MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Selectividad 2025

Comunidad autónoma de

ASTURIAS

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Universidad de Oviedo y Sergio Manso Bravo

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2024 – 2025** MATERIA: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: **ORDINARIA** DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

- Responda en el pliego en blanco a **una opción** (A o B) de **cuatro** de las cinco preguntas cualesquiera que se proponen. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de **2.5 puntos**.
- Agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos o no coincidan con las indicadas conllevarán la **anulación** de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s).

Problema 1:

Pregunta 1. Opción A. La velocidad de una montaña rusa, medida en km/h, durante los 20 primeros segundos del recorrido se puede aproximar por la siguiente función:

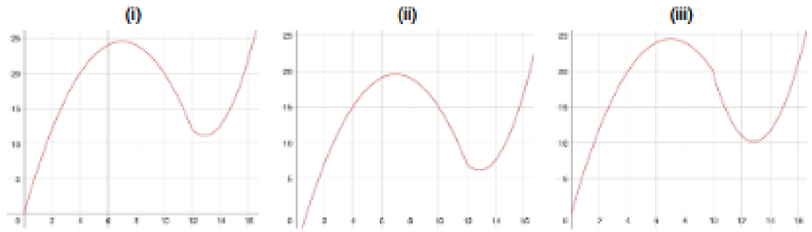
$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + 7x & \text{si } 0 \le x \le 12 \\ \frac{-1}{108}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 34x + 220 & \text{si } 12 < x \le 20 \end{cases}$$

donde x representa el tiempo (en segundos) desde la salida.

a) ¿En qué intervalos de tiempo la velocidad aumenta y en cuáles decrece? **(1 punto)**

b) Tras el segundo 1 y antes del segundo 20, ¿la velocidad es inferior a 5 km/h en algún momento? ¿Supera los 70 km/h en algún momento? En caso afirmativo, indica cuándo. **(1 punto)**

c) Explica cuál de las siguientes figuras se corresponde con la gráfica de la función f. **(0.5 puntos)**

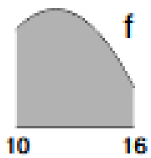


Problema 2:

Pregunta 1. Opción B. Dada la función $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 6x - 30$:

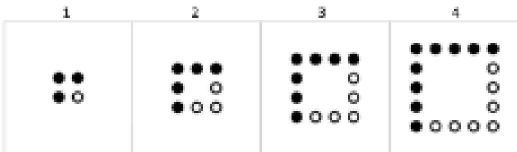
a) Encuentra la primitiva F de f para la que se verifica que $F(2) = 2$. **(1 punto)**

b) La función f determina, entre $x = 10$ m y $x = 16$ m, el recorrido de una montaña rusa. Se quiere pintar de color gris la superficie bajo el recorrido en ese intervalo. Cada bote contiene pintura para 15 m^2 de superficie. ¿Cuántos botes serán necesarios para pintar toda esa superficie? **(1.5 puntos)**



Problema 3:

Pregunta 2. Opción A. En una caseta de feria proponen un reto, a partir de las siguientes figuras.



a) El reto consiste en adivinar cuántos puntos en total (negros y blancos) habrá en la figura número 17 y, además, decir cuántos de ellos serán puntos negros y cuántos blancos. Para quienes han superado este reto, se plantea uno más complicado: ¿eres capaz de encontrar una fórmula que relacione el número de figura con el número de puntos negros para una figura cualquiera? Explica cómo has llegado a ella, indicando qué representa cada símbolo que uses (por ejemplo: «n es el número de figura»). **(2 puntos)**

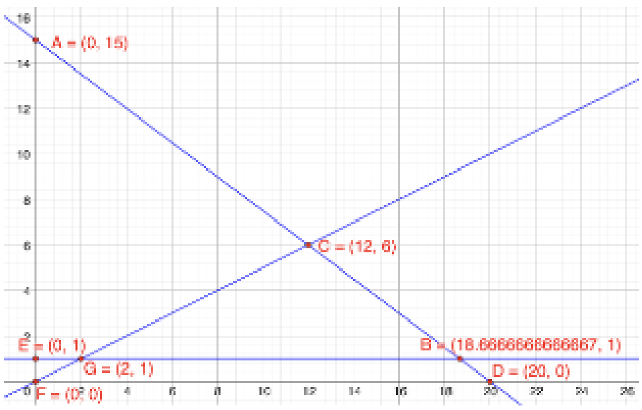
b) Dos clientes de la caseta, tras observar detenidamente el reto, tienen opiniones encontradas: una dice que no es posible que haya una figura que tenga un número par de puntos negros y otro dice que sí lo es. ¿A quién le das la razón? ¿Qué argumentos puedes utilizar para convencerlos? **(0.5 puntos)**

Problema 4:

Pregunta 2. Opción B. En un parque de atracciones quedan 2 horas para el cierre. Una persona quiere repartir ese tiempo entre sus dos atracciones favoritas: dragón rojo y gran loop. Cada viaje en el dragón rojo se estima que dura 6 minutos. Cada viaje en gran loop dura unos 8 minutos. Quiere hacer al menos 1 viaje en el gran loop y que el número de viajes en el dragón rojo sea a lo sumo, el doble que el número de viajes en el gran loop.

a) Si se sube 8 veces en el dragón rojo, ¿cuántos viajes puede hacer en el gran loop? ¿Puede subir 6 veces a cada atracción? **(1 punto)**

b) Siendo «x» el número de viajes en el dragón rojo e «y» el número de viajes en el gran loop, a partir de la imagen, indica cuál es la región factible para el problema que consiste en resolver *cuántas veces puede subir esta persona a cada atracción*. Señala los vértices (p. ej.: «B, D, F y G») y justifica tu respuesta. **(1 punto)**



c) Si los viajes en el dragón rojo cuestan 5 euros y en el gran loop 3 euros, ¿cuánto dinero puede llegar a gastar, como máximo? ¿Y cuánto puede gastar, como mínimo? **(0.5 puntos)**

Problema 5:

Pregunta 3. Opción A En una de las atracciones hay dos tipos de pases, el pase VIP y el normal, sus precios son, respectivamente, «x» e «y». Un grupo de personas pagó, en total, 90 € cuando compró un pase VIP y tres pases normales, mientras que otro grupo de personas pagó 15m € por comprar dos pases VIP y m pases normales. Para determinar el precio de cada pase, se utiliza el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 3y = 90 \\ 2x + my = 15m \end{cases}$$

a) Si m = 15, ¿cuál fue el precio de cada tipo de pase? **(1 punto)**

b) Proporciona un valor de m para el cual el sistema tenga solución, pero esa solución carezca de sentido en el contexto del problema. Justifica tu respuesta. **(1 punto)**

c) ¿Para qué valor de m el sistema no tiene solución? Justifica tu respuesta. **(0.5 puntos)**

Problema 6:

Pregunta 3. Opción B. Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & -m \\ 3 & -8-m \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} m & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix} 4 \\ 6m-8 \end{pmatrix} \text{ y } E=\begin{pmatrix} 0 \\ -2m \end{pmatrix}.$$

a) Si $A \cdot B \cdot C = \frac{1}{2}D + E$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m. **(1.5 puntos)**

b) Encuentra un valor de m para el cual el sistema tenga infinitas soluciones. **(1 punto)**

Problema 7:

Pregunta 4. Opción A. En la tómbola de un parque de atracciones se puede elegir entre 70 sobres, 40 son rojos y 30 son verdes. De los sobres rojos solo dos tienen el premio del peluche gigante, el 75 % tienen «siga jugando» y el resto tienen otro tipo de premios. Entre los sobres verdes, tres contienen peluches gigantes, 23 tienen «siga jugando» y el resto, otros premios.

a) ¿Es más probable conseguir un peluche gigante si se elige un sobre verde o uno rojo? Si se elige un sobre al azar, ¿cuál es la probabilidad de ganar un peluche gigante? **(1.5 puntos)**

b) Si al elegir un sobre, sin poder ver el color, el premio no fue el peluche gigante y tampoco tenía «siga jugando», ¿cuál es la probabilidad de que el sobre haya sido verde? **(1 punto)**

Pregunta 4. Opción B. El 80 % de las personas que trabajan en un parque de atracciones son menores de 30 años. De ellas, el 60 % combinan este trabajo con estudios. De las 200 personas que trabajan en el parque, hay 120 personas que compaginan el trabajo con los estudios.

a) ¿Cuántas personas de las que trabajan en el parque tienen menos de 30 años y no estudian? **(1 punto)**

b) Si se elige una persona al azar de entre las que compaginan trabajo y estudios, ¿qué probabilidad hay de que tenga menos de 30 años? **(1 punto)**

c) ¿Es independiente, entre el personal de la empresa, estudiar y ser menor de 30 años? ¿Por qué? **(0.5 puntos)**

Problema 8:

Pregunta 4. Opción B. El 80 % de las personas que trabajan en un parque de atracciones son menores de 30 años. De ellas, el 60 % combinan este trabajo con estudios. De las 200 personas que trabajan en el parque, hay 120 personas que compaginan el trabajo con los estudios.

a) ¿Cuántas personas de las que trabajan en el parque tienen menos de 30 años y no estudian? **(1 punto)**

b) Si se elige una persona al azar de entre las que compaginan trabajo y estudios, ¿qué probabilidad hay de que tenga menos de 30 años? **(1 punto)**

c) ¿Es independiente, entre el personal de la empresa, estudiar y ser menor de 30 años? ¿Por qué? **(0.5 puntos)**

Problema 8:

Pregunta 5. Opción A.* El gasto por visitante en una atracción se puede asumir que sigue distribución normal con desviación 8 euros.

Autores: Universidad de Oviedo y Sergio Manso Bravo

a) ¿Cuál es el tamaño de muestra n mínimo para estimar el gasto medio por visitante en esta atracción mediante un intervalo de confianza al nivel de confianza del 90 % con un error de estimación inferior a 2 €? Si, con el mismo nivel de confianza, se quisiese obtener un intervalo con menos error, ¿habría que aumentar o reducir el tamaño muestral mínimo obtenido? **(1 punto)**

b) Para una muestra de n visitantes se ha obtenido el siguiente intervalo de confianza al 95 % de confianza (en euros) para el gasto medio por visitante: (11.0947 , 12.9053) ¿Cuál fue el gasto medio por visitante en esa muestra? ¿Cuál fue el tamaño muestral n considerado? ¿Cuál es el error de estimación en este caso? **(0.5 puntos)**

c) Partiendo del intervalo del apartado b), empareja las situaciones y los intervalos siguientes y justifica tu elección. **(1 punto)**

(i) Intervalo a partir de la misma muestra pero a un nivel de confianza mayor	(A) (10.0947 , 11.9053)
(ii) Intervalo con la misma media muestral y nivel de confianza, pero obtenido a partir de una muestra de mayor tamaño	(B) (10.9238 , 13.0762)
(iii) Intervalo con nivel de confianza obtenido a partir de una muestra con el mismo tamaño pero con una media muestral diferente	(C) (11.216 , 12.784)

Problema 8:

Pregunta 5. Opción B. Para estimar el porcentaje de visitantes que realiza alguna compra en la tienda de un parque de atracciones se tomaron dos muestras del mismo tamaño n. En la primera muestra se obtuvo una proporción muestral (de visitantes que compran en la tienda) de 0.7 y, a partir de ella, se construyeron dos intervalos de confianza para la proporción poblacional de visitantes que realizan alguna compra en la tienda, uno al 90 % y otro al 95 %. A partir de la segunda muestra se obtuvo un tercer intervalo al 95 % de confianza. Los tres intervalos obtenidos (no necesariamente por este orden) fueron: (0.6102 , 0.7898), (0.5565 , 0.7435) y (0.6248 , 0.7752).

a) Razona qué dos intervalos de estos tres corresponden a la primera muestra. ¿Cuál de esos dos es el correspondiente al 90 % de confianza? **(1.5 puntos)**

b) Respecto a la segunda muestra, teniendo en cuenta el intervalo obtenido, ¿cuál fue el tamaño muestral n?¿Cuál fue el número de visitantes en esa muestra que realizó alguna compra en la tienda? **(1 punto)**

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1A

Pregunta 1. Opción A. La velocidad de una montaña rusa, medida en km/h, durante los 20 primeros segundos del recorrido se puede aproximar por la siguiente función:

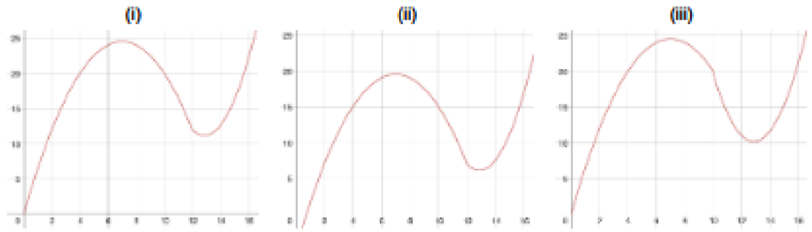
$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + 7x & \text{si } 0 \le x \le 12 \\ \frac{-1}{108}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 34x + 220 & \text{si } 12 < x \le 20 \end{cases}$$

donde x representa el tiempo (en segundos) desde la salida.

a) ¿En qué intervalos de tiempo la velocidad aumenta y en cuáles decrece? **(1 punto)**

b) Tras el segundo 1 y antes del segundo 20, ¿la velocidad es inferior a 5 km/h en algún momento? ¿Supera los 70 km/h en algún momento? En caso afirmativo, indica cuándo. **(1 punto)**

c) Explica cuál de las siguientes figuras se corresponde con la gráfica de la función f. **(0.5 puntos)**



Solución:

Pregunta 1. Opción A.

a) Al tratarse de una función definida a trozos, estudiamos el crecimiento en cada tramo.

- En el primer tramo,

$$f'(x) = -x + 7 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 7$$

Por tanto, en el primer tramo, la función es creciente en el intervalo $(0, 7)$ y decreciente en $(7, 12)$ y tiene un máximo relativo en $(7, f(7)) = (7, 24.5)$.

- En el segundo tramo, $f'(x) = -\frac{1}{36}x^2 + 3x - 34$.

$$-\frac{1}{36}x^2 + 3x - 34 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x^2 + 108x - 1224 = 0$$

Esta ecuación tiene como soluciones

$$x = 54 + 6\sqrt{47} \approx 95.134 \qquad x = 54 - 6\sqrt{47} \approx 12.866$$

El primer valor no está en el dominio. Estudiamos si el segundo es mínimo o máximo. La segunda derivada es $f''(x) = -\frac{1}{18}x + 3$, de modo que en el segundo punto esta derivada toma un valor positivo y, por tanto, f alcanza un mínimo relativo en $x = 54 - 6\sqrt{47} \approx 12.866$.

Por tanto, f es

- creciente en el intervalo $(0, 7)$,
- decreciente en $(7, 54 - 6\sqrt{47})$, es decir, aproximadamente en el intervalo $(7\,,\ 12.866)$ y
- creciente para $x > 54 - 6\sqrt{47} \approx 12.866$.

Así, la velocidad aumenta entre los 0 y los 7 segundos, decrece entre los 7 y los 12.866 segundos aproximadamente y vuelve a crecer entre los 12.866 segundos y los 20 segundos.

b) En el segundo 1 la velocidad es $f(1) = -\frac{1}{2}1^2 + 7 \cdot 1 = 6.5$ km/h. A partir de ahí la velocidad crece hasta el segundo 7 y luego decrece hasta el segundo 12. En este instante la velocidad es $f(12) = -\frac{1}{2}12^2 + 7 \cdot 12 = -72 + 84 = 12$ km/h. De modo que en el primer tramo de definición la velocidad no baja a 5 km/h en ningún instante después del segundo 1.
En el segundo tramo la velocidad comienza en $f(12) = -\frac{1}{108} \cdot 12^3 + \frac{3}{2}12^2 - 34 \cdot 12 + 220 = 12$ km/h. El mínimo se alcanza en el punto $x = 54 - 6\sqrt{47} \approx 12.866$, es decir, a los 12.866 segundos, donde la función vale

$f(12.866) \approx 11.137$ km/h y después, según hemos visto en el apartado anterior, la velocidad crece.

Por tanto, en ningún instante después del segundo 1 la velocidad se reduce hasta los 5 km/h.

Respecto a si supera los 70 km/h en algún momento, en el primer tramo, la función tiene máximo en $(7, 24.5)$, por lo que no supera los 70 km/h. En el segundo tramo, la función es creciente desde $x = 12.866$ hasta $x = 20$. Si evaluamos f en $x = 20$:

$$f(20) = \frac{-1}{108}20^3 + \frac{3}{2}20^2 - 34 \cdot 20 + 220 \approx 65.9259\,,$$

por lo que podemos afirmar que la montaña rusa no superará los 70 km/h en los 20 primeros segundos.

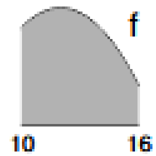
c) A partir del estudio realizado en los dos apartados anteriores, sabemos que f tiene un máximo en $x = 7$ y un mínimo en $x = 12.866$, aspecto que se verifica en las tres funciones. Sabemos, además que $f(7) = 24.5$, lo que nos hace descartar la figura (ii). Podemos fijarnos también en el valor $f(12.866)$ para descartar la gráfica (iii). Alternativamente, la gráfica (iii) también se puede descartar porque el punto en el que cambia la curva es $x = 10$, que no se corresponde con la expresión de la función. Por lo tanto, la gráfica adecuada tiene que ser la (i).

Problema 1B

Pregunta 1. Opción B. Dada la función $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 6x - 30$:

a) Encuentra la primitiva F de f para la que se verifica que $F(2) = 2$. **(1 punto)**

b) La función f determina, entre x = 10 m y x = 16 m, el recorrido de una montaña rusa. Se quiere pintar de color gris la superficie bajo el recorrido en ese intervalo. Cada bote contiene pintura para 15 m^2 de superficie. ¿Cuántos botes serán necesarios para pintar toda esa superficie? **(1.5 puntos)**



Solución:

Pregunta 1. Opción B.

a) Puesto que $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 6x - 30$, entonces $F(x) = \int f(x)dx = -\frac{x^3}{12} + 3x^2 - 30x + C$. Por otro lado, como se indica que $F(2) = 2$, se tiene que $F(2) = -\frac{2^3}{12} + 3 \cdot 2^2 - 30 \cdot 2 + C = -\frac{2}{3} - 48 + C = 2$, con lo que $C = 50 + \frac{2}{3} = \frac{152}{3}$ y, por tanto, la primitiva buscada es $F(x) = -\frac{x^3}{12} + 3x^2 - 30x + \frac{152}{3}$.

b) El área limitada por la curva f y el eje X entre x = 10 y x = 16, teniendo en cuenta la representación gráfica y la expresión obtenida para F en el apartado anterior, es igual a:

$$\begin{aligned}\int_{10}^{16} f(x)dx &= F(16) - F(10) = \left(-\tfrac{1}{12}16^3 + 3 \cdot 16^2 - 30 \cdot 16 + \tfrac{152}{3}\right) - \left(-\tfrac{1}{12}10^3 + 3 \cdot 10^2 - 30 \cdot 10 + \tfrac{152}{3}\right) \\ &= -\tfrac{1}{12}(16^3 - 10^3) + 3(16^2 - 10^2) - 30(16 - 10) = 30 \text{ m}^2.\end{aligned}$$

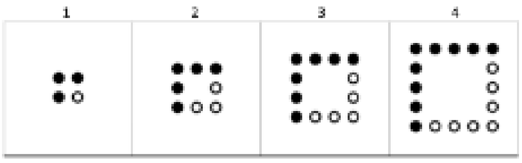
De modo que harían falta 2 botes de pintura.

Si

=

Problema 2A

Pregunta 2. Opción A. En una caseta de feria proponen un reto, a partir de las siguientes figuras.



a) El reto consiste en adivinar cuántos puntos en total (negros y blancos) habrá en la figura número 17 y, además, decir cuántos de ellos serán puntos negros y cuántos blancos. Para quienes han superado este reto, se plantea uno más complicado: ¿eres capaz de encontrar una fórmula que relacione el número de figura con el número de puntos negros para una figura cualquiera? Explica cómo has llegado a ella, indicando qué representa cada símbolo que uses (por ejemplo: «n es el número de figura»). **(2 puntos)**

b) Dos clientes de la caseta, tras observar detenidamente el reto, tienen opiniones encontradas: una dice que no es posible que haya una figura que tenga un número par de puntos negros y otro dice que sí lo es. ¿A quién le das la razón? ¿Qué argumentos puedes utilizar para convencerlos? **(0.5 puntos)**

Solución:

Pregunta 2. Opción A.

a) Hay varias estrategias posibles para identificar el patrón del número total de puntos, por ejemplo, si nos fijamos en que para cada figura se construye un cuadrado cuyo lado tiene un número de puntos igual al de la figura más uno. Por lo tanto en la figura n-ésima habrá un cuadrado de lado $n + 1$ puntos. En consecuencia, el número total de puntos será $4n$. O, lo que es lo mismo: $4(n + 1) - 4$ si multiplicamos el número

de puntos en cada lado por 4 y le restamos 4, para evitar que cada vértice del cuadrado lo contemos dos veces.

Así, en la figura número 17 habrá 68 puntos en total.

También podríamos haber comenzado por identificar el número de puntos de cada color y, posteriormente, sumarlos. Así, por ejemplo, contando los puntos vemos que:

n.º figura	1	2	3	4
n.º puntos negros	3	5	7	9
n.º puntos blancos	1	3	5	7

el patrón es una secuencia de impares en los puntos negros, que obedece al impar inmediatamente superior al doble del número de la figura, y el el número de puntos blancos al impar inmediatamente menor al doble del número de la figura. Por ello, sin necesidad de obtener la generalización, para la figura 17 tendríamos que hay 35 puntos negros y 33 puntos blancos, lo que hacen un total de 68 puntos.

La forma de llegar a la generalización para los puntos blancos y negros par ala figura n sería expresar esta relación en lenguaje algebraico. El número de puntos negros es el impar inmediatamente superior al doble del número de la figura n, es decir: $2n + 1$. El número de puntos blancos es el impar inmediatamente inferior: $2n - 1$. Y el número total de puntos, la suma de ambos: $2n + 1 + (2n - 1) = 4n$.

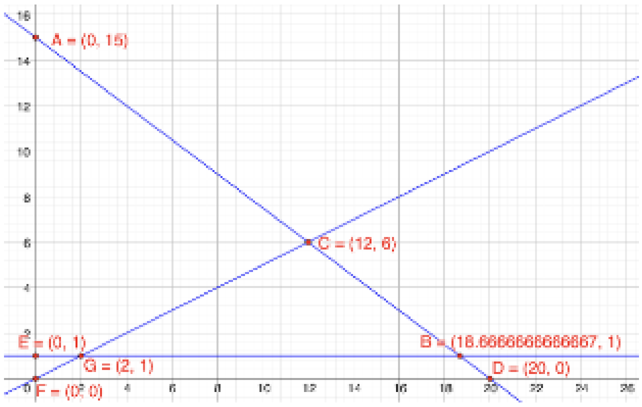
b) A partir de la observación del patrón, se constata que el número de puntos negros siempre es impar, ya que obedece a la expresión $2n + 1$, por lo que es imposible que sea par.

Problema 2B

Pregunta 2. Opción B. En un parque de atracciones quedan 2 horas para el cierre. Una persona quiere repartir ese tiempo entre sus dos atracciones favoritas: dragón rojo y gran loop. Cada viaje en el dragón rojo se estima que dura 6 minutos. Cada viaje en gran loop dura unos 8 minutos. Quiere hacer al menos 1 viaje en el gran loop y que el número de viajes en el dragón rojo sea a lo sumo, el doble que el número de viajes en el gran loop.

a) Si se sube 8 veces en el dragón rojo, ¿cuántos viajes puede hacer en el gran loop? ¿Puede subir 6 veces a cada atracción? **(1 punto)**

b) Siendo «x» el número de viajes en el dragón rojo e «y» el número de viajes en el gran loop, a partir de la imagen, indica cuál es la región factible para el problema que consiste en resolver *cuántas veces puede subir esta persona a cada atracción*. Señala los vértices (p. ej.: «B, D, F y G») y justifica tu respuesta. **(1 punto)**



c) Si los viajes en el dragón rojo cuestan 5 euros y en el gran loop 3 euros, ¿cuánto dinero puede llegar a gastar, como máximo? ¿Y cuánto puede gastar, como mínimo? **(0.5 puntos)**

Solución:

Pregunta 2. Opción B.

a) Si representamos por x e y el número de viajes en el dragón rojo y en gran loop, respectivamente, las condiciones impuestas llevan al siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 6x+8y & \leq & 120 \\ x & \leq & 2y \\ y & \geq & 1 \\ x & \geq & 0 \end{array}\right. \longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 3x+4y & \leq & 60 \\ x & \leq & 2y \\ y & \geq & 1 \\ x & \geq & 0 \end{array}\right.$$

Si se sube 8 veces en el dragón rojo, puesto que se tiene que subir al menos la mitad de veces en gran loop ($x \leq 2y$), se tiene que al menos $y \geq 4$. Por otro lado, la restricción $3x+4y \leq 60$ lleva a $y \leq 9$. Por tanto, se podría subir entre 4 y 9 veces al gran loop.

Sí puede subirse 6 veces a cada atracción ya que sustituyendo $(x,y)=(6,6)$ en el sistema de inecuaciones vemos que se verifica:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3\cdot 6+4\cdot 6=42 & \leq & 60 \\ 6 & \leq & 2\cdot 6=12 \\ 6 & \geq & 1 \\ 6 & \geq & 0 \end{array}\right.$$

Autores: Universidad de Oviedo y Sergio Manso Bravo
www.apuntesmareaverde.org.es

b) Los puntos que cumplen todas estas restricciones son todos los pares de números enteros dentro del recinto delimitado por los extremos A = (0, 15), C = (12, 6), G = (2, 1) y E = (0, 1).

c) La función de gastos es $z(x, y) = 5x + 3y$. Los valores en los extremos del recinto son:

$$z(A) = 5 \cdot 0 + 3 \cdot 15 = 45 \text{ euros}$$
$$z(C) = 5 \cdot 12 + 3 \cdot 6 = 78 \text{ euros}$$
$$z(G) = 5 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 13 \text{ euros}$$
$$z(E) = 5 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 3 \text{ euros}$$

por lo que la mayor cantidad la gastaría si se subiese 12 veces al dragón rojo y 6 veces al gran loop.
El menor gasto corresponde a un viaje en gran loop y ninguno en el dragón rojo.

Problema 3A

Pregunta 3. Opción A En una de las atracciones hay dos tipos de pases, el pase VIP y el normal, sus precios son, respectivamente, «x» e «y». Un grupo de personas pagó, en total, 90 € cuando compró un pase VIP y tres pases normales, mientras que otro grupo de personas pagó 15m € por comprar dos pases VIP y m pases normales. Para determinar el precio de cada pase, se utiliza el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+3y = 90 \\ 2x+my = 15m \end{cases}$$

a) Si m = 15, ¿cuál fue el precio de cada tipo de pase? **(1 punto)**

b) Proporciona un valor de m para el cual el sistema tenga solución, pero esa solución carezca de sentido en el contexto del problema. Justifica tu respuesta. **(1 punto)**

c) ¿Para qué valor de m el sistema no tiene solución? Justifica tu respuesta. **(0.5 puntos)**

Solución:

Pregunta 3. Opción A.

a) Si m = 15 se tiene que el sistema es:

$$\begin{cases} x+3y = 90 \\ 2x+15y = 225 \end{cases}$$

Se puede resolver por cualquier método, por ejemplo, por Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 90 \\ 2 & 15 & 225 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 90 \\ 0 & 9 & 45 \end{array}\right)$$

Por lo que y = 45/9 = 5 y, en consecuencia, x = 90 − 3 · 5 = 75. Por lo tanto, el precio de cada pase vip («x») es 75 € y el de cada pase normal («y») es de 5 €.

b) Una forma de obtener una solución al sistema que no sea válida en el contexto del problema es que alguno de los valores de x o de y en la solución sea negativa o nula ($x \leq 0$ o $y \leq 0$); también podría ser que el precio del pase vip fuera inferior al del pase normal (es decir, $x < y$). Podemos intentar resolver el sistema para cualquier valor de m y ver qué valores de m nos dan una solución negativa o en la que $x < y$.

$$\begin{cases} x+3y = 90 \\ 2x+my = 15m \end{cases}$$

Aplicando, por ejemplo, Rouché-Fröbenius, tenemos que :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & m \end{vmatrix} = m-6 = 0 \Longleftrightarrow m = 6$$

se tiene que:

- Para m = 6, como: ran(A) = 1 y:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -12 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 90 \\ 2 & 90 \end{vmatrix} = -90 \Longrightarrow ran(A') = 2,$$

por lo que ran(A) < ran(A′) y el sistema no tendría solución

- Para $m \neq 6$, el sistema es compatible y determinado, por lo tanto, cualquier valor $m \leq 0$ el sistema, pero no tendría sentido en el contexto del problema porque m representa el número de pases normales que se compran y debería ser una cantidad positiva. Para $m > 0$ ($m \neq 6$) podemos buscar soluciones con x o y negativas, puesto que ran(A) = 2 y por tanto ran(A) = ran(A') = n.º incógnitas.

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 90 & 3 \\ 15m & m \end{vmatrix} = 45m \quad y \quad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 90 \\ 2 & 15m \end{vmatrix} = 15m - 180 .$$

por lo tanto, las soluciones en (x, y) serían de la forma $\left(\frac{45m}{m-6}, \frac{15m-180}{m-6}\right)$. Así, por ejemplo, para $m = 1$ tendríamos que la solución en x es negativa.

Otra alternativa, más sencilla, es razonar que carecería de sentido que el número de pases normales que se compran (el valor m) fuera negativo. En este caso, como además $m \neq 6$, el sistema tendría también solución (es compatible determinado).

c) Como hemos visto en la discusión anterior, si $m = 6$, el sistema no tiene solución, es incompatible.

Problema 3B

Pregunta 3. Opción B. Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & -m \\ 3 & -8-m \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} m & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix} 4 \\ 6m-8 \end{pmatrix} \text{ y } E=\begin{pmatrix} 0 \\ -2m \end{pmatrix}.$$

a) Si $A \cdot B \cdot C = \frac{1}{2}D + E$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m. **(1.5 puntos)**

b) Encuentra un valor de m para el cual el sistema tenga infinitas soluciones. **(1 punto)**

Solución:

Pregunta 3. Opción B.

a) Puesto que:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & -m \\ 3 & -8-m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2m & 3 \\ 2m-8 & -9 \end{pmatrix}$$

entonces:

$$A \cdot B \cdot C = \begin{pmatrix} -2m & 3 \\ 2m-8 & -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2mx + 3y \\ (2m-8)x - 9y \end{pmatrix}.$$

Por otra parte,

$$\frac{1}{2}D + E = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 \\ 6m-8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3m-4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ m-4 \end{pmatrix}$$

con lo que el sistema se puede escribir como:

$$\begin{cases} -2mx + 3y = 2 \\ (2m-8)x - 9y = m-4 \end{cases}$$

b) Dos de las posibles formas de realizar la discusión de este sistema son:

- **Gauss.**

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2m & 3 & 2 \\ 2m-8 & -9 & m-4 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -2m & 3 & 2 \\ -4m-8 & 0 & m+2 \end{array}\right)$$

Como $-4m-8=0 \Leftrightarrow m=-2$, se tiene que:

- Si $m=-2$, la última fila es $(0 \quad 0\,|\,0)$, con lo que el sistema es compatible indeterminado.
- En otro caso, si $m \neq -2$, el sistema es compatible y determinado.

- **Rouché-Fröbenius**. Como:

$$|A| = \begin{vmatrix} -2m & 3 \\ 2m-8 & -9 \end{vmatrix} = 12m + 24 = 0 \iff m = -2$$

se tiene que:

- Para m = −2, como:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -12 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -12 & -6 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow ran(A') = ran(A) = 1,$$

por lo que el sistema es compatible indeterminado.

- Para m ≠ −2, el sistema es compatible y determinado, puesto que ran(A) = 2 y por tanto ran(A) = ran(A′) = nº incógnitas.

Así pues, el único valor de m para el que el sistema tiene infinitas soluciones es m = −2.

Problema 4A

Pregunta 4. Opción A. En la tómbola de un parque de atracciones se puede elegir entre 70 sobres, 40 son rojos y 30 son verdes. De los sobres rojos solo dos tienen el premio del peluche gigante, el 75 % tienen «siga jugando» y el resto tienen otro tipo de premios. Entre los sobres verdes, tres contienen peluches gigantes, 23 tienen «siga jugando» y el resto, otros premios.

a) ¿Es más probable conseguir un peluche gigante si se elige un sobre verde o uno rojo? Si se elige un sobre al azar, ¿cuál es la probabilidad de ganar un peluche gigante? **(1.5 puntos)**

b) Si al elegir un sobre, sin poder ver el color, el premio no fue el peluche gigante y tampoco tenía «siga jugando», ¿cuál es la probabilidad de que el sobre haya sido verde? **(1 punto)**

Pregunta 4. Opción B. El 80 % de las personas que trabajan en un parque de atracciones son menores de 30 años. De ellas, el 60 % combinan este trabajo con estudios. De las 200 personas que trabajan en el parque, hay 120 personas que compaginan el trabajo con los estudios.

a) ¿Cuántas personas de las que trabajan en el parque tienen menos de 30 años y no estudian? **(1 punto)**

b) Si se elige una persona al azar de entre las que compaginan trabajo y estudios, ¿qué probabilidad hay de que tenga menos de 30 años? **(1 punto)**

c) ¿Es independiente, entre el personal de la empresa, estudiar y ser menor de 30 años? ¿Por qué? **(0.5 puntos)**

Solución:

Pregunta 4. Opción A.

a) Si denotamos por P el suceso «peluche gigante», por R el suceso «sobre rojo» y por V el suceso «sobre verde», se tiene que:

$$P(P/R)=\frac{2}{40}=0.05 \quad P(P/V)=\frac{3}{30}=0.1$$

de modo que es más probable ganar un peluche gigante si se elige un sobre verde. Por otra parte, aplicando el teorema de la probabilidad total,

$$P(P)=P(R)\cdot P(P/R)+P(V)\cdot P(P/V)=\frac{4}{7}\cdot 0.05+\frac{3}{7}\cdot 0.1=0.0714,$$

de modo que la probabilidad de ganar un peluche gigante es 0.0714.
Esta pregunta se puede resolver más rápidamente observando que si en sobres rojos hay 2 peluches y en sobres verdes hay 3, en total hay 5 peluches gigantes. Así,

$$P(P)=\frac{5}{70}=0.0714.$$

b) Si denotamos por O el suceso «otro premio», es decir, un premio que no sea ni un peluche gigante, ni «siga jugando», se tiene que de los 40 sobres rojos, 8 tienen «otro premio». De los 30 sobres verdes, 4 tienen «otro premio». Empleando el teorema de Bayes, se tiene que la probabilidad de que el sobre sea verde si el premio ha sido «otro» es

$$P(V/O)=\frac{P(V)\cdot P(O/V)}{P(O)}$$

Se tiene que

$$P(O)=P(R)\cdot P(O/R)+P(V)\cdot P(O/V)=\frac{4}{7}\cdot\frac{8}{40}+\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{30}=\frac{6}{35}$$

Por tanto,

$$P(V/O)=\frac{\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{30}}{\frac{6}{35}}=\frac{1}{3}$$

Si se hace el ejercicio construyendo una tabla, la asociada a estos datos sería proporcional a:

	SJ	P	O	
R	30	2	8	40
V	23	3	4	30

Problema 4B

Pregunta 4. Opción B. El 80 % de las personas que trabajan en un parque de atracciones son menores de 30 años. De ellas, el 60 % combinan este trabajo con estudios. De las 200 personas que trabajan en el parque, hay 120 personas que compaginan el trabajo con los estudios.

a) ¿Cuántas personas de las que trabajan en el parque tienen menos de 30 años y no estudian? **(1 punto)**

b) Si se elige una persona al azar de entre las que compaginan trabajo y estudios, ¿qué probabilidad hay de que tenga menos de 30 años? **(1 punto)**

c) ¿Es independiente, entre el personal de la empresa, estudiar y ser menor de 30 años? ¿Por qué? **(0.5 puntos)**

Solución:

Pregunta 4. Opción B. Denotaremos E el suceso «persona empleada que estudia» y por M el suceso «persona empleada menor de 30 años». Entonces, si se elige un empleado al azar, la información del enunciado se puede traducir como:

$$P(M) = 0.8 \quad P(E/M) = 0.6 \quad P(E) = \tfrac{120}{200} = 0.6$$

a) Aplicando la definición de probabilidad condicionada y la probabilidad del suceso contrario llegamos a que:

$$P(M \cap \overline{E}) = P(\overline{E}/M) \cdot P(M) = (1 - P(E/M))P(M) = (1 - 0.6)0.8 = 0.32\,.$$

Puesto que hay 200 personas empleadas, el 32 % se corresponde con 64 personas que tienen menos de 30 años y no estudian.

b) La probabilidad pedida se corresponde con P(M/E). Podemos aplicar el teorema de Bayes o la definición de probabilidad condicionada para deducir que:

$$P(M/E) = \frac{P(E/M) \cdot P(M)}{P(E)} = \frac{0.6 \cdot 0.8}{0.6} = 0.8\,.$$

c) Se trata de comprobar la independencia entre los sucesos E y M. Si fueran independientes, debería cumplirse que:

$$P(E/M) = P(E)$$

y en este caso podemos comprobar que:

$$P(E/M) = 0.6 = P(E)$$

por lo que serían independientes. Alternativamente, podríamos comprobar que

$$P(E \cap M) = P(E) \cdot P(M)$$

y se comprueba que:

$$P(E \cap M) = P(E/M) \cdot P(M) = 0.6 \cdot 0.8 = 0.48 = 0.6 \cdot 0.8 = P(E) \cdot P(M)\,.$$

Si se hace el ejercicio construyendo una tabla, la asociada a estos datos sería proporcional a:

	M	$\overline{M}$	
E	96	24	120
$\overline{E}$	64	16	80
	160	40	200

Problema 5A

Pregunta 5. Opción A.* El gasto por visitante en una atracción se puede asumir que sigue distribución normal con desviación 8 euros.

a) ¿Cuál es el tamaño de muestra n mínimo para estimar el gasto medio por visitante en esta atracción mediante un intervalo de confianza al nivel de confianza del 90 % con un error de estimación inferior a 2 €? Si, con el mismo nivel de confianza, se quisiese obtener un intervalo con menos error, ¿habría que aumentar o reducir el tamaño muestral mínimo obtenido? **(1 punto)**

b) Para una muestra de n visitantes se ha obtenido el siguiente intervalo de confianza al 95 % de confianza (en euros) para el gasto medio por visitante: (11.0947 , 12.9053) ¿Cuál fue el gasto medio por visitante en esa muestra? ¿Cuál fue el tamaño muestral n considerado? ¿Cuál es el error de estimación en este caso? **(0.5 puntos)**

c) Partiendo del intervalo del apartado b), empareja las situaciones y los intervalos siguientes y justifica tu elección. **(1 punto)**

(i) Intervalo a partir de la misma muestra pero a un nivel de confianza mayor	(A) (10.0947 , 11.9053)
(ii) Intervalo con la misma media muestral y nivel de confianza, pero obtenido a partir de una muestra de mayor tamaño	(B) (10.9238 , 13.0762)
(iii) Intervalo con nivel de confianza obtenido a partir de una muestra con el mismo tamaño pero con una media muestral diferente	(C) (11.216 , 12.784)

Solución:

Pregunta 5. Opción A.

a) A partir de la expresión del intervalo de confianza, al nivel de confianza $(1-\alpha)\cdot 100\,\%$, para la media poblacional de una variable aleatoria con distribución normal y desviación típica conocida que se proporciona en el enunciado, en este caso se tiene que: $\sigma = 8$ y como el nivel de confianza es del 90 %, entonces $z_{\alpha/2} = 1.64$

Por lo tanto, el error de estimación sería:

$$e = 1.64\frac{8}{\sqrt{n}}$$

Como queremos que sea, como máximo 2, debemos hacer:

$$2 > 1.64\frac{8}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow n > \left(1.64\frac{8}{2}\right)^2 = 43.0336$$

y, así, el tamaño muestral mínimo para el que se cumple esta condición es n = 44.

Si, con el mismo nivel de confianza, queremos obtener un intervalo con menos error, habrá que aumentar el tamaño obtenido, ya que, al incrementarse la n en la expresión:

$$e = 1.64\frac{8}{\sqrt{n}}$$

se reducirá el error de estimación.

b) A partir del intervalo numérico (11.0947 , 12.9053) y de la expresión general del intervalo $\left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, identificamos el gasto medio como el punto medio del intervalo, es decir:

$$\overline{x} = \frac{11.0947 + 12.9053}{2} = 12\,€.$$

El error de estimación es la semiamplitud del intervalo, por lo tanto:

$$e = \frac{12.9053 - 11.0947}{2} = 0.9053\,.$$

Como el intervalo se determinó con una confianza del 95 %, el valor $z_{\alpha/2} = 1.96$ y, en consecuencia, el tamaño muestral utilizado fue, aproximadamente:

$$n = \left(1.96\frac{8}{0.9053}\right)^2 \approx 299.99 \approx 300\,.$$

c) Si el intervalo se calculó a partir de la misma muestra, pero con mayor nivel de confianza (situación (i)) debe estar centrado en 12, por lo que podemos desechar el intervalo (A). Como tiene más confianza, debe ser más amplio que (11.0947 , 12.9053), lo que solo ocurre con el intervalo (B). Además, se puede comprobar que la confianza de (10.9238 , 13.0762) es, aproximadamente, del 98 %.

Si seguimos examinando la situación (ii), en este caso, la media muestral es la misma, por lo que también desecharíamos (A). Además, el nivel de confianza es el mismo pero el tamaño muestral es mayor, lo que obliga a que el intervalo obtenido sea menos amplio que (11.0947 , 12.9053), lo que solo ocurre con el intervalo (C). Adicionalmente, se puede verificar que el tamaño de muestra a partir del que se obtuvo (11.216 , 12.784) es de $n = 400$.

La situación (iii), con distinta media muestral, necesariamente se corresponde con (A), por descarte. Se puede comprobar, además, que se verifica que la media muestral es 11.

Problema 5B

Pregunta 5. Opción B.* Para estimar el porcentaje de visitantes que realiza alguna compra en la tienda de un parque de atracciones se tomaron dos muestras del mismo tamaño n. En la primera muestra se obtuvo una proporción muestral (de visitantes que compran en la tienda) de 0.7 y, a partir de ella, se construyeron dos intervalos de confianza para la proporción poblacional de visitantes que realizan alguna compra en la tienda, uno al 90 % y otro al 95 %. A partir de la segunda muestra se obtuvo un tercer intervalo al 95 % de confianza. Los tres intervalos obtenidos (no necesariamente por este orden) fueron: (0.6102 , 0.7898), (0.5565 , 0.7435) y (0.6248 , 0.7752).

a) Razona qué dos intervalos de estos tres corresponden a la primera muestra. ¿Cuál de esos dos es el correspondiente al 90 % de confianza? **(1.5 puntos)**

b) Respecto a la segunda muestra, teniendo en cuenta el intervalo obtenido, ¿cuál fue el tamaño muestral n?¿Cuál fue el número de visitantes en esa muestra que realizó alguna compra en la tienda? **(1 punto)**

Solución:

Pregunta 5. Opción B.

El intervalo de confianza, al nivel de confianza $(1-\alpha)\cdot 100\,\%$, para una proporción poblacional en muestras grandes es:

$$\left(\hat{p}-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\hat{p}+z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$$

donde $\hat{p}$ representa la proporción muestral, n el tamaño de muestra y $z_{\alpha/2}$ el valor que cumple $P(|Z|<z_{\alpha/2})=1-\alpha$ para una variable Z con distribución N(0, 1).

a) Los dos intervalos que correspondan a la misma muestra deben tener el mismo punto medio, que es la proporción muestral. Para los tres intervalos dados, los puntos medios y los errores de estimación son:

$$\begin{array}{lll}(0.6102\,,\,0.7898) & \to \hat{p}=0.7 & e=0.0898\\ (0.5565\,,\,0.7435) & \to \hat{p}=0.65 & e=0.0935\\ (0.6248\,,\,0.7752) & \to \hat{p}=0.7 & e=0.0752\end{array}$$

Por tanto los que corresponden a la misma muestra deben ser el primero y el tercero.

Por otra parte, si uno es al 90 % de confianza y otro al 95 % de confianza, el correspondiente al 90 % de confianza debe ser menos amplio (menor confianza permite mayor precisión en la estimación, es decir, menor error). Por tanto, el intervalo correspondiente al 90 % de confianza es el tercero: (0.6248 , 0.7752).

b) El intervalo obtenido a partir de la segunda muestra debe ser el segundo, (0.5565 , 0.7435), que es el que se obtiene a partir de una proporción muestral diferente, $\hat{p}=0.65$, como ya se razonó arriba.
Para obtener el tamaño muestral,

$$e=z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \quad\longrightarrow\quad n=\left(\frac{z_{\alpha/2}}{e}\right)^2 p(1-p)$$

Si el nivel de confianza es el 95 %, se tiene que $z_{\alpha/2}=1.96$. Además, $e=0.0935$ y $\hat{p}=0.65$. Entonces, $n=\left(\frac{z_{\alpha/2}}{e}\right)^2 p(1-p)=\left(\frac{1.96}{0.0935}\right)^2 0.65(1-0.65)\approx 99.97$. De modo que el tamaño muestral fue $n=100$.

Por consiguiente, el número de personas en esa muestra que realizó compras fue de:

$$n\hat{p}=100\cdot 0.65=65\text{ personas.}$$

	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2024 – 2025** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

➢Responda en el pliego en blanco a **cuatro preguntas cualesquiera** de entre las ocho que se proponen. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de **2.5 puntos**.

➢Agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos o que no coincidan con las indicadas conllevarán la **anulación** de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s)

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

Problema 2:

Problema 3:

Problema 4:

Problema 5:

Problema 6:

Problema 7:

Problema 8:

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

Solución:

Se

No

Pregunta 2.

Solución:

Pregunta 3.

Solución:

P

Pregunta 4.

Solución:

=

A

Pregunta 5:

Solución:

$$\mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{r}$$

Pregunta 6.

Solución:

$\boldsymbol{\pi}$

$\boldsymbol{P}$

Pregunta 7.

Solución:

Pregunta 8.

Solución: