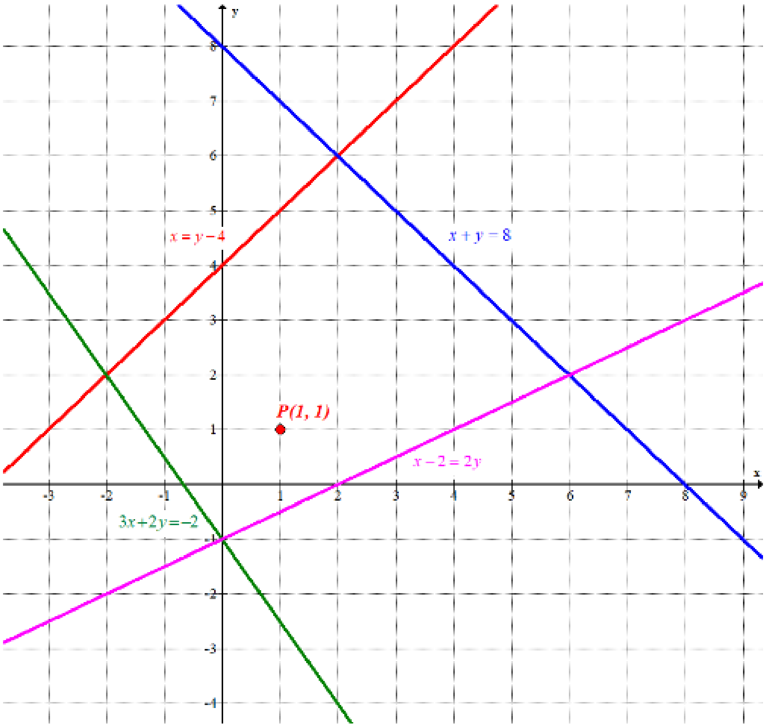
x	$y = 8 - x$
2	6
6	2
8	0

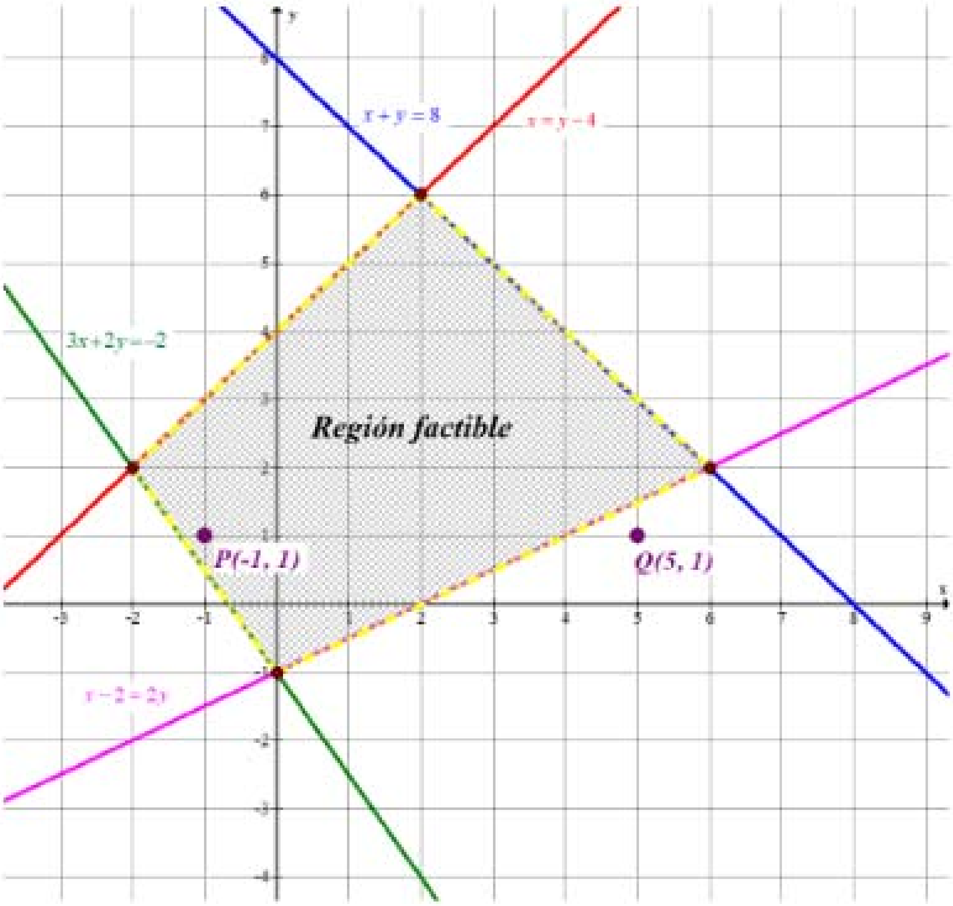
$3x + 2y = -2$

x	$y = \frac{-2-3x}{2}$
-2	2
0	-1
2	-4

$x - 2 = 2y$

x	$y = \frac{x-2}{2}$
0	-1
2	0
6	2





Se observa que el punto P(−1, 1) si pertenece y el punto Q(5, 1) está situado fuera de la región factible.

2.2.3. Valoramos la función $f(x,y) = 2x - 4y$ en cada uno de los vértices en busca de los valores máximo y mínimo.

A(0, −1) → $f(0,-1) = 2\cdot 0 - 4(-1) =$ 4 Máximo
B(−2, 2) → $f(-2,2) = 2(-2) - 4\cdot 2 = -12$
C(2, 6) → $f(2,6) = 2\cdot 2 - 4\cdot 6 =$ −20 Mínimo
D(6, 2) → $f(6,2) = 2\cdot 6 - 4\cdot 2 =$ 4 Máximo

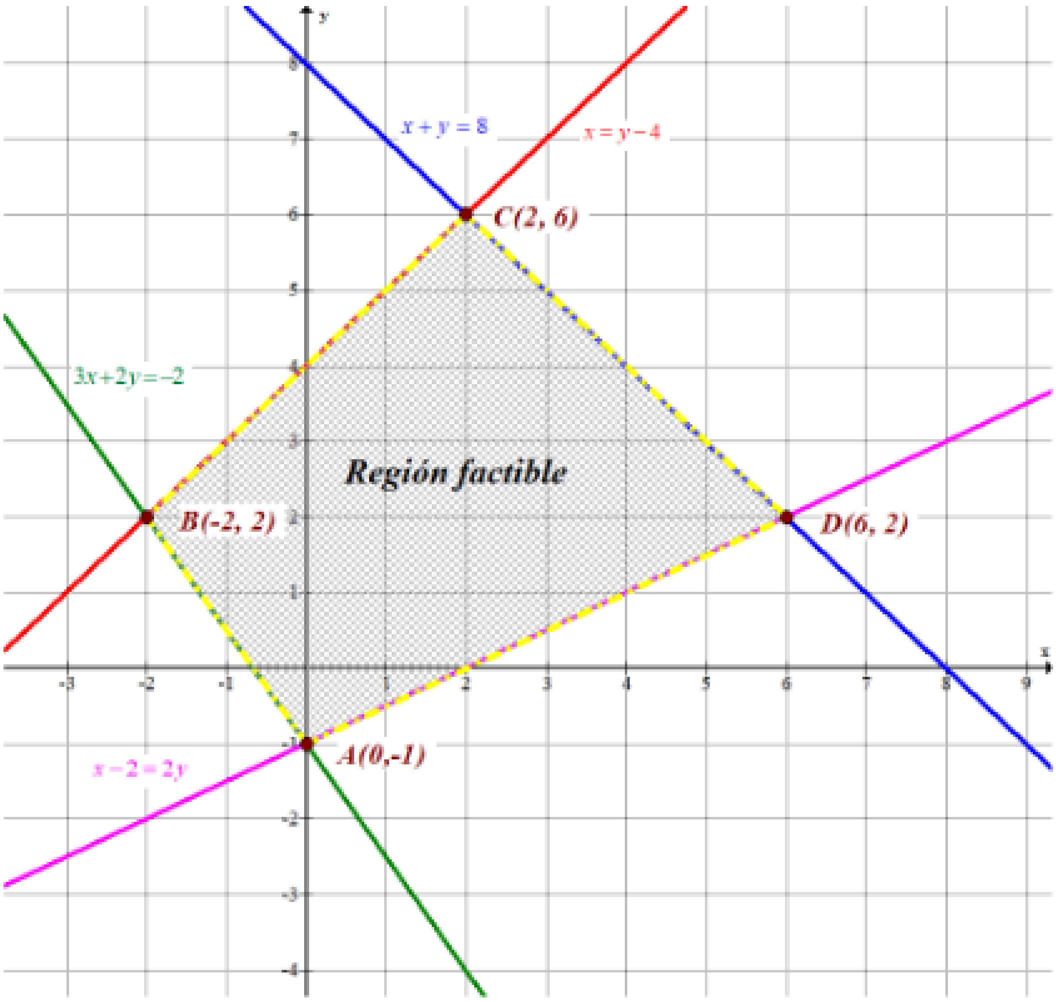
El valor mínimo es −20 y se alcanza en el punto C(2, 6).
El valor máximo es 4 y se alcanza en los punto A(0, −1) y en D(6, 2). Por lo que el valor máximo se alcanza también en cualquier punto del segmento $\overline{AD}$. Además de los puntos A y D se alcanza en infinitos puntos, por ejemplo, en (2, 0), (4, 1), …etc.

Como las inecuaciones son $\left.\begin{array}{l} x \geq y-4 \\ x+y \leq 8 \\ 3x+2y \geq -2 \\ x-2 \leq 2y \end{array}\right\}$ la región factible es la región del plano situada por debajo de las rectas azul y roja y por encima de las rectas verde y rosa.

Comprobamos que el punto P(1, 1) perteneciente a esta región cumple las inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} 1 \geq 1-4 \\ 1+1 \leq 8 \\ 3+2 \geq -2 \\ 1-2 \leq 2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 1 \geq -3 \\ 2 \leq 8 \\ 5 \geq -2 \\ -1 \leq 2 \end{array}\right\}$$ ¡Se cumplen todas!

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo e indicamos las coordenadas de los vértices.



Los vértices de la región factible son los puntos A(0, –1), B(–2, 2), C(2, 6) y D(6, 2).

2.2.2. Colocamos los puntos P y Q en el dibujo superior y comprobamos si pertenecen a la región factible o no.

Problema 3:

PREGUNTA 3. ANÁLISIS. (2,5 puntos)

Responda uno de estos dos apartados: 3.1. o 3.2.

3.1. Dada la siguiente función

$$B(t) = (4-t)(t-1)^2 \qquad , \qquad 0 \le t \le 4 .$$

3.1.1. Estudie el crecimiento y decrecimiento de la función y sus máximos y mínimos, si existen.
3.1.2. Estudie sus intervalos de concavidad y convexidad y sus puntos de inflexión, si existen.
3.1.3. Represente la gráfica de la función $B(t)$.

3.2. Dada la función $f(x) = ax^2 + bx - 3$, siendo a,b números reales.

3.2.1. Calcule a y b sabiendo que dicha función pasa por el punto $(4,5)$ y tiene un mínimo en $x = 1$.
3.2.2. Para $a = 1$ y $b = -2$, calcule el área limitada por $f(x)$ y la recta $y = x - 3$.

Solución:

3.1.1. Buscamos los valores que anulan la derivada de la función (puntos críticos).

$$B(t) = (4-t)(t-1)^2 \Rightarrow B'(t) = (-1)(t-1)^2 + (4-t)2(t-1) =$$

$$= -\left(t^2+1-2t\right) + 2\left(4t-4-t^2+t\right) = -t^2-1+2t+8t-8-2t^2+2t = -3t^2+12t-9$$

$$B'(t) = 0 \Rightarrow -3t^2+12t-9 = 0 \Rightarrow t^2-4t+3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4\cdot 3}}{2} = \frac{4\pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{4+2}{2} = \boxed{3=t} \\ \frac{4-2}{2} = \boxed{1=t} \end{cases}$$

Hemos encontrado dos puntos críticos que pertenecen al intervalo de definición de la función. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

- En el intervalo $[0,1)$ consideramos $t = 0.5$ y la derivada vale $B'(0.5) = -3\cdot 0.5^2 + 12\cdot 0.5 - 9 = -3.75 < 0$. La función decrece en $[0,1)$.
- En el intervalo $(1,3)$ consideramos $t = 2$ y la derivada vale $B'(2) = -3\cdot 2^2 + 12\cdot 2 - 9 = 3 > 0$. La función crece en $(1,3)$.
- En el intervalo $(3,4]$ consideramos $t = 3.5$ y la derivada vale $B'(3.5) = -3\cdot 3.5^2 + 12\cdot 3.5 - 9 = -3.75 < 0$. La función decrece en $(3,4]$.

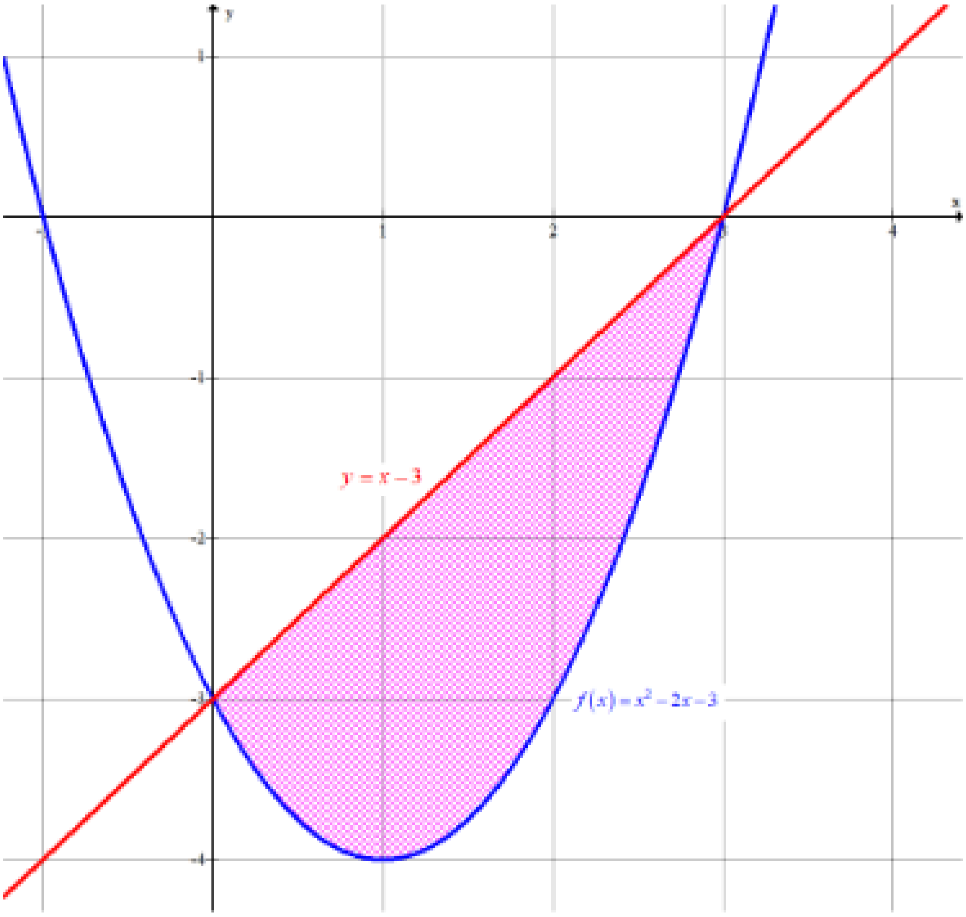
La función decrece en $[0,1)\cup(3,4]$ y crece en $(1,3)$.
La función tiene un mínimo en $t = 1$ y un máximo relativo en $t = 3$.
Como $B(1) = (4-1)(1-1)^2 = 0$ las coordenadas del mínimo relativo son (1, 0).
Como $B(3) = (4-3)(3-1)^2 = 4$ las coordenadas del máximo relativo son (3, 4).

3.1.2. Buscamos los candidatos a puntos de inflexión como los valores que anulan la segunda derivada.

$$B'(t) = -3t^2+12t-9 \Rightarrow B''(t) = -6t+12$$

$$B''(t) = 0 \Rightarrow -6t+12 = 0 \Rightarrow 6t = 12 \Rightarrow \boxed{t=2}$$

Estudiamos el signo de la segunda derivada antes y después de $t = 2$.



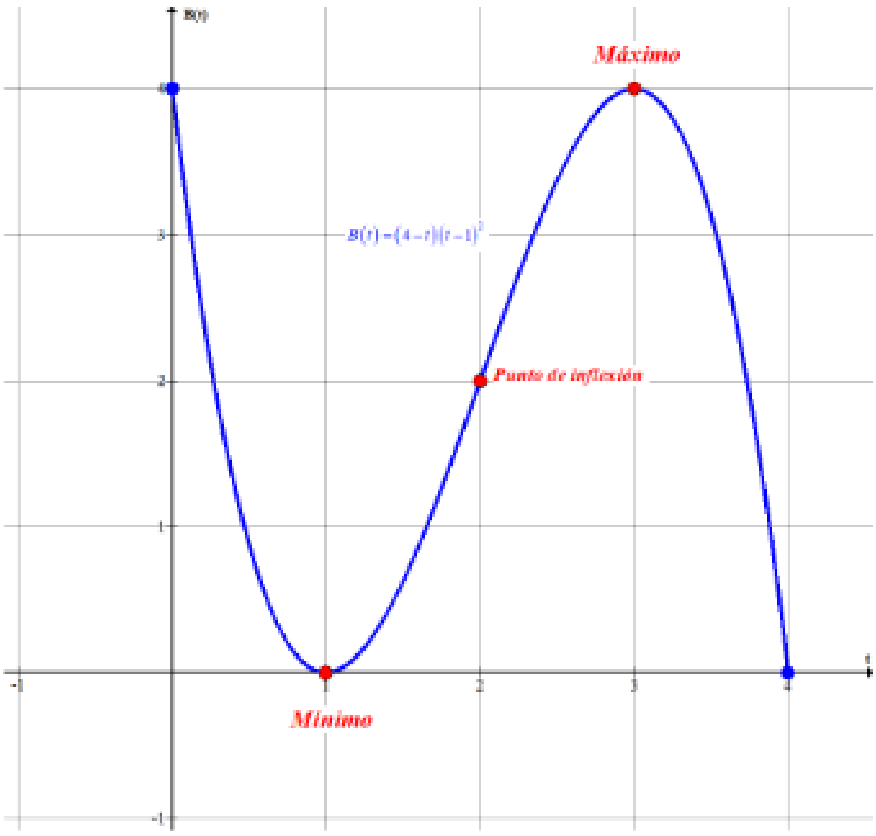
y
x
$y = x - 3$
$f(x) = x^2 - 2x - 3$

- En el intervalo $[0,2)$ consideramos $t=1$ y la segunda derivada vale $B''(1)=-6\cdot 1+12=6>0$. La función es convexa (∪) en $[0,2)$.
- En el intervalo $(2,4]$ consideramos $t=3$ y la segunda derivada vale $B''(3)=-6\cdot 3+12=-6<0$. La función es cóncava (∩) en $(2,4]$.

La función presenta un punto de inflexión en $t=2$.
Como $B(2)=(4-2)(2-1)^2=2$ las coordenadas del punto de inflexión son (2, 2).

3.1.3. Con los datos obtenidos y completando una tabla de valores dibujamos la gráfica de la función.

t	$B(t)=(4-t)(t-1)^2$
0	4
1	0
2	2
3	4
4	0



Problema 4:

PREGUNTA 4. TRES BLOQUES DE LA MATERIA. (2,5 puntos)

Responda uno de los siguientes apartados: 4.1., 4.2. o cualquiera de los apartados no escogidos de las preguntas 2 y 3 (2.1, 2.2, 3.1 o 3.2)

4.1. Sean A y B dos sucesos tales que:

$$P(A) = 0{,}40,\ P(A \cap B) = 0{,}21 \text{ y } P(A|B) = 0{,}60.$$

4.1.1. Calcule $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ y $P(\bar{B}|A)$.
4.1.2. Justifique si los sucesos A y B son o no independientes.

