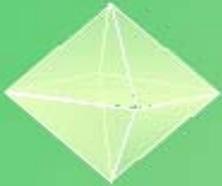
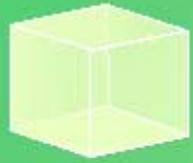


MATEMÁTICAS II

Selectividad 2025

Comunidad autónoma de

CANTABRIA



www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Juan Antonio Martínez García



INDICACIONES

- Para obtener la máxima calificación, debe responder a una tarea de cada apartado/bloque.
- En aquellos apartados/bloques en los que se ofrece la posibilidad de elegir entre varias tareas, debe responder solo a una de las opciones. Si realiza más de una opción, se corregirá la primera de ellas, según el orden en que aparecen resueltas en el cuadernillo de examen.
- Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
- Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada apartado.
- No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a Internet.

Problema 1:

APARTADO 1 (Bloque A+D) [2,5 PUNTOS]

Resuelva una de las siguientes cuestiones (1A o 1B):

1A) Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

1A.a) [1 PUNTO] Razone si A tiene inversa. En caso afirmativo, calcúlela.

1A.b) [0,5 PUNTOS] Calcule $C - 3B$.

1A.c) [1 PUNTO] Resuelve la ecuación $AX + 3B = C$.

Problema 2:

1B) Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - 3y + z = 2 \\ -2x + 2z = 0 \\ -x - 3y + 3z = a \end{cases}$$

dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

Determine si este sistema es incompatible, compatible determinado o compatible indeterminado en el caso en que:

1B.a) [1,25 PUNTOS] $a = 2$. Resuélvalo si es compatible.

1B.b) [1,25 PUNTOS] $a = 8$. Resuélvalo si es compatible.

Problema 3:

APARTADO 2 (Bloque B) [2,5 PUNTOS]

Resuelva una de las siguientes cuestiones (2A o 2B):

2A) Considere la siguiente función definida a trozos

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 6x^2 + 9x, & \text{si } x \leq 3 \\ \ln(x^2 - 9), & \text{si } x > 3, \end{cases}$$

donde \ln denota al logaritmo neperiano.

2A.a) [0,5 PUNTOS] Determine el dominio de definición de $f(x)$.

2A.b) [0,75 PUNTOS] Determine los intervalos de continuidad de $f(x)$.

2A.c) [0,5 PUNTOS] Halle los puntos de corte de $f(x)$ con el eje OX de abscisas.

2A.d) [0,75 PUNTOS] Calcule la(s) asíntota(s) de $f(x)$ y diga de que tipo(s) es(son), si la(s) tiene.

Problema 4:

2B) Considere la función $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$.

2B.a) [0,5 PUNTOS] Determine la parte del dominio de definición de $f(x)$ en que es decreciente.

2B.b) [1 PUNTO] Determine la parte del dominio de definición de $f(x)$ en que es cóncava.

2B.c) [1 PUNTO] Determine los puntos de inflexión de $f(x)$.

Problema 5:**APARTADO 3 (Bloque C) [2,5 PUNTOS]**

Considere el punto $P = (1, 5, 0)$ y la recta $r : \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 2x - z - 1 = 0 \end{cases}$

3.a) [0,75 PUNTOS] Obtenga la ecuación de la recta paralela a r que pase por el punto P .

3.b) [1,25 PUNTOS] Considere un punto P' en r y un vector dirección de r . Calcule el área del paralelogramo determinado por $\vec{P}'P$ y el vector dirección de r elegido.

3.c) [0,5 PUNTOS] Calcule la distancia entre P y r .

Problema 6:**APARTADO 4 (Bloque E) [2,5 PUNTOS]**

Resuelva una de las siguientes cuestiones (4A o 4B):

4A) Determinada enfermedad es curable si se trata antes de que aparezcan sus síntomas. Para poder tratar a los pacientes a tiempo, se pasa un test a la mayor parte de la población. El 1,5% de la población sufre esta enfermedad. La probabilidad de que, no sufriendo la enfermedad, el test de positivo es 0,021 y la de que si estas enfermo de negativo también es 0,021.

4A.a) [0,5 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de no sufrir la enfermedad?

4A.b) [0,75 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que el test de positivo si la persona está enferma?

4A.c) [1,25 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que la persona esté enferma si el test ha dado positivo?

Problema 7:

4B) Sean A y B dos sucesos asociados a un experimento aleatorio tales que $P(A) = 0,8$, $P(B) = 0,5$ y $P(A \cup B) = 1$.

4B.a) [0,5 PUNTOS] Calcule la $P(A \cap B)$.

4B.b) [0,75 PUNTOS] Razone si A y B son independientes.

4B.c) [0,5 PUNTOS] Calcule la $P(B^c)$, con B^c el suceso contrario a B .

4B.d) [0,75 PUNTOS] Calcule la $P(A^c \cap B^c)$, con A^c el suceso contrario a A .

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

APARTADO 1 (Bloque A+D) [2,5 PUNTOS]

Resuelva una de las siguientes cuestiones (1A o 1B):

1A) Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

1A.a) [1 PUNTO] Razone si A tiene inversa. En caso afirmativo, calcúlela.

1A.b) [0,5 PUNTOS] Calcule $C - 3B$.

1A.c) [1 PUNTO] Resuelva la ecuación $AX + 3B = C$.

Solución:

1A.a) Para que la matriz tenga inversa su determinante no debe ser nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 - 1 + 2 - 0 - 0 = 1 \neq 0$$

El determinante de A es distinto de cero y esta matriz tiene inversa. La calculamos.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1A.b) Calculamos la matriz $C - 3B$.

$$C - 3B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-6 & 0+6 & 2-0 \\ -1-0 & 2+3 & 1-6 \\ 0-3 & -2+3 & -1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 6 & 2 \\ -1 & 5 & -5 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1A.c) Despejamos X de la ecuación matricial.

$$AX + 3B = C \Rightarrow AX = C - 3B \Rightarrow X = A^{-1}(C - 3B)$$

Determinamos la expresión de la matriz X .

$$X = A^{-1}(C - 3B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 & 6 & 2 \\ -1 & 5 & -5 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-3 & 5+1 & -5+2 \\ -2-3 & 10+1 & -10+2 \\ 9+1 & -6-5 & -2+5 \end{pmatrix}$$

$$\text{La matriz } X \text{ tiene la expresión } X = \begin{pmatrix} -4 & 6 & -3 \\ -5 & 11 & -8 \\ 10 & -11 & 3 \end{pmatrix}.$$

Problema 2:

1B) Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - 3y + z = 2 \\ -2x + 2z = 0 \\ -x - 3y + 3z = a \end{cases}$$

dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

Determine si este sistema es incompatible, compatible determinado o compatible indeterminado en el caso en que:

1B.a) [1,25 PUNTOS] $a = 2$. Resuélvalo si es compatible.

1B.b) [1,25 PUNTOS] $a = 8$. Resuélvalo si es compatible.

Solución:

1B.a) Para $a = 2$ el sistema queda $\begin{cases} x - 3y + z = 2 \\ -2x + 2z = 0 \\ -x - 3y + 3z = 2 \end{cases}$.

Este sistema tiene como matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ y como matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Utilizamos el método de Gauss para transformar la matriz ampliada y obtener un sistema triangular equivalente.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 1^a \\ -1 \quad -3 \quad 3 \quad 2 \\ \hline 1 \quad -3 \quad 1 \quad 2 \\ 0 \quad -6 \quad 4 \quad 4 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a + 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ -2 \quad 0 \quad 2 \quad 0 \\ \hline 2 \quad -6 \quad 2 \quad 4 \\ 0 \quad -6 \quad 4 \quad 4 \rightarrow \text{Nueva fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & 4 & 4 \\ 0 & -6 & 4 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad -6 \quad 4 \quad 4 \\ \hline 0 \quad 6 \quad -4 \quad -4 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad -3 \quad 1 \quad 2}^{A/B} \\ 0 \quad -6 \quad 4 \quad 4 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}_A \end{pmatrix}$$

Los rangos de la matriz A y de A/B son iguales a 2, menor que el número de incógnitas

(3). El sistema es compatible indeterminado.

Lo resolvemos partiendo del sistema equivalente obtenido.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \overbrace{1 \ -3 \ 1 \ 2}^{A/B} \\ 0 \ -6 \ 4 \ 4 \\ \underbrace{0 \ 0 \ 0 \ 0}_A \end{array} \right) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x-3y+z=2 \\ -6y+4z=4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x-3y+z=2 \\ -3y+2z=2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x-3y+z=2 \\ -3y=2-2z \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+2-2z+z=2 \Rightarrow x-z=0 \Rightarrow x=z \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=\alpha \\ -3y=2-2\alpha \rightarrow y=-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\alpha \\ z=\alpha \end{cases}}$$

Para $a=2$ las soluciones del sistema son $x=\alpha$; $y=-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\alpha$; $z=\alpha$ para cualquier valor $\alpha \in \mathbb{R}$.

1B.b) Para $a=8$ el sistema queda
$$\begin{cases} x-3y+z=2 \\ -2x+2z=0 \\ -x-3y+3z=8 \end{cases}$$

Este sistema tiene como matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ y como matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

Utilizamos el método de Gauss para transformar la matriz ampliada y obtener un sistema triangular equivalente.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 3 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 1^a \\ -1 \ -3 \ 3 \ 8 \\ \hline 1 \ -3 \ 1 \ 2 \\ 0 \ -6 \ 4 \ 10 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a + 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ -2 \ 0 \ 2 \ 0 \\ \hline 2 \ -6 \ 2 \ 4 \\ 0 \ -6 \ 4 \ 4 \rightarrow \text{Nueva fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & 4 & 4 \\ 0 & -6 & 4 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \ -6 \ 4 \ 10 \\ \hline 0 \ 6 \ -4 \ -4 \\ 0 \ 0 \ 0 \ 6 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \overbrace{1 \ -3 \ 1 \ 2}^{A/B} \\ 0 \ -6 \ 4 \ 4 \\ \underbrace{0 \ 0 \ 0 \ 6}_A \end{array} \right)$$

El rango de la matriz A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema es incompatible (sin solución).

Problema 3:**APARTADO 2 (Bloque B) [2,5 PUNTOS]**

Resuelva una de las siguientes cuestiones (2A o 2B):

2A) Considere la siguiente función definida a trozos

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 6x^2 + 9x, & \text{si } x \leq 3 \\ \ln(x^2 - 9), & \text{si } x > 3, \end{cases}$$

donde \ln denota al logaritmo neperiano.

2A.a) [0,5 PUNTOS] Determine el dominio de definición de $f(x)$.

2A.b) [0,75 PUNTOS] Determine los intervalos de continuidad de $f(x)$.

2A.c) [0,5 PUNTOS] Halle los puntos de corte de $f(x)$ con el eje OX de abscisas.

2A.d) [0,75 PUNTOS] Calcule la(s) asíntota(s) de $f(x)$ y diga de que tipo(s) es(son), si la(s) tiene.

Solución:

2A.a) El único problema se puede plantear al calcular el logaritmo neperiano, pero si $x > 3$ entonces $x^2 - 9 > 9 - 9 = 0$ y el logaritmo neperiano $\ln(x^2 - 9)$ existe.

El dominio de la función es todo \mathbb{R} .

2A.b) En el intervalo $(-\infty, 3)$ la función es $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ que es una función polinómica y por tanto continua.

En el intervalo $(3, +\infty)$ la función es $f(x) = \ln(x^2 - 9)$ que es una función logarítmica que es continua pues $x^2 - 9 > 0$.

Comprobamos la continuidad en $x = 3$.

$$\left. \begin{array}{l} f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} x^3 - 6x^2 + 9x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \ln(x^2 - 9) = \ln(9 - 9) = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$$

La función no es continua en $x = 3$. La función es continua en $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$.

2A.c) Hallamos los puntos de corte.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 6x^2 + 9x & \text{si } x \leq 3 \\ \ln(x^2 - 9) & \text{si } x > 3 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^3 - 6x^2 + 9x = 0 \rightarrow x(x^2 - 6x + 9) = 0 \rightarrow \\ \rightarrow \boxed{x = 0} \in (-\infty, 3) \\ \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 - 6x + 9 = 0 \rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 36}}{2} = 3 \\ \ln(x^2 - 9) = 0 \rightarrow x^2 - 9 = 1 \rightarrow x^2 = 10 \rightarrow \\ \rightarrow \boxed{x = \sqrt{10}} \approx 3.16 \in (3, +\infty) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Los puntos de corte de $f(x)$ con el eje OX de abscisas son $(0, 0)$, $(3, 0)$ y $(\sqrt{10}, 0)$.

2A.d) **Asíntotas verticales.** $x = a$.

$x = 3$ es asíntota vertical por la derecha pues $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \ln(x^2 - 9) = \ln(9 - 9) = -\infty$.

Asíntota horizontal. $y = b$.

Buscamos en $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 6x^2 + 9x = -\infty$$

No existe asíntota horizontal cuando x tiende a $-\infty$.

Buscamos en $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 - 9) = +\infty$$

No existe asíntota horizontal cuando x tiende a $+\infty$.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 6x^2 + 9x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - 6x + 9 = +\infty \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 - 9)}{x} = \frac{\infty}{\infty} = \{L'H\acute{o}pital\} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2 - 9} = 0 \end{cases}$$

Como el valor obtenido es $+\infty$ y 0 la función no tiene asíntota oblicua.

Resumiendo: La función tiene una asíntota vertical por la derecha: $x = 3$ y no tiene ni asíntota horizontal ni oblicua.

Problema 4:

2B) Considere la función $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$.

2B.a) [0,5 PUNTOS] Determine la parte del dominio de definición de $f(x)$ en que es decreciente.

2B.b) [1 PUNTO] Determine la parte del dominio de definición de $f(x)$ en que es cóncava.

2B.c) [1 PUNTO] Determine los puntos de inflexión de $f(x)$.

Solución:

2B.a) El dominio de la función es todo \mathbb{R} , pues el denominador nunca se anula. Buscamos los puntos críticos de la función usando la derivada.

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2+1) - 2x \cdot x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow 1-x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{1} = \pm 1}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos puntos críticos: $x = -1$ y $x = 1$

- En el intervalo $(-\infty, -1)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale

$$f'(-2) = \frac{1-(-2)^2}{((-2)^2+1)^2} = \frac{-3}{25} < 0. \text{ La función decrece en } (-\infty, -1).$$

- En el intervalo $(-1, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = \frac{1-0^2}{(0^2+1)^2} = 1 > 0$. La función crece en $(-1, 1)$.

- En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = \frac{1-2^2}{(2^2+1)^2} = \frac{-3}{25} < 0$.

La función decrece en $(1, +\infty)$.

La función es decreciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

2B.b) Buscamos los valores que anulan la segunda derivada.

$$\begin{aligned} f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} &\Rightarrow f''(x) = \frac{-2x(x^2+1)^2 - 2(1+x^2)2x(1-x^2)}{(x^2+1)^4} = \\ &= \frac{-2x(x^2+1) - 4x(1-x^2)}{(x^2+1)^3} = \frac{-2x^3 - 2x - 4x + 4x^3}{(x^2+1)^3} = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2+1)^3} \end{aligned}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x^3 - 6x}{(x^2 + 1)^3} = 0 \Rightarrow 2x^3 - 6x = 0 \Rightarrow 2x(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la segunda derivada antes, entre y después de estos tres valores.

- En el intervalo $(-\infty, -\sqrt{3})$ tomamos $x = -2$ y la segunda derivada vale

$$f''(-2) = \frac{2(-2)^3 - 6(-2)}{((-2)^2 + 1)^3} = \frac{-4}{125} < 0. \text{ La función es cóncava } (\cap) \text{ en } (-\infty, -\sqrt{3}).$$

- En el intervalo $(-\sqrt{3}, 0)$ tomamos $x = -1$ y la segunda derivada vale

$$f''(-1) = \frac{2(-1)^3 - 6(-1)}{((-1)^2 + 1)^3} = \frac{4}{8} > 0. \text{ La función es convexa } (\cup) \text{ en } (-\sqrt{3}, 0).$$

- En el intervalo $(0, +\sqrt{3})$ tomamos $x = 1$ y la segunda derivada vale

$$f''(1) = \frac{2(1)^3 - 6(1)}{(1^2 + 1)^3} = \frac{-4}{8} < 0. \text{ La función es cóncava } (\cap) \text{ en } (0, +\sqrt{3}).$$

- En el intervalo $(+\sqrt{3}, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la segunda derivada vale

$$f''(2) = \frac{2(2)^3 - 6(2)}{(2^2 + 1)^3} = \frac{4}{125} > 0. \text{ La función es convexa } (\cup) \text{ en } (+\sqrt{3}, +\infty).$$

La función es cóncava en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, +\sqrt{3})$.

2B.c) La función cambia de concavidad a convexidad o viceversa en $x = 0$, $x = +\sqrt{3}$ y $x = -\sqrt{3}$.

$$f(-\sqrt{3}) = \frac{-\sqrt{3}}{(-\sqrt{3})^2 + 1} = \frac{-\sqrt{3}}{4} \rightarrow A\left(-\sqrt{3}, \frac{-\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$f(0) = \frac{0}{(0)^2 + 1} = 0 \rightarrow B(0, 0)$$

$$f(+\sqrt{3}) = \frac{+\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2 + 1} = \frac{+\sqrt{3}}{4} \rightarrow C\left(+\sqrt{3}, \frac{+\sqrt{3}}{4}\right)$$

Sus puntos de inflexión son $A\left(-\sqrt{3}, \frac{-\sqrt{3}}{4}\right)$, $B(0, 0)$ y $C\left(+\sqrt{3}, \frac{+\sqrt{3}}{4}\right)$.

Problema 5:**APARTADO 3 (Bloque C) [2,5 PUNTOS]**

Considere el punto $P = (1, 5, 0)$ y la recta $r : \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 2x - z - 1 = 0 \end{cases}$

3.a) [0,75 PUNTOS] Obtenga la ecuación de la recta paralela a r que pase por el punto P .

3.b) [1,25 PUNTOS] Considere un punto P' en r y un vector dirección de r . Calcule el área del paralelogramo determinado por $\overrightarrow{P'P}$ y el vector dirección de r elegido.

3.c) [0,5 PUNTOS] Calcule la distancia entre P y r .

Solución:

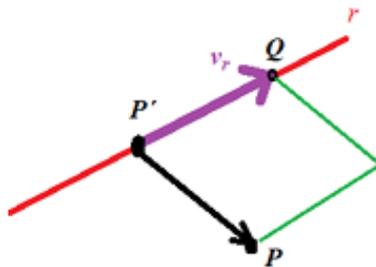
3.a) Hallamos un vector director y un punto de la recta r .

$$r : \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 2x - z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 - x \\ 2x - 1 = z \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} x = \alpha \\ y = 2 - \alpha \\ z = -1 + 2\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_r(0, 2, -1) \\ \vec{v}_r = (1, -1, 2) \end{cases}$$

La recta s paralela a r tiene como vector director el vector director de r .

$$\left. \begin{array}{l} P(1, 5, 0) \in s \\ \vec{u}_s = \vec{v}_r = (1, -1, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow s : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 5 - \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}$$

3.b) Dibujamos el paralelogramo.



Consideramos el punto $P' = P_r(0, 2, -1)$ y el vector director $\vec{v}_r = (1, -1, 2)$. Hallamos las coordenadas del punto Q sumando al punto P' el vector \vec{v}_r .

$$Q = P' + \vec{v}_r = (0, 2, -1) + (1, -1, 2) = (1, 1, 1)$$

El área del paralelogramo es el módulo del producto vectorial $\overrightarrow{P'P} \times \vec{v}_r$.

$$\overrightarrow{P'P} = (1, 5, 0) - (0, 2, -1) = (1, 3, 1)$$

$$\overrightarrow{P'P} \times \vec{v}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 6i + j - k - 3k - 2j + i = 7i - j - 4k = (7, -1, -4)$$

$$\text{Área} = |\overrightarrow{P'P} \times \vec{v}_r| = \sqrt{7^2 + (-1)^2 + (-4)^2} = \sqrt{66} \approx 8.124 \text{ u}^2$$

El área del paralelogramo tiene un valor de $\sqrt{66} = 8.124$ unidades cuadradas.

3.c) La distancia del punto P a la recta r es el valor del área del paralelogramo dividida por el módulo del vector \vec{v}_r (base del paralelogramo).

$$\vec{v}_r = (1, -1, 2) \Rightarrow |\vec{v}_r| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6}$$

$$d(P, r) = \frac{\text{Área paralelogramo}}{\text{base} = |\vec{v}_r|} = \frac{\sqrt{66}}{\sqrt{6}} = \sqrt{11} \approx 3.32 \text{ unidades}$$

Problema 6:**APARTADO 4 (Bloque E) [2,5 PUNTOS]**

Resuelva una de las siguientes cuestiones (4A o 4B):

4A) Determinada enfermedad es curable si se trata antes de que aparezcan sus síntomas. Para poder tratar a los pacientes a tiempo, se pasa un test a la mayor parte de la población. El 1,5% de la población sufre esta enfermedad. La probabilidad de que, no sufriendo la enfermedad, el test de positivo es 0,021 y la de que si estas enfermo de negativo también es 0,021.

4A.a) [0,5 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de no sufrir la enfermedad?

4A.b) [0,75 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que el test de positivo si la persona está enferma?

4A.c) [1,25 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que la persona esté enferma si el test ha dado positivo?

Solución:

Llamamos M al suceso “sufrir la enfermedad” y T a “el test da positivo”.

Tenemos que $P(M) = 0.015$, $P(T/\bar{M}) = 0.021$ y $P(\bar{T}/M) = 0.021$.

4A.a) Nos piden calcular $P(\bar{M})$. Como es el suceso contrario de sufrir la enfermedad

tenemos que $P(\bar{M}) = 1 - P(M) = 1 - 0.015 = 0.985$.

4A.b) Nos piden calcular $P(T/M)$. Como es el suceso contrario de dar negativo si tienes la

enfermedad tenemos que $P(T/M) = 1 - P(\bar{T}/M) = 1 - 0.021 = 0.979$.

4A.c) Nos piden calcular $P(M/T)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(M/T) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{P(M)P(T/M)}{P(M)P(T/M) + P(\bar{M})P(T/\bar{M})} =$$

$$= \frac{0.015 \cdot 0.979}{0.015 \cdot 0.979 + 0.985 \cdot 0.021} = \boxed{\frac{979}{2358} \approx 0.415}$$

La probabilidad de que la persona esté enferma si el test ha dado positivo tiene un valor aproximado de 0.415.

Problema 7:

4B) Sean A y B dos sucesos asociados a un experimento aleatorio tales que $P(A) = 0,8$, $P(B) = 0,5$ y $P(A \cup B) = 1$.

4B.a) [0,5 PUNTOS] Calcule la $P(A \cap B)$.

4B.b) [0,75 PUNTOS] Razone si A y B son independientes.

4B.c) [0,5 PUNTOS] Calcule la $P(B^c)$, con B^c el suceso contrario a B .

4B.d) [0,75 PUNTOS] Calcule la $P(A^c \cap B^c)$, con A^c el suceso contrario a A .

Solución:

4B.a) Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cup B) = 1 \\ P(A) = 0.8 \\ P(B) = 0.5 \\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{array} \right\} \Rightarrow 1 = 0.8 + 0.5 - P(A \cap B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{P(A \cap B) = 1.3 - 1 = 0.3}$$

Hemos obtenido que $P(A \cap B) = 0.3$.

4B.b) Para que A y B sean independientes debe cumplirse que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.
Averiguamos si se cumple la igualdad o no.

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cap B) = 0.3 \\ P(A)P(B) = 0.8 \cdot 0.5 = 0.4 \end{array} \right\} \Rightarrow P(A \cap B) = 0.3 \neq 0.4 = P(A)P(B)$$

No se cumple la igualdad y los sucesos A y B no son independientes.

4B.c) $P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - 0.5 = 0.5$

4B.d) Utilizamos las leyes de Morgan.

$$P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 1 = \boxed{0}$$

	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: 2024 – 2025 MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA
<p align="center">INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN</p> <p>En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar).</p> <p>Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.</p> <p><u>Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos.</u></p>		
<p align="center">CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA</p> <p align="center"><i>BLOQUE OBLIGATORIO</i></p> <p><i>Ejercicio 1:</i></p> <p align="center"><i>BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1</i></p> <p><i>Ejercicio 2:</i></p> <p><i>Ejercicio 3:</i></p> <p align="center"><i>BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2</i></p> <p><i>Ejercicio 4:</i></p> <p><i>Ejercicio 5:</i></p> <p align="center"><i>BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3</i></p> <p><i>Ejercicio 6:</i></p> <p><i>Ejercicio 7</i></p>		

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA**BLOQUE OBLIGATORIO****Ejercicio 1:****Solución:****L****EI****EI**

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1**Ejercicio 2:****Solución:****2**

Ejercicio 3:

Solución:

f

c

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2**Ejercicio 4:****Solución:****EI**

Ejercicio 5:

Solución:

X

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3**Ejercicio 6:****Solución:****si**

*Ejercicio 7**Solución:*