Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2024

Comunidad autónoma de

MADRID

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Javier Rodrigo Hitos y Antonio Menguiano

VÍDEOS CON EXÁMENES RESUELTOS

https://www.youtube.com/watch?v=ivhuFddjvf4

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023 – 2024** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a cinco preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se le proponen.

Cada ejercicio se valorará sobre 2 puntos, y si consta de dos apartados, cada apartado se valorará sobre 1 punto.

TIEMPO: 90 minutos

Problema A 1. (2 puntos)

Se considera la matriz *A* dada por: $A=\begin{pmatrix} 1-a & -2 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ 2 & -2 & a \end{pmatrix}$

a) Determine los valores del parámetro $a\in\mathbb{R}$ para los que exista la inversa de *A*.

b) Para $a=-2$, calcule A^{-1}.

Problema A 2. (2 puntos)

Sea $f(x)$ una función real de variable real cuya derivada viene dada por la siguiente expresión: $f'(x)=x^2+x-2$

a) Obtenga la expresión de la función $f(x)$ sabiendo que pasa por el punto (0, 2).

b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$, clasificando sus extremos relativos, si procede.

Problema A 3. (2 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-x+e^2 & \text{si } x<1 \\ a\,e^{2x} & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$$

a) Halle el valor del parámetro $a\in\mathbb{R}$ para que $f(x)$ sea continua en todo su dominio.

b) Para $a=1$, calcule el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de la función anterior, el eje de abscisas y las rectas $x=1$ y $x=2$.

Problema A 4. (2 puntos)

Se considera la siguiente función real de variable real: $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-9}$

a) Determine las asíntotas de esta función.

b) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 0$

Problema A 5. (2 puntos)

Se dispone de 60 gramos de ácido acetilsalicílico para elaborar tabletas en dos formatos, de 4 gramos y de 3 gramos respectivamente. Se necesitan al menos tres tabletas de 4 gramos, al menos ocho tabletas de 3 gramos y al menos el doble de tabletas de 3 gramos que de 4 gramos. Cada tableta de 4 gramos proporciona un beneficio de 1,5 euros y cada tableta de 3 gramos proporciona un beneficio de 1 euro. ¿Cuántas tabletas deberían fabricarse de cada tipo para maximizar el beneficio? ¿Cuál es el beneficio máximo?

Problema B 1. (2 puntos)

Un equipo de baloncesto regional ha vendido tres tipos de entradas para su último partido. Las entradas generales se han vendido a 10 euros, las entradas para estudiantes a 8 euros y las entradas infantiles a 5 euros. El equipo ha conseguido vender 600 entradas y ganar 4900 euros. Además, se sabe que ha vendido el doble de entradas generales que de entradas infantiles. Plantee el sistema de ecuaciones y resuelva para calcular el número de entradas vendidas de cada tipo.

Problema B 2. (2 puntos)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} 2x + y + z = a \\ x + a\,y + z = a + 1 \\ x + y + a\,z = 2 \end{cases}$ a)

Discuta el sistema en función de los valores del parámetro *a*.

b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 1$.

Problema B 3. (2 puntos)

En un festival de música con 200 asistentes se observa que a 90 personas les gusta el pop, a 70 el techno y a 30 les gustan ambos géneros. Eligiendo al azar a un asistente del festival, calcule la probabilidad de que:

a) Le guste al menos uno de los dos géneros musicales.

b) Le guste el techno, pero no el pop.

Problema B 4. (2 puntos)

La cantidad de agua absorbida por un tipo particular de planta acuática se puede modelar con una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica σ = 8 ml.

a) Se selecciona aleatoriamente una muestra de 25 plantas acuáticas y se determina que la cantidad media de agua absorbida es de 120 ml. Calcule un intervalo de confianza del 95 % para la media de la cantidad de agua absorbida por este tipo de planta acuática.

b) Determine el tamaño mínimo de la muestra necesario para que el error máximo, en la estimación de la media de la cantidad de agua absorbida, sea menor que 1 ml, con un nivel de confianza del 90 %.

Problema B 5. (2 puntos)

En tres tanques, A, B y C, de una piscifactoría se crían, respectivamente, el 35 %, el 20 % y el 45 % de los alevines de salmón noruego. Se sabe que el 15 % de los alevines criados en el tanque A, el 30 % de los alevines criados en el tanque B y el 25 % de los alevines criados en el tanque C miden más de 35 mm. Eligiendo al azar un alevín de salmón noruego, calcule la probabilidad de que:

a) Mida más de 35 mm.

b) Sabiendo que no mide más de 35 mm, proceda del tanque C.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema A 1. (2 puntos)

Se considera la matriz *A* dada por: $A=\begin{pmatrix}1-a & -2 & -1\\ 1 & a & 1\\ 2 & -2 & a\end{pmatrix}$

a) Determine los valores del parámetro $a\in\mathbb{R}$ para los que exista la inversa de *A*.

b) Para $a=-2$, calcule A^{-1}.

Solución

a) Se cumple que:

$$|A|=\begin{vmatrix}1-a & -2 & -1\\ 1 & a & 1\\ 2 & -2 & a\end{vmatrix}=a^2\ (1-a)-4+2+2\ a+2\ (1-a)+2\ a=a^2-a^3+2\ a=-a\ \left(a^2-a-2\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a=0 \text{ o } a^2-a-2=0\Leftrightarrow a=0 \text{ o } a=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2}=2,\ -1$$

Por tanto,

Existe la inversa de *A* si y sólo si $|A|\neq 0\Leftrightarrow a\neq -1,\ 0,\ 2$

b) Para $a=-2$, se cumple que $A=\begin{pmatrix}3 & -2 & -1\\ 1 & -2 & 1\\ 2 & -2 & -2\end{pmatrix}$, con $|A|=-(-2)\ \left((-2)^2-(-2)-2\right)=8$, y los adjuntos de la matriz *A* son: $A_{11}=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ -2 & -2\end{vmatrix}=4+2=6$, $A_{12}=-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -2\end{vmatrix}=-(-2-2)=4$, $A_{13}=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & -2\end{vmatrix}=-2+4=2$,

$A_{21}=-\begin{vmatrix}-2 & -1\\ -2 & -2\end{vmatrix}=-(4-2)=-2$, $A_{22}=\begin{vmatrix}3 & -1\\ 2 & -2\end{vmatrix}=-6+2=-4$, $A_{23}=-\begin{vmatrix}3 & -2\\ 2 & -2\end{vmatrix}=-(-6+4)=2$,

$A_{31}=\begin{vmatrix}-2 & -1\\ -2 & 1\end{vmatrix}=-2-2=-4$, $A_{32}=-\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-(3+1)=-4$, $A_{33}=\begin{vmatrix}3 & -2\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-6+2=-4$

Por tanto, la matriz adjunta es $adj(A)=\begin{pmatrix}6 & 4 & 2\\ -2 & -4 & 2\\ -4 & -4 & -4\end{pmatrix}$ y entonces:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\ \left(adj(A)\right)'=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}6 & -2 & -4\\ 4 & -4 & -4\\ 2 & 2 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Problema A 2. (2 puntos)

Sea $f(x)$ una función real de variable real cuya derivada viene dada por la siguiente expresión: $f'(x) = x^2 + x - 2$

a) Obtenga la expresión de la función $f(x)$ sabiendo que pasa por el punto (0, 2).

b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$, clasificando sus extremos relativos, si procede.

Solución

a) Se cumple que $f(x) = \int (x^2 + x - 2)\, dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + C$, con $f(0) = \frac{0^3}{3} + \frac{0^2}{2} - 0 + C = C = 2$, por lo que:

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + 2$$

b) Tenemos que $f'(x) = \frac{3x^2}{3} + \frac{2x}{2} - 2 = x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = 1, \ -2$, con:

$f'(x) = x^2 + x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 1 \text{ o } x < -2$, $f'(x) = x^2 + x - 2 < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 1$ (ya que $f'(x) = x^2 + x - 2$ es una parábola con las ramas hacia arriba y raíces $1, \ -2$).

Entonces si $x < -2$ f es estrictamente creciente, si $-2 < x < 1$ f es estrictamente decreciente y si $x > 1$ f es estrictamente creciente, presentando un máximo relativo en -2 y un mínimo relativo en 1.

Problema A 3. (2 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-x+e^2 & \text{si } x<1 \\ a\,e^{2x} & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$$

a) Halle el valor del parámetro $a\in\mathbb{R}$ para que $f(x)$ sea continua en todo su dominio.

b) Para $a=1$, calcule el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de la función anterior, el eje de abscisas y las rectas $x=1$ y $x=2$.

Solución

a) Si $x<1$, $f(x)=x^2-x+e^2$ continua (polinomio),

Si $x>1$, $f(x)=a\,e^{2x}$ continua (exponencial).

Se cumple que $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(x^2-x+e^2\right)=1^2-1+e^2=e^2$, y que

$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} a\,e^{2x}=a\,e^{2\times 1}=a\,e^2$,

por lo que f es continua en 1 (y por tanto en todo R) si y sólo si $\lim_{x\to 1^-} f(x)=e^2=\lim_{x\to 1^+} f(x)=a\,e^2=f(1)\Leftrightarrow a=1$

La función es continua en toda la recta real si *a* = 1

b) La función en este caso, para a = 1, queda $f(x)=\begin{cases} x^2-x+e^2 & \text{si } x<1 \\ e^{2x} & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$, positiva si $x\geq 1$, por lo que:

$$A=\int_1^2 f(x)\,dx=\int_1^2 e^{2x}\,dx=\left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_1^2=\frac{e^4}{2}-\frac{e^2}{2}$$

Área = $\frac{e^4-e^2}{2}$

Problema A 4. (2 puntos)

Se considera la siguiente función real de variable real: $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-9}$

a) Determine las asíntotas de esta función.

b) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa *x* = 0

Solución

a) Ya que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{x-2}{x^2-9}=0$ (grado numerador< grado denominador), por lo que $y=0$ es una asíntota horizontal de *f* en $\pm\infty$ y no existe asíntota oblicua de *f.*

Como $\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+}\dfrac{x-2}{x^2-9}=\lim_{x\to 3^+}\dfrac{x-2}{(x-3)\ (x+3)}=\dfrac{3-2}{(3-3)\ (3+3)}=\dfrac{1}{+0}=\infty$, entonces $x=3$ es una asíntota vertical de *f*.

Se cumple que $\lim_{x\to -3^+} f(x)=\lim_{x\to -3^+}\dfrac{x-2}{x^2-9}=\lim_{x\to -3^+}\dfrac{x-2}{(x-3)\ (x+3)}=\dfrac{-3-2}{(-3-3)\ (-3+3)}=\dfrac{5}{+0}=\infty$, por lo que $x=-3$ es una asíntota vertical de *f*. No hay más asíntotas verticales porque $x=\pm 3$ son los únicos puntos que anulan el denominador y no el numerador.

Asíntotas: $y=0$**, asíntota horizontal;** $x=3$**;** $x=-3$ **asíntotas verticales**

b) Se cumple que la recta tangente es $y=f(0)+f'(0)\ x$, con:

$$f(0)=\frac{0-2}{0^2-9}=\frac{2}{9},$$

$$f'(x)=\frac{x^2-9-(x-2)\ 2x}{\left(x^2-9\right)^2}\Rightarrow f'(0)=\frac{0^2-9-(0-2)\ 0}{\left(0^2-9\right)^2}=-\frac{1}{9},$$

por lo que la recta pedida es:

$$y=\frac{2}{9}-\frac{1}{9}x$$

;

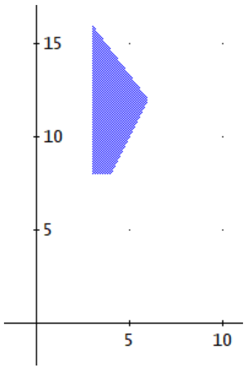
9y = -x + 2

Problema A 5. (2 puntos)

Se dispone de 60 gramos de ácido acetilsalicílico para elaborar tabletas en dos formatos, de 4 gramos y de 3 gramos respectivamente. Se necesitan al menos tres tabletas de 4 gramos, al menos ocho tabletas de 3 gramos y al menos el doble de tabletas de 3 gramos que de 4 gramos. Cada tableta de 4 gramos proporciona un beneficio de 1,5 euros y cada tableta de 3 gramos proporciona un beneficio de 1 euro. ¿Cuántas tabletas deberían fabricarse de cada tipo para maximizar el beneficio? ¿Cuál es el beneficio máximo?

Solución

Si llamamos x al número de tabletas de 4 gramos, y al número de tabletas de 3 gramos, hay que maximizar $f(x, y) = 1.5\,x + y$ con las restricciones $4\,x + 3\,y \leq 60$ (número de gramos de que se dispone), $x \geq 3$ (tabletas de 4 gramos que se necesitan al menos), $y \geq 8$ (tabletas de 3 gramos que se necesitan al menos), $y \geq 2\,x$ (condición del doble). Por tanto, hay que hallar el máximo de *f* en la siguiente región factible:



(Existe el máximo porque *f* es continua: polinomio, y la región es cerrada y acotada).

Como *f* y las restricciones son lineales (polinomios de grado 1), el máximo se alcanzará en alguno de los vértices de la región. Los hallamos:

Intersección de $x = 3$, $y = 8$: $(3,\ 8)$. Intersección de $x = 3$, $4\,x + 3\,y = 60$:

$4 \times 3 + 3\,y = 60 \Rightarrow y = \dfrac{60 - 12}{3} = 16$: $(3,\ 16)$. Intersección de $y = 8$, $y = 2\,x$: $8 = 2\,x \Rightarrow x = \dfrac{8}{2} = 4$: $(4,\ 8)$

Intersección de $y = 2\,x$, $4\,x + 3\,y = 60$: $4\,x + 3\,(2\,x) = 10\,x = 60 \Rightarrow x = \dfrac{60}{10} = 6,\ y = 12$: $(6,\ 12)$.

Valoramos f en los candidatos: $f(3,\ 8) = 1.5 \times 3 + 8 = \dfrac{9}{2} + 8 = \dfrac{25}{2}$, $f(3,\ 16) = 1.5 \times 3 + 16 = \dfrac{9}{2} + 16 = \dfrac{41}{2}$, $f(4,\ 8) = 1.5 \times 4 + 8 = 6 + 8 = 14$, $f(6,\ 12) = 1.5 \times 6 + 12 = 9 + 12 = 21$, luego el máximo de *f* (máximo beneficio) es 21 euros y se alcanza en $(6,\ 12)$:

Tiene que fabricar 6 tabletas de 4 gramos y 12 de 3 gramos. El máximo de *f* (máximo beneficio) es 21 euros

Problema B 1. (2 puntos)

Un equipo de baloncesto regional ha vendido tres tipos de entradas para su último partido. Las entradas generales se han vendido a 10 euros, las entradas para estudiantes a 8 euros y las entradas infantiles a 5 euros. El equipo ha conseguido vender 600 entradas y ganar 4900 euros. Además, se sabe que ha vendido el doble de entradas generales que de entradas infantiles. Plantee el sistema de ecuaciones y resuelva para calcular el número de entradas vendidas de cada tipo.

Solución

Si llamamos x al número de entradas generales vendidas, y al número de entradas para estudiantes, z al número de entradas infantiles, tenemos que $x+y+z=600$ (entradas vendidas),

$10x+8y+5z=4900$ (ganancia), $x=2z$ (condición del doble). Por tanto, hay que resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=600 \\ 10x+8y+5z=4900 \\ x=2z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2z+y+z=600 \\ 10(2z)+8y+5z=4900 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y+3z=600 \\ 8y+25z=4900 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=600-3z \\ 8(600-3z)+25z=4900 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z=100,\ y=600-3\times 100=300,\ x=2z=200$$

Se comprueba que efectivamente $x=200$, $y=300$, $z=100$ es solución del sistema.

Se vendieron 200 entradas generales, 300 de estudiantes y 100 infantiles.

Problema B 2. (2 puntos)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} 2x + y + z = a \\ x + a\,y + z = a + 1 \\ x + y + a\,z = 2 \end{cases}$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro *a*.

b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 1$.

Solución

a) La matriz de coeficientes *A* del sistema es $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, cuyo determinante se anula si:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = 2a^2 + 2 - a - 2 - a = 2a^2 - 2a = 2a\,(a-1) = 0 \Leftrightarrow a = 0,\ a = 1$$

Entonces, si $a \neq 0,\ a \neq 1$, $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \neq 0$ por lo que el sistema es compatible determinado.

Si $a = 0$, $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$, con $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, siendo la matriz ampliada $\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, con:

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 - 2 - 2 = -3 \neq 0$, por lo que $rg\,(A) = 2 \neq rg\,(\overline{A}) = 3$ y el sistema es incompatible.

Si $a = 1$, $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (F_2 = F_3) = 0$, con $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, siendo la matriz ampliada $\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, con:

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (F_2 = F_3) = 0$, por lo que $rg\,(A) = 2 = rg\,(\overline{A}) < (\text{número de incógnitas}) = 3$ y el sistema es compatible indeterminado.

Si $a \neq 0,\ a \neq 1$, $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \neq 0$ el sistema es compatible determinado.

Si $a = 0$, el sistema es incompatible. Si $a = 1$, el sistema es compatible indeterminado.

Si $a = 0$, el sistema es incompatible. Si $a = 1$, el sistema es compatible indeterminado.

b) Para $a=1$, el sistema queda $\begin{cases} 2x+y+z=1 \\ x+y+z=2 \\ x+y+z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+z=1 \\ x+y+z=2 \end{cases}$. Dando el parámetro $z=\alpha$, resulta $\begin{cases} 2x+y+\alpha=1 \\ x+y+\alpha=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=1-\alpha \\ x+y=2-\alpha \end{cases} \Rightarrow x=1-\alpha-(2-\alpha)=-1,\ y=2-\alpha-x=3-\alpha$ (para la implicación hemos restado las dos ecuaciones). Entonces las soluciones son $x=-1$, $y=3-\alpha$, $z=\alpha$ ($\alpha\in\mathbb{R}$).

$x=-1$, $y=3-\alpha$, $z=\alpha$ ($\alpha\in\mathbb{R}$).

Problema B 3. (2 puntos)

En un festival de música con 200 asistentes se observa que a 90 personas les gusta el pop, a 70 el techno y a 30 les gustan ambos géneros. Eligiendo al azar a un asistente del festival, calcule la probabilidad de que:

a) Le guste al menos uno de los dos géneros musicales.

b) Le guste el techno, pero no el pop.

Solución

a) Si llamamos $A=\{\text{personas que le gusta el pop}\}$, $B=\{\text{personas que le gusta el techno}\}$, hay que hallar:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{90}{200}+\frac{70}{200}-\frac{30}{200}=\frac{130}{200}=\frac{13}{20}$$

La probabilidad de que le guste al menos uno de los dos géneros musicales = 13/20

b) Hay que hallar $P(B-A)=P(B)-P(B\cap A)=\frac{70}{200}-\frac{30}{200}=\frac{40}{200}=\frac{1}{5}$

La probabilidad de que le guste el techno, pero no el pop es 1/5 = 0,2

Problema B 4. (2 puntos)

La cantidad de agua absorbida por un tipo particular de planta acuática se puede modelar con una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica σ = 8 ml.

a) Se selecciona aleatoriamente una muestra de 25 plantas acuáticas y se determina que la cantidad media de agua absorbida es de 120 ml. Calcule un intervalo de confianza del 95 % para la media de la cantidad de agua absorbida por este tipo de planta acuática.

b) Determine el tamaño mínimo de la muestra necesario para que el error máximo, en la estimación de la media de la cantidad de agua absorbida, sea menor que 1 ml, con un nivel de confianza del 90 %.

Solución:

a) Se cumple que $n=25$, $\bar{X}=120$, $p=\frac{95}{100}=0.95=1-\alpha \Rightarrow \alpha=1-0.95=0.05$, siendo el intervalo de confianza $\left(\bar{X}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=\left(120-Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{8}{\sqrt{25}},\ 120+Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{8}{\sqrt{25}}\right)=\left(120-Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{8}{5},\ 120+Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{8}{5}\right)$, donde $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ cumple que $P\left(Z>Z_{\frac{\alpha}{2}}\right)=\frac{\alpha}{2}=0.025 \Leftrightarrow P\left(Z\le Z_{\frac{\alpha}{2}}\right)=1-0.025=0.975$, siendo *Z* la distribución $N(0,\ 1)$.

Mirando en la tabla de la normal tipificada, tenemos que $P\left(Z\le Z_{\frac{\alpha}{2}}\right)=0.975 \Leftrightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}}=1.96$, por lo que el intervalo pedido es $\left(120-Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{8}{5},\ 120+Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{8}{5}\right)=\left(120-1.96\,\frac{8}{5},\ 120+1.96\,\frac{8}{5}\right)=(116.864,\ 123.136)$

I.C.95% = (116.864, 123.136)

b) Como el intervalo de confianza es $\left(\bar{X}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=\left(\bar{X}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{8}{\sqrt{n}},\ \bar{X}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{8}{\sqrt{n}}\right)$, para que el error en la estimación de la media sea menor que 1 ha de ser $Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{8}{\sqrt{n}}<1$.

En este caso:

$p=\frac{90}{100}=0.9=1-\alpha \Rightarrow \alpha=1-0.9=0.1$, por lo que $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ cumple que:

$P\left(Z\le Z_{\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\frac{\alpha}{2}=1-0.05=0.95$, siendo *Z* la distribución $N(0,\ 1)$.

Mirando en la tabla de la normal tipificada, tenemos que $P\left(Z\le Z_{\frac{\alpha}{2}}\right)=0.95 \Leftrightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}}=1.645$, por lo que:

$$Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{8}{\sqrt{n}}=1.645\,\frac{8}{\sqrt{n}}<1 \Leftrightarrow \sqrt{n}>1.645\times 8=13.16 \Leftrightarrow n>13.16^2=173.186 \Leftrightarrow n\ge 174$$

Por tanto,

E*l tamaño mínimo de la muestra es 174 *plantas acuáticas

Problema B 5. (2 puntos)

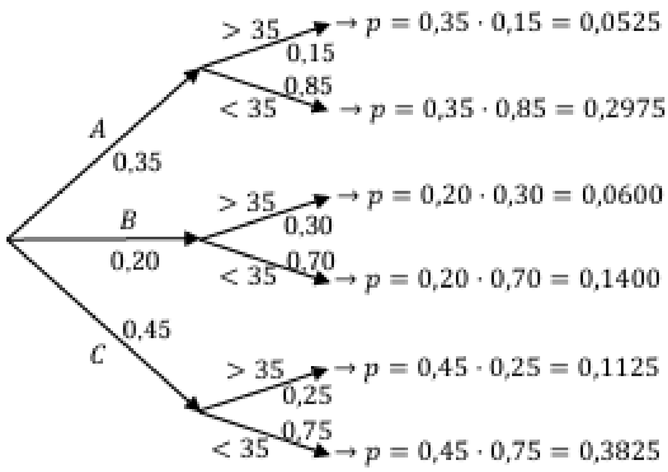
En tres tanques, A, B y C, de una piscifactoría se crían, respectivamente, el 35 %, el 20 % y el 45 % de los alevines de salmón noruego. Se sabe que el 15 % de los alevines criados en el tanque A, el 30 % de los alevines criados en el tanque B y el 25 % de los alevines criados en el tanque C miden más de 35 mm. Eligiendo al azar un alevín de salmón noruego, calcule la probabilidad de que:

a) Mida más de 35 mm.

b) Sabiendo que no mide más de 35 mm, proceda del tanque C.

Solución

$a)$



$$P = P(>35) =$$

$$= P(A) \cdot P(>35/A) + P(B) \cdot P(>35/B) + P(C) \cdot P(>0{,}35/C) =$$

$$= 0{,}35 \cdot 0{,}15 + 0{,}20 \cdot 0{,}30 + 0{,}45 \cdot 0{,}25 = 0{,}0525 + 0{,}0600 + 0{,}1125 = \underline{0{,}2250}.$$

$b)$

$$P = P\{C| < 35\} = \frac{P(C \cap <35)}{P(<35)} = \frac{P(C) \cdot P(<35/C)}{1 - P(>35)} = \frac{0{,}45 \cdot 0{,}75}{1 - 0{,}2250} = \frac{0{,}3375}{0{,}7750} = \underline{0{,}4335}.$$

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023 – 2024** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a cinco preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

1º) Se consideran las matrices $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$:

$a)$ Determine los valores de los parámetros $a, b, c \in R$ para los que se verifica:

$M \cdot N = 2N$ y $(N^t \cdot M)^t + M \cdot P = N$.

$b)$ Para $a = 0, b = -1$ y $c = -2$, compruebe que $M^2 = M + 2I$, donde I denota la matriz identidad de tamaño 2×2, y utilice dicha igualdad para calcular M^{-1} y M^3.

Problema 2:

2º) $a)$ Encuentre el valor del parámetro real a tal que $\int_0^1 (\sqrt{x} - a) \cdot dx = \frac{2}{3}$.

$b)$ Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 - b & si \ \ x < 0 \\ 3x + 2 & si \ \ x \geq 0 \end{cases}$. Determine para que valores del parámetro $b \in R$ se tiene que $f(x)$ es una función continua en su dominio. Estudie la derivabilidad de la función para esos valores del parámetro b.

Problema 3:

3º) Sea $f(x)$ una función real de variable real cuya derivada viene dada por la siguiente expresión: $f'(x) = \frac{-1}{x^2} + a$.

$a)$ Obtenga el valor del parámetro real a para que la función $f(x)$ pase por los puntos $A(1, 3)$ y $B(2, 7/2)$. Escriba la expresión de la función $f(x)$.

$b)$ Para $a = 1$, determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$, clasificando sus extremos relativos, si procede.

Problema 4:

4º) Se considera la función real de variable real $f(x) = \frac{x^2+4}{x^2-4}$:

a) Determine las asíntotas de esta función.

b) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 1$.

Problema 5:

5º) De entre todos los números reales no negativos y menores o iguales a 10 se buscan dos números tales que el doble del primero menos el segundo no pase de 10 y que el triple del primero más el doble del segundo sea al menos 12. Además, se desea que su suma sea lo menor posible. ¿Cuáles son estos números? ¿Cuál es la suma mínima obtenida?

Problema 6:

6º) En una tienda de música se tienen 70 instrumentos distribuidos en tres tipos: guitarras, pianos y violines. Se sabe que la cantidad de pianos más la cantidad de violines es igual a la cantidad de guitarras. Si tuviéramos el mismo número de violines, pero el doble de pianos y cuatro veces el de guitarras, el total de instrumentos en la tienda sería de 180. Plantee un sistema de ecuaciones y determine el número de instrumentos de cada tipo en la tienda.

Problema 7:

7º) Se considera de ecuaciones lineales $\left.\begin{aligned} 2x + y + 3z &= 2 \\ 3x + y + z &= 0 \\ 8x + ay + 5z &= 2 \end{aligned}\right\}$, dependiente del parámetro $a \in R$:

a) Discuta el sistema para los diferentes valores de a.

b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 3$.

Problema 8:

8º) La observación meteorológica para los días de otoño en Madrid establece que el día está nublado en un 50 % de las ocasiones y que la temperatura baja de los 10 grados un 7 % de los días. Además, el 35 % de los días son nublados o la temperatura baja de los 10 grados. Escogiendo un día de otoño al azar, calcule la probabilidad de que:

a) Este nublado y la temperatura baje de los 10 grados.

b) No esté nublado, sabiendo que la temperatura no baja de los 10 grados.

Problema 9:

9º) El porcentaje de aprobados en asignaturas de primer año en la universidad española se puede aproximar por una variable aleatoria normal de media μ y desviación típica $\sigma = 8$ puntos porcentuales.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 20 asignaturas de primer año se obtienen que el porcentaje medio de aprobados en la muestra es de 65 puntos porcentuales. Determine un intervalo de confianza al 99 % para μ.

b) Suponga que $\mu = 67$ puntos porcentuales. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 10 asignaturas la media muestral, $\overline{X}$, esté comprendida entre 65 y 69 puntos porcentuales.

Problema 10:

10º) Según los datos del INE, el 45,68 % de las familias españolas tienen una renta mensual de 1.500 a 3.000 euros y el 23,98 % de las familias tienen una renta mensual superior a 3.000 euros. Entre las familias con menos de 1.500 euros mensuales solo el 10 % viaja por vacaciones, si el ingreso es de 1.500 a 3.000 euros mensuales viajan el 40 % y si el ingreso es mayor de 3.000 euros mensuales viajan el 85 %. Eligiendo al azar una familia española, calcule la probabilidad de que:

a) Viaje por vacaciones.

b) Sabiendo que viaja por vacaciones, su ingreso mensual sea mayor de 1.500 euros.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Problema 1:

1º) Se consideran las matrices $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$:

a) Determine los valores de los parámetros $a, b, c \in R$ para los que se verifica:

$$M \cdot N = 2N \text{ y } (N^t \cdot M)^t + M \cdot P = N.$$

b) Para $a = 0, b = -1$ y $c = -2$, compruebe que $M^2 = M + 2I$, donde I denota la matriz identidad de tamaño 2×2, y utilice dicha igualdad para calcular M^{-1} y M^3.

Solución:

a)

$$M \cdot N = 2N \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} -a + 2b \\ -c + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{r} -a + 2b = -2 \\ -c + 2 = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{c = -2};\ a - 2b = 2. \quad (*)$$

La matriz M resulta $M = \begin{pmatrix} a & b \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$(N^t \cdot M)^t + M \cdot P = N \Rightarrow \left[\begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right]^t + \begin{pmatrix} a & b \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} -a - 4 & -b + 2 \end{pmatrix}^t + \begin{pmatrix} -a - 3b \\ 2 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} -a - 4 \\ -b + 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a - 3b \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} -2a - 3b - 4 \\ -b + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{r} -2a - 3b = 3 \\ -b + 1 = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{b = -1;\ a = 0}.$$

$b)$

Para $a = 0, b = -1$ y $c = -2$, la matriz M es: $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

$M^2 = M + 2I \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix};$

$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\textit{Queda comprobado que } M^2 = M + 2I}.$

$M^2 = M + 2I \Rightarrow M^2 - M = 2I;\; M \cdot (M - I) \cdot \frac{1}{2} = I.$

Sabiendo que $M \cdot M^{-1} = I \Rightarrow \underline{M^{-1} = \frac{1}{2}(M - I)}$.

$M^2 = M + 2I \Rightarrow M \cdot M^2 = M \cdot M + M \cdot 2I;\; M^3 = M^2 + 2M.$

Sabiendo que $M^2 = M + 2I$: $M^3 = M + 2I + 2M \Rightarrow \underline{M^3 = 3M + 2I}$.

Problema 2:

2º) a) Encuentre el valor del parámetro real a tal que $\int_0^1 (\sqrt{x} - a) \cdot dx = \frac{2}{3}$.

b) Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 - b & si\ \ x < 0 \\ 3x + 2 & si\ \ x \geq 0 \end{cases}$. Determine para que valores del parámetro $b \in R$ se tiene que $f(x)$ es una función continua en su dominio. Estudie la derivabilidad de la función para esos valores del parámetro b.

Solución:

a)

$$\int_0^1 (\sqrt{x} - a)\, dx = \frac{2}{3} \Rightarrow \left[\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - ax\right]_0^1 = \frac{2}{3};\ \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - ax\right]_0^1 = \frac{2}{3};\ \left(\frac{1^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - a\right) - 0 = \frac{2}{3};$$

$\frac{2}{3} - a = \frac{2}{3} \Rightarrow \underline{a = 0}$.

b)

La función $f(x)$ es continua en su dominio, excepto para $x = 0$, cuya continuidad es dudosa y se va a determinar el valor real de b para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$x = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} (x^2 - b) = -b \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} (3x + 2) = 2 = f(0) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) \Rightarrow -b = 2 \Rightarrow \underline{b = -2}.$$

La función resulta $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & si\ \ x < 0 \\ 3x + 2 & si\ \ x \geq 0 \end{cases}$.

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por ello se estudió previamente la continuidad

La función $f(x)$ es derivable en su dominio, excepto para $x = 0$ cuya derivabilidad es dudosa; se estudia a continuación.

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales en ese punto.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & si\ \ x < 0 \\ 3 & si\ \ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(0^-) = 0 \\ f'(0^+) = 3 \end{cases} \Rightarrow f'(0^-) \neq f'(0^+).$$

$$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ derivable\ \forall x \in R - \{0\}}.$$

Problema 3:

3º) Sea $f(x)$ una función real de variable real cuya derivada viene dada por la siguiente expresión: $f'(x) = \frac{-1}{x^2} + a$.

a) Obtenga el valor del parámetro real a para que la función $f(x)$ pase por los puntos $A(1,3)$ y $B(2,7/2)$. Escriba la expresión de la función $f(x)$.

b) Para $a = 1$, determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$, clasificando sus extremos relativos, si procede.

Solución:

a)

$$f(x) = \int f'(x) \cdot dx = \int \left(\frac{-1}{x^2} + a\right) \cdot dx = -\frac{x^{-1}}{-1} + ax + C = \frac{1}{x} + ax + C.$$

Por pasar por el punto $A(1,3) \Rightarrow f(1) = 3$:

$\frac{1}{1} + a \cdot 1 + C = 3;\ \ a + C = 2.$ (1)

Por pasar por el punto $B(2,7/2) \Rightarrow f(2) = \frac{7}{2}$:

$\frac{1}{2} + a \cdot 2 + C = \frac{7}{2};\ \ 2a + C = 3.$ (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{r} a + C = 2 \\ 2a + C = 3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -a - C = -2 \\ 2a + C = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{a = 1};\ \ C = 1.$$

$$\underline{f(x) = \frac{1}{x} + x + 1.}$$

b)

El dominio de la función es $D(f) \Rightarrow R - \{0\}$. $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + 1$.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$f'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{x^2} + 1 = 0;\ \ 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1,$

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (-1,0) \cup (0,1).}$$

$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty).}$$

Una función tiene un extremo relativo, máximo o mínimo, cuando se anula su primera derivada. Para diferenciar los máximos y mínimos se recurre a la segunda derivada: si es positiva para los valores que anulan la primera, se trata de un mínimo relativo y, si es negativa, de un máximo relativo.

$$f''(x) = -\frac{0-1\cdot 2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}.$$

$$x = -1 \Rightarrow f''(-1) = \frac{2}{(-1)^3} = -2 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = -1.$$

$$f(-1) = \frac{1}{-1} - 1 + 1 = -1 \Rightarrow Máx. \Rightarrow \underline{A(-1,-1)}.$$

$$x = 1 \Rightarrow f''(1) = \frac{2}{1^3} = 2 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 1.$$

$$f(1) = \frac{1}{1} + 1 + 1 = 3 \Rightarrow Mín. \Rightarrow \underline{B(1,3)}.$$

Autores: Javier Rodrigo Hitos y Antonio Menguiano

Problema 4:

4º) Se considera la función real de variable real $f(x) = \frac{x^2+4}{x^2-4}$:

a) Determine las asíntotas de esta función.

b) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución:

a)

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$y = k = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+4}{x^2-4} = 1.$$

$$\underline{La\ recta\ y = 1\ es\ asíntota\ horizontal}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 2,$$

$$\underline{Las\ rectas\ x = -2\ y\ x = 2\ son\ asíntotas\ verticales\ de\ la\ función}.$$

La función $f(x)$ no tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las asíntotas horizontales.

b)

Para $x = 1 \Rightarrow f(1) = \frac{1^2+4}{1^2-4} = \frac{5}{-3}$.

El punto de tangencia es: $P\left(1, -\frac{5}{3}\right)$.

La pendiente de la tangente de la gráfica de una función en un punto es el valor de la derivada en ese punto.

$$f'(x) = \frac{2x\cdot(x^2-4)-(x^2+4)\cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{2x[(x^2-4)-(x^2+4)]}{(x^2-4)^2} = \frac{-16x}{(x^2-4)^2}.$$

$$m = f'(1) = \frac{-16\cdot 1}{(1^2-4)^2} = \frac{-16}{9} \Rightarrow m = -\frac{16}{9}.$$

La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$, que aplicada al punto $P(0, -1)$ con $m = 1$ es:

$$\underline{La\ recta\ tangente\ es\ t \equiv 16x + 9y - 1 = 0}.$$

Problema 5:

5º) De entre todos los números reales no negativos y menores o iguales a 10 se buscan dos números tales que el doble del primero menos el segundo no pase de 10 y que el triple del primero más el doble del segundo sea al menos 12. Además, se desea que su suma sea lo menor posible. ¿Cuáles son estos números? ¿Cuál es la suma mínima obtenida?

Solución:

Sean los números buscados x, y.

Las limitaciones del ejercicio son las siguientes: $\left.\begin{array}{r} 2x - y \leq 10 \\ 3x + 2y \geq 12 \\ 0 < x \leq 10 \\ 0 < y \leq 10 \end{array}\right\}$.

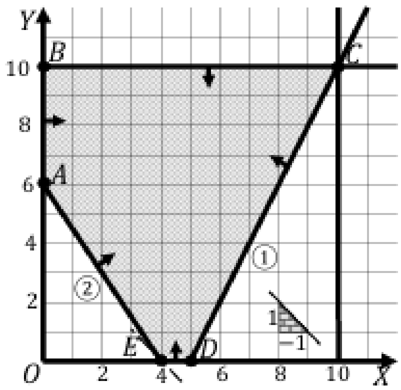
① $\Rightarrow 2x - y \leq 10 \Rightarrow y \geq 2x - 10 \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	5	8
y	0	6

② $\Rightarrow 3x + 2y \geq 12 \Rightarrow y \geq \frac{12-3x}{2} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow No.$

x	4	0
y	0	6

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.



Los vértices de la región factible son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 0 \\ 3x + 2y = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow 2y = 6;\ \ y = 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow A(0,6).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 0 \\ y = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow B(0,10).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 10 \\ y = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow C(10,10).$

$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 0 \\ 2x - y = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x = 10;\ \ x = 5 \Rightarrow D(5,0).$

$E \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 0 \\ 3x + 2y = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x = 12;\ \ x = 4 \Rightarrow E(4,0).$

La función de objetivos: $f(x,y) = x + y.$

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,6) = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 6 = 0 + 6 = 6.$

$B \Rightarrow f(0,10) = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 10 = 0 + 10 = 10.$

$C \Rightarrow f(10,10) = 1 \cdot 10 + 1 \cdot 10 = 10 + 10 = 20.$

$D \Rightarrow f(5,0) = 1 \cdot 5 + 1 \cdot 0 = 5 + 0 = 5.$

$E \Rightarrow f(4,0) = 1 \cdot 4 + 1 \cdot 0 = 4 + 0 = 4.$

El valor mínimo se produce en el punto E.

También se hubiera obtenido el punto E por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,y) = x + y = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{1}x \Rightarrow m = -\frac{1}{1}.$

$\underline{Los\ números\ pedidos\ son\ x = 4\ e\ y = 0}.$

Problema 6:

6º) En una tienda de música se tienen 70 instrumentos distribuidos en tres tipos: guitarras, pianos y violines. Se sabe que la cantidad de pianos más la cantidad de violines es igual a la cantidad de guitarras. Si tuviéramos el mismo número de violines, pero el doble de pianos y cuatro veces el de guitarras, el total de instrumentos en la tienda sería de 180. Plantee un sistema de ecuaciones y determine el número de instrumentos de cada tipo en la tienda.

Solución:

Sean x, y, z el número de guitarras, pianos y violines que tienen en el tienda de música, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=70 \\ y+z=x \\ 4x+2y+z=180 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y+z=70 \\ x-y-z=0 \\ 4x+2y+z=180 \end{array}\right\}.$$

Resolviendo por el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 180 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 - 4F_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 0 & -2 & -2 & -70 \\ 0 & -2 & -3 & -100 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} F_2 \to -\frac{1}{2}F_2 \\ F_3 \to -F_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 0 & 1 & 1 & 35 \\ 0 & 2 & 3 & 100 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_3 \to F_3 - 2F_2\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 0 & 1 & 1 & 35 \\ 0 & 0 & 1 & 30 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow z = 30.$ $\quad y + 30 = 35;\ \ y = 5.$ $\quad x + 5 + 30 = 70;\ \ x = 35.$

$$\underline{En\ la\ tienda\ hay\ 35\ guitarras, 5\ pianos\ y\ 30\ violines}.$$

Problema 7:

7º) Se considera de ecuaciones lineales $\left.\begin{array}{r} 2x + y + 3z = 2 \\ 3x + y + z = 0 \\ 8x + ay + 5z = 2 \end{array}\right\}$, dependiente del parámetro $a \in R$:

a) Discuta el sistema para los diferentes valores de a.

b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 3$.

Solución:

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 8 & a & 5 \end{pmatrix} \ y \ M' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 8 & a & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 8 & a & 5 \end{vmatrix} = 10 + 9a + 8 - 24 - 2a - 15 = 0; \ -21 + 7a = 0;$$

$-7 + a = 0 \Rightarrow a = 3.$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$\underline{Para\ a \neq 3 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$

$$Para\ a = 3 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1 + 2F_2 = F_3\} \Rightarrow Rang\ M' = 2.$$

$\underline{Para\ a = 3 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$

b)

Para $a = 3$ el sistema resulta $\left\{\begin{array}{l} 2x + y + 3z = 2 \\ 3x + y + z = 0 \\ 8x + 3y + 5z = 2 \end{array}\right.$, que es compatible indeterminado. Para su resolución se desprecia una ecuación (por ejemplo, la tercera) y se hace $z = \lambda$.

$$\left.\begin{array}{l} 2x + y = 2 - 3\lambda \\ 3x + y = -\lambda \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -2x - y = -2 + 3\lambda \\ 3x + y = -\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow x = -2 + 2\lambda.$$

$y = -3x - \lambda = 6 - 6\lambda - \lambda \Rightarrow y = 6 - 7\lambda.$

$$\underline{Solución: x = -2 + 2\lambda, y = 6 - 7\lambda, z = \lambda, \forall \lambda \in R.}$$

Problema 8:

8º) La observación meteorológica para los días de otoño en Madrid establece que el día está nublado en un 50 % de las ocasiones y que la temperatura baja de los 10 grados un 7 % de los días. Además, el 35 % de los días son nublados o la temperatura baja de los 10 grados. Escogiendo un día de otoño al azar, calcule la probabilidad de que:

a) Este nublado y la temperatura baje de los 10 grados.

b) No esté nublado, sabiendo que la temperatura no baja de los 10 grados.

Solución:

$$Datos: P(N) = 0{,}50;\ \ P(<10) = 0{,}07;\ \ P(N \cup <10) = 0{,}35.-$$

a)

$$P(N \cup <10) = P(N) + P(<10) - P(N \cap <10) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(N \cap <10) = P(N) + P(<10) - P(N \cup <10) = 0{,}50 + 0{,}07 - 0{,}35 =$$

$$= 0{,}57 - 0{,}35 \Rightarrow \underline{P(N \cap <10) = 0{,}22}.$$

b)

$$P = P\left(\overline{N}/\overline{<10}\right) = \frac{P\left(\overline{N} \cap \overline{<10}\right)}{P\left(\overline{<10}\right)} = \frac{P\left(\overline{N \cup <10}\right)}{1 - P(<10)} = \frac{1 - P(N \cup <10)}{1 - P(<10)} = \frac{1 - 0{,}35}{1 - 0{,}07} = \frac{0{,}65}{0{,}93} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{P = P\left(\overline{N}/\overline{<10}\right) = 0{,}6989}.$$

Problema 9:

9º) El porcentaje de aprobados en asignaturas de primer año en la universidad española se puede aproximar por una variable aleatoria normal de media μ y desviación típica $\sigma = 8$ puntos porcentuales.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 20 asignaturas de primer año se obtienen que el porcentaje medio de aprobados en la muestra es de 65 puntos porcentuales. Determine un intervalo de confianza al 99 % para μ.

b) Suponga que $\mu = 67$ puntos porcentuales. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 10 asignaturas la media muestral, $\overline{X}$, esté comprendida entre 65 y 69 puntos porcentuales.

Solución:

a)

Para un nivel de confianza del 99 % es:

$1 - \alpha = 0{,}99 \rightarrow \alpha = 1 - 0{,}99 = 0{,}01 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}005} = 2{,}575.$
$(1 - 0{,}005 = 0{,}9950 \rightarrow z = 2{,}575).$

Datos: $n = 20;\ \overline{x} = 65;\ \sigma = 8;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}575.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma$ y n, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$

$\left(65 - 2{,}575 \cdot \frac{8}{\sqrt{20}};\ 65 + 2{,}575 \cdot \frac{8}{\sqrt{20}}\right);$

$(65 - 2{,}575 \cdot 1{,}7889;\ 65 + 2{,}575 \cdot 1{,}7889);\ (65 - 4{,}6063;\ 65 + 4{,}6063).$

$$\underline{I.C._{99\,\%} = (60{,}3937;\ 69{,}6063)}.$$

b)

Datos: $n = 10;\ \mu = 67;\ \sigma = 8.$

$X \rightarrow N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(67; \frac{8}{\sqrt{10}}\right) = N\left(67; \frac{8}{2{,}53}\right).$

Tipificando la variable: $Z = \frac{67-\mu}{2{,}53}.$

$P = P(65 < X < 69) = P\left(\frac{67-65}{2{,}53} < Z < \frac{67-65}{2{,}53}\right) = P\left(\frac{2}{2{,}53} < Z < \frac{-2}{2{,}53}\right) =$

$= P(0{,}79 < Z < -0{,}79) = P(Z < 0{,}79) - P(Z < -0{,}79) =$

$= P(Z < 0{,}79) - [1 - P(Z < 0{,}79)] = P(Z < 0{,}79) - 1 + P(Z < 0{,}79) =$

$= 2 \cdot P(Z < 0{,}79) - 1 = 2 \cdot 0{,}7852 - 1 = 1{,}5704 - 1 = \underline{0{,}5704}.$

Problema 10:

10º) Según los datos del INE, el 45,68 % de las familias españolas tienen una renta mensual de 1.500 a 3.000 euros y el 23,98 % de las familias tienen una renta mensual superior a 3.000 euros. Entre las familias con menos de 1.500 euros mensuales solo el 10 % viaja por vacaciones, si el ingreso es de 1.500 a 3.000 euros mensuales viajan el 40 % y si el ingreso es mayor de 3.000 euros mensuales viajan el 85 %. Eligiendo al azar una familia española, calcule la probabilidad de que:

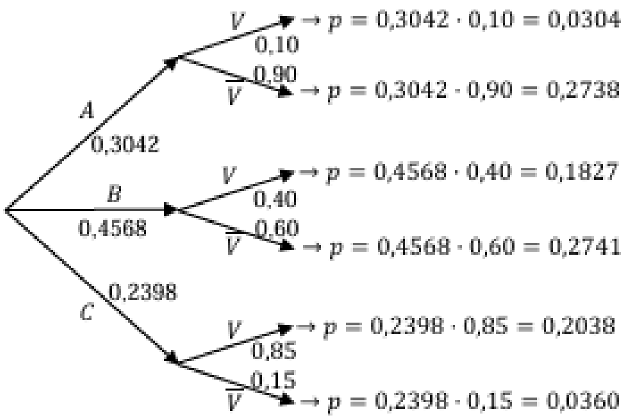
a) Viaje por vacaciones.

b) Sabiendo que viaja por vacaciones, su ingreso mensual sea mayor de 1.500 euros.

Solución:

Sea A el suceso "familias españolas con renta mensual menor de 1.500 euros"; B el suceso "familias españolas con renta mensual entre 1.500 a 3.000 euros" y C el suceso "familias españolas con renta mensual superior a 3.000 euros".

$$100 - 45{,}68 - 23{,}90? = 100 - 69{,}58 = 30{,}42.$$



a)

$$P = P(V) = P(A \cap V) + P(B \cap V) + P(C \cap V) =$$

$$= P(A) \cdot P(V/A) + P(B) \cdot P(V/B) + P(C) \cdot P(V/C) =$$

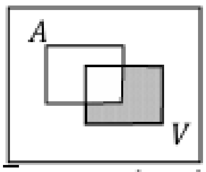
$$= 0{,}3024 \cdot 0{,}10 + 0{,}4568 \cdot 0{,}40 + 0{,}2398 \cdot 0{,}85 = 0{,}0304 + 0{,}1827 + 0{,}2038 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{P(V) = 0{,}4169}.$$

b)

$$P = P(\overline{A}/V) = \frac{P(\overline{A} \cap V)}{P(V)} = \frac{P(V) - P(A \cap V)}{P(V)} = \frac{P(V) - P(A) \cdot P(V/A)}{P(V)} =$$

$$= \frac{0{,}4169 - 0{,}3024 \cdot 0{,}10}{0{,}4169} = \frac{0{,}4169 - 0{,}0304}{0{,}4169} = \frac{0{,}3865}{0{,}4169} = \underline{0{,}9271}.$$



$\overline{A} \cap V = V - (A \cap V)$