4.2. Una encuesta realizada a 100 individuos de una población revela que 80 de ellos están satisfechos con el servicio de su compañía eléctrica.

4.2.1. Calcule un intervalo con un 95% de confianza para la proporción de individuos satisfechos con el servicio de su compañía eléctrica.
4.2.2. Si se sabe que 8 de cada 10 individuos están satisfechos con el servicio de su compañía eléctrica y se toma una muestra de 100 individuos, ¿cuál es la probabilidad de que la proporción de individuos satisfechos con el servicio de su compañía eléctrica sea superior al 87%?

Solución:

4.1.1. Determinamos el valor de $P(B)$.

$$P(A/B) = 0.60 \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0.6 \Rightarrow \frac{0.21}{P(B)} = 0.6 \Rightarrow \boxed{P(B) = \frac{0.21}{0.6} = 0.35}$$

Hallamos $P(A \cup B)$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.40 + 0.35 - 0.21 = \boxed{0.54}$$

Hallamos $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ usando una de las leyes de Morgan.

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.54 = \boxed{0.46}$$

Hallamos $P(\overline{B}/A)$ utilizando el teorema de Bayes.

$$P(\overline{B}/A) = \frac{P(\overline{B} \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0.40 - 0.21}{0.40} = \frac{19}{40} = \boxed{0.475}$$

4.1.2. Para que dos sucesos sean independientes debe cumplirse $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

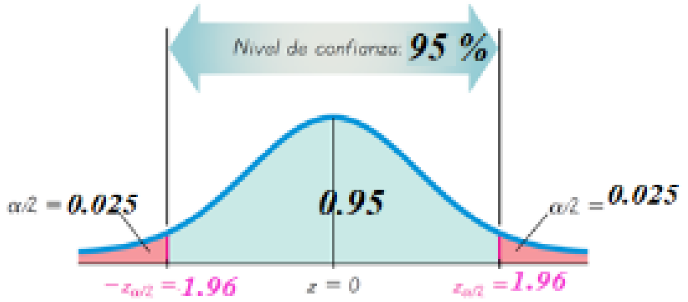
$$\left.\begin{array}{l} P(A \cap B) = 0.21 \\ P(A)P(B) = 0.4 \cdot 0.35 = 0.14 \end{array}\right\} \Rightarrow P(A \cap B) = 0.21 \neq 0.14 = P(A)P(B)$$

Los sucesos A y B no son independientes.

4.2.1. Tamaño de la muestra = n = 100. La proporción de individuos satisfechos con el servicio de su compañía eléctrica vale $pr = \dfrac{80}{100} = 0.8$.

Con un nivel de confianza del 95 % hallamos el valor de $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 0{,}05 \rightarrow \alpha/2 = 0'025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1{,}96}$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	[illegible]
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	[illegible]
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	[illegible]
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	[illegible]
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	[illegible]
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	[illegible]
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	[illegible]
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	[illegible]
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	[illegible]
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	[illegible]
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	[illegible]
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	[illegible]
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	[illegible]
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	[illegible]
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	[illegible]
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	[illegible]
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	[illegible]
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	[illegible]
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	[illegible]
1.9	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.9750
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803

Hallamos el error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.8 \cdot 0.2}{100}} = 0.0784$$

El intervalo de confianza es:

$$(pr - Error,\ pr + Error) = (0.8 - 0.0784,\ 0.8 + 0.0784) = (0.7216,\ 0.8784)$$

4.2.2. La distribución de las proporciones sigue una ley normal con media $\mu = pr = \dfrac{8}{10} = 0.8$ y con desviación típica $\sigma = \sqrt{\dfrac{pq}{n}} = \sqrt{\dfrac{0.8 \cdot 0.2}{100}} = 0.04$. $p = N(0.8, 0.04)$

Nos piden calcular $P\left(p > 0.87\right)$.

$$P\left(p > 0.87\right) = \left\{\begin{array}{l} Tipificamos \\ Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \end{array}\right\} = P\left(Z > \frac{0.87-0.8}{0.04}\right) = P(Z > 1.75) =$$

$$= 1 - -P(Z \leq 1.75) = \left\{\begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)} \end{array}\right\} = 1 - 0.9599 = \boxed{0.0401}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.0
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	[illegible]	0.5
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	[illegible]	0.5
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	[illegible]	0.6
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	[illegible]	0.6
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	[illegible]	0.6
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	[illegible]	0.7
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	[illegible]	0.7
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	[illegible]	0.7
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	[illegible]	0.8
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	[illegible]	0.8
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	[illegible]	0.8
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	[illegible]	0.8
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	[illegible]	0.8
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	[illegible]	0.9
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	[illegible]	0.9
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	[illegible]	0.9
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	[illegible]	0.9
1.7	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.9599	0.9
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	[illegible]	0.9

La probabilidad de que la proporción de individuos satisfechos con el servicio de su compañíia eléctrica sea superior al 87% es de 0.0401.

3.2.1. Si la función pasa por el punto (4, 5) se cumple que $f(4)=5$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=ax^2+bx-3 \\ f(4)=5 \end{array}\right\} \Rightarrow 5=a\cdot 4^2+4b-3 \Rightarrow 16a+4b=8 \Rightarrow 4a+b=2 \Rightarrow \boxed{b=2-4a}$$

La función queda $f(x)=ax^2+(2-4a)x-3$.

Si la función tiene un mínimo en $x=1$ entonces $f'(1)=0$ y $f''(1)>0$.

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=ax^2+(2-4a)x-3 \Rightarrow f'(x)=2ax+2-4a \\ f'(1)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0=2a+2-4a \Rightarrow 2a=2 \Rightarrow \boxed{a=1}$$

Obtenemos el valor de b siendo $a=1 \rightarrow b=2-4\cdot 1=-2$.

La función queda $f(x)=x^2-2x-3$. Comprobamos que la segunda derivada es positiva para $x=1$.

$$f(x)=x^2-2x-3 \Rightarrow f'(x)=2x-2 \Rightarrow f''(x)=2 \Rightarrow f''(1)=2>0$$

Los valores buscados son $a=1$ y $b=-2$.

3.2.2. Para $a=1$ y $b=-2$ la función queda $f(x)=x^2-2x-3$.

Hallamos los puntos de corte de la parábola y la recta.

$$\left.\begin{array}{l} y=x-3 \\ f(x)=x^2-2x-3 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2-2x-3=x-3 \Rightarrow x^2-3x=0 \Rightarrow$$

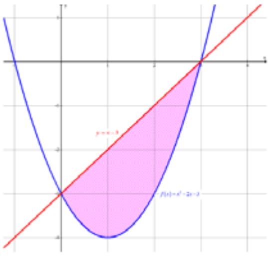
$$\Rightarrow x(x-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=0} \\ x-3=0 \rightarrow \boxed{x=3} \end{cases}$$

El área que deseamos calcular es el valor absoluto de la integral definida entre 0 y 3 de la diferencia de las dos funciones.

$$\int_0^3 x^2-2x-3-(x-3)dx=\int_0^3 x^2-2x-3-x+3dx=\int_0^3 x^2-3xdx=$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-3\frac{x^2}{2}\right]_0^3=\left[\frac{3^3}{3}-3\frac{3^2}{2}\right]-\left[\frac{0^3}{3}-3\frac{0^2}{2}\right]=9-\frac{27}{2}=\frac{-9}{2}=-4.5$$

El área limitada por $f(x)$ y la recta $y=x-3$ tiene un valor de 4.5 unidades cuadradas.



CIUG COMISIÓN INTERUNIVERSI DE GALICIA	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2024–2025** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Si responde más preguntas de las permitidas, **solo serán corregidas las 5 primeras respondidas.**

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

Problema 2:

Problema 3:

Problema 4:

Problema 5:

Problema 6:

Problema 7.

Problema 8.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Problema 1:

Solución:

Problema 2:

Solución:

Problema 3:

Solución:

Problema 4:

Solución:

Problema 5:

Solución:

Problema 6:

Solución:

Problema 7:

Solución:

Problema 8:

Solución: