MATEMÁTICAS II

Selectividad 2025

Comunidad autónoma de

EXTREMADURA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Juan Antonio Martínez García

	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2024–2025** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN.

El estudiante deberá resolver cuatro ejercicios de los propuestos en este examen. Los ejercicios 1,2 y 3 tienen dos opciones A y B. Solo hay que contestar una de las dos opciones (A o B). Si se contesta a las dos se corregirá solo la que aparezca en primer lugar, salvo que esté tachada. El ejercicio 4 es único y obligatorio. CADA EJERCICIO COMPLETO PUNTUARÁ 2,5 PUNTOS MÁXIMO. En cada apartado se indica la correspondiente puntuación. Se adjunta al final tabla de la distribución NORMAL por si hiciera falta para algún ejercicio. Todas las instrucciones son las recogidas en los criterios generales de evaluación ya publicados junto con los modelos de exámenes. Indicamos a modo de recordatorio y resumen: Criterios generales. Las respuestas de los ejercicios deberán realizarse expresando de forma razonada el proceso seguido en su resolución con el rigor y la precisión necesaria, usando el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados. Se valorará con un máximo de 0,25 puntos en cada ejercicio. Ortografía y redacción. Se valorará la corrección ortográfica (grafías, tildes y puntuación), así como la coherencia, la cohesión, la corrección gramatical y léxica y la presentación. Se deducirá 0,10 puntos por cada falta a partir de la tercera. Se podrá deducir hasta 1 punto máximo en la puntuación final. Materiales. Se permitirá una calculadora no gráfica y no programable, según el anexo aprobado y publicado.

BLOQUE 1

EJERCICIO 1A. [2,5 puntos] a) 1,5 puntos, b) 1 punto.

Considera el siguiente sistema de ecuaciones, donde $k \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} x+ky+z=2+k \\ 2x-y-kz=1-k \\ x-y-z=-1 \end{cases}$

a) Discutir el sistema en función del parámetro k.

b) Resolver para el caso k=1.

EJERCICIO 1B. [2,5 puntos] a) 1 punto, b) 0,75 puntos, c) 0,75 puntos.

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} m & 1 \\ 0 & -m \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ con $m \in \mathbb{R}$

a) Calcular el valor de m para que se verifique la igualdad $A^2-A=B$.

b) Calcular m para que la matriz A+B-I tenga inversa siendo I la matriz unidad de orden 2.

c) Para m=2 obtener la inversa de la matriz A+B-I.

BLOQUE 2

EJERCICIO 2A. [2,5 puntos] a) 1 punto, b) 1 punto c) 0,5 puntos.

Dada la función $f(x)=(x-1)e^{-x}$ a) Determina los máximos y mínimos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(x). b) Determina la curvatura (concavidad y convexidad) y puntos de inflexión de f(x). c) Calcula la ecuación de la recta tangente a f(x) para x=1.

EJERCICIO 2B. [2,5 puntos] a) 1,25 puntos, b)1,25 puntos.

Dadas las funciones $f(x)=2$ y $g(x)=x^3+x^2-2x$

a) Calcular $\int \frac{f(x)}{g(x)}dx$ b) Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de g(x) y el eje X.

BLOQUE 3

EJERCICIO 3A. [2,5 puntos] a) 1 punto, b) 1 punto c) 0,5 puntos.

a) Comprobar que el plano π= x+y-z=3 y la recta $r \equiv \frac{x}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2}$ no se cortan.

b) Calcular la distancia entre el plano π y la recta r del apartado anterior.

c) Obtener la ecuación del plano perpendicular a la recta r y que pase por el punto (0,1,-1).

EJERCICIO 3B. [2,5 puntos] a) 1 punto, b) 0,5 puntos, c) 1 punto

Dados los puntos A(1,0,2), B(1,m,6), C(2,1,4) y D(4,3,2). Se pide:

a) Calcular m para que los 4 puntos sean coplanarios.

b) Obtener la ecuación general del plano ACD.

c) Para m=2, calcular un vector perpendicular al plano ABC de módulo 4 y calcular el área del triángulo ABC.

BLOQUE 4

EJERCICIO 4. [2,5 puntos] a) 1 punto, b) 1 punto c) 0,5 puntos

Se sabe que la altura de los estudiantes de segundo de bachillerato de una cierta población se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media 174 cm y desviación típica 12 cm.

a) Calcular el porcentaje de estudiantes cuya altura está entre 162 cm y 186 cm

b) ¿Qué altura tendrá un alumno si el 67% de los estudiantes miden más que él?

c) Si tomamos una muestra de 1000 estudiantes de esa población ¿cuántos tendrán una altura superior a 170 cm?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

BLOQUE 1

Ejercicio 1A

EJERCICIO 1A. [2,5 puntos] a) 1,5 puntos, b) 1 punto.

Considera el siguiente sistema de ecuaciones, donde $k \in$ R: $\begin{cases} x+ky+z=2+k \\ 2x-y-kz=1-k \\ x-y-z=-1 \end{cases}$

a) Discutir el sistema en función del parámetro k.
b) Resolver para el caso k=1.

Solución:

a) El sistema tiene como matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 2 & -1 & -k \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y como matriz ampliada

$A/B=\begin{pmatrix} 1 & k & 1 & 2+k \\ 2 & -1 & -k & 1-k \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ 2 & -1 & -k \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=1-k^2-2+1+2k-k=-k^2+k$$

$$|A|=0 \Rightarrow -k^2+k=0 \Rightarrow k(-k+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{k=0} \\ \boxed{k=1} \end{cases}$$

Analizamos los tres casos diferentes que se nos plantean.

CASO 1. $k \neq 0$ y $k \neq 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $k=0$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. Analizamos los rangos de A y A/B.

La matriz ampliada queda $A/B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Triangulamos la matriz.

$$A/B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 2ª} - 2 \cdot \text{Fila 1ª} \\ \begin{array}{cccc} 2 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -2 & -4 \\ \hline 0 & -1 & -2 & -3 \end{array} \to \text{Nueva Fila 2ª} \end{array} \right\}$$

$$\left\{\begin{array}{llll} \text{Fila } 3^{a} - \text{Fila } 1^{a} & & & \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \\ \hline 0 & -1 & -2 & -3 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^{a} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{llll} \text{Fila } 3^{a} - \text{Fila } 2^{a} & & & \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^{a} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{matrix} \end{matrix}}^{A/B} \end{pmatrix}$$

El rango de A y el de A/B son iguales a 2 y menores que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

CASO 3. $k=1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. Analizamos los rangos de A y A/B.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Triangulamos el sistema.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{llll} \text{Fila } 2^{a} - 2 \cdot \text{Fila } 1^{a} & & & \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & -6 \\ \hline 0 & -3 & -3 & -6 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^{a} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{llll} \text{Fila } 3^{a} - \text{Fila } 1^{a} & & & \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -3 \\ \hline 0 & -2 & -2 & -4 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^{a} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{llll} 3 \cdot \text{Fila } 3^{a} - 2 \cdot \text{Fila } 2^{a} & & & \\ 0 & -6 & -6 & -12 \\ 0 & 6 & 6 & 12 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^{a} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 3 \\ -6 \\ 0 \end{matrix} \end{matrix}}^{A/B} \end{pmatrix}$$

El rango de A y el de A/B es 2, son iguales, pero menores que el número de incógnitas. El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Resumiendo: Si $k \neq 0$ y $k \neq 1$ el sistema es compatible determinado (una única solución), si $k=0$ o $k=1$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b) Para $k=1$ hemos visto que el sistema es compatible indeterminado. Obtenemos la expresión de esas infinitas soluciones partiendo del sistema triangular equivalente obtenido en el apartado anterior.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \overbrace{\underbrace{\begin{matrix}1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0\end{matrix}}_{A}\begin{matrix}3 \\ -6 \\ 0\end{matrix}}^{A/B} \end{array}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=3 \\ -3y-3z=-6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=3 \\ y+z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=3 \\ \boxed{z=2-y} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+y+2-y=3 \Rightarrow \boxed{x=1} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=1 \\ y=\alpha & ; \alpha \in \mathbb{R} \\ z=2-\alpha \end{cases}}$$

Para $k=1$ las soluciones del sistema son $\begin{cases} x=1 \\ y=\alpha & ; \alpha \in \mathbb{R} \\ z=2-\alpha \end{cases}$.

BLOQUE 2

Ejercicio 1B

EJERCICIO 1B. [2,5 puntos] a) 1 punto, b) 0,75 puntos, c) 0,75 puntos.

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} m & 1 \\ 0 & -m \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ con $m \in R$

a) Calcular el valor de m para que se verifique la igualdad A^2 -A=B.
b) Calcular m para que la matriz A+B-I tenga inversa siendo I la matriz unidad de orden 2.
c) Para m=2 obtener la inversa de la matriz A+B-I.

Solución:

a) Resolvemos la ecuación matricial planteada.

$$A^2-A=B \Rightarrow \begin{pmatrix} m & 1 \\ 0 & -m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & 1 \\ 0 & -m \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} m & 1 \\ 0 & -m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} m^2+0 & m-m \\ 0+0 & 0+m^2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} m & 1 \\ 0 & -m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} m^2 & 0 \\ 0 & m^2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} m & 1 \\ 0 & -m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} m^2-m & -1 \\ 0 & m^2+m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m^2-m=0 \to m(m-1)=0 \to \begin{cases} m=0 \\ m-1=0 \to \boxed{m=1} \end{cases} \\ m^2+m=2 \to m^2+m-2=0 \to m=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2+8}}{2}=\dfrac{-1\pm 3}{2}=\begin{cases} \dfrac{-1+3}{2}=\boxed{1=m} \\ \dfrac{-1-3}{2}=-2=m \end{cases} \end{cases}$$

Para que se cumplan las dos igualdades debe ser $m=1$.
Se cumple la igualdad $A^2-A=B$ para $m=1$.

b) Para que la matriz $A+B-I$ tenga inversa su determinante debe ser distinto de cero.
Determinamos la expresión de $A+B-I$.

$$A+B-I=\begin{pmatrix} m & 1 \\ 0 & -m \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} m-1 & 0 \\ 0 & -m+1 \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante y averiguamos cuando se anula.

$$|A+B-I|=\begin{vmatrix} m-1 & 0 \\ 0 & -m+1 \end{vmatrix}=(m-1)(-m+1)$$

$$|A+B-I|=0 \Rightarrow (m-1)(-m+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} m-1=0 \to m=1 \\ -m+1=0 \to \boxed{m=1} \end{cases}$$

La matriz $A+B-I$ tiene inversa para cualquier valor de m distinto de 1.

c) Para $m=2$ la matriz queda $A+B-I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Tiene inversa. La calculamos.

$$|A+B-I|=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=-1\neq 0$$

$$(A+B-I)^{-1}=\frac{Adj\left((A+B-I)^{T}\right)}{|(A+B-I)|}=\frac{Adj\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}{-1}=-\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=A+B-I$$

Ejercicio 2A

EJERCICIO 2A. [2,5 puntos] a) 1 punto, b) 1 punto c) 0,5 puntos.

Dada la función $f(x)=(x-1)e^{-x}$

a) Determina los máximos y mínimos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f(x)*.

b) Determina la curvatura (concavidad y convexidad) y puntos de inflexión de *f(x)*.

c) Calcula la ecuación de la recta tangente a *f(x)* para $x=1$.

Solución:

a) Buscamos los valores que anulan la derivada de la función.

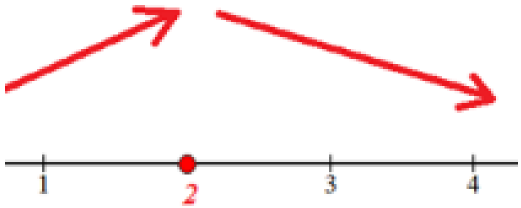
$$f(x)=(x-1)e^{-x} \Rightarrow f'(x)=1\cdot e^{-x}+(x-1)\cdot(-1)e^{-x}=(1-x+1)e^{-x}=(2-x)e^{-x}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow (2-x)e^{-x}=0 \Rightarrow \{e^{-x}\neq 0\} \Rightarrow 2-x=0 \Rightarrow \boxed{x=2}$$

Estudiamos como cambia el signo de la derivada antes y después de $x = 2$.

- En el intervalo $(-\infty,2)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0)=(2-0)e^{-0}=2>0$. La función crece en $(-\infty,2)$.
- En el intervalo $(2,+\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $f'(3)=(2-3)e^{-3}=-e^{-3}<0$. La función decrece en $(2,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:



La función crece en $(-\infty,2)$ y decrece en $(2,+\infty)$.

La función presenta un máximo relativo en $x = 2$.

Como $f(2)=(2-1)\cdot e^{-2}=\frac{1}{e^2}$ el máximo relativo tiene coordenadas $\left(2,\frac{1}{e^2}\right)$.

b) Para estudiar la curvatura averiguamos cuando se anula la derivada segunda.

$$f'(x)=(2-x)e^{-x} \Rightarrow f''(x)=(-1)e^{-x}+(2-x)(-1)e^{-x}=(-1-2+x)e^{-x}=(x-3)e^{-x}$$

$$f''(x)=0 \Rightarrow (x-3)e^{-x}=0 \Rightarrow \{e^{-x}\neq 0\} \Rightarrow x-3=0 \Rightarrow \boxed{x=3}$$

Estudiamos como cambia el signo de la derivada segunda antes y después de $x = 3$.

- En el intervalo $(-\infty,3)$ tomamos $x = 0$ y la derivada segunda vale $f''(0)=(0-3)e^{-0}=-3<0$. La función es cóncava (∩) en $(-\infty,3)$.

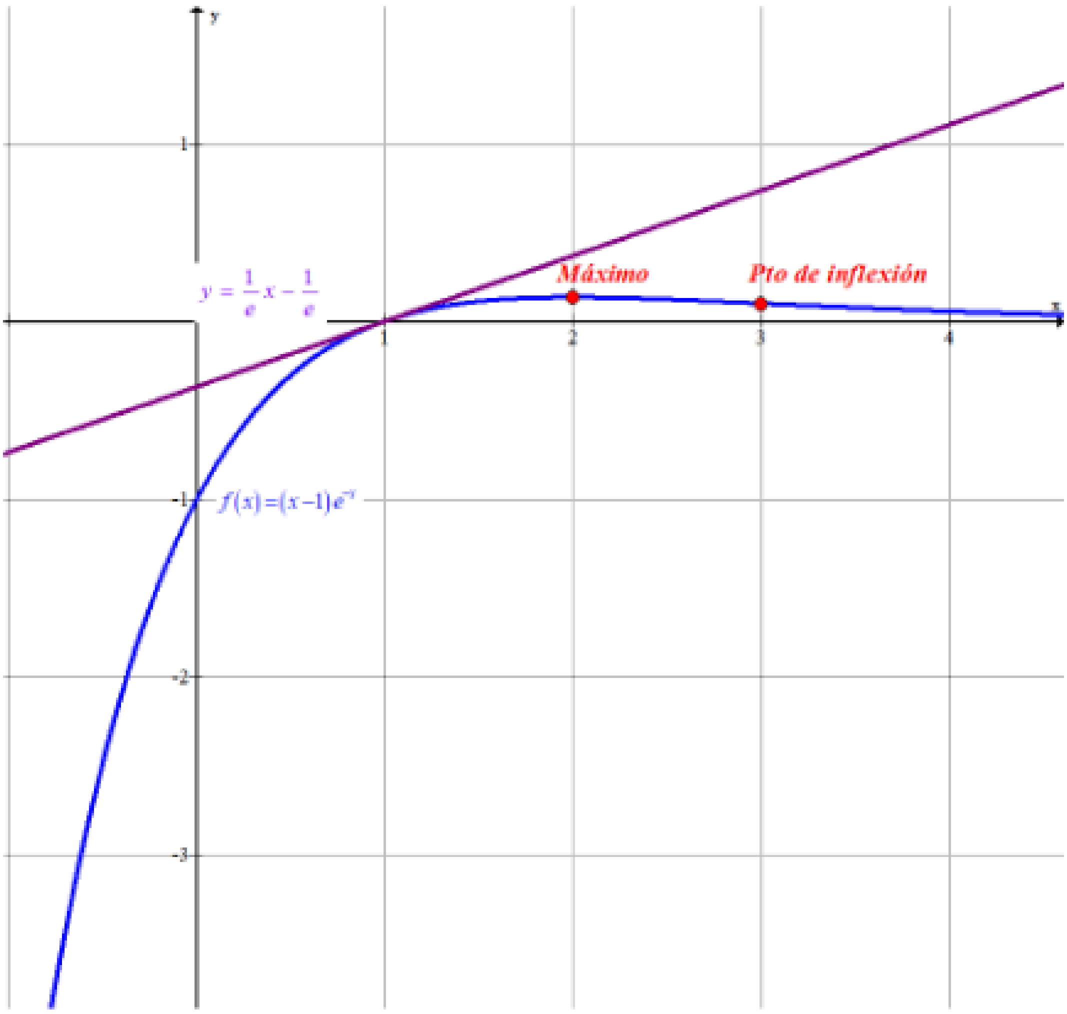
- En el intervalo $(3,+\infty)$ tomamos $x = 4$ y la derivada segunda vale $f''(4)=(4-3)e^{-3}=e^{-3}>0$. La función es convexa (∪) en $(3,+\infty)$.

La función presenta un punto de inflexión en $x = 3$. Para dicho valor tenemos que $f(3)=(3-1)e^{-3}=\frac{2}{e^3}$ por lo que el punto de inflexión tiene coordenadas $\left(3,\frac{2}{e^3}\right)$.

c) La ecuación de la recta tangente es $y-f(1)=f'(1)(x-1)$.

$$\left.\begin{array}{l} y-f(1)=f'(1)(x-1) \\ f(1)=(1-1)e^{-1}=0 \\ f'(1)=(2-1)e^{-1}=\frac{1}{e} \end{array}\right\} \Rightarrow y-0=\frac{1}{e}(x-1) \Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{e}x-\frac{1}{e}}$$

La ecuación de la recta tangente a *f(x)* para $x=1$ es $y=\frac{1}{e}x-\frac{1}{e}$.



Ejercicio 2B

EJERCICIO 2B. [2,5 puntos] a) 1,25 puntos, b)1,25 puntos.
Dadas las funciones $f(x)=2$ y $g(x)=x^3+x^2-2x$

a) Calcular $\int \frac{f(x)}{g(x)}dx$ b) Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de g(x) y el eje X.

Solución:

a) Calculamos la integral pedida.

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}dx = \int \frac{2}{x^3+x^2-2x}dx = \ldots$$

Descomposición en fracciones simples

$$x^3+x^2-2x = x(x^2+x-2) = \ldots = x(x-1)(x+2)$$

$$\boxed{x^2+x-2=0 \Rightarrow x = \frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(-2)}}{2} = \frac{-1\pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = 1 = x \\ \frac{-1-3}{2} = -2 = x \end{cases}}$$

$$\frac{2}{x^3+x^2-2x} = \frac{2}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2} = \frac{A(x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-1)}{x(x-1)(x+2)}$$

$$2 = A(x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-1) \Rightarrow \begin{cases} x=0 \to 2=-2A \to A=-1 \\ x=1 \to 2=3B \to B=\frac{2}{3} \\ x=-2 \to 2=-6C \to C=\frac{-1}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{x^3+x^2-2x} = \frac{-1}{x}+\frac{2/3}{x-1}+\frac{-1/3}{x+2}$$

$$\ldots = \int \frac{-1}{x}+\frac{2/3}{x-1}+\frac{-1/3}{x+2}dx = \int \frac{-1}{x}dx + \int \frac{2/3}{x-1}dx + \int \frac{-1/3}{x+2}dx =$$

$$= \boxed{-\ln x + \frac{2}{3}\ln(x-1) - \frac{1}{3}\ln(x+2) + C}$$

b) Hallamos los posibles puntos de corte de la gráfica de *g(x)* y el eje X.

$$\left.\begin{matrix} g(x) = x^3+x^2-2x \\ Eje\ X \to y=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x^3+x^2-2x=0 \Rightarrow x(x-1)(x+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=0} \\ \boxed{x=1} \\ \boxed{x=-2} \end{cases}$$

La región de la cual queremos hallar el área la dividimos en dos partes y su área la obtenemos como el valor absoluto de la integral definida entre –2 y 0 de la función más el valor absoluto de la integral definida entre 0 y 1 de la función.

$$\int_{-2}^{0} g(x)\,dx = \int_{-2}^{0} x^3 + x^2 - 2x\,dx = \left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{-2}^{0} =$$

$$= \left[\frac{0^4}{4}+\frac{0^3}{3}-0^2\right] - \left[\frac{(-2)^4}{4}+\frac{(-2)^3}{3}-(-2)^2\right] = 0 - \left[4-\frac{8}{3}-4\right] = \boxed{\frac{8}{3} \simeq 2.6667}$$

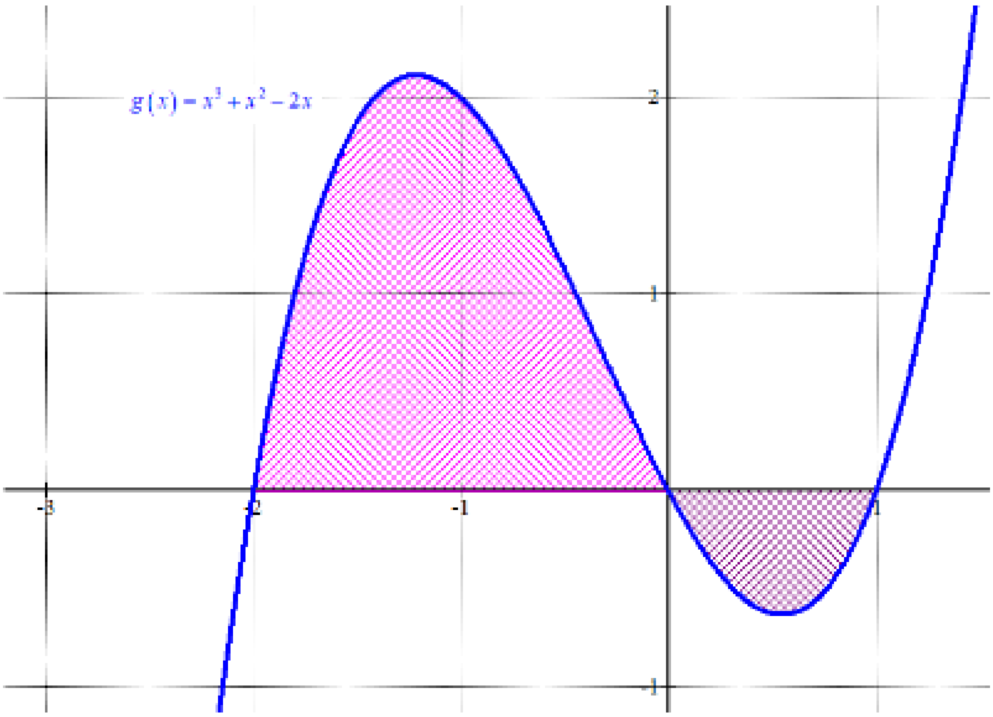
El área del primer trozo de la región tiene un valor de $\frac{8}{3}$ unidades cuadradas.

$$\int_{0}^{1} g(x)\,dx = \int_{0}^{1} x^3 + x^2 - 2x\,dx = \left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{0}^{1} =$$

$$= \left[\frac{1^4}{4}+\frac{1^3}{3}-1^2\right] - \left[\frac{0^4}{4}+\frac{0^3}{3}-0^2\right] = \frac{1}{4}+\frac{1}{3}-1 = \boxed{\frac{-5}{12} \simeq -0.4167}$$

El área del segundo trozo de la región tiene un valor de $\frac{5}{12}$ unidades cuadradas.

El área del recinto limitado por la gráfica de *g(x)* y el eje X tiene un valor de $\frac{8}{3}+\frac{5}{12}=\frac{37}{12} \simeq 3.083$ unidades cuadradas.



BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3

Ejercicio 3A

EJERCICIO 3A. [2,5 puntos] a) 1 punto, b) 1 punto c) 0,5 puntos.

a) Comprobar que el plano π= x+y-z=3 y la recta $r \equiv \frac{x}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2}$ no se cortan.

b) Calcular la distancia entre el plano π y la recta r del apartado anterior.

c) Obtener la ecuación del plano perpendicular a la recta r y que pase por el punto (0,1,-1).

Solución:

a) Obtenemos un punto y un vector director de la recta.

$$r \equiv \frac{x-0}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2} \Rightarrow \begin{cases} P_r(0,1,-1) \\ \vec{v_r} = (3,-1,2) \end{cases}$$

Obtenemos el vector normal del plano.

$$\pi \equiv x+y-z=3 \Rightarrow \vec{n} = (1,1,-1)$$

Para que la recta sea paralela al plano deben ser perpendiculares el vector director de la recta y el vector normal del plano. Para que esto se cumpla debe ser su producto escalar nulo.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n} = (1,1,-1) \\ \vec{v_r} = (3,-1,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{v_r} = (1,1,-1)(3,-1,2) = 3-1-2 = 0$$

Como vector director de recta y normal del plano tienen producto escalar nulo el plano y la recta son paralelos o la recta está contenida en el plano. Comprobamos si el punto $P_r(0,1,-1)$ de la recta pertenece al plano.

$$\left.\begin{array}{l} P_r(0,1,-1) \\ \pi \equiv x+y-z=3 \\ ¿P_r \in \pi? \end{array}\right\} \Rightarrow ¿0+1-(-1)=3? \Rightarrow \text{No se cumple}$$

El punto de la recta no pertenece al plano y la recta es paralela al plano.
La recta y el plano no se cortan en ningún punto.

b) Como la recta es paralela al plano la distancia de la recta al plano es la distancia de cualquiera de sus puntos al plano.

$$\left.\begin{array}{l} P_r(0,1,-1) \in r \\ \pi \equiv x+y-z-3=0 \end{array}\right\} \Rightarrow d(r,\pi) = d(P_r,\pi) = \frac{|0+1+1-3|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ unidades}}$$

c) El plano π´ perpendicular a la recta *r* y que pase por el punto (0,1,-1) tiene como vector normal el vector director de la recta $\vec{v_r} = (3,-1,2)$.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n'} = \vec{v_r} = (3,-1,2) \\ (0,1,-1) \in \pi' \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \pi': 3x-y+2z+D=0 \\ (0,1,-1) \in \pi' \end{array}\right\} \Rightarrow 3\cdot 0 - 1 + 2(-1) + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1-2+D=0 \to D=3 \Rightarrow \boxed{\pi': 3x-y+2z+3=0}$$

El plano π´ perpendicular a la recta *r* y que pasa por el punto (0,1,-1) tiene ecuación implícita $\pi': 3x-y+2z+3=0$.

Ejercicio 3B

EJERCICIO 3B. [2,5 puntos] a) 1 punto, b) 0,5 puntos, c) 1 punto

Dados los puntos A(1,0,2), B(1,m,6), C(2,1,4) y D(4,3,2). Se pide:

a) Calcular m para que los 4 puntos sean coplanarios.

b) Obtener la ecuación general del plano ACD.

c) Para m=2, calcular un vector perpendicular al plano ABC de módulo 4 y calcular el área del triángulo ABC.

Solución:

a) Hallamos el plano π que contiene los puntos A, C y D.

$$\left.\begin{array}{l} A(1,0,2)\in\pi \\ C(2,1,4)\in\pi \\ D(4,3,2)\in\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \vec{u}=\overline{AC}=(2,1,4)-(1,0,2)=(1,1,2) \\ \vec{v}=\overline{AD}=(4,3,2)-(1,0,2)=(3,3,0) \\ A(1,0,2)\in\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0+6y+\cancel{3(z-2)}-\cancel{3(z-2)}+0-6(x-1)=0\Rightarrow 6y-6x+6=0\Rightarrow \boxed{\pi: x-y-1=0}$$

Para que los cuatro puntos estén en el mismo plano el punto B debe pertenecer al plano π definido por los puntos A, C y D..

$$\left.\begin{array}{l} \pi: x-y-1=0 \\ B(1,m,6)\in\pi \end{array}\right\} \Rightarrow 1-m-1=0\Rightarrow \boxed{m=0}$$

Para $m=0$.los puntos A, B, C y D son coplanarios.

b) La hemos obtenido en el apartado anterior y es $\pi: x-y-1=0$.

c) Para $m=2$ los puntos tienen coordenadas A(1,0,2), B(1,2,6), C(2,1,4) .
Un vector perpendicular al plano ABC es el vector normal del plano ABC. Este vector lo podemos obtener con el producto vectorial $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$.

$$\left.\begin{array}{l} A(1,0,2) \\ B(1,2,6) \\ C(2,1,4) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \overline{AB}=(1,2,6)-(1,0,2)=(0,2,4) \\ \overline{AC}=(2,1,4)-(1,0,2)=(1,1,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=$$

$$=4i+4j-2k-4i=4j-2k=(0,4,-2)$$

Hemos obtenido un vector perpendicular al plano ABC que es $\overline{AB}\times\overline{AC}=(0,4,-2)$.

También cumplen dicha propiedad todos los vectores $\vec{v}$ con coordenadas proporcionales a este: $\vec{v}=a\left(\overline{AB}\times\overline{AC}\right)=(0,4a,-2a)$.

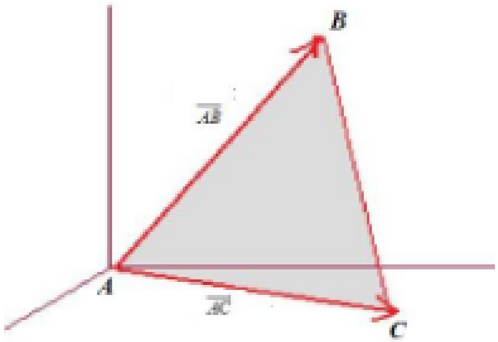
Hacemos que su módulo valga 4.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v}=(0,4a,-2a) \\ |\vec{v}|=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{0^2+(4a)^2+(-2a)^2}=4\Rightarrow\sqrt{16a^2+4a^2}=4\Rightarrow\sqrt{20a^2}=4\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{20}\cdot a = 4 \Rightarrow a = \frac{4}{\sqrt{20}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \vec{v} = \left(0, 4\frac{2\sqrt{5}}{5}, -2\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) = \left(0, \frac{8\sqrt{5}}{5}, \frac{-4\sqrt{5}}{5}\right)$$

El vector que buscamos es $\vec{v} = \left(0, \frac{8\sqrt{5}}{5}, \frac{-4\sqrt{5}}{5}\right)$.

Calculamos el área del triángulo ABC.
Utilizamos la fórmula del área de un triángulo definido por dos vectores.



$$\left.\begin{array}{l} \overline{AB} = (0,2,4) \\ \overline{AC} = (1,1,2) \\ \overline{AB}\times\overline{AC} = (0,4,-2) \end{array}\right\} \Rightarrow Área\ ABC = \frac{\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|}{2} = \frac{\sqrt{0^2+4^2+(-2)^2}}{2} = \frac{\sqrt{20}}{2} = \boxed{\sqrt{5}\ u^2}$$

El área del triángulo que forman A, B y C tiene un valor de $\sqrt{5}$ unidades cuadradas.

BLOQUE 4

Ejercicio 4

EJERCICIO 4. **[2,5 puntos] a) 1 punto, b) 1 punto c) 0,5 puntos**

Se sabe que la altura de los estudiantes de segundo de bachillerato de una cierta población se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media 174 cm y desviación típica 12 cm.

a) Calcular el porcentaje de estudiantes cuya altura está entre 162 cm y 186 cm

b) ¿Qué altura tendrá un alumno si el 67% de los estudiantes miden más que él?

c) Si tomamos una muestra de 1000 estudiantes de esa población ¿cuántos tendrán una altura superior a 170 cm?

Solución:

Sea X = altura en centímetros de los estudiantes de segundo de bachillerato de una cierta población. $X = N(174, 12)$

a) Calculamos $P(162 \le X \le 186)$.

$$P(162 \le X \le 186) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{162-174}{12} \le Z \le \frac{186-174}{12}\right) =$$

$$= P(-1 \le Z \le 1) = P(Z \le 1) - P(Z \le -1) = P(Z \le 1) - P(Z \ge 1) =$$

$$= P(Z \le 1) - [1 - P(Z \le 1)] = \left\{\begin{matrix}\text{Buscamos en la} \\ \text{tabla N(0,1)}\end{matrix}\right\} = 0.8413 - [1 - 0.8413] = \boxed{0.6826}$$

z	0,00	
0,0	0,5000	0,
0,1	0,5398	0,
0,2	0,5793	0,
0,3	0,6179	0,
0,4	0,6554	0,
0,5	0,6915	0,
0,6	0,7257	0,
0,7	0,7580	0,
0,8	0,7881	0,
0,9	0,8159	0,
1,0	0,8413	0,

b) Deseamos saber el valor de "a" para el que se cumple $P(X \ge a) = 0.67$.

$$P(X \ge a) = 0.67 \Rightarrow \{Tipificamos\} \Rightarrow P\left(Z \ge \frac{a-174}{12}\right) = 0.67 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{0.67 > 0.5 \to \frac{a-174}{12} < 0\right\} \Rightarrow P\left(Z \le -\frac{a-174}{12}\right) = 0.67 \Rightarrow \left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0,1)}\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{a-174}{12} = 0.44 \Rightarrow -a + 174 = 5.28 \Rightarrow \boxed{a = 174 - 5.28 = 168.72}$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	$\boxed{0,6700}$

El alumno mide 168.72 centímetros de altura.

c) Hallamos la probabilidad de que un alumno tenga una altura superior a 170 centímetros.

$$P(X>170)=\{Tipificamos\}\Rightarrow P\left(Z>\frac{170-174}{12}\right)=P(Z>-0.33)=$$

$$=P(Z\leq 0.33)=\left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla N(0,1)}\end{matrix}\right\}=\boxed{0.6293}$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	$\boxed{0,6293}$	0,6

De una muestra de 1000 alumnos podemos encontrar 1000 · 0.6293 = 629 alumnos que midan más de 170 centímetros.

	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2024–2025** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar).

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

BLOQUE OBLIGATORIO

Ejercicio 1:

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1

Ejercicio 2:

Ejercicio 3:

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2

Ejercicio 4:

Ejercicio 5:

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3

Ejercicio 6:

Ejercicio 7

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

BLOQUE OBLIGATORIO

Ejercicio 1:

Solución:

L

El

El

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1

Ejercicio 2:

Solución:

2

Ejercicio 3:

Solución:

f

C

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2

Ejercicio 4:

Solución:

El

Ejercicio 5:

Solución:

X

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3

Ejercicio 6:

Solución:

si

Ejercicio 7

Solución: