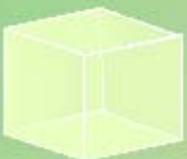


MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II Selectividad 2025 Comunidad autónoma de **BALEARES**



www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Universidad de Las Islas Baleares y Jorge Muñoz



| | | |
|---|---|---|
|  <p>Universitat de les Illes Balears</p> <p>Proves d'accés a la Universitat</p> | <p>PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: 2024 – 2025 MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II</p> | <p>CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO</p> |
| <p style="text-align: center;">INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN</p> <p>En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar).</p> <p>Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.</p> <p>Tiempo máximo: <u>1 horas y 30 minutos.</u></p> | | |
| <p><i>Problema 1:</i></p> <p><i>Problema 2:</i></p> <p><i>Problema 3:</i></p> <p><i>Problema 4:</i></p> <p><i>Problema 5:</i></p> <p><i>Problema 6:</i></p> <p><i>Problema 7:</i></p> <p><i>Problema 8:</i></p> | | |

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

Problema A1 (obligatori). — A la loteria de Nadal, el número guanyador de la grossa és un únic número de 5 xifres. Tots els números tenen la mateixa probabilitat de resultar guanyadors. Considera els següents esdeveniments:

- A : el número guanyador el Nadal de 2025 serà el 00000.
- B : el número guanyador el Nadal de 2025 serà el 72480.
- C : el número guanyador el Nadal de 2026 serà el 72480.

a) Expressa, amb les teves pròpies paraules, què volen dir els dos termes següents: $P(C | B)$, i $P(A \cap B)$.

Criteris: No penalitzar si s'expressa en termes d' A i B . **(Total 1 pt)**

Solució. Els termes són:

- $P(C | B)$: Probabilitat que el Nadal de 2026 el número guanyador sigui el 72480, sabent que aquest mateix número també ha estat el guanyador el proper Nadal de 2025.
- $P(A \cap B)$: Probabilitat que el número guanyador el proper Nadal de 2025 sigui el 00000 i també sigui el 72480.

b) Calcula $P(C | B)$ i $P(A \cap B)$.

Criteris: 0.5 pts per cada càlcul. Penalització amb -0.25 pts si no es justifica el càlcul. Penalització amb -0.25 pts si es considera 99999 per al nombre de casos totals, i penalització amb -0.5 pts per qualsevol altre valor incorrecte. **(Total 1 pt)**

Solució. En el primer cas, els esdeveniments són independents, així que, per la llei de Laplace,

$$P(C | B) = P(C) = \frac{\# \text{ Casos favorables}}{\# \text{ Casos totals}} = \frac{1}{100000} = 0.00001.$$

En el segon cas, els esdeveniments són incompatibles, així que $P(A \cap B) = 0$.

Problema 2:

Problema A2. — L'Institut Nacional d'Estadística (INE) disposa de les dades, per al 2023, sobre la quantitat d'habitants totals i la quantitat de treballadors per nacionalitat i sexe a Espanya, que són les següents:

| | Epanyols | Estrangers | | Epanyols | Estrangers |
|-------|--------------|-------------|-------|--------------|-------------|
| Homes | 20.6 milions | 3.0 milions | Homes | 10.8 milions | 1.9 milions |
| Dones | 21.2 milions | 3.3 milions | Dones | 9.6 milions | 1.7 milions |

Quantitat d'habitants total. Quantitat de treballadors.

- a) Escollint un home a l'atzar, quina és la probabilitat que treballi?

Criteris: Penalització amb -0.5 pts si no es justifica el càlcul.

(Total 1 pt)

Solució. Considerem els esdeveniments següents:

- H : ser home.
- T : treballar.

Per la llei de Laplace,

$$P(T | H) = \frac{\# \text{ Homes que treballen}}{\# \text{ Homes}} = \frac{10.8 + 1.9}{20.6 + 3} = 0.538$$

- b) Escollint un individu a l'atzar, els esdeveniments "ser dona" i "treballar" són independents?

Criteris: 0.25 pts per plantejar, 0.75 pts per calcular. Penalització amb -0.25 pts si no indica en cap càlcul llei de Laplace o casos favorables/casos totals.

(Total 1 pt)

Solució. Considerem els esdeveniments següents:

- D : ser dona.
- T : treballar.

Per la llei de Laplace, i tenint en compte que hi ha 48.1 milions d'habitants,

$$\begin{cases} P(D) = \frac{\# \text{ Dones}}{\# \text{ Habitants}} = \frac{21.2+3.3}{48.1} = 0.509, \\ P(T) = \frac{\# \text{ Treballadors}}{\# \text{ Habitants}} = \frac{10.8+1.9+9.6+1.7}{48.1} = 0.499. \\ P(D \cap T) = \frac{\# \text{ Dones treballadores}}{\# \text{ Habitants}} = \frac{9.6+1.7}{48.1} = 0.235. \end{cases}$$

Els esdeveniments no són independents ja que

$$\begin{aligned} P(D) \cdot P(T) &\neq P(D \cap T), \\ 0.509 \cdot 0.499 &\neq 0.235. \end{aligned}$$

Problema 3:

Problema A3. — Després d'una formació acadèmica determinada, el temps que tarden els titulats a trobar feina el podem aproximar mitjançant una variable aleatòria X que segueix una distribució normal de mitjana poblacional μ desconeguda, i desviació típica $\sigma = 30$ dies. Respecte dels 22 titulats d'enguany, el nombre mitjà de dies que han tardat a trobar feina ha estat de 86.

Calcula un interval de confiança per a la mitjana poblacional μ amb un nivell de confiança del 80%.

Criteris: 0.5 pt per calcular $z_{\alpha/2}$, 1.5 pt per calcular l'interval. No penalitzar si s'utilitza el valor $z_{\alpha/2}$ més proper o interpolat. Penalització amb -0.5 pts si s'utilitza el valor de $z_{\alpha/2}$ sense justificar. Penalització amb -0.25 pts si utilitzen el valor $z_{\alpha/2} = 1.29$. Penalització amb -0.25 pts si no s'indica la fórmula de l'interval. Penalització amb -0.25 pts per cada error d'arrodoniment. **(Total 2 pt)**

Solució. Per a un nivell de confiança del 80%, el nivell de significació és $\alpha = 0.2$. Per tant, $\alpha/2 = 0.10$ i $z_{\alpha/2} = 1.285$. Amb les dades de l'enunciat ($n = 22$, $\bar{x} = 86$, $\sigma = 30$), podem calcular l'interval demanat com a:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = (77.78, 94.22).$$

Problema 4:

Part B. Escolliu només un problema d'aquesta part (total 3 pt).

Problema B1. — Considera:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -5 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

a) És cert que $A = B^{-1}$? És cert que $B = A^{-1}$?

Criteris: Penalització amb -0.25 pt si es respon només a una de les dues qüestions. Penalització amb -1 pt si es calcula la inversa amb calculadora. **(Total 1 pt)**

Solució. Per comprovar-ho, les multiplicam:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -5 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Per tant, $B \cdot A = I$, i podem dir que ambdues igualtats són certes: $A = B^{-1}$ i, per tant, $B = A^{-1}$.

b) Calcula x tal que $Ax = v$.

Criteris: Penalització amb -1 pt per errors aïllant a l'equació matricial. Penalització amb -0.25 pts per cada error de càlcul numèric. **(Total 1 pt)**

Solució. Ens demanen calcular el vector $x = (x_1, x_2, x_3)^t$ tal que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Podem resoldre el problema pel mètode de Gauss, però és més senzill utilitzar l'apartat anterior:

$$Ax = v \implies x = A^{-1}v \implies x = Bv \implies \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

c) Amb el valor de x de l'apartat anterior, calcula y tal que $B^2y = x$.

Criteris: Penalització amb -1 pt per errors aïllant a l'equació matricial. Penalització amb -0.25 pts per cada error de càlcul numèric. **(Total 1 pt)**

Solució. De nou, és més senzill utilitzar els apartats anteriors:

$$B^2y = x \implies A \cdot B^2y = Ax \implies I \cdot By = v \implies By = v \implies y = Av \implies \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Problema 5:

Problema B2. — Per organitzar un esdeveniment social, volem contractar el transport amb una empresa que ens ofereix autocars i minibusos.

- Cada autocar té una capacitat de 50 viatgers i té un preu de 100 €.
- Cada minibus té una capacitat de 30 viatgers i té un preu de 55 €.

Podem contractar tants autocars com vulguem, i fins a 8 minibusos. Per limitacions en el nombre de conductors, només podem contractar 11 vehicles. Si volem assegurar el transport per a almenys 450 persones, quina és la combinació més avantatjosa i quin cost té?

