

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2025

Comunidad autónoma de

BALEARES



www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Universidad de las Islas Baleares y Jorge Muñoz





MATERIA: MATEMÁTICAS II

CONVOCATORIA:
ORDINARIA DE
JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

BLOQUE OBLIGATORIO

Ejercicio 1:

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1

Ejercicio 2:

Ejercicio 3:

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2

Ejercicio 4:

Ejercicio 5:

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3

Ejercicio 6:

Ejercicio 7

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO**BLOQUE OBLIGATORIO****Ejercicio 1:****Solución:****L****EI****EI**

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1**Ejercicio 2:****Solución:****2**

Ejercicio 3:**Solución:****Part A.****Problema A1. — Solució.**

- a) Notem que el punt inicial del dispositiu, després de submergir-lo, és el $(0, 0, -315)$. Cercam un punt (a, b, c) tal que ha de pertànyer a la recta que ens donen i el mòdul del vector $(a - 0, b - 0, c + 315)$ ha de ser $37m$.

Manera 1: Sabem que el dispositiu assoleix la profunditat desitjada, és a dir, $z = -350m$. A més, $a = 0$, per pertànyer a la recta. Llavors ens falta trobar b tal que $50b + 12 \cdot (-350) = -3780$,

d'on trobam que $b = 12$ i per tant, la posició que cercam és la $(0, 12, -350)$.

Manera 2: Hem d'imposar les dues condicions esmentades. És a dir, hem de resoldre el sistema

$$\begin{cases} a = 0, \\ 35b + 12c = -3780, \\ a^2 + b^2 + (c + 315)^2 = 37^2, \end{cases}$$

d'on s'obté el resultat desitjat.

- (b) Volem mantenir-lo a $-350m$ de profunditat, llavors el pla és $z = -350$ (x, y lliures).
 (c) Hem de calcular la intersecció entre el pla $z = -350$ i la recta proporcionada per l'enunciat. Per tant, cercam la intersecció de

$$\begin{cases} x = 5 + 4\lambda, \\ y = 10 + \lambda, \\ z = -380 + 10\lambda, \end{cases} \quad \text{i} \quad \begin{cases} x = \beta, \\ y = \gamma, \\ z = -350, \end{cases}$$

d'on tenim que

$$\begin{cases} \beta = 5 + 4\lambda, \\ \gamma = 10 + \lambda, \\ -350 = -380 + 10\lambda. \end{cases}$$

Resolent el sistema, tenim que aquest té solució (podrien xocar), la qual és $\lambda = 3$, $\gamma = 13$ i $\beta = 19$. Per tant, el dispositiu podria xocar amb l'objecte en el punt $(17, 13, -350)$. Punt que hauria d'evitar el dispositiu.

Criteris:

- (a) [1 punt] 0.5 punts per plantejar bé el problema a resoldre i 0.5 punts per executar-lo correctament. Es lleven 0.5 punts error de càlcul (màxim 1 error).
 (b) [0.5 punts] 0.5 punts si la resposta és correcta. Altrament 0.

f**C**

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2

Ejercicio 4:

Solución:

Part B.**Problema B1.** — *Solució.*

- (a) L'equació del producte 1 ens indica que, per construir el producte 1 es requereixen 2 kg de fusta i 1 kg de ferro. El cost d'aquest material supera en 40 € el cost d'1 kg de plàstic.
- (b) Notem que la informació que ens proporcionen de cada producte ens permet establir una relació entre els costos de cada kg de matèria primera, la qual ve donada pel sistema d'equacions $Ax = b$, on

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad i \quad b = \begin{pmatrix} 40 \\ 90 \\ 70 \\ 50 \end{pmatrix}.$$

Per tant, el problema es podria resoldre veient que el $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A|b) = 3$ (nombre d'incògnites) o simplement resolent el sistema que involucra les 3 primeres equacions i comprovar que satisfan la quarta.

Manera 1: Tenim que, prenent les 3 primeres equacions de la matriu A ,

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -9 \neq 0,$$

i, per tant, $\text{Rang}(A) = 3$.

Per altra part, calculant el determinant de la matriu ampliada $(A|b)$, es té que $|(A|b)| = 0$ i, per tant, $\text{Rang}(A|b) = 3$. Com que el sistema té 3 incògnites, podem concloure que és un sistema compatible determinat i, per tant, sí que es pot calcular el preu de cada kg de matèria primera.

Manera 2: Resolem el sistema que conté les 3 primeres equacions i comprovam que la quarta també es compleix.

Resolent el sistema (per Cramer, Gauss, substitució...) s'obté que la solució d'aquest és $x = 30$, $y = 20$, $z = 40$. Substituint cada variable a la quarta equació del sistema, es té que, en efecte, $30 - 20 + 40 = 50$. Aleshores, $x = 30$, $y = 20$, $z = 40$ és la solució del sistema, la qual cosa ens indica que sí que és possible calcular el preu de cada matèria primera.

EI

Ejercicio 5:**Solución:****Problema B2.** — *Solució.*

- (a) Sabem que $AB + I = A$ i que A és invertible, és a dir, que existeix A^{-1} tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Aleshores, tenim que

$$A^{-1}(AB + I) = A^{-1}A \Leftrightarrow B + A^{-1} = I \Leftrightarrow A^{-1} = I - B.$$

- (b) Notem que de l'apartat (a) sabem que $A^{-1} = I - B$ o, el que és equivalent, $B = I - A^{-1}$. Per tant,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Per veure si és invertible o no necessitam calcular el seu determinant i veure si s'anul·la o no. Ara bé,

$$|B| = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1 \neq 0.$$

Aleshores, sí que és invertible.

X

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3

Ejercicio 6:

Solución:

Part C.

Problema C1. — Solució.

- (a) Volem veure que existeix $x \in [0, 500]$ tal que $A(x) = 0$. Fem-ho aplicant el teorema de Bolzano. $A(x)$ és una funció contínua per ser un polinomi. A més, $A(0) = 200 > 0$, $A(500) = -1800 < 0$. Aleshores, pel teorema de Bolzano sabem que $\exists x \in [0, 500]$ tal que $A(x) = 0$, tal com volíem veure.
- (b) Com que és un polinomi de grau 3 (domini $\mathcal{D} = \mathbb{R}$), almenys hem de calcular on es troben els punts crítics i veure el creixement de la funció.
- Punts crítics:

$$A'(x) = -0.0003x^2 + 0.1x - 4 = 0 \leftrightarrow x = \frac{-0.1 \pm \sqrt{0.0052}}{-0.0006} = \frac{0.1 \pm \sqrt{0.0052}}{0.0006}$$

Tenim dos punts crítics

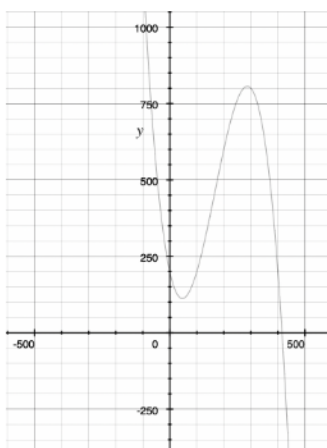
$$p_1 : \left(\frac{0.1 + \sqrt{0.0052}}{0.0006}, A\left(\frac{0.1 + \sqrt{0.0052}}{0.0006}\right) \right) = (286.8517, 806.4605);$$

$$p_2 : \left(\frac{0.1 - \sqrt{0.0052}}{0.0006}, A\left(\frac{0.1 - \sqrt{0.0052}}{0.0006}\right) \right) = (46.4816, 112.0580).$$

Estudiant el creixement i decreixement tenim que

$$A'(40) < 0, A'(50) > 0, A'(500) < 0,$$

per la qual cosa p_1 és un mínim i p_2 és un màxim. Si ho representam, es veu que només es pot creuar una vegada l'eix OY i, per tant, $A(x)$ només s'anul·la una vegada.



si

Problema C2. — *Solució.*

- (a) Notem que el $\ln(2x)$ només està definit quan $2x > 0$, i, per tant, $x > 0$. Així mateix, de $\frac{1}{x}$ tenim que x tampoc no pot ser 0. Aleshores, el domini és $\mathcal{D} = (0, +\infty)$.
Calculem ara el comportament als extrems.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(2x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln(2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2x)}{x} \stackrel{\text{Hòpital}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

- (b) Notem que, $f(x) = 0$ si i només si $\ln(2x) = 0$ i, per tant, $2x = 1$, $x = \frac{1}{2}$. Aleshores, com que la funció no s'anul·la per a $x \in [\frac{1}{2}, 5]$, podem calcular directament $\int_{\frac{1}{2}}^5 f(x) dx$.

$$\int_{\frac{1}{2}}^5 \frac{1}{x} \ln(2x) dx = \frac{1}{2} (\ln(2x))^2 \Big|_{\frac{1}{2}}^5 = \frac{1}{2} ((\ln(10))^2 - (\ln(1))^2) = \frac{1}{2} (\ln(10))^2 \approx 2.65.$$

