MATEMÁTICAS II

Selectividad 2025

Comunidad autónoma de NAVARRA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Juan Antonio Martínez García

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

upna Universidad Pública de Navarra Nafarroako Unibertsitate Publikoa	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2024–2025** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

En total el examen consta de 8 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 4 preguntas, cualesquiera de ellas..

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

Problema 1:

Elige una pregunta de cada bloque P, A, B y C y respóndelas.

P1) Para la realización de un trabajo se precisan de 80 horas haciendo uso de una sola máquina. Cada máquina en funcionamiento genera unos gastos de 10 euros por puesta en marcha y de otros 5 euros por cada hora de uso. Sabiendo además que por cada hora que dure el trabajo hay que pagar 18 euros a un único operario que supervisa la tarea, calcula el número de máquinas a usar para que el gasto sea mínimo. Justifica su condición de mínimo. (Observación: el tiempo necesario para realizar el trabajo es inversamente proporcional al número de máquinas empleadas). (2,5 puntos)

Problema 2:

P2) Siendo $p(t)=0.15+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)$ el precio del kilowatio/hora de la luz doméstica entre los instantes $t_0=0$ y $t_1=1$:

(a) Calcula los instantes en los que el precio ha sido máximo y en los que ha sido mínimo. (1,25 puntos)

(b) Calcula el precio medio $\overline{p}$ de la luz entre los instantes $t_0=0$ y $t_1=1$, sabiendo que el valor medio de una función continua *f* en el intervalo [a, b] (a < b) es: (1.25 puntos)

$$\overline{f}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Observación: Recuerda la necesidad de trabajar en radianes.

Problema 3:

A1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real m y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases}(m^2-3m)x-my+2mz=3\\(m^2-3m)x+3y+3mz=m+9\\(3m-m^2)x+my-mz=0\end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (2,5 puntos)

Problema 4:

A2) Sean A y B dos matrices cuadradas 3×3 tales que $|A|=\frac{1}{4}$ y $|B|=2$. Calcula |C| sabiendo que

$$C=2\cdot\left(A\cdot B^t\right)^2\cdot\left(B^t\right)^{-1}$$

(2,5 puntos)

Problema 5:

B1) Calcula la ecuación continua de la recta t que pasa por el punto P(2, 0,−1) y corta a las siguientes rectas: (2,5 puntos)

$$s \equiv \begin{cases} 2x + y - 3z - 6 = 0 \\ 2x - 3z - 8 = 0 \end{cases} \qquad r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{1}$$

Problema 6:

B2) Un cuadrado tiene dos vértices consecutivos A(1, 0,−1) y B(1, 4, 2) y los otros dos vértices están contenidos en la recta que pasa por el punto P(6,−4,−4).

(a) Calcula la ecuación de dicha recta. (0,5 puntos)

(b) Calcula la ecuación del plano perpendicular al segmento $\overline{AB}$ que pasa por A. (0,75 puntos)

(c) Calcula los otros dos vértices del cuadrado. (1,25 puntos)

Problema 7:

C1) Sea $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) \cdot \ln\left(x^2 + x - 5\right)$.

a) Demuestra que f es continua en [2, 3]. (0,75 puntos)

b) Demuestra que existe un punto c en (2, 3) tal que $f'(c) = 0$. Enuncia el resultado teórico utilizado, y justifica su uso. (1,75 puntos)

Problema 8:

C2) Se considera la función $f(x) = \frac{3x^3}{x^2 - 4}$. Estudia sus asíntotas y simetrías.

Estudia la aproximación de la función a sus asíntotas verticales. (2,5 puntos)

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

Elige una pregunta de cada bloque P, A, B y C y respóndelas.

P1) Para la realización de un trabajo se precisan de 80 horas haciendo uso de una sola máquina. Cada máquina en funcionamiento genera unos gastos de 10 euros por puesta en marcha y de otros 5 euros por cada hora de uso. Sabiendo además que por cada hora que dure el trabajo hay que pagar 18 euros a un único operario que supervisa la tarea, calcula el número de máquinas a usar para que el gasto sea mínimo. Justifica su condición de mínimo. (Observación: el tiempo necesario para realizar el trabajo es inversamente proporcional al número de máquinas empleadas). (2,5 puntos)

Solución:

Llamamos "x" al número de máquinas que se usan.

Como 1 máquina tarda 80 horas, con 2 máquinas tardaremos $\frac{90}{2}=45$ horas y si utilizamos "x" máquinas tardaremos $\frac{90}{x}$ horas en realizar el trabajo.

Hallamos la expresión de la función gasto *G(x)* que depende del número de máquinas en uso.
Cada máquina en funcionamiento genera unos gastos de 10 euros por puesta en marcha y de otros 5 euros por cada hora de uso → $G(x)=10x+5\frac{80}{x}x=10x+400$.

Hay que sumarle el gasto del operario que cobra 18 euros por hora.

$$G(x)=10x+400+18\frac{80}{x}=\frac{1440}{x}+10x+400$$

Hallamos la derivada de la función y vemos cuando se anula.

$$G(x)=\frac{1440}{x}+10x+400 \Rightarrow G'(x)=\frac{-1440}{x^2}+10$$

$$G'(x)=0 \Rightarrow \frac{-1440}{x^2}+10=0 \Rightarrow \frac{1440}{x^2}=10 \Rightarrow 1440=10x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2=\frac{1440}{10}=144 \Rightarrow \boxed{x=\sqrt{144}=12}$$

Como estamos hablando de número de máquinas no nos sirve el valor negativo de la raíz.
Sustituimos $x=12$ en la segunda derivada para decidir si es máximo o mínimo.

$$G'(x)=\frac{-1440}{x^2}+10=-1440x^{-2}+10 \Rightarrow G''(x)=2880x^{-3}=\frac{2880}{x^3} \Rightarrow G''(12)=\frac{2880}{12^3}>0$$

Como la segunda derivada toma valor positivo podemos afirmar que en $x=12$ hay un mínimo relativo de la función gasto.
Con 12 máquinas se consigue un mínimo gasto.

Problema 2:

P2) Siendo $p(t)=0.15+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)$ el precio del kilowatio/hora de la luz doméstica entre los instantes $t_0=0$ y $t_1=1$:

(a) Calcula los instantes en los que el precio ha sido máximo y en los que ha sido mínimo. (1,25 puntos)

(b) Calcula el precio medio $\overline{p}$ de la luz entre los instantes $t_0=0$ y $t_1=1$, sabiendo que el valor medio de una función continua *f* en el intervalo [a, b] (a < b) es: (1.25 puntos)

$$\overline{f}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Observación: Recuerda la necesidad de trabajar en radianes.

Solución:

a) Derivamos la función y averiguamos cuando se anula.

$$p(t)=0.15+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow p'(t)=2\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)\frac{\pi}{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)\frac{\pi}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow p'(t)=\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)\left[2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)\right]\Rightarrow\left\{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)=1-\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow p'(t)=\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)\left[2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)-1+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)\right]=\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)\left[3\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)-1\right]$$

$$p'(t)=0\Rightarrow\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)\left[3\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)-1\right]=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)=0\to\begin{cases}\frac{\pi}{2}\cdot t=0\to\boxed{t=0}\\ \frac{\pi}{2}\cdot t=\pi\to t=2\end{cases}\\ 3\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)-1=0\to 3\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)=1\to\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)=\frac{1}{3}\to\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)=\sqrt{\frac{1}{3}}\\ \to\frac{\pi}{2}\cdot t=\cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\to\boxed{t=\frac{2}{\pi}\cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)=0.60817}\end{cases}$$

Tenemos dos extremos relativos. Valoramos la función en los extremos del intervalo y en estos dos valores y determinamos los valores máximo y mínimo del precio.

$$\left.\begin{array}{l} p(0)=0.15+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot 0\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot 0\right)=0.15 \\ p(0.60817)=0.15+\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}=0.5349 \\ p(1)=0.15+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot 1\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot 1\right)=0.15 \end{array}\right\}$$

El valor máximo se produce en $t=\frac{2}{\pi}\cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)=0.60817$ y el mínimo se produce en $t_0=0$ y $t_1=1$.

b) Calculamos lo pedido.

$$\overline{p}=\frac{1}{1-0}\int_0^1 p(t)dt=\int_0^1 0.15+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)dt$$

Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int 0.15+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)dt=0.15t+\int\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)dt=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{Cambio de variable}\\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)=x\to dx=\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)dt\to\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)dt=\frac{2}{\pi}dx\end{array}\right\}=$$

$$=0.15t+\int\frac{2}{\pi}x^2dx=0.15t+\frac{2}{\pi}\frac{x^3}{3}=0.15t+\frac{2}{3\pi}\sin^3\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)+C$$

Lo aplicamos al cálculo de la integral definida.

$$\overline{p}=\int_0^1 0.15+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)dt=\left[0.15t+\frac{2}{3\pi}\sin^3\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)\right]_0^1=$$

$$=\left[0.15\cdot 1+\frac{2}{3\pi}\sin^3\left(\frac{\pi}{2}\cdot 1\right)\right]-\left[0.15\cdot 0+\frac{2}{3\pi}\sin^3\left(\frac{\pi}{2}\cdot 0\right)\right]=0.15+\frac{2}{3\pi}=0.3622$$

El precio medio $\overline{p}$ de la luz entre los instantes $t_0=0$ y $t_1=1$ es de 0.3622 por kilowatio/hora

Problema 3:

A1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real m y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} (m^2-3m)x - my + 2mz = 3 \\ (m^2-3m)x + 3y + 3mz = m+9 \\ (3m-m^2)x + my - mz = 0 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (2,5 puntos)

Solución:

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} m^2-3m & -m & 2m \\ m^2-3m & 3 & 3m \\ 3m-m^2 & m & -m \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} m^2-3m & -m & 2m & 3 \\ m^2-3m & 3 & 3m & m+9 \\ 3m-m^2 & m & -m & 0 \end{pmatrix}$$

Utilizamos el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente más sencillo.

$$A/B = \begin{pmatrix} m^2-3m & -m & 2m & 3 \\ m^2-3m & 3 & 3m & m+9 \\ 3m-m^2 & m & -m & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{cccc} \text{Fila } 2^{\text{a}} - \text{Fila } 1^{\text{a}} & & & \\ m^2-3m & 3 & 3m & m+9 \\ -m^2+3m & m & -2m & -3 \\ \hline 0 & 3+m & m & m+6 \rightarrow \text{Nueva fila } 2^{\text{a}} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{cccc} \text{Fila } 3^{\text{a}} + \text{Fila } 1^{\text{a}} & & & \\ 3m-m^2 & m & -m & 0 \\ m^2-3m & -m & 2m & 3 \\ \hline 0 & 0 & m & 3 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^{\text{a}} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} m^2-3m & -m & 2m & 3 \\ 0 & 3+m & m & m+6 \\ 0 & 0 & m & 3 \end{pmatrix}$$

Averiguamos cuando se anula la matriz de coeficientes del sistema equivalente obtenido.

$$\begin{vmatrix} m^2-3m & -m & 2m \\ 0 & 3+m & m \\ 0 & 0 & m \end{vmatrix} = m(3+m)(m^2-3m) = m(3+m)m(m-3) =$$

$$= m^2(3+m)(m-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{m=0} \\ 3+m=0 \rightarrow \boxed{m=-3} \\ m-3=0 \rightarrow \boxed{m=3} \end{cases}$$

Se anula cuando $m = -3$, $m = 0$ y cuando $m = 3$.

Nos surgen 4 situaciones distintas que analizamos por separado.

CASO 1. $m \neq -3$, $m \neq 0$ y $m \neq 3$

El determinante de A es no nulo, por lo cual su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. Aplicando el teorema de Rouché el sistema es **compatible determinado** (tiene solución única).

Resolvemos el sistema equivalente obtenido aplicando el método de Gauss.

$$\begin{pmatrix} m^2-3m & -m & 2m & 3 \\ 0 & 3+m & m & m+6 \\ 0 & 0 & m & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} (m^2-3m)x-my+2mz=3 \\ (3+m)y+mz=m+6 \\ mz=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \{m\neq 0\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} (m^2-3m)x-my+2mz=3 \\ (3+m)y+mz=m+6 \\ \boxed{z=\frac{3}{m}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} (m^2-3m)x-my+2m\frac{3}{m}=3 \\ (3+m)y+m\frac{3}{m}=m+6 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} (m^2-3m)x-my+6=3 \\ (3+m)y+3=m+6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} (m^2-3m)x-my=-3 \\ (3+m)y=m+3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{m+3\neq 0\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} (m^2-3m)x-my=-3 \\ \boxed{y=\frac{m+3}{m+3}=1} \end{array}\right\} \Rightarrow (m^2-3m)x-m=-3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m^2-3m)x=m-3 \Rightarrow \{m^2-3m\neq 0\} \Rightarrow \boxed{x=\frac{m-3}{m^2-3m}=\frac{m-3}{m(m-3)}=\frac{1}{m}}$$

La solución es $x=\frac{1}{m},\ y=1,\ z=\frac{3}{m}$

CASO 2. $m=0$

La matriz ampliada equivalente obtenida queda $A/B = \overbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{A}}^{A/B}$

Por lo que el rango de A es 1 y el de la ampliada es 2. Al tener rangos distintos por el teorema de Rouché el sistema es **incompatible**.

CASO 3. $m=3$

La matriz ampliada queda $A/B = \overbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -3 & 6 & 3 \\ 0 & 6 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}}_{A}}^{A/B}$

Por lo que el rango de A es 2, al igual que el de la ampliada A/B. Los rangos son iguales, pero menores que el número de incógnitas (3). Por el teorema de Rouché el sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

Resolvemos el sistema a partir del sistema triangular equivalente obtenido.

$$A/B=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & 6 & 3 \\ 0 & 6 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -3y+6z=3 \\ 6y+3z=9 \\ 3z=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -3y+6z=3 \\ 6y+3z=9 \\ \boxed{z=1} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} -3y+6=3 \\ 6y+3=9 \end{array}\right\} \Rightarrow \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -3y=-3 \\ 6y=6 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{y=1} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=\lambda \\ y=1\ ;\ \lambda\in\mathbb{R} \\ z=1 \end{cases}}$$

Las soluciones del sistema son $\begin{cases} x=\lambda \\ y=1\ ;\ \lambda\in\mathbb{R} \\ z=1 \end{cases}$.

CASO 4. $m=-3$

La matriz ampliada queda

$$A/B=\left(\begin{array}{ccc|c} 18 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 0 \quad -3 \quad 3 \\ 0 \quad 0 \quad 3 \quad -3 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \to \text{Nueva fila } 3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 18 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Por lo que el rango de A es 2, al igual que el de la ampliada A/B. Los rangos son iguales, pero menores que el número de incógnitas (3). Por el teorema de Rouché el sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

Resolvemos el sistema a partir del sistema triangular equivalente obtenido.

$$A/B=\left(\begin{array}{ccc|c} 18 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 18x+3y-6z=3 \\ -3z=3 \\ -3z=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 18x+3y-6z=3 \\ -3z=3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 18x+3y-6z=3 \\ \boxed{z=\frac{3}{-3}=-1} \end{array}\right\} \Rightarrow 18x+3y+6=3 \Rightarrow 18x+3y=-3 \Rightarrow 6x+y=-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=-1-6x \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=\lambda \\ y=-1-6\lambda;\ \lambda\in\mathbb{R} \\ z=-1 \end{cases}}$$

Las soluciones del sistema son $\begin{cases} x=\lambda \\ y=-1-6\lambda ;\ \ \lambda\in\mathbb{R}. \\ z=-1 \end{cases}$

Resumiendo: Si $m\neq -3$, $m\neq 0$ y $m\neq 3$ el sistema es compatible determinado siendo su solución $x=\dfrac{1}{m}$, $y=1$, $z=\dfrac{3}{m}$, si $m=-3$ el sistema es compatible indeterminado siendo sus soluciones $\begin{cases} x=\lambda \\ y=-1-6\lambda ;\ \ \lambda\in\mathbb{R} \\ z=-1 \end{cases}$, si $m=0$ el sistema es incompatible y si $m=3$ el sistema es compatible indeterminado siendo sus soluciones $\begin{cases} x=\lambda \\ y=1\ ;\ \ \lambda\in\mathbb{R}. \\ z=1 \end{cases}$

Problema 4:

A2) Sean A y B dos matrices cuadradas 3×3 tales que $|A| = \frac{1}{4}$ y $|B| = 2$. Calcula |C| sabiendo que $C = 2\cdot(A\cdot B^t)^2\cdot(B^t)^{-1}$

(2,5 puntos)

Solución:

Simplificamos la matriz C.

$$C = 2\cdot(A\cdot B^t)^2\cdot(B^t)^{-1} = 2\cdot(A\cdot B^t)(A\cdot B^t)\cdot(B^t)^{-1} =$$

$$= 2\cdot A\cdot B^t\cdot A\cdot B^t\cdot(B^t)^{-1} = \left\{B^t\cdot(B^t)^{-1} = Id\right\} = 2\cdot A\cdot B^t\cdot A$$

Calculamos el determinante de C.

$$|C| = |2\cdot A\cdot B^t\cdot A| = \left\{\begin{array}{l} A\cdot B^t\cdot A \text{ es} \\ \text{una matriz } 3\times 3\end{array}\right\} = 2^3\,|A\cdot B^t\cdot A| =$$

$$= \left\{\begin{array}{l}\text{Determinante de un} \\ \text{producto de matrices es igual al} \\ \text{producto de sus determinantes}\end{array}\right\} =$$

$$= 8\cdot|A|\cdot|B^t|\cdot|A| = \left\{|B^t| = |B|\right\} = 8\frac{1}{4}\cdot|B|\cdot\frac{1}{4} = 8\cdot\frac{1}{4}\cdot 2\cdot\frac{1}{4} = 1$$

Problema 5:

B1) Calcula la ecuación continua de la recta t que pasa por el punto P(2, 0,−1) y corta a las siguientes rectas: (2,5 puntos)

$$s \equiv \begin{cases} 2x+y-3z-6=0 \\ 2x-3z-8=0 \end{cases} \qquad r \equiv \frac{x+1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{1}$$

Solución:

Debemos buscar un punto A de la recta r y un punto B de la recta s tales que los puntos A, B y P estén alineados.
Hallamos las ecuaciones paramétricas de las dos rectas.

$$r \equiv \frac{x+1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{1} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u_r}=(2,1,1) \\ P_r(-1,0,-2) \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} x=-1+2\alpha \\ y=\alpha \\ z=-2+\alpha \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(-1+2\alpha,\alpha,-2+\alpha)}$$

$$s \equiv \begin{cases} 2x+y-3z-6=0 \\ 2x-3z-8=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y-3z-6=0 \\ 2x=3z+8 \end{cases} \Rightarrow \cancel{3z}+8+y-\cancel{3z}-6=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=-2 \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x=4+\frac{3}{2}\lambda \\ y=-2 \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow \boxed{B\left(4+\frac{3}{2}\lambda,-2,\lambda\right)}$$

Para que los puntos A, B y P estén alineados los vectores $\overrightarrow{AP}$ y $\overrightarrow{BP}$ deben tener coordenadas proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l} A(-1+2\alpha,\alpha,-2+\alpha) \\ B\left(4+\frac{3}{2}\lambda,-2,\lambda\right) \\ P(2,0,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AP}=P(2,0,-1)-(-1+2\alpha,\alpha,-2+\alpha)=(3-2\alpha,-\alpha,1-\alpha) \\ \overrightarrow{BP}=P(2,0,-1)-\left(4+\frac{3}{2}\lambda,-2,\lambda\right)=\left(-2-\frac{3}{2}\lambda,2,-1-\lambda\right) \end{array}\right\}$$

$$\overrightarrow{AP}\parallel\overrightarrow{BP} \Rightarrow \frac{3-2\alpha}{-2-\frac{3}{2}\lambda}=\frac{-\alpha}{2}=\frac{1-\alpha}{-1-\lambda} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3-2\alpha}{-2-\frac{3}{2}\lambda}=\frac{-\alpha}{2} \to 6-4\alpha=2\alpha+\frac{3}{2}\alpha\lambda \\ \frac{-\alpha}{2}=\frac{1-\alpha}{-1-\lambda} \to \alpha+\alpha\lambda=2-2\alpha \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6-6\alpha=\frac{3}{2}\alpha\lambda \\ 3\alpha+\alpha\lambda=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12-12\alpha=3\alpha\lambda \\ 3\alpha+\alpha\lambda=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4-4\alpha=\alpha\lambda \\ 3\alpha+\alpha\lambda=2 \end{cases} \Rightarrow 3\alpha+4-4\alpha=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\alpha=-2 \Rightarrow \alpha=2 \Rightarrow \begin{cases} A(3,2,0) \\ 6+2\lambda=2 \to 2\lambda=-4 \to \lambda=-2 \to B(1,-2,-2) \end{cases}$$

Hallamos la recta que pasa por A, B y P.

$$\left.\begin{array}{l} A(3,2,0)\in t \\ B(1,-2,-2)\in t \\ P(2,0,-1)\in t \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}=(1,-2,-2)-(3,2,0)=(-2,-4,-2) \\ P(2,0,-1)\in t \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{w_t}=\frac{-1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{-1}{2}(-2,-4,-2)=(1,2,1) \\ P(2,0,-1)\in t \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{t:\frac{x-2}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}}$$

La ecuación continua de la recta t que pasa por el punto P y corta a las rectas r y s es $t:\frac{x-2}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}$.

Problema 6:

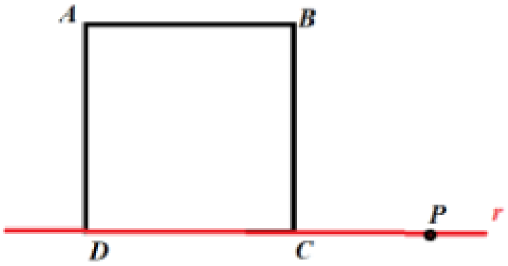
B2) Un cuadrado tiene dos vértices consecutivos A(1, 0,−1) y B(1, 4, 2) y los otros dos vértices están contenidos en la recta que pasa por el punto P(6,−4,−4).

(a) Calcula la ecuación de dicha recta. (0,5 puntos)

(b) Calcula la ecuación del plano perpendicular al segmento $\overline{AB}$ que pasa por A. (0,75 puntos)

(c) Calcula los otros dos vértices del cuadrado. (1,25 puntos)

Solución:



(a) Hallamos el vector $\overrightarrow{AB}$ que será el vector director de la recta r que contiene los puntos C y D.

$$\left.\begin{array}{l} A(1,0,-1) \\ B(1,4,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (1,4,2)-(1,0,-1) = (0,4,3)$$

Hallamos la ecuación de la recta que contiene los puntos C y D.

$$\left.\begin{array}{l} \overline{v_r} = \overline{AB} = (0,4,3) \\ P(6,-4,-4) \in r \end{array}\right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 6 \\ y = -4+4\lambda \\ z = -4+3\lambda \end{cases}$$

(b) El plano perpendicular al segmento $\overline{AB}$ que pasa por A tiene como vector normal $\overrightarrow{AB}$.

$$\left.\begin{array}{l} \overline{n} = \overline{AB} = (0,4,3) \\ A(1,0,-1) \in \pi \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \pi : 4y+3z+D = 0 \\ A(1,0,-1) \in \pi \end{array}\right\} \Rightarrow -3+D = 0 \Rightarrow D = 3 \Rightarrow \boxed{\pi : 4y+3z+3 = 0}$$

(c) El punto de corte de la recta y el plano es el vértice D del cuadrado.

$$\left.\begin{array}{l} r: \begin{cases} x = 6 \\ y = -4+4\lambda \\ z = -4+3\lambda \end{cases} \\ \pi : 4y+3z+3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 4(-4+4\lambda)+3(-4+3\lambda)+3 = 0 \Rightarrow -16+16\lambda-12+9\lambda+3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25\lambda - 25 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = -4+4 = 0 \\ z = -4+3 = -1 \end{cases} \Rightarrow D(6,0,-1)$$

Tenemos que $D(6,0,-1)$. El vértice C lo hallamos sumando al punto D el vector $\overline{AB}$.

$$\left.\begin{array}{l} \overline{AB} = (0,4,3) \\ D(6,0,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow C = D + \overline{AB} = (6,0,-1)+(0,4,3) = (6,4,2)$$

El cuarto vértice del cuadrado es $C(6,4,2)$.

Problema 7:

C1) Sea $f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)\cdot\ln\left(x^2+x-5\right)$.

a) Demuestra que f es continua en [2, 3]. (0,75 puntos)

b) Demuestra que existe un punto c en (2, 3) tal que f ′(c) = 0. Enuncia el resultado teórico utilizado, y justifica su uso. (1,75 puntos)

Solución:

a) Para que sea continua debe ser $x^2+x-5>0$.

$$x\in[2,3]\Rightarrow 2\le x\le 3\Rightarrow 2^2\le x^2\le 3^2\Rightarrow 2^2+2\le x^2+x\le 3^2+3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^2+2-5\le x^2+x-5\le 3^2+3-5\Rightarrow 1\le x^2+x-5\le 7$$

Por lo que existe el logaritmo neperiano y la función es un producto de funciones continuas en el intervalo $[2,3]$ y por tanto continua en dicho intervalo.

b) Vamos a comprobar si se cumple las condiciones del teorema de Rolle.

La función es continua en $[2,3]$.

Tenemos que $f(2)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot 2\right)\cdot\ln\left(2^2+2-5\right)=\cos(\pi)\ln 1=-1\cdot 0=0$ y

$f(3)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot 3\right)\cdot\ln\left(3^2+3-5\right)=\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)\ln 7=0\cdot\ln 7=0$, por lo que $f(2)=f(3)$.

La función es derivable, siendo su derivada

$f'(x)=-\frac{\pi}{2}sen\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)\cdot\ln\left(x^2+x-5\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)\cdot\frac{2x+1}{x^2+x-5}$. Esta derivada no plantea ningún problema en el intervalo (2, 3) pues $x^2+x-5>0$.

Podemos aplicar el teorema de Rolle a la función $f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)\cdot\ln\left(x^2+x-5\right)$ en el intervalo $[2,3]$ y afirmar que existe un punto c en (2, 3) tal que f ′(c) = 0.

Problema 8:

C2) Se considera la función $f(x)=\frac{3x^3}{x^2-4}$. Estudia sus asíntotas y simetrías.

Estudia la aproximación de la función a sus asíntotas verticales. (2,5 puntos)

Solución:

Estudiamos la simetría.

$$f(-x)=\frac{3(-x)^3}{(-x)^2-4}=\frac{-3x^3}{x^2-4}=-\frac{3x^3}{x^2-4}=-f(x)$$

La función es impar.
Estudiamos sus asíntotas.
El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$x^2-4=0\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=\sqrt{4}=\pm 2$$

El dominio de la función es $\mathbb{R}-\{-2,2\}$.

Asíntotas verticales. $x=a$
¿$x=-2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to -2} f(x)=\lim_{x\to -2}\frac{3x^3}{x^2-4}=\frac{3(-2)^3}{(-2)^2-4}=\frac{-24}{0}=\infty$$

$x=-2$ es asíntota vertical.

¿$x=2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{3x^3}{x^2-4}=\frac{3\cdot 2^3}{2^2-4}=\frac{24}{0}=\infty$$

$x=2$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3}{x^2-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3}{x^2}=\lim_{x\to\infty}3x=\infty$$

La función no tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^3}{x^2-4}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3}{x^3-4x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3}{x^3}=3$$

$$n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^3}{x^2-4}-3x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{3x^3}-\cancel{3x^3}+12x}{x^2-4}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{12x}{x^2-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{12x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{12}{x}=\frac{12}{\infty}=0$$

La recta $y=3x$ es asíntota oblicua de la función.

Estudiamos la aproximación de la función a sus asíntotas verticales.

$x=-2$ es asíntota vertical.

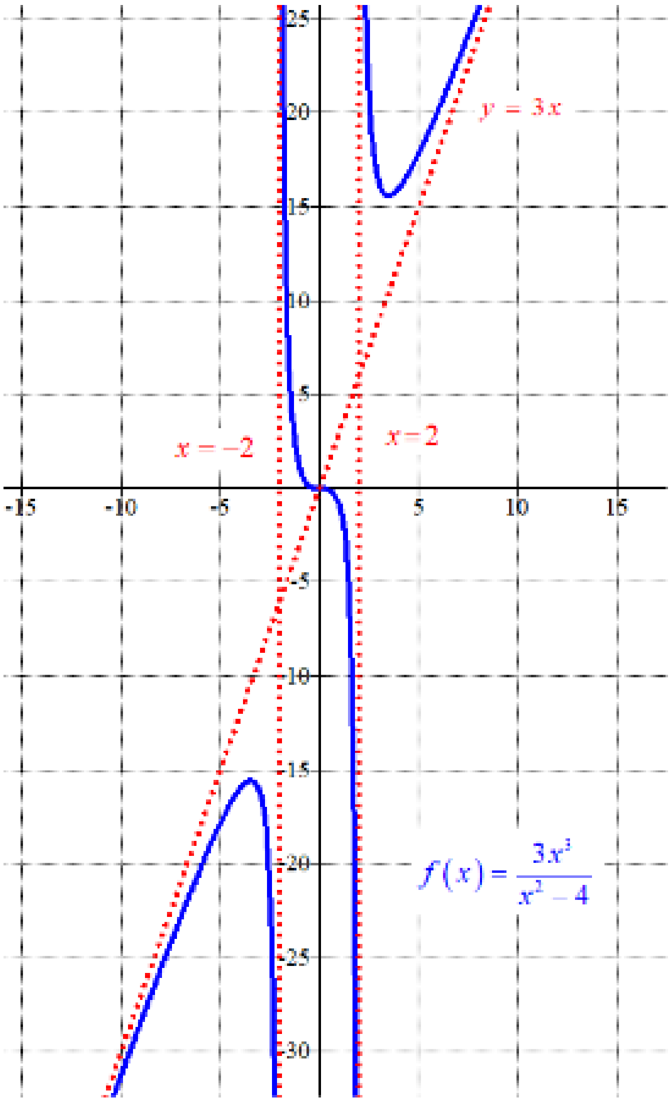
$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} \frac{3x^3}{x^2-4} = \frac{3(-2)^3}{(-2)^2-4} = \frac{-24}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} \frac{3x^3}{x^2-4} = \frac{3(-2)^3}{(-2)^2-4} = \frac{-24}{0^-} = +\infty$$

$x=2$ es asíntota vertical.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{3x^3}{x^2-4} = \frac{3\cdot 2^3}{2^2-4} = \frac{24}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{3x^3}{x^2-4} = \frac{3\cdot 2^3}{2^2-4} = \frac{24}{0^+} = +\infty$$



upna Universidad Pública de Navarra Nafarroako Unibertsitate Publikoa	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2023–2024** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

En total el examen consta de 8 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 4 preguntas, cualesquiera de ellas.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

Problema 2:

Problema 3:

Problema 4:

Problema 5:

Problema 6:

Problema 7:

Problema 8:

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Problema 1:

Solución:

Problema 2:

Solución:

Problema 3:

Solución:

Problema 4:

Solución:

Problema 5:

Solución:

Problema 6:

Solución:

Problema 7:

Solución:

Problema 8:

Solución: