MATEMÁTICAS II

Selectividad 2025

Comunidad autónoma de

CANARIAS

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Paula Orta y Gobierno Canario

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Distrito Universitario de Canarias	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2024 – 2025** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **ORDINARIA** DE JUNIO

Instrucciones:
- Debe responder sólo una pregunta de cada bloque de contenido. En caso de presentar dos preguntas de un mismo bloque, se considerará sólo la primera pregunta respondida.
- En el desarrollo de cada pregunta, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarla. Se califica todo el proceso.
- Se puede utilizar cualquier calculadora científica, no programable ni con conexión a internet

BLOQUE OBLIGATORIO

Ejercicio 1:

Bloque 1.- Análisis (Metabolix)

1. En un hospital de las Islas Canarias, un equipo de investigación está analizando cómo se metaboliza en sangre un nuevo medicamento llamado Metabolix, utilizado para tratar infecciones bacterianas. La concentración residual del fármaco en el plasma sanguíneo, denotada como $f(x)$ (medida en miligramos por litro, mg/L), depende del tiempo transcurrido x (en horas) desde su administración. El estudio indica que el medicamento sigue dos fases diferenciadas:

- Fase de absorción: En las primeras dos horas, el fármaco se distribuye por el organismo.
- Fase de eliminación: A partir de la segunda hora, el fármaco empieza a eliminarse.

Este comportamiento se modeliza mediante la siguiente función matemática:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-6x+11 & si \quad 0\le x<2 \\ \dfrac{9}{\sqrt{5x-1}} & si \quad x\ge 2 \end{cases}$$

El equipo de investigación necesita aclarar algunas dudas del modelo matemático:

0.5 a) Confirmar si este modelo es realmente continuo. Justifica tu respuesta.

0.75 b) La concentración residual varía con el tiempo, comprobar que la velocidad de crecimiento instantánea de la concentración residual a las 3 horas de administrar Metabolix es mayor que $-0.5\ (mg/L)/h$.

0.75 c) ¿Es cierto que la concentración residual del fármaco en la sangre siempre va disminuyendo con respecto al tiempo transcurrido? Averiguar en qué instante la concentración residual es máxima y calcular el valor de dicha concentración.

0.5 d) Pasado un largo periodo de tiempo, ¿cuál será la concentración residual de este medicamento?

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1

Ejercicio 2A:

Bloque 2.- Álgebra (seleccione solo una pregunta)

2A. Dada la matriz $M\in M_{2x2}$, $M=\begin{pmatrix}1 & a-3\\ -1 & 2-a\end{pmatrix}$, con $a\in\mathbb{R}$.

1 a) Para cualquier valor del parámetro a: comprobar que M es invertible y dar la expresión de M^{-1}.

1.5 b) Para $a=-1$, calcula el valor de la matriz X que satisface la ecuación $MA=B-MX$, siendo:

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 3\\ 1 & 2 & -2\end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

Ejercicio 2B:

2B. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}5 & -4 & 2\\ 2 & k & 1\\ -4 & 4 & k\end{pmatrix}$, con $k\in\mathbb{R}$.

1.25 a) Estudiar el rango de A según los valores del parámetro k.

1.25 b) Para $k=-1$, comprobar que $A^2=2A-I$, donde I denota la matriz identidad de orden 3. Además, utilizando la igualdad anterior verifica, sin calcular la potencia, que $A^4=4A-3I$.

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2

Ejercicio 3A:

Bloque 3.- Geometría (seleccione solo una pregunta)

3A. En el espacio tridimensional, dados el punto P y las rectas r_1 y r_2 siguientes:

$$P(2,-1,1)\ ;\ r_1:\begin{cases}4x+3y-3z=2\\2x-3y-6z=1\end{cases}\ ;\ r_2:\frac{x+3}{2}=2-y=\frac{z+4}{3}$$

0.25 a) Comprobar que $P\in r_1$ y que $P\notin r_2$

1 b) Hallar la distancia entre el punto P y el punto de intersección de las rectas r_1 y r_2

1.25 c) Hallar el ángulo con el que se cortan las rectas r_1 y r_2

Ejercicio 3B:

3B. En el espacio tridimensional se consideran los siguientes elementos geométricos:

$$A(1,0,2);\ \pi: -x+2y+z+1=0\ ;\qquad r:\begin{cases}4x-7y+2z=7\\ y-2z+5=0\end{cases}$$

1 a) Hallar la posición relativa del plano π y la recta r

1.5 b) Hallar el punto simétrico de A con respecto del plano π

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3

Ejercicio 4A:

Bloque 4.- Probabilidad (seleccione solo una pregunta)

4A. En una feria, un participante tiene la oportunidad de ganar premios eligiendo entre tres cajas sorpresa: una con premio y dos vacías. Hay una regla especial si se selecciona una caja vacía:

En caso de elegir una caja sin premio, se debe extraer al azar una bola de una urna compuesta por 2 bolas verdes y 3 negras, de idéntica forma y tamaño. Si se elige la bola negra, finaliza la jugada sin premio. Si se elige la bola verde, tendrá la oportunidad de elegir una nueva caja, de las dos cajas no seleccionadas anteriormente, y acabaría la jugada.

Responder a las siguientes cuestiones:

0.5 a) Dibujar un diagrama de árbol que refleje todos los posibles casos de este juego.

1 b) Calcular la probabilidad de obtener premio en este juego.

1 c) Si el participante ha obtenido premio, ¿cuál es la probabilidad de que haya elegido una bola verde en la urna?

Ejercicio 4B:

4B. La temperatura diurna en el Parque Nacional de las Cañadas del Teide durante el mes de agosto sigue una distribución normal. La temperatura media durante el día es de 22ºC con desviación típica de 5ºC. Además, se sabe que, las condiciones ideales para realizar senderismo es cuando la temperatura diurna se sitúa entre 18ºC y 25ºC. Si se superan los 30ºC, los excursionistas tendrían un riesgo elevado de insolación. Mientras que, si la temperatura se sitúa por debajo de los 15ºC, existe riesgo de cambios meteorológicos bruscos previstos para ese día.

Se está elaborando una guía informativa para los servicios de emergencia. Responder a lo siguiente:

0.75 a) ¿Qué probabilidad hay de que un día de agosto se den las condiciones ideales para realizar senderismo?

0.75 b) ¿Cuántos días de agosto se espera que haya senderistas con riesgo de insolación?

1 c) Si las Cañadas del Teide recibe un promedio de 11000 visitantes diarias en el mes de agosto y, de ellos, un 5% realiza senderismo. ¿Cuántos senderistas se estima que se puedan ver afectados por cambios meteorológicos bruscos a lo largo de dicho mes?

RESPUESTAS CONVOCATORIA ORDINARIA

BLOQUE OBLIGATORIO

Ejercicio 1:

Bloque 1.- Análisis (Metabolix)

1. En un hospital de las Islas Canarias, un equipo de investigación está analizando cómo se metaboliza en sangre un nuevo medicamento llamado Metabolix, utilizado para tratar infecciones bacterianas. La concentración residual del fármaco en el plasma sanguíneo, denotada como $f(x)$ (medida en miligramos por litro, mg/L), depende del tiempo transcurrido x (en horas) desde su administración. El estudio indica que el medicamento sigue dos fases diferenciadas:

- Fase de absorción: En las primeras dos horas, el fármaco se distribuye por el organismo.
- Fase de eliminación: A partir de la segunda hora, el fármaco empieza a eliminarse.

Este comportamiento se modeliza mediante la siguiente función matemática:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 11 & si \quad 0 \le x < 2 \\ \dfrac{9}{\sqrt{5x-1}} & si \quad x \ge 2 \end{cases}$$

El equipo de investigación necesita aclarar algunas dudas del modelo matemático:

0.5 a) Confirmar si este modelo es realmente continuo. Justifica tu respuesta.

0.75 b) La concentración residual varía con el tiempo, comprobar que la velocidad de crecimiento instantánea de la concentración residual a las 3 horas de administrar Metabolix es mayor que $-0.5\ (mg/L)/h$.

0.75 c) ¿Es cierto que la concentración residual del fármaco en la sangre siempre va disminuyendo con respecto al tiempo transcurrido? Averiguar en qué instante la concentración residual es máxima y calcular el valor de dicha concentración.

0.5 d) Pasado un largo periodo de tiempo, ¿cuál será la concentración residual de este medicamento?

Solución:

a) Analizamos la continuidad de los diferentes tramos de la función.

- Primer tramo: f(x) es polinómica, por tanto, continua.
- Segundo tramo: $f(x) = \frac{9}{\sqrt{5x-1}}$. Como $x \ge 2$, se tiene que $5x - 1 > 0$, por tanto la raíz y el cociente están bien definidos. Este segundo tramo también es continuo.

Analizamos la continuidad en el punto de cambio, $x = 2$.

$$\begin{cases} f(2) = 3 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} (x^2 - 6x + 11) = 3 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} \frac{9}{\sqrt{5x-1}} = 3 \end{cases} \Rightarrow Como\ f(2) = \lim_{x\to 2} \mathrm{f(x)},\ \text{f(x) es continua en x=2.}$$

Se puede afirmar que le modelo es continuo.

b) La velocidad de crecimiento instantáneo es la derivada de f(x) en x=3,

$f'(x) = \frac{-45}{2(5x-1)\sqrt{5x-1}}$ para $x > 2$; $f'(3) = \frac{-45}{28\sqrt{14}} \approx -0.43\ (mg/L)/h.$

Por tanto, podemos afirmar que es cierto, la velocidad instantánea de crecimiento de la concentración residual a las 3 horas de suministrar el medicamento es mayor que -0.5 (mg/L)/h.

c) Para saber si siempre disminuye analizamos el crecimiento de la función en cada uno de los tramos,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 6 & si \quad 0 < x < 2 \\ \dfrac{-45}{2(5x-1)\sqrt{5x-1}} & si \quad x > 2 \end{cases}$$

Como se observa en la expresión de la derivada, la derivada de la función es siempre negativa, por tanto, la concentración residual del Metabolix en sangre siempre disminuye.

Como la función siempre disminuye la concentración máxima se alcanza al inicio, y su valor es

$$f(0) = 11\, mg/L$$

La concentración del Metabolix en sangre en máxima justo en el momento que se administra el medicamento y es de 11mg/L

d) Calculamos el comportamiento de la función cuando $x \to \infty$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{9}{\sqrt{5x-1}} = 0$$

La concentración del Metabolix en sangre tiende a desaparecer cuando transcurre el tiempo.

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1

Ejercicio 2A:

Bloque 2.- Álgebra (seleccione solo una pregunta)

2A. Dada la matriz $M \in M_{2x2}$, $M = \begin{pmatrix} 1 & a-3 \\ -1 & 2-a \end{pmatrix}$, con $a \in \mathbb{R}$.

1 a) Para cualquier valor del parámetro a: comprobar que M es invertible y dar la expresión de M^{-1}.

1.5 b) Para $a = -1$, calcula el valor de la matriz X que satisface la ecuación $MA = B - MX$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

a) La matriz M tiene inversa si y sólo si $|M| \neq 0$.

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & a-3 \\ -1 & 2-a \end{vmatrix} = 2 - a + a - 3 = -1 \neq 0$$

Por tanto, la matriz M siempre tiene inversa.

Calculamos la matriz inversa,

$$Adj(M) = \begin{pmatrix} 2-a & 1 \\ 3-a & 1 \end{pmatrix}; \quad Adj(M)^t = \begin{pmatrix} 2-a & 3-a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{M^{-1} = \frac{1}{|M|} Adj(M)^t = \begin{pmatrix} a-2 & a-3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}$$

b) Despejamos la matriz X de la ecuación matricial,

$MA = B - MX; \quad MX = B - MA; \quad X = M^{-1}(B - MA)$

$$MA = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -9 & 11 \\ 3 & 7 & -9 \end{pmatrix}$$

$$B - MA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & -9 & 11 \\ 3 & 7 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 9 & -8 \\ -4 & -5 & 10 \end{pmatrix}$$

$M^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ (usando el apartado a))

Finalmente,

$$X = M^{-1}(B - MA) = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 9 & -8 \\ -4 & -5 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -7 & -16 \\ -1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Solución, } X = \begin{pmatrix} 1 & -7 & -16 \\ -1 & -4 & -2 \end{pmatrix}}$

Notación matemática correcta

Otra forma: $MA = B - MX; \quad MX = B - MA; \quad X = M^{-1}(B - MA) = M^{-1}B - A$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}; \qquad M^{-1}B = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -8 & -13 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -8 & -13 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -7 & -16 \\ -1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Solución, } X = \begin{pmatrix} 1 & -7 & -16 \\ -1 & -4 & -2 \end{pmatrix}}$$

Notación matemática correcta

Ejercicio 2B:

2B. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & k & 1 \\ -4 & 4 & k \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

1.25 a) Estudiar el rango de A según los valores del parámetro k.

1.25 b) Para $k = -1$, comprobar que $A^2 = 2A - I$, donde I denota la matriz identidad de orden 3. Además, utilizando la igualdad anterior verifica, sin calcular la potencia, que $A^4 = 4A - 3I$.

Solución:

a) El rango máximo de la matriz A es 3 y eso ocurre cuando su determinante sea distinto de cero,

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & k & 1 \\ -4 & 4 & k \end{vmatrix} = 5k^2 + 16 + 16 + 8k - 20 + 8k = 5k^2 + 16k + 12$$

$$5k^2 + 16k + 12 = 0 \Leftrightarrow k = -2, \; k = \frac{-6}{5}$$

- Si $k \neq -2$ y $k \neq \frac{-6}{5}$, el $rang(A) = 3$
- Si $k = -2$,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Tomando el menor

$$\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -10 + 8 = -2 \neq 0$$

Obtenemos que el $rang(A) = 2$.

- Si $k = \frac{-6}{5}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & \frac{-6}{5} & 1 \\ -4 & 4 & \frac{-6}{5} \end{pmatrix}$

Tomando el menor $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 4 = 1 \neq 0$

Obtenemos que el $rang(A) = 2$.

b) Calculamos A^2,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos $2A - I$,

$$2A - I = 2\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix},$$

Y se comprueba la igualdad.

Por otro lado,

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = (2A - I) \cdot (2A - I) = 4A^2 - 2A - 2A + I = 4(2A - I) - 4A + I = 4A - 3I$$

Uso correcto de la notación matemática

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2

Ejercicio 3A:

Bloque 3.- Geometría (seleccione solo una pregunta)

3A. En el espacio tridimensional, dados el punto P y las rectas r_1 y r_2 siguientes:

$$P(2,-1,1)\ ;\ r_1:\begin{cases}4x+3y-3z=2\\2x-3y-6z=1\end{cases}\ ;\ r_2:\frac{x+3}{2}=2-y=\frac{z+4}{3}$$

0.25 a) Comprobar que $P\in r_1$ y que $P\notin r_2$

1 b) Hallar la distancia entre el punto P y el punto de intersección de las rectas r_1 y r_2

1.25 c) Hallar el ángulo con el que se cortan las rectas r_1 y r_2

Solución:

a) Verificamos si $P\in r_1$

$$\left.\begin{array}{l}P=(2,-1,1)\\ r_1:\begin{cases}4x+3y-3z=2\\2x-3y-6z=1\end{cases}\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{l}4\cdot2+3(-1)-3\cdot1=8-3-3=2\\2\cdot2-3(-1)-6\cdot1=4+3-6=1\end{array}\right\}\to P(2,-1,1)\in r_1$$

Comprobamos a continuación que el punto P no está en la recta r_2

$$\left.\begin{array}{l}P=(2,-1,1)\\ r_2:\dfrac{x+3}{2}=2-y=\dfrac{z+4}{3}\end{array}\right\}\to\frac{2+3}{2}\underset{?}{=}2-(-1)\underset{?}{=}\frac{1+4}{3}\to\frac{5}{2}\neq3\neq\frac{5}{3}\to P(2,-1,1)\notin r_2$$

b) Hallemos en primer lugar el punto de intersección de las rectas r_1 y r_2

$$r_2:\frac{x+3}{2}=2-y=\frac{z+4}{3}\to\begin{cases}x=2\lambda-3\\y=2-\lambda\\z=3\lambda-4\end{cases}$$

$$r_1:\begin{cases}4x+3y-3z=2\\2x-3y-6z=1\end{cases}\to\begin{cases}4(2\lambda-3)+3(2-\lambda)-3(3\lambda-4)=2\\2(2\lambda-3)-3(2-\lambda)-6(3\lambda-4)=1\end{cases}\to$$

$$\begin{cases}8\lambda-12+6-3\lambda-9\lambda+12=2\\4\lambda-6-6+3\lambda-18\lambda+24=1\end{cases}\to\begin{cases}-4\lambda+6=2\\-11\lambda+12=1\end{cases}\to\lambda=1$$

$$\begin{cases}x=2\lambda-3\\y=2-\lambda\\z=3\lambda-4\end{cases}\to\begin{cases}x=2\cdot1-3\\y=2-1\\z=3\cdot1-4\end{cases}\to\begin{cases}x=-1\\y=1\\z=-1\end{cases}\to Q=(-1,1,-1)$$

Hallemos, ahora, la distancia entre los puntos $P=(2,-1,1)$ y $Q=(-1,1,-1)$

$$d(P,Q)=\sqrt{(-1-2)^2+\left(1-(-1)\right)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{(-3)^2+(2)^2+(-2)^2}=$$
$$=\sqrt{9+4+4}=\sqrt{17}=4.12\,u$$

$$\boxed{d(P,Q)=\sqrt{17}=4.12\,u}$$

c)

$$\overrightarrow{v_{r_1}}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\4&3&-3\\2&-3&-6\end{vmatrix}=-27\vec{i}+18\vec{j}-18\vec{k}=(-27,+18,-18)\equiv(3,-2,2)$$

$$\overrightarrow{v_{r_2}}=(2,-1,3)$$

$$\cos\alpha=\frac{\left|\overrightarrow{v_{r_1}}\cdot\overrightarrow{v_{r_2}}\right|}{\left|\overrightarrow{v_{r_1}}\right|\cdot\left|\overrightarrow{v_{r_2}}\right|}=\frac{|(3,-2,2)\cdot(2,-1,3)|}{\sqrt{9+4+4}\cdot\sqrt{4+1+9}}=\frac{|14|}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{14}}=0.9074\to$$

$$\boxed{\alpha=\cos^{-1}(0.9074)=24.83^\circ=24^\circ50'24''}$$

Ejercicio 3B:

3B. En el espacio tridimensional se consideran los siguientes elementos geométricos:

$$A(1,0,2);\ \pi: -x+2y+z+1=0;\qquad r: \begin{cases} 4x-7y+2z=7 \\ y-2z+5=0 \end{cases}$$

1 a) Hallar la posición relativa del plano π y la recta r

1.5 b) Hallar el punto simétrico de A con respecto del plano π

Solución:

a) Veamos si recta y plano se intersecan, para ello vamos a expresar la recta r en paramétricas y sustituiremos en la ecuación del plano.

Calculamos el vector director de la recta:

$$\vec{v_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -7 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 12\vec{i}+8\vec{j}+4\vec{k} = (12,8,4) \equiv (3,2,1)$$

Averiguamos un punto de la recta: $\begin{cases} 4x-7y+2z=7 \\ y-2z+5=0 \end{cases}$

Hacemos $z=0$, entonces $y=-5$, y con estos datos sustituímos en la primera ecuación y el valor de $x=\frac{7-35}{4}=-7$

El punto será $P(-7,-5,0)$

$$r: \begin{cases} x=-7+3\lambda \\ y=-5+2\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$$

$$\pi:\ -(-7+3\lambda)+2(-5+2\lambda)+\lambda+1=0$$
$$-2+2\lambda=0;\ \lambda=1;$$

$\boxed{\text{Por tanto, recta y plano se intersecan en el punto } Q(-4,-3,1)}$

b) Para hallar el punto simétrico de A respecto del plano π, construimos la recta perpendicular al plano que pase por A, hallamos la intersección con el plano π y dicho punto será el punto medio entre A y su simétrico A'.
Como la recta es perpendicular al plano, su vector director será el vector normal del plano, por tanto la ecuación en paramétricas de dicha resta es

$$s: \begin{cases} x=1-\lambda \\ y=2\lambda \\ z=2+\lambda \end{cases}$$

Sustituimos en la ecuación del plano

$$-1+\lambda+4\lambda+2+\lambda+1=0;\quad \lambda=\frac{-1}{3}.$$

Con lo que el punto de intersección, punto medio de A y su simétrico es,

$$P_M=\left(\frac{4}{3},\frac{-2}{3},\frac{5}{3}\right)$$

Y el vector $\overrightarrow{AP_M}=\left(\frac{1}{3},\frac{-2}{3},\frac{-1}{3}\right)$, con lo que el punto simétrico de A es

$$\boxed{A' = A+2\overrightarrow{AP_M}=\left(\frac{5}{3},\frac{-4}{3},\frac{4}{3}\right)}$$

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3

Ejercicio 4A:

Bloque 4.- Probabilidad (seleccione solo una pregunta)

4A. En una feria, un participante tiene la oportunidad de ganar premios eligiendo entre tres cajas sorpresa: una con premio y dos vacías. Hay una regla especial si se selecciona una caja vacía:

En caso de elegir una caja sin premio, se debe extraer al azar una bola de una urna compuesta por 2 bolas verdes y 3 negras, de idéntica forma y tamaño. Si se elige la bola negra, finaliza la jugada sin premio. Si se elige la bola verde, tendrá la oportunidad de elegir una nueva caja, de las dos cajas no seleccionadas anteriormente, y acabaría la jugada.

Responder a las siguientes cuestiones:

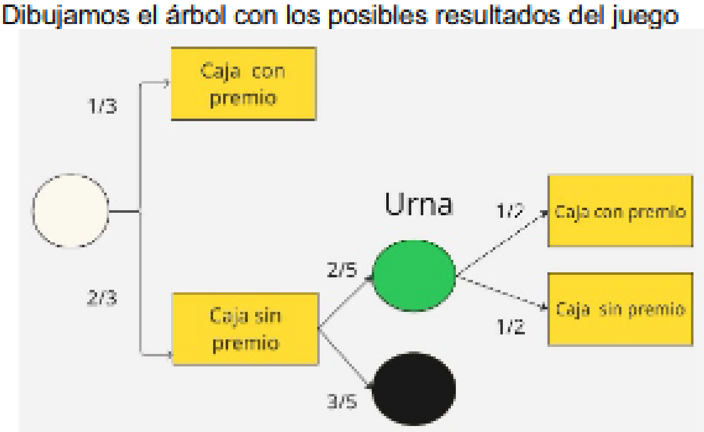
0.5 a) Dibujar un diagrama de árbol que refleje todos los posibles casos de este juego.

1 b) Calcular la probabilidad de obtener premio en este juego.

1 c) Si el participante ha obtenido premio, ¿cuál es la probabilidad de que haya elegido una bola verde en la urna?

Solución:

a) Dibujamos el árbol con los posibles resultados del juego



b) Definimos lo siguientes sucesos:

- G_1='elegir la caja premiada en el primer intento'
- NG_1='elegir una de las cajas no premiadas en el primer intento'
- G_2='elegir la caja premiada en el 2º intento'
- NG_2='elegir una de las cajas no premiadas en el 2º intento'
- V='sacar bola verde'
- N='sacar bola negra'

La probabilidad de que obtener premio se calcula aplicando el teorema de la probabilidad total:

$$P(\text{'ganar premio'}) = P(G_1) + P(NG_1) \cdot P\left({}^{V}/_{NG_1}\right) \cdot P(G_2|NG_1 \cap V) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{15} = \frac{7}{15}$$

La probabilidad de ganar premio es $\frac{7}{15} \approx 0.47$

c) Utilizamos el teorema del Bayes para el cálculo de esta probabilidad

$$P(V|\,\text{"Ganar premio"}) = \frac{P(V) \cdot P(\text{'ganar premio'}/V)}{P(\quad \text{'ganarpremio'})}$$

$$= \frac{\frac{4}{15} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{7}{15}} = \frac{2}{7}.$$

$$P(V)=P(NG_1) \cdot P\left({}^{V}/_{NG_1}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$$

La probabilidad de haber sacada una bola verde sabiendo que ha ganado un premio es de $\frac{2}{15} \approx 0.27$.

Ejercicio 4B:

4B. La temperatura diurna en el Parque Nacional de las Cañadas del Teide durante el mes de agosto sigue una distribución normal. La temperatura media durante el día es de 22ºC con desviación típica de 5ºC. Además, se sabe que, las condiciones ideales para realizar senderismo es cuando la temperatura diurna se sitúa entre 18ºC y 25ºC. Si se superan los 30ºC, los excursionistas tendrían un riesgo elevado de insolación. Mientras que, si la temperatura se sitúa por debajo de los 15ºC, existe riesgo de cambios meteorológicos bruscos previstos para ese día.

Se está elaborando una guía informativa para los servicios de emergencia. Responder a lo siguiente:

0.75 a) ¿Qué probabilidad hay de que un día de agosto se den las condiciones ideales para realizar senderismo?

0.75 b) ¿Cuántos días de agosto se espera que haya senderistas con riesgo de insolación?

1 c) Si las Cañadas del Teide recibe un promedio de 11000 visitantes diarias en el mes de agosto y, de ellos, un 5% realiza senderismo. ¿Cuántos senderistas se estima que se puedan ver afectados por cambios meteorológicos bruscos a lo largo de dicho mes?

Solución:

a) X='temperatura diurna en un día de agosto en ºC' $X \sim N(22{,}5)$

$$P(18 \le X \le 25) = P\left(\frac{18-22}{5} \le Z \le \frac{25-22}{5}\right) = P(-0.8 \le Z \le 0.6)$$
$$= P(Z \le 0.6) - P(Z \ge 0.8) = P(Z \le 0.6) - \big(1 - P(Z \le 0.8)\big)$$
$$= 0.7257 - (1 - 0.7881) = 0.5138$$

La probabilidad de que en un día de agosto se den las condiciones ideales para el senderismo es 0.5138

b) Agosto es un mes de 31 días, calculamos primero la probabilidad de estar en riego de insolación

$$P(X > 30) = P\left(Z > \frac{30-22}{5}\right) = P(Z \ge 1.6) = 1 - P(Z \le 1.6) = 1 - 0.9452$$
$$= 0.0548$$

Con este dato, podemos decir que el número esperado de días en el mes de agosto donde existe peligro de insolación es $31 \cdot 0.0548 = 1.6988 \sim 2\ días$

c) Número de visitantes por día es 11.000, de ellos practican senderismo $0.05 \cdot 11000 = 550\ personas/día$. Ahora calculamos la probabilidad de que exista cambios bruscos de temperatura es un día de agosto.

$$P(X \le 15) = P\left(Z \le \frac{15-22}{5}\right) = P(Z \le -1.4) = 1 - P(Z \le 1.4) = (1 - 0.9192)$$
$$= 0.0808$$

Sabiendo esta probabilidad, el número de días del mes de agosto donde se esperan cambios bruscos de temperatura es $0.0808 \cdot 31 = 2.5 \approx 3\ días$

Por tanto, se verán afectadas unas 1650 personas por los cambios bruscos de temperatura.

Distrito Universitario de Canarias	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2024 – 2025** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar).

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

BLOQUE OBLIGATORIO

Ejercicio 1:

Bloque 1.- Análisis (La colonia de hormigas)

1. El modelo logístico es un modelo matemático utilizado para describir la evolución de una población a lo largo del tiempo, cuando los recursos son limitados. Es uno de los modelos matemáticos más comunes en biología y describe cómo la población se estabiliza cuando alcanza la capacidad de carga del entorno, esto es, el tamaño máximo que puede alcanzar una población antes de que los recursos se vuelvan insuficientes, lo que genera competencia y, en muchos casos, una desaceleración de la tasa de crecimiento o una crisis en la población.

Un ejemplo de modelo logístico lo encontramos en las colonias de hormigas, que están compuestas por una red de túneles, entradas, cámaras de cría y áreas de almacenamiento, donde las hormigas establecen su hábitat.

Un grupo de investigadores ha estudiado el momento en el que unas hormigas forman una nueva colonia y ha modelizado el número de hormigas ($H(t)$) después de t meses con la función:

$$H(t) = \frac{6400}{1 + 159\, e^{-0.5t}}$$

0.25 a) ¿Cuántas hormigas formaron la nueva colonia inicialmente?

0.75 b) ¿Cuál es la tasa media de crecimiento el primer año? ¿Y el segundo año? Interpretar el resultado.

0.75 c) Un observador afirma que el modelo siempre es creciente y entiende que la población de hormigas crece sin control. Justificar matemáticamente si esta afirmación es o no correcta.

0.75 d) ¿En qué momento la colonia de hormigas alcanzará la mitad de su capacidad de carga?

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1

Bloque 2:

Bloque 2.- Álgebra (seleccione solo una pregunta)

2.5 **2A.** En la fabricación de piensos para peces en granjas acuícolas, es necesario equilibrar la cantidad de proteína, grasa y carbohidratos. Una empresa dedicada a los piensos para peces utiliza tres tipos principales de materias primas, las cuales proporcionan diferentes cantidades de proteína, grasa y carbohidratos. Las materias primas son: subproductos vegetales que contienen un 20% de proteína, un 10% de grasa y un 10% de carbohidratos; harinas que aportan un 40% de proteínas, un 20% de grasa y un 30% de carbohidratos; y subproductos cárnicos que aportan un 60%, 10% y 30% respectivamente.

Esta empresa productora está preparando 1000 kg de pienso que han de contener un 36% de proteína, un 12% de grasa y un 20% de carbohidratos. ¿Qué cantidad de cada materia prima se ha de utilizar para obtener el pienso con las características indicadas?

2B. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

2.5 $$\left.\begin{aligned} 4X - 5Y &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -9 & -4 & -6 \\ 17 & 3 & 13 \end{pmatrix} \\ 6X + 4Y &= \begin{pmatrix} 10 & 4 & -10 \\ 12 & 10 & 22 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\}$$

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2

Bloque 3:

Bloque 3.- Geometría (seleccione solo una pregunta)

3A. En el espacio tridimensional, se considera la recta y plano siguientes:

$$r: \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 10 \end{cases} \quad \pi: x - y + 2z - 5 = 0$$

1.5 a) Comprobar que el plano π y la recta r se cortan. Dar la ecuación de la recta s, contenida en el plano π, que corta perpendicularmente a r.

1 b) Hallar el ángulo que forman la recta r y el plano π.

3B. En el espacio tridimensional, se tienen las siguientes rectas:

$$r: \begin{cases} x + y - 2z = 3 \\ 2x + y - 6z = 2 \end{cases} \qquad s: x - 1 = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{2}$$

1.5 a) Comprobar que r y s son coplanarias.

1 b) Hallar la ecuación del plano que las contiene.

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3

Bloque 4:

Bloque 4.- Probabilidad (seleccione solo una pregunta)

4A. Se está desarrollando una prueba para detectar una enfermedad rara que afecta al 1% de la población adulta. Se sabe que, la sensibilidad de la prueba (dar positivo cuando la persona está enferma) es del 95%, y la especificidad de la prueba (dar negativo cuando la persona está sana) es del 98%. Se selecciona al azar un individuo de la población:

1.5 a) Si se somete a la prueba de diagnóstico, calcular la probabilidad de que esté realmente enfermo cuando la prueba da positivo.

1 b) Si una población de 35000 individuos se somete a la prueba, ¿podríamos afirmar que se espera que habrá más de 50 personas que estarán enfermas, aún cuando han obtenido un resultado negativo en el test?

4B. El Instituto Canario de Estadística (ISTAC) se ha encargado de realizar un estudio multidisciplinar para optimizar la planificación de plazas en residencias universitarias de estudiantes de nuevo ingreso en las dos universidades públicas canarias (ULL y ULPGC).

Para ello, se ha llevado a cabo una encuesta a 1800 estudiantes de nuevo ingreso que provienen de islas no capitalinas, de los que el 27% de estos estudiantes solicitan plaza en una residencia universitaria.

1.75 a) Comprobar si hay más de un 90% de posibilidades de recibir entre 460 y 510 solicitudes de plaza en una residencia de estudiantes de nuevo ingreso que provienen de islas diferentes a Tenerife y Gran Canaria.

0.75 b) A partir de 525 solicitudes de alojamiento de estos estudiantes, las universidades deberían acometer la construcción de nuevas residencias universitarias. ¿Qué probabilidad hay de que deban adoptar esta medida?

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

BLOQUE OBLIGATORIO

Ejercicio 1:

Bloque 1.- Análisis (La colonia de hormigas)

1. El modelo logístico es un modelo matemático utilizado para describir la evolución de una población a lo largo del tiempo, cuando los recursos son limitados. Es uno de los modelos matemáticos más comunes en biología y describe cómo la población se estabiliza cuando alcanza la capacidad de carga del entorno, esto es, el tamaño máximo que puede alcanzar una población antes de que los recursos se vuelvan insuficientes, lo que genera competencia y, en muchos casos, una desaceleración de la tasa de crecimiento o una crisis en la población.

Un ejemplo de modelo logístico lo encontramos en las colonias de hormigas, que están compuestas por una red de túneles, entradas, cámaras de cría y áreas de almacenamiento, donde las hormigas establecen su hábitat.

Un grupo de investigadores ha estudiado el momento en el que unas hormigas forman una nueva colonia y ha modelizado el número de hormigas ($H(t)$) después de t meses con la función:

$$H(t) = \frac{6400}{1 + 159\, e^{-0.5t}}$$

0.25 a) ¿Cuántas hormigas formaron la nueva colonia inicialmente?

0.75 b) ¿Cuál es la tasa media de crecimiento el primer año? ¿Y el segundo año? Interpretar el resultado.

0.75 c) Un observador afirma que el modelo siempre es creciente y entiende que la población de hormigas crece sin control. Justificar matemáticamente si esta afirmación es o no correcta.

0.75 d) ¿En qué momento la colonia de hormigas alcanzará la mitad de su capacidad de carga?

Solución:

a) $H(0) = \frac{6400}{1+159e^0} = \frac{6400}{160} = 40$

La colonia de hormigas cuenta, inicialmente, con 40 individuos.

b) Para calcular la tasa de crecimiento medio del primer año:

$TVM[0,12] = \frac{H(12)-H(0)}{12-0}$, para lo que se necesita calcular $H(0)$ y $H(12)$:

$$H(0) = 40 \quad (apartado\ a)$$

$$H(12) = \frac{6400}{1+159e^{-0.5\cdot 12}} = \frac{6400}{1+159e^{-6}} = 4591 \text{ individuos}$$

Queda:

$$TVM[0,12] = \frac{H(12)-H(0)}{12-0} = \frac{4591-40}{12} = 379 \text{ individuos por mes}$$

Para el segundo año será:

$$TVM[12,24] = \frac{H(24)-H(12)}{24-12}$$

$$H(24) = \frac{6400}{1+159e^{-0.5\cdot 24}} = \frac{6400}{1+159e^{-12}} = 6394 \text{ individuos}$$

$$TVM[12,24] = \frac{6394-4591}{24-12} = \frac{1803}{12} = 150\ individuos\ por\ mes$$

La tasa media de crecimiento el primer año es de 379 hormigas y el segundo año es de 150 hormigas, con lo que se está frenando el crecimiento de la colonia de hormigas en el segundo año.

c) Para justificar que el modelo siempre es creciente comprobamos que la derivada siempre es positiva. La derivada de la función es:

$$H'(t) = \frac{-6400 \cdot [159 \cdot (-0{,}5) \cdot e^{-0.5t})}{(1+159e^{-0.5t})^2} = \frac{508800e^{-0.5t}}{(1+159e^{-0.5t})^2}$$

Como el denominador está elevado al cuadrado, siempre será positivo.
Y en el numerador tenemos una constante positiva multiplicada por una exponencial, que siempre es positiva.
Esto indica que es creciente.
Comprobamos que no crece sin control.
Calculamos el límite cuando el tiempo se va a infinito para observar su tendencia:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{6400}{1+159e^{-0.5t}} = \frac{6400}{1+159e^{-\infty}} = \frac{6400}{1+0} = 6400$$

La colonia de hormigas crece todo el tiempo, según este modelo, pero está controlado por la capacidad de carga que, según el modelo propuesto, será de 6400 individuos.

d) La carga máxima es de 6400 individuos y tenemos que averiguar en qué instante se alcanza la mitad, esto es, $\frac{6400}{2} = 3200$ individuos:

$$H(t) = 3200 \quad \Rightarrow \quad \frac{6400}{1+159e^{-0.5t}} = 3200 \quad \Rightarrow \frac{6400}{3200} = 1+159e^{-0.5t} \quad \Rightarrow \quad 2-1 = 159e^{-0.5t}$$

$$\Rightarrow \quad 1 = 159e^{-0.5t} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{159} = e^{-0.5t} \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\frac{1}{159}\right) = -0{,}5t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\ln\left(\frac{1}{159}\right)}{-0{,}5} = 10{,}14$$

La población de hormigas alcanzará la mitad de su capacidad a los 10 meses.

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1

Bloque 2:

Bloque 2.- Álgebra (seleccione solo una pregunta)

2.5 **2A.** En la fabricación de piensos para peces en granjas acuícolas, es necesario equilibrar la cantidad de proteína, grasa y carbohidratos. Una empresa dedicada a los piensos para peces utiliza tres tipos principales de materias primas, las cuales proporcionan diferentes cantidades de proteína, grasa y carbohidratos. Las materias primas son: subproductos vegetales que contienen un 20% de proteína, un 10% de grasa y un 10% de carbohidratos; harinas que aportan un 40% de proteínas, un 20% de grasa y un 30% de carbohidratos; y subproductos cárnicos que aportan un 60%, 10% y 30% respectivamente.

Esta empresa productora está preparando 1000 kg de pienso que han de contener un 36% de proteína, un 12% de grasa y un 20% de carbohidratos. ¿Qué cantidad de cada materia prima se ha de utilizar para obtener el pienso con las características indicadas?

2.5 **2B.** Resolver el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

$$\left.\begin{aligned} 4X - 5Y &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -9 & -4 & -6 \\ 17 & 3 & 13 \end{pmatrix} \\ 6X + 4Y &= \begin{pmatrix} 10 & 4 & -10 \\ 12 & 10 & 22 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\}$$

Solución 2A:

El problema nos facilita la siguiente información:

	Proteína	Grasa	Carbohidratos
P1-Vegetal	20	10	10
P2-Harinas	40	20	30
P3-Carnes	60	10	30
1000 kg	36	12	20

Nos preguntan por la cantidad de cada producto (P1, P2, P3) que necesitamos para poder cumplir con los porcentajes que queremos que estén presentes en los 1000 kg.

Sean las siguientes variables:

x = cantidad (Kg) de producto vegetal (P1)

y = cantidad (Kg) de producto de harina (P2)

z = cantidad (Kg) de producto cárnico (P3)

Al seleccionar estas cantidades de productos, aportamos los porcentajes correspondientes de proteínas, grasas y energía. Y queremos lograr una mezcla que en 1000 kg verifique los porcentajes señalados en la última fila de la tabla. Así, las ecuaciones serán las siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} 0.20x+0.40y+0.60z=0.36\cdot 1000 \\ 0.10x+0.20y+0.10z=0.12\cdot 1000 \\ 0.10x+0.30y+0.30z=0.20\cdot 1000 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 0.20x+0.40y+0.60z=360 \\ 0.10x+0.20y+0.10z=120 \\ 0.10x+0.30y+0.30z=200 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 20x+40y+60z=36000 \\ 10x+20y+10z=12000 \\ 10x+30y+30z=20000 \end{array}\right\}$$

Mediante el método de Gauss:

$$\left.\begin{array}{l} 20x+40y+60z=36000 \\ 10x+20y+10z=12000 \\ 10x+30y+30z=20000 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 20x+40y+60z=36000 \\ -20z=-6000 \\ -20y=-4000 \end{array}\right\}$$

Por tanto, la solución del sistema será:

Z = 300, y = 200, x = 500

$$\boldsymbol{z=300, y=200, x=500}$$

En este problema lo que hemos encontrado es que la cantidad que debemos tomar de cada tipo de pienso es:

P1: 500 kg, P2: 200 Kg, P3: 300 kg. Con ello tendremos los 1000kg de pienso en el que se verifican las condiciones anteriormente indicadas para las proteínas, grasas y carbohidratos.

Solución 2B:

A. Hay que empezar calculando la inversa de la matriz dada. Para ello será necesario:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A)^t$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1\ ;\ \ Adj\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Calculamos ahora el producto anterior:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -9 & -4 & -6 \\ 17 & 3 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 & -4 & -6 \\ 17 & 3 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 1 \\ 8 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

El sistema queda planteado como:

$$\left.\begin{array}{r} 4X - 5Y = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 1 \\ 8 & -1 & 7 \end{pmatrix} \\ 6X + 4Y = \begin{pmatrix} 10 & 4 & -10 \\ 12 & 10 & 22 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 4X - 5Y = A \\ 6X + 4Y = B \end{array}\right\}$$

El sistema se resuelve por Gauss y queda de la siguiente forma:

$$\left.\begin{array}{r} 4X - 5Y = A \\ 6X + 4Y = B \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 4X - 5Y = A \\ 46Y = 4B - 6A \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} X = \frac{1}{4}(A + 5Y) \\ Y = \frac{1}{46}(4B - 6A) \end{array}\right\}$$

Realizamos las operaciones indicadas:

$$Y = \frac{1}{46}(4B - 6A) = \frac{1}{46}\left(4\begin{pmatrix} 10 & 4 & -10 \\ 12 & 10 & 22 \end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix} -1 & -5 & 1 \\ 8 & -1 & 7 \end{pmatrix}\right)$$

$$Y = \frac{1}{46}\left(\begin{pmatrix} 40 & 16 & -40 \\ 48 & 40 & 88 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 30 & -6 \\ -48 & 6 & -42 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{46}\begin{pmatrix} 46 & 46 & -46 \\ 0 & 46 & 46 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{4}(A + 5Y) = X = \frac{1}{4}\left(\begin{pmatrix} -1 & -5 & 1 \\ 8 & -1 & 7 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$X = \frac{1}{4}\left(\begin{pmatrix} -1 & -5 & 1 \\ 8 & -1 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 5 & -5 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 8 & 4 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Las soluciones son:

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix};\ Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

Bloque 3:

Bloque 3.- Geometría (seleccione solo una pregunta)

3A. En el espacio tridimensional, se considera la recta y plano siguientes:

$$r: \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-y+z=10 \end{cases} \quad \pi: x-y+2z-5=0$$

1.5 a) Comprobar que el plano π y la recta r se cortan. Dar la ecuación de la recta s, contenida en el plano π, que corta perpendicularmente a r.

1 b) Hallar el ángulo que forman la recta r y el plano π.

3B. En el espacio tridimensional, se tienen las siguientes rectas:

$$r: \begin{cases} x+y-2z=3 \\ 2x+y-6z=2 \end{cases} \qquad s: x-1=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{2}$$

1.5 a) Comprobar que r y s son coplanarias.

1 b) Hallar la ecuación del plano que las contiene.

Solución 3A:

a) Para calcular la intersección del plano y la recta, vamos a pasar a paramétrica la recta:

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k} = (2,1,-3)$$

Averiguamos un punto de la recta r. Para ello hacemos $x=0$ y resolvemos:

$$\begin{cases} y+z=0 \\ -y+z=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y+z=0 \\ 2z=10 \end{cases}$$

Por lo que, $z=5, y=-5, x=0$

El punto de la recta r será: $A(0,-5,5)$

La ecuación de la recta en paramétrica será:

$$r: \begin{cases} x=2\lambda \\ y=-5+\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z=5-3\lambda \end{cases}$$

Sustituimos en la ecuación del plano y buscamos el punto de corte:

$$x-y+2z-5=2\lambda+5-\lambda+10-6\lambda-5=10-5\lambda=0 \to \lambda=2$$

Con lo que el punto de corte será:

$$\boxed{P(4,-3,-1)}$$

Ahora buscamos la ecuación de la recta s que corta perpendicularmente a r y contenida en el plano.

Para ello, el vector director de la recta buscada será perpendicular al vector director de r y al vector normal al plano, por lo que calculamos el producto vectorial de ambos vectores:

$$\vec{v}_r=(2,1,-3), \vec{n}(1,-1,2)$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -\vec{i} - 7\vec{j} - 3\vec{k} = (-1,-7,-3)$$

$$\vec{v}_s(-1,-7,-3)$$

Además, como la nueva recta s debe ser secante a la recta r y estar en el plano π, utilizamos el punto de corte averiguado anteriormente:

$$P(4,-3,-1)$$

Luego, la ecuación de la recta s será:

$$\boxed{s: \begin{cases} x = 4 - \lambda \\ y = -3 - 7\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -1 - 3\lambda \end{cases}}$$

b) El ángulo entre la recta y el plano será:

$$\vec{v}_r = (2,1,-3), \vec{n}(1,-1,2)$$

$$\alpha = arsen\left(\frac{|\overrightarrow{v_r} \cdot \vec{n}_\pi|}{|\overrightarrow{v_r}| \cdot |\vec{n}_\pi|}\right) = arcsen\left(\frac{|2-1-6|}{\sqrt{4+1+9} \cdot \sqrt{1+1+4}}\right) = arcsen\left(\frac{5}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{6}}\right)$$

$$\boxed{\alpha = arsen(0.5455) = 33.06° = 33°3'42.83''}$$

Solución 3B

a) Dos rectas, en el espacio tridimensional, son coplanarias si no se cruzan.

Calculamos los vectores directores de las rectas r y s:

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -6 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} = (-4, 2, -1) \qquad \vec{v}_s(1, 3, 2)$$

Ahora comprobamos que realmente se cortan y que no se cruzan. Buscamos un punto de cada recta con el que generar un nuevo vector que debe ser linealmente dependiente con los vectores directores.

$P \epsilon r$, hacemos z=0,

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + y = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} x + y = 3 \\ x = -1 \end{matrix} \rightarrow y = 4; \qquad P(-1, 4, 0)$$

$Q \epsilon s$, hacemos z=1,

$$x - 1 = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{2} \rightarrow x - 1 = \frac{y}{3} = 1 \rightarrow x = 2; y = 3; \qquad Q(2, 3, 1)$$

El vector que va de una recta a la otra será: $\overrightarrow{PQ}(3, -1, 1)$

Veamos que no se cruzan:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 12 - 12 + 1 - 2 + 9 - 8 = 0$$

Como los vectores son linealmente dependientes, se confirma que las rectas son coplanarias.

b) Para hallar la ecuación del plano que contiene a las rectas necesitamos un punto y dos vectores directores.

$P(-1, 4, 0)$, $\vec{v}_r(-4, 2,1)$, $\vec{v}_s(1, 3, 2)$

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-4 & z \\ -4 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 7x + 7y - 14z - 21 = 0$$

La ecuación del plano que las contiene será: $x + y - 2z = 3$

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2

Bloque 4:

Bloque 4.- Probabilidad (seleccione solo una pregunta)

4A. Se está desarrollando una prueba para detectar una enfermedad rara que afecta al 1% de la población adulta. Se sabe que, la sensibilidad de la prueba (dar positivo cuando la persona está enferma) es del 95%, y la especificidad de la prueba (dar negativo cuando la persona está sana) es del 98%. Se selecciona al azar un individuo de la población:

1.5 a) Si se somete a la prueba de diagnóstico, calcular la probabilidad de que esté realmente enfermo cuando la prueba da positivo.

1 b) Si una población de 35000 individuos se somete a la prueba, ¿podríamos afirmar que se espera que habrá más de 50 personas que estarán enfermas, aún cuando han obtenido un resultado negativo en el test?

4B. El Instituto Canario de Estadística (ISTAC) se ha encargado de realizar un estudio multidisciplinar para optimizar la planificación de plazas en residencias universitarias de estudiantes de nuevo ingreso en las dos universidades públicas canarias (ULL y ULPGC).

Para ello, se ha llevado a cabo una encuesta a 1800 estudiantes de nuevo ingreso que provienen de islas no capitalinas, de los que el 27% de estos estudiantes solicitan plaza en una residencia universitaria.

1.75 a) Comprobar si hay más de un 90% de posibilidades de recibir entre 460 y 510 solicitudes de plaza en una residencia de estudiantes de nuevo ingreso que provienen de islas diferentes a Tenerife y Gran Canaria.

0.75 b) A partir de 525 solicitudes de alojamiento de estos estudiantes, las universidades deberían acometer la construcción de nuevas residencias universitarias. ¿Qué probabilidad hay de que deban adoptar esta medida?

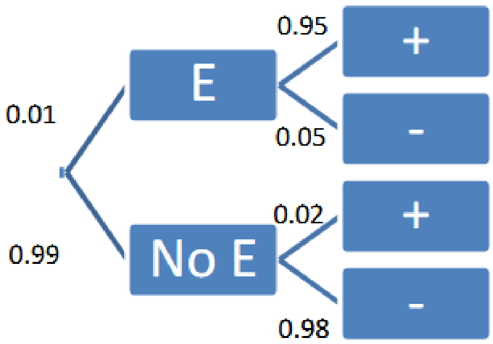
Solución 4A:

Construimos el diagrama de árbol conociendo que:

Definimos los siguientes sucesos: E ='estar enfermo', $\bar{E}$='no estar enfermo'

+='prueba dé positivo', −='prueba dé negativo'

$$Sensibilidad: P(+ \setminus E) = 0.95;\ Especificidad: P(- \setminus \bar{E}) = 0.98$$



a) Nos piden que calculemos la siguiente probabilidad que se resuelve mediante el teorema de Bayes:

$$P(E \setminus +) = \frac{P(E \cap +)}{P(+)}$$

Aplicando el teorema de la probabilidad total:

$$P(+) = P(E) \cdot P(+\setminus E) + P(\bar{E}) \cdot P(+\setminus \bar{E}) = 0.01 \cdot 0.95 + 0.99 \cdot 0.02 = 0.0095 + 0.0198 = 0.0293$$

$$P(E \setminus +) = \frac{0.01 \cdot 0.95}{0.0293} = \frac{0.095}{0.0293} = 0.3242$$

La probabilidad de que está realmente enfermo es de 0.3242

b) Sabemos que ha dado negativo y nos piden la probabilidad de que estén enfermo, aplicando el teorema de Bayes:

$$P(E \setminus -) = \frac{P(E \cap -)}{P(-)}$$

$$P(-) = 1 - P(+) = 1 - 0.0293 = 0.9707$$

$$P(E \setminus -) = \frac{0.01 \cdot 0.05}{0.9707} = 0.00052$$

En una población de 35000 individuos sometidos a esta prueba, cabe esperar:

35000·0.00052=18 individuos que han dado negativo pero, realmente están enfermos.

No es cierto que se esperen más de 50 personas enfermas con resultado negativo en el test.

Solución 4B:

X=nº de solicitudes de estudiantes de nuevo ingreso para plazas en residencias de estudiantes de islas no capitalinas

Las solicitudes enviadas son independientes.

$p = 0.27$

X~B(1800,0.27)

Además, como, np=486>5 y nq =1314> 5 se puede aproximar con la normal

$$N(np, \sqrt{npq}) = N(486{,}18.84)$$

a) $P(460 \leq X \leq 510) = P(X \leq 510) - P(X \leq 460) = P\left(Z \leq \frac{510-486}{18.84}\right) - P\left(\frac{460-486}{18.84}\right) = P(Z \leq 1.27) - P(Z \leq -1.38) = P(Z \leq 0.73) - (1 - P(Z \leq 1.38)) = 0.8980 - (1 - 0.9162) = 0.8142$

La probabilidad de que envíen entre 460 y 510 solicitudes es de 0.8142. Hay menos de un 90% de posibilidades de recibir esa cantidad de solicitudes.

b) $P(X > 525) = P\left(Z > \frac{525-486}{18.8}\right) = P(Z > 2.07) = 1 - P(Z \leq 2.07) = 1 - 0.9808 = 0.0192$

Hay un 1.92% de posibilidades de que se reciban 525 o más solicitudes de estudiantes de otras islas.