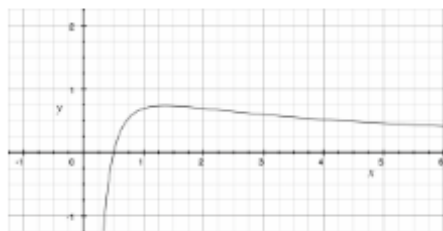
Notem que, si no se cerquen els punts on s'anul·la la funció, una altra manera per saber els extrems de la integral és representar la funció i veure quina és la regió que ens demanen. Per això ens faltaria calcular els màxims i mínims (calcular la derivada i veure quan s'anul·la). Així doncs,

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \ln(2x) + \frac{1}{x} \frac{1}{2x} = -\frac{1}{x^2} \ln(2x) + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} (1 - \ln(2x)),$$

la qual s'anul·la si i només si $1 - \ln(2x) = 0$ i, per tant, $\ln(2x) = 1$, d'on s'obté $x = \frac{1}{2}e^1$. Aleshores, l'únic punt crític és

$$\left(\frac{1}{2}e^1, 2e^{-1}\right) \approx (1.36, 0.74).$$

Com que $f'(1) > 0$ i $f'(2) < 0$, tenim que el punt crític és un màxim i ja podríem representar la funció.



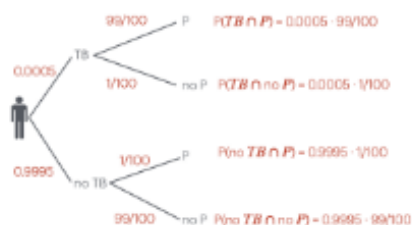
Ejercicio 7

Solución:

Part D.

Problema D1. — *Solució.* Sigui TB l'esdeveniment “tenir tuberculosi” i P l'esdeveniment “donar positiu”. De l'enunciat sabem que

$$P(TB) = 0.0005, \quad P(P|TB) = 0.99, \quad P(\text{no } P|\text{no } TB) = 0.99.$$



Aleshores,

(a) $P(P|\text{no } TB) = 0,01$.

(b)
$$P(TB|\text{no } P) = \frac{P(TB \cap \text{no } P)}{P(\text{no } P)} = \frac{0,0005 \cdot 0,01}{0,0005 \cdot 0,01 + 0,9995 \cdot 0,99} = \frac{0,000005}{0,98951} \approx 5,053 \cdot 10^{-6}.$$

Ejercicio 7

Solución:

Problema D2. — *Solució.* Indiquem sobre una taula les dades que ens proporciona l'enunciat.

Convocatòria 2025

| 7 / 8 |

	STEM	No STEM	Total
Dona	13% de 55 ≈ 7	87% de 55 ≈ 48	55
Home	37% de 45 ≈ 17	63% de 45 ≈ 28	45
Total	24	76	100

Aleshores,

$$(a) P(\text{STEM}) = \frac{0.13 \cdot 55 + 0.37 \cdot 45}{100} = 0.238.$$

$$(b) P(\text{dona}|\text{STEM}) = \frac{0.13 \cdot 55}{0.13 \cdot 55 + 0.37 \cdot 45} = \frac{7.15}{23.8} = 0.3.$$

$$(c) P(\text{dona}|\text{No STEM}) = \frac{0.87 \cdot 55}{0.87 \cdot 55 + 0.63 \cdot 45} = \frac{47.85}{76.2} = 0.63.$$

 Universitat de les Illes Balears Proves d'accés a la Universitat	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: 2024 – 2025 MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA
INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar). Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas. <u>Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.</u>		
CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA <i>BLOQUE OBLIGATORIO</i> <i>Ejercicio 1:</i> <i>BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1</i> <i>Ejercicio 2:</i> <i>Ejercicio 3:</i> <i>BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2</i> <i>Ejercicio 4:</i> <i>Ejercicio 5:</i> <i>BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3</i> <i>Ejercicio 6:</i> <i>Ejercicio 7</i>		

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE**BLOQUE OBLIGATORIO****Ejercicio 1:****Solución:****L****EI****EI**

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1**Ejercicio 2:****Solución:****2**

Ejercicio 3:

Solución:

f

c

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2**Ejercicio 4:****Solución:****EI**

Ejercicio 5:

Solución:

X

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3**Ejercicio 6:****Solución:****si**

*Ejercicio 7**Solución:*