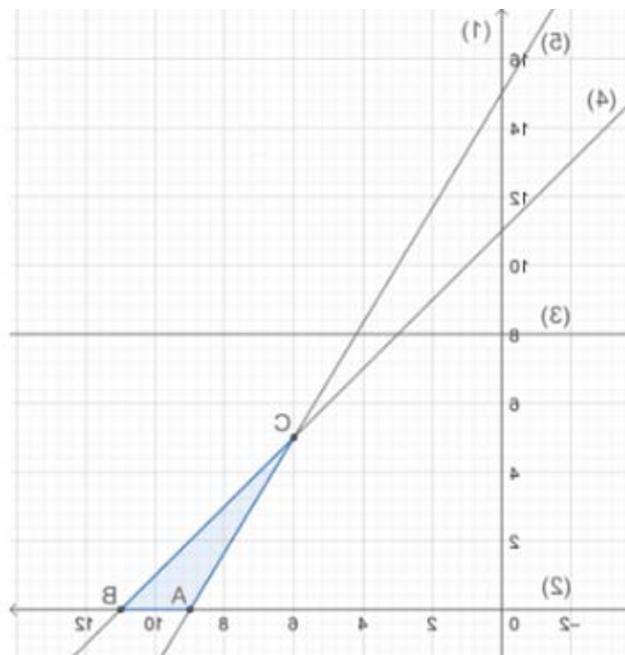
Criteris: 0.5 pts per plantejar (0.1 pt/recta). 0.5 pts per indicar la funció objectiu. 1 pt per traçar les rectes i indicar la regió factible (penalitzar amb -0.5 pts per cada recta incorrectament traçada). 0.5 pts per calcular els vèrtexs (penalitzar amb -0.25 pts per cada vèrtex incorrecte). 0.5 pts per calcular el vèrtex corresponent al mínim i interpretar-lo. Penalització amb -3 pt si les variables són incorrectes. Penalització amb -0.25 pts si no es descriuen les variables.

(Total 3 pt)

Solució. Siguin a el nombre d'autocars i b el nombre de minibusos que contractarem. La funció a minimitzar serà $f(a,b) = 100a + 55b$. D'acord amb l'enunciat,

$$\begin{cases} a & \geq 0, \\ 0 & \leq b \leq 8, \\ a + b & \leq 11, \\ 50a + 30b & \geq 450, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1) & a \geq 0, \\ (2) & b \geq 0, \\ (3) & b \leq 8, \\ (4) & a + b \leq 11, \\ (5) & 5a + 3b \geq 45. \end{cases}$$

Amb aquestes rectes traçam la següent regió factible:



On els vèrtexs són els punts $A(9,0)$, $B(0,15)$ i el punt d'intersecció de les rectes (4) i (5) $C(3,8)$. Avaluant la funció objectiu s'observa que el mínim es dona en el vèrtex C , amb un preu de 875 €. És a dir, que la companyia més avantatjosa és contractar 3 autocars i 8 minibusos.

Problema 6:**Part C.** Escolliu només un problema d'aquesta part (total 3 pt).**Problema C1.** — Considera la funció $f(x) = x^3 - 3x^2$, per a $x \in [-1, \infty)$.

- a) Fes una gràfica esquemàtica de la funció $f(x)$. Calcula o justifica i indica sobre la gràfica el valor de la funció en els extrems del domini, els intervals de creixement i decreixement, i els màxims i mínims relatius i absoluts.

Criteris: 0.5 pt per indicar els valors en els extrems del domini. 0.5 pt per indicar els intervals de creixement/decreixement. 0.75 pt per indicar els màxims/mínims relatius i absoluts (penalitzar amb -0.25 pts si no indiquen quins són els màxims o mínims absoluts). 0.25 pt per la claredat/correcció de la gràfica i els eixos. **(Total 2 pt)**

Solució. El domini és $x \in [-1, \infty)$ per l'enunciat.

En els extrems del domini,

$$f(-1) = -1^3 - 3 \cdot (-1)^2 = -4, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \cdot (x - 3) = +\infty.$$

Pels intervals de creixement i decreixement, $f'(x) = 3x^2 - 6x$, que s'anul·la a

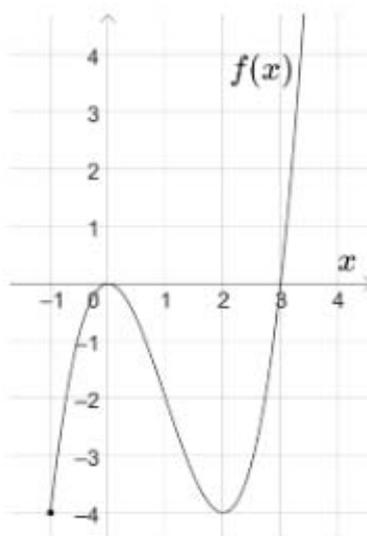
$$f'(x) = 0 \implies 3 \cdot x \cdot (x - 2) = 0 \implies \begin{cases} x = 0, \\ x = 2. \end{cases}$$

Amb el valor de la funció en els punts d'interès,

$$\begin{cases} f(-1) = -4 \\ f(0) = 0 \\ f(2) = -4 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty \end{cases} \implies \begin{cases} f(x) \text{ és creixent per a } x \in (-1, 0), \\ f(x) \text{ és decreixent per a } x \in (0, 2), \\ f(x) \text{ és creixent per a } x \in (2, +\infty). \end{cases}$$

Per tant, té un màxim relatiu, $f(0) = 0$; un mínim relatiu, $f(2) = -4$; el mínim absolut s'assoleix a $x = -1$ i a $x = 2$; i no té màxim absolut.

La gràfica demanada és la següent:



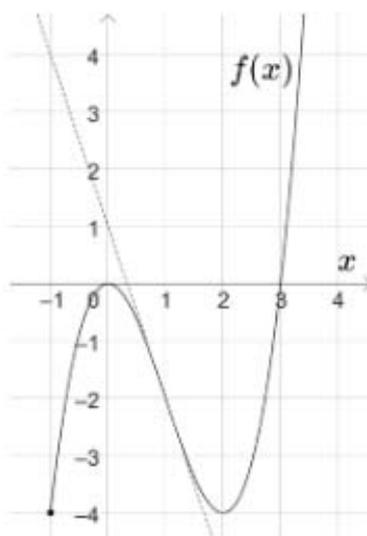
- b) Sobre la mateixa gràfica, traça la recta tangent a la funció en el punt $x = 1$. Quin és el valor del seu pendent?

Criteris: 0.5 pt per calcular el pendent, 0.5 pt per traçar la recta.

(Total 1 pt)

Solució. El seu pendent ve donat per $f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 = -3$.

Sobre la gràfica, la representació és



Problema 7:

Problema C2. — En psicología, la funció següent modela com les persones valoren recompenses en un instant de temps futur, t :

$$V(t) = \frac{1}{(1+r)^t}, \quad t \in [0, +\infty),$$

on r és una constant positiva, i t es mesura en dies.

- a) Si $r = 0.01$, què val la funció $V(t)$ a $t = 50$?

Criteris: 0.5 pt per plantejar, 0.5 pt per calcular. Penalització amb -0.5 pts per errors de càlcul. Penalització amb -0.25 pts per cada error d'arrodoniment. **(Total 1 pt)**

Solució.

$$V(50) = \frac{1}{(1+0.01)^{50}} = 0.61.$$

- b) Per a quin valor de r , la funció $V(t)$ val 0.75 a $t = 50$?

Criteris: 0.25 pt per plantejar, 0.75 pt per calcular. Penalització amb -0.25 pt per cada error de càlcul. Penalització amb -0.25 pts per cada error d'arrodoniment. **(Total 1 pt)**

Solució. Ens demanen resoldre r per a:

$$0.75 = V(50) = \frac{1}{(1+r)^{50}}.$$

Operant,

$$(1+r)^{50} = \frac{1}{0.75} \implies (1+r) = \left(\frac{1}{0.75}\right)^{1/50} \implies r = \left(\frac{1}{0.75}\right)^{1/50} - 1 \implies r \approx 0.0058.$$

- c) Si $r = 0.03$, a quin valor tendeix la valoració d'una recompensa en un futur molt llunyà?

Criteris: 0.5 pt per plantejar, 0.5 pt per calcular. Penalització amb -0.5 pts si no es justifica el càlcul. **(Total 1 pt)**

Solució. La tendència en un futur molt llunyà ve donada pel límit d'aquesta funció quan t tendeix a infinit:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{(1+0.03)^t} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

És a dir, el valor de la recompensa tendeix a zero.

Problema 8:

Solución:

| | | |
|--|---|--|
|  <p>Universitat de les Illes Balears</p> <p>Proves d'accés a la Universitat</p> | <p>PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: 2024 – 2025 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II</p> | <p>CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA</p> |
| <p style="text-align: center;">INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN</p> <p>En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar).</p> <p>Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.</p> <p>Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.</p> | | |
| <p style="text-align: center;">CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA</p> <p><i>Problema 1:</i></p> <p><i>Problema 2:</i></p> <p><i>Problema 3:</i></p> <p><i>Problema 4:</i></p> <p><i>Problema 5:</i></p> <p><i>Problema 6:</i></p> <p><i>Problema 7:</i></p> <p><i>Problema 8:</i></p> | | |

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE*Problema 1:**Solución:*

Problema 2:

Solución:

Problema 3:

Solución:

Problema 4:

Solución:

Problema 5:

Solución:

Problema 6:

Solución:

Problema 7:

Solución:

Problema 8:

Solución: