MATEMÁTICAS II

Selectividad 2024

Comunidad autónoma de

MADRID

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Juan Antonio Martínez García y Javier Rodrigo Hitos

VÍDEOS CON EXÁMENES RESUELTOS

https://www.youtube.com/watch?v=3pNRriSVtdM

Un ingeniero, tras resolver el examen de Matemáticas II de la PAU de Madrid: "Lo siento mucho por los chavales"

	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2024–2025** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a una pregunta en cada uno de los cuatro bloques, tres de ellos con optatividad y uno sin optatividad. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.
Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

BLOQUE OBLIGATORIO

Bloque 2. (Calificación: 2.5 puntos) Responda a la pregunta siguiente:

Pregunta 2. Un muro rectangular de la biblioteca pública del barrio se va a pintar con la ayuda de unos grafiteros. La dimensión del muro es de 3 metros de alto y 12 metros de largo. Colocando la esquina inferior izquierda del muro en el origen de coordenadas, se va a utilizar la curva $f(x)=\cos\left(\frac{\pi x}{9}\right)+2$ para diferenciar dos regiones del muro que serán pintadas con dos colores distintos. Se sabe que con un bote de spray se pueden pintar 3 metros cuadrados de superficie.

a) (0.75 puntos) Halle el valor máximo y el valor mínimo de la función *f(x)* en el intervalo $[0,12]$. ¿Está la curva en este intervalo $[0,12]$ contenida completamente en el muro?
b) (1.25 puntos) Halle el área que tienen que pintar de cada color.
c) (0.5 puntos) ¿Cuántos botes de spray se tienen que comprar como mínimo para pintar toda el área bajo la curva *f(x)*?

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1

Bloque 1. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 1.1. (2.5 puntos) En el baloncesto existen canastas que valen un punto, otras que valen dos y otras que valen tres puntos. Calcule el número de lanzamientos de uno, de dos y de tres puntos que realizó un equipo en un partido sabiendo que:

- El equipo anotó 80 puntos con un acierto del 80% en tiros de uno, del 50% en tiros de dos y del 40% en tiros de tres.
- La tercera parte del número de lanzamientos de dos fue igual a la quinta parte del resto de lanzamientos.
- El doble del número de lanzamientos de tres es menor en cinco unidades al resto de lanzamientos.

Pregunta 1.2. Sean la matriz $A=\begin{pmatrix}4&1&0\\2&3&0\\3&2&2\end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3. Se pide:

a) (1.25 puntos) Calcular el polinomio $P(\lambda)=\det(A-\lambda I)$ y hallar las raíces reales del polinomio.

b) (1.25 puntos) Para $\lambda=5$, calcular un vector no nulo $\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ que satisfaga que $(A-\lambda I)\vec{v}=\vec{0}$.

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3

Bloque 3. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 3.1. Dados la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z-2}{1}$ y el plano $\pi : x + 2y - 3z = 1$, se pide:

a) (0.75 puntos) Hallar una ecuación del plano que contiene a *r* y es perpendicular a π.

b) (0.75 puntos) Hallar una ecuación de la recta contenida en π que corta perpendicularmente a *r*.

c) (1 punto) Calcular los puntos de la recta *r* cuya distancia al plano π es $\sqrt{14}$.

Pregunta 3.2. Sean el punto $P(0,1,1)$ y el plano $\pi : x + y = 2$. Se pide:

a) (0.5 puntos) Hallar la distancia del punto *P* al plano π.

b) (1 punto) Determinar el punto *Q* del plano π cuya distancia a *P* es igual que la distancia de *P* a π.

c) (1 punto) Hallar el área del triángulo formado por *P* y los puntos de corte del plano π con los ejes coordenados.

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 4

Bloque 4. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 4.1. Sea $E = \{2,3,5,7,11,13,17,19\}$ un espacio muestral y *P* una medida de probabilidad en *E* definida por: $P(7) = P(3) = \frac{1}{4}$ y con el resto de sucesos elementales equiprobables.

Se consideran los sucesos $A = \{7,11,13,19\}$, $B = \{2,5,7,13,17\}$ y $C = \{3,5,7,11,13\}$. Se pide calcular:

a) (1.25 puntos) $P\left(\overline{(A-C)} \cap B\right)$.

b) (1.25 puntos) $P\left((A \cap B) / \overline{C}\right)$.

Pregunta 4.2. Entre los ciudadanos de 14 años o más de cierto país, el 20% de la población tiene entre 14 y 24 años, el 50% entre 25 y 64 y el resto más de 64 años. Según datos recogidos por el ministerio de cultura de ese país, el 74% de sus ciudadanos de entre 14 y 24 es lector habitual, mientras que el porcentaje decrece hasta el 65.8% entre los de 25 a 64 y al 53.7% entre los mayores de 64. Elegido un ciudadano al azar del país en cuestión de 14 años o más, se pide:

a) (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que sea lector habitual.

b) (1.25 puntos) Si no es lector habitual, calcular la probabilidad de que tenga entre 25 y 64 años.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Bloque 1:

Bloque 1. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 1.1. (2.5 puntos) En el baloncesto existen canastas que valen un punto, otras que valen dos y otras que valen tres puntos. Calcule el número de lanzamientos de uno, de dos y de tres puntos que realizó un equipo en un partido sabiendo que:

- El equipo anotó 80 puntos con un acierto del 80% en tiros de uno, del 50% en tiros de dos y del 40% en tiros de tres.
- La tercera parte del número de lanzamientos de dos fue igual a la quinta parte del resto de lanzamientos.
- El doble del número de lanzamientos de tres es menor en cinco unidades al resto de lanzamientos.

Solución 1.1:

Llamamos x, y, z al número de lanzamientos de uno, de dos y de tres puntos que realizó un equipo en un partido.

Obtenemos las ecuaciones que surgen del enunciado.

- El equipo anotó 80 puntos con un acierto del 80% en tiros de uno, del 50% en tiros de dos y del 40% en tiros de tres → $0.80x+0.50\cdot 2y+0.40\cdot 3z=80$.
- La tercera parte del número de lanzamientos de dos fue igual a la quinta parte del resto de lanzamientos → $\frac{y}{3}=\frac{x+z}{5}$.
- El doble del número de lanzamientos de tres es menor en cinco unidades al resto de lanzamientos → $2z=x+y-5$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l}0.80x+0.50\cdot 2y+0.40\cdot 3z=80\\ \frac{y}{3}=\frac{x+z}{5}\\ 2z=x+y-5\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}0.8x+y+1.2z=80\\ 5y=3x+3z\\ 2z=x+y-5\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}y=80-0.8x-1.2z\\ 5y=3x+3z\\ 2z=x+y-5\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}5(80-0.8x-1.2z)=3x+3z\\ 2z=x+80-0.8x-1.2z-5\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}400-4x-6z=3x+3z\\ 3.2z=0.2x+75\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}400=7x+9z\\ 16z=x+375\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}400=7x+9z\\ 16z-375=x\end{array}\right\}\Rightarrow 400=7(16z-375)+9z\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 400=112z-2625+9z\Rightarrow 3025=121z\Rightarrow\boxed{z=\frac{3025}{121}=25}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boxed{x=16\cdot 25-375=25}\Rightarrow\boxed{y=80-0.8\cdot 25-1.2\cdot 25=30}$$

En el partido se realizaron 25 lanzamientos de 1 punto, 30 de 2 puntos y 25 de 3 puntos.

x = 25; y = 30; z = 25.

Llamando: x - Lanzamientos de 1

y - Lanzamientos de 2

z - Lanzamientos de 3

Antonio Malaver
@ a.malaver

1ª condición:

$$1 \cdot 0'8 \cdot x + 2 \cdot 0'5 \cdot y + 3 \cdot 0'4 \cdot z = 80 \rightarrow$$

$$\rightarrow 0'8 \cdot x + y + 1'2 \cdot z = 80$$

2ª condición:

$$\frac{1}{3} y = \frac{1}{5}(x+z) \rightarrow 3x - 5y + 3z = 0$$

3ª condición:

$$2z = x + y - 5 \rightarrow x + y - 2z = 5$$

Así, tenemos:

$$\left.\begin{array}{r} 0'8 \cdot x + y + 1'2z = 80 \\ 3 \cdot x - 5y + 3z = 0 \\ x + y - 2z = 5 \end{array}\right\} \quad \boxed{\begin{array}{l} x = 25 \\ y = 30 \\ z = 25 \end{array}}$$

Pregunta 1.2. Sean la matriz $A=\begin{pmatrix}4 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 0\\ 3 & 2 & 2\end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3. Se pide:

a) (1.25 puntos) Calcular el polinomio $P(\lambda)=\det(A-\lambda I)$ y hallar las raíces reales del polinomio.

b) (1.25 puntos) Para $\lambda=5$, calcular un vector no nulo $\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ que satisfaga que $(A-\lambda I)\vec{v}=\vec{0}$.

Solución 1.2

a) Calculamos la expresión de la matriz $A-\lambda I$ y la de su determinante.

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix}4 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 0\\ 3 & 2 & 2\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-\lambda & 1 & 0\\ 2 & 3-\lambda & 0\\ 3 & 2 & 2-\lambda\end{pmatrix}$$

$$P(\lambda)=|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}4-\lambda & 1 & 0\\ 2 & 3-\lambda & 0\\ 3 & 2 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(4-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda)-2(2-\lambda)=$$

$$=(2-\lambda)\left[(4-\lambda)(3-\lambda)-2\right]=(2-\lambda)\left[12-4\lambda-3\lambda+\lambda^2-2\right]=$$

$$=(2-\lambda)\left[\lambda^2-7\lambda+10\right]=2\lambda^2-14\lambda+20-\lambda^3+7\lambda^2-10\lambda=-\lambda^3+9\lambda^2-24\lambda+20$$

Tenemos que el polinomio $P(\lambda)=\det(A-\lambda I)=-\lambda^3+9\lambda^2-24\lambda+20$.
Determinamos las raíces de este polinomio.

$$\left.\begin{array}{l}P(\lambda)=(2-\lambda)\left[\lambda^2-7\lambda+10\right]\\ P(\lambda)=0\end{array}\right\}\Rightarrow(2-\lambda)\left[\lambda^2-7\lambda+10\right]=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2-\lambda=0\to\boxed{\lambda=2}\\ \lambda^2-7\lambda+10=0\to\lambda=\dfrac{7\pm\sqrt{(-7)^2-40}}{2}=\dfrac{7\pm3}{2}=\begin{cases}\dfrac{7+3}{2}=\boxed{5=\lambda}\\ \dfrac{7-3}{2}=\boxed{2=\lambda}\end{cases}\end{cases}$$

Las raíces del polinomio son $\lambda=2$ y $\lambda=5$.

a) $\det(A-\lambda I) = \left|\begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 0 \\ 3 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix}\right| = (4-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda) - 2(2-\lambda)$

$= (12-7\lambda+\lambda^2)(2-\lambda) - 4 + 2\lambda$

$= (24-14\lambda+2\lambda^2-12\lambda+7\lambda^2-\lambda^3) - 4 + 2\lambda$

$= -\lambda^3+9\lambda^2-26\lambda+24-4+2\lambda$

$= -\lambda^3+9\lambda^2-24\lambda+20$ //

¿Qué es este ejercicio? ¡Si son autovalores y autovectores!

Antonio Malaver @a.malaver

Hallamos las raíces igualando a 0:

$\lambda^3-9\lambda^2+24\lambda-20=0 \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 5 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = 2 \end{cases}$ ¡Aparece 2 veces!

Así, las raíces son $\boxed{\lambda_1 = 5 \text{ y } \lambda_2 = 2}$ (con multiplicidad 2).

$\lambda = 5; \lambda = 2$

Así, las raíces son $\boxed{\lambda_1 = 5 \text{ y } \lambda_2 = 2}$ (con multiplicidad 2).

b) Para $\lambda = 5$

$(A-5I)\cdot\vec{v} = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$

No tiene sentido preguntar esto en selectividad... ¡Esto se da en primero de carrera!

Reducimos la matriz a forma escalonada:

$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_3+3f_1]{f_2+2f_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Así: $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} -x+y = 0 \\ 5y-3z=0 \end{matrix}$

Poniendo todo en función de z:

$\begin{matrix} x = y \\ y = \frac{3}{5}z \\ z \end{matrix} \rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5}z \\ \frac{3}{5}z \\ z \end{pmatrix}$

Cogiendo z=1 por ejemplo:

$\vec{v}(z=1) = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 3/5 \\ 1 \end{pmatrix}$ //

b) Para $\lambda = 5$ la matriz $A - \lambda I$ queda $A - 5I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. Hemos visto que tiene determinante nulo y la situación planteada tiene infinitas soluciones.

Resolvemos la ecuación matricial planteada.

$$(A-5I)\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -x+y=0 \\ 2x-2y=0 \\ 3x+2y-3z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} -x+y=0 \\ x-y=0 \\ 3x+2y-3z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \{\text{Ecuación } 1^{\text{a}} = \text{Ecuación } 2^{\text{a}}\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x-y=0 \\ 3x+2y-3z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=y \\ 3x+2y-3z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3y+2y-3z=0 \Rightarrow 5y-3z=0 \Rightarrow 5y=3z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \frac{5}{3}y \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \frac{5}{3}\alpha \end{pmatrix}; \alpha \in \mathbb{R}$$

Si tomamos $\alpha = 3$ tenemos el vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ que cumple lo pedido.

v = (3α/5, 3αz/5, α); v = (3, 3, 5)

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1

Bloque 2:

Bloque 2. (Calificación: 2.5 puntos) Responda a la pregunta siguiente:

Pregunta 2. Un muro rectangular de la biblioteca pública del barrio se va a pintar con la ayuda de unos grafiteros. La dimensión del muro es de 3 metros de alto y 12 metros de largo. Colocando la esquina inferior izquierda del muro en el origen de coordenadas, se va a utilizar la curva $f(x)=\cos\left(\frac{\pi x}{9}\right)+2$ para diferenciar dos regiones del muro que serán pintadas con dos colores distintos. Se sabe que con un bote de spray se pueden pintar 3 metros cuadrados de superficie.

a) (0.75 puntos) Halle el valor máximo y el valor mínimo de la función *f(x)* en el intervalo $[0,12]$. ¿Está la curva en este intervalo $[0,12]$ contenida completamente en el muro?

b) (1.25 puntos) Halle el área que tienen que pintar de cada color.

c) (0.5 puntos) ¿Cuántos botes de spray se tienen que comprar como mínimo para pintar toda el área bajo la curva *f(x)*?

Solución:

a) Hallamos los puntos críticos de la función.

$$f(x)=\cos\left(\frac{\pi x}{9}\right)+2 \Rightarrow f'(x)=-sen\left(\frac{\pi x}{9}\right)\cdot\frac{\pi}{9}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow -\frac{\pi}{9}sen\left(\frac{\pi x}{9}\right)=0 \Rightarrow sen\left(\frac{\pi x}{9}\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi x}{9}=0 \to \boxed{x=0} \\ \frac{\pi x}{9}=\pi \to \boxed{x=9} \\ \frac{\pi x}{9}=2\pi \to x=18\notin[0,12] \\ \ldots \end{cases}$$

Valoramos la función en los extremos del intervalo $[0,12]$ y en los puntos críticos obtenidos.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=\cos\left(\frac{\pi\cdot 0}{9}\right)+2=3 \ \textit{Máximo} \\ f(9)=\cos\left(\frac{9\pi}{9}\right)+2=1 \ \textit{Mínimo} \\ f(12)=\cos\left(\frac{12\pi}{9}\right)+2=1.5 \end{array}\right\}$$

El valor máximo es 3 y se alcanza en $x=0$ y el valor mínimo es 1 y se alcanza en $x=9$.

Como el coseno de un ángulo toma como valor mínimo –1 y máximo 1 la función $f(x)=\cos\left(\frac{\pi x}{9}\right)+2$ toma como valor mínimo –1 + 2 = 1 y como valor máximo 1 + 2 = 3.

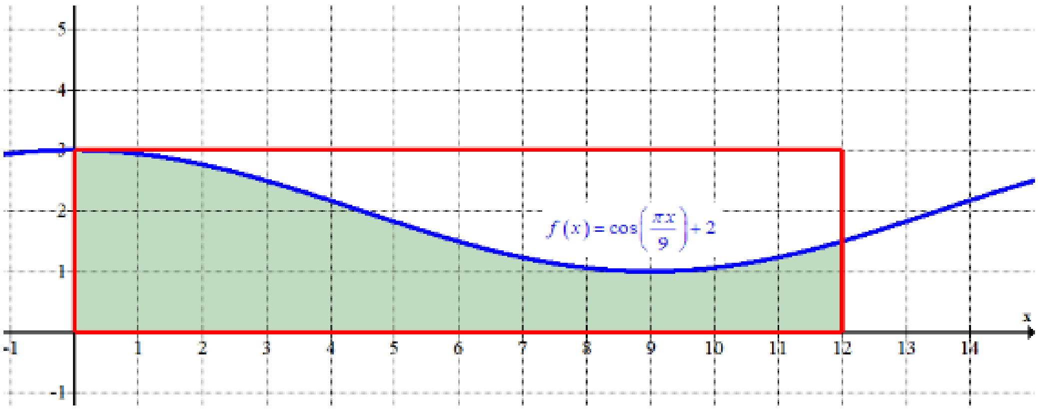
Por lo que la curva está contenida en el muro en el intervalo $[0,12]$.

b) El muro se divide en dos partes una por debajo de la curva y otra por encima de la curva. Hallamos el área de la parte de muro situada por debajo de la curva como la integral definida de la función entre 0 y 12.

$$\int_0^{12} f(x)dx = \int_0^{12} \cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2dx = \left[\frac{9}{\pi} sen\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2x\right]_0^{12} =$$

$$= \left[\frac{9}{\pi} sen\left(\frac{12\pi}{9}\right) + 24\right] - \left[\frac{9}{\pi} sen\left(\frac{\pi \cdot 0}{9}\right) + 2 \cdot 0\right] = \boxed{24 + \frac{9}{\pi} sen\left(\frac{12\pi}{9}\right) \simeq 21.52}$$

La parte de muro situada por debajo de la curva tiene un área aproximada de 21.52 metros cuadrados.
Como el muro tiene una superficie de 3 · 12 = 36 metros cuadrados la parte superior tiene una superficie aproximada de 36 – 21.52 = 14.48 metros cuadrados.



c) Debemos pintar 21.52 metros cuadrados de muro. Como con cada bote de pintura se pintan 3 metros cuadrados de muro, entonces $\frac{21.52}{3} \simeq 7.17$. Para pintar toda el área bajo la curva *f(x)* se necesitarán, por lo menos, 8 botes de pintura, con 7 nos faltaría un trocito de muro por pintar y con 8 nos sobra un poco de pintura.

Máximo: (0, 3); Mínimo: (9, 1). Hacen falta 8 botes, aunque sobra algo de pintura. Con 7 no hay bastante

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2

Bloque 3:

Bloque 3. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 3.1. Dados la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z-2}{1}$ y el plano $\pi : x + 2y - 3z = 1$, se pide:

a) (0.75 puntos) Hallar una ecuación del plano que contiene a r y es perpendicular a π.

b) (0.75 puntos) Hallar una ecuación de la recta contenida en π que corta perpendicularmente a r.

c) (1 punto) Calcular los puntos de la recta r cuya distancia al plano π es $\sqrt{14}$.

Pregunta 3.2. Sean el punto $P(0,1,1)$ y el plano $\pi : x + y = 2$. Se pide:

a) (0.5 puntos) Hallar la distancia del punto P al plano π.

b) (1 punto) Determinar el punto Q del plano π cuya distancia a P es igual que la distancia de P a π.

c) (1 punto) Hallar el área del triángulo formado por P y los puntos de corte del plano π con los ejes coordenados.

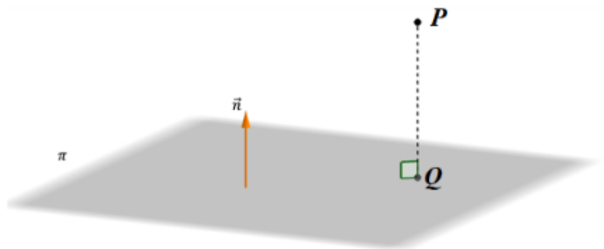
Solución:

a) Calculamos la distancia pedida.

$$\left.\begin{array}{l} \pi : x+y-2=0 \\ P(0,1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow d(\pi, P) = \frac{|0+1-2|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ unidades}$$

La distancia del punto P al plano π tiene un valor de $\frac{\sqrt{2}}{2}$ unidades.

b) Debemos hallar el punto Q del dibujo.



Hallamos la recta perpendicular al plano que pasa por el punto P. Esta recta tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\pi : x+y-2=0 \rightarrow \vec{n} = (1,1,0)$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u_s} = \vec{n} = (1,1,0) \\ P(0,1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow s : \begin{cases} x = \alpha \\ y = 1+\alpha \\ z = 1 \end{cases}$$

Este punto Q que buscamos pertenece al plano y pertenece a la recta s.

$$\left.\begin{array}{l} \pi : x+y=2 \\ s : \begin{cases} x = \alpha \\ y = 1+\alpha \\ z = 1 \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha + 1 + \alpha = 2 \Rightarrow 2\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{Q\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1\right)}$$

El punto Q del plano π cuya distancia a P es igual que la distancia de P a π tiene coordenadas $Q\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2},1\right)$.

c) Hallamos los puntos de corte del plano con los ejes coordenados.

$$\left.\begin{array}{l}\pi : x+y=2 \\ Eje\ OX \rightarrow \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}\end{array}\right\} \Rightarrow x=2 \Rightarrow A(2,0,0)$$

$$\left.\begin{array}{l}\pi : x+y=2 \\ Eje\ OY \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}\end{array}\right\} \Rightarrow y=2 \Rightarrow B(0,2,0)$$

$$\left.\begin{array}{l}\pi : x+y=2 \\ Eje\ OZ \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}\end{array}\right\} \Rightarrow 0=2 \Rightarrow \textit{No hay punto de corte con OZ}$$

Los vértices del triángulo son $A(2,0,0)$, $B(0,2,0)$ y $P(0,1,1)$.

El área del triángulo ABP es la mitad del módulo del producto vectorial de dos vectores que unan dos de sus lados adyacentes.

$$\left.\begin{array}{l} A(2,0,0) \\ B(0,2,0) \\ P(0,1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (0,2,0)-(2,0,0) = (-2,2,0) \\ \overrightarrow{AP} = (0,1,1)-(2,0,0) = (-2,1,1) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2i-2k+4k+2j = 2i+2j+2k = (2,2,2)$$

$$Área\ ABP = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP}\right|}{2} = \frac{\sqrt{2^2+2^2+2^2}}{2} = \frac{\sqrt{12}}{2} = \boxed{\sqrt{3}\ u^2}$$

El área del triángulo formado por P y los puntos de corte del plano π con los ejes coordenados tiene un valor de $\sqrt{3}$ unidades cuadradas.

Área = $\sqrt{3}$ u²

Autores: Juan Antonio Martínez García y Javier Rodrigo Hitos
www.apuntesmareaverde.org.es

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3

Bloque 4:

Bloque 4. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 4.1. Sea $E=\{2,3,5,7,11,13,17,19\}$ un espacio muestral y P una medida de probabilidad en E definida por: $P(7)=P(3)=\frac{1}{4}$ y con el resto de sucesos elementales equiprobables.

Se consideran los sucesos $A=\{7,11,13,19\}$, $B=\{2,5,7,13,17\}$ y $C=\{3,5,7,11,13\}$. Se pide calcular:

a) (1.25 puntos) $P\left(\overline{(A-C)}\cap B\right)$.

b) (1.25 puntos) $P\left((A\cap B)/\overline{C}\right)$.

Solución:

Como $P(7)=P(3)=\frac{1}{4}$, $P(E)=1$ y $P(2)=P(5)=P(11)=P(13)=P(17)=P(19)=p$

entonces $6p+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1 \Rightarrow 6p+\frac{1}{2}=1 \Rightarrow 6p=\frac{1}{2} \Rightarrow p=\frac{1}{12}$.

Tenemos que $P(2)=P(5)=P(11)=P(13)=P(17)=P(19)=\frac{1}{12}$

a) Obtenemos el suceso $\overline{(A-C)}\cap B$.

$$\left.\begin{array}{l} A=\{7,11,13,19\} \\ C=\{3,5,7,11,13\} \end{array}\right\} \Rightarrow A-C=\{19\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{A-C}=E-\{19\}=\{2,3,5,7,11,13,17,19\}-\{19\}=\{2,3,5,7,11,13,17\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \overline{A-C}=\{2,3,5,7,11,13,17\} \\ B=\{2,5,7,13,17\} \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{(A-C)}\cap B=B=\{2,5,7,13,17\}$$

Hallamos la probabilidad pedida.

$$P\left(\overline{(A-C)}\cap B\right)=P(2)+P(5)+P(7)+P(13)+P(17)=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\boxed{\frac{7}{12}}$$

b) Determinamos el suceso $(A\cap B)/\overline{C}$.

$$\left.\begin{array}{l} A=\{7,11,13,19\} \\ B=\{2,5,7,13,17\} \end{array}\right\} \Rightarrow A\cap B=\{7,13\}$$

$$\left.\begin{array}{l} C=\{3,5,7,11,13\} \\ E=\{2,3,5,7,11,13,17,19\} \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{C}=E-C=\{2,17,19\}$$

$$\left.\begin{array}{l} A\cap B=\{7,13\} \\ \overline{C}=\{2,17,19\} \end{array}\right\} \Rightarrow (A\cap B)/\overline{C}=\varnothing$$

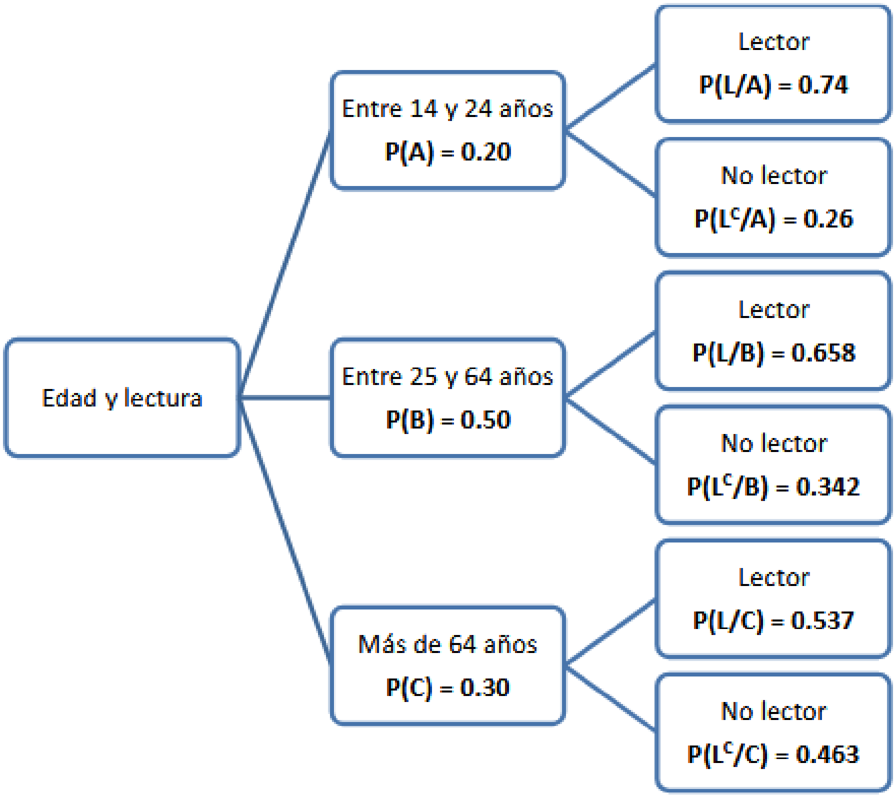
El suceso $(A\cap B)/\overline{C}$ es un suceso imposible y su probabilidad es cero: $P\left((A\cap B)/\overline{C}\right)=0$

Pregunta 4.2. Entre los ciudadanos de 14 años o más de cierto país, el 20% de la población tiene entre 14 y 24 años, el 50% entre 25 y 64 y el resto más de 64 años. Según datos recogidos por el ministerio de cultura de ese país, el 74% de sus ciudadanos de entre 14 y 24 es lector habitual, mientras que el porcentaje decrece hasta el 65.8% entre los de 25 a 64 y al 53.7% entre los mayores de 64. Elegido un ciudadano al azar del país en cuestión de 14 años o más, se pide:

a) (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que sea lector habitual.

b) (1.25 puntos) Si no es lector habitual, calcular la probabilidad de que tenga entre 25 y 64 años.

Realizamos un diagrama de árbol para ordenar toda la información. Llamamos A, B y C a los sucesos "edad entre 14 y 24 años", "edad entre 25 y 64" y "mayor de 64 años", respectivamente. También llamamos L a "ser lector habitual".



a) Nos piden calcular $P(L)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(L)=P(A)P(L/A)+P(B)P(L/B)+P(C)P(L/C)=$$

$$=0.2\cdot 0.74+0.5\cdot 0.658+0.3\cdot 0.537=\boxed{0.6381}$$

b) Nos piden calcular $P(B/L^C)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/L^C)=\frac{P(B\cap L^C)}{P(L^C)}=\frac{P(B)P(L^C/B)}{1-P(L)}=\frac{0.5\cdot 0.342}{1-0.6381}=\boxed{\frac{1710}{3619}\simeq 0.4725}$$

a) P(lector habitual) = 0,6381; b) P = 0,4725

	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2024–2025** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

INSTRUCCIONES GENERALES: Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

BLOQUE OBLIGATORIO

Ejercicio 1:

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1

Ejercicio 2:

Ejercicio 3:

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2

Ejercicio 4:

Ejercicio 5:

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3

Ejercicio 6:

Ejercicio 7

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

BLOQUE OBLIGATORIO

Ejercicio 1:

Solución:

L

El

El

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1

Ejercicio 2:

Solución:

2

Ejercicio 3:

Solución:

f

C

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2

Ejercicio 4:

Solución:

El

Ejercicio 5:

Solución:

X

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3

Ejercicio 6:

Solución:

si

Ejercicio 7

Solución: