MATEMÁTICAS II

Selectividad 2024

Comunidad autónoma de

ASTURIAS

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Juan Antonio Martínez García y Sergio Manso Bravo

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023–2024** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **ORDINARIA** DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

➢Responda en el pliego en blanco a **cuatro preguntas cualesquiera** de entre las ocho que se proponen. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de **2.5 puntos**.

➢Agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos o que no coincidan con las indicadas conllevarán la **anulación** de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s)

Problema 1:

Pregunta 1. En una protectora de animales se dan tres tipos de alimentos a tres razas de perros distintas. Cada perro de la raza 1 consume, por semana, un promedio de 2 unidades del alimento A y 1 unidad del alimento C. Cada perro de la raza 2 consume, por semana, un promedio de 1 unidad del alimento A y 1 unidad del alimento C. El consumo semanal promedio de la raza 3 es de 3 unidades de alimento A, 1 unidad de alimento B y 3 unidades de alimento C. Cada semana se compran 410 unidades del alimento A, 30 unidades del alimento B y 310 del alimento C. Se supone que toda la comida que se proporciona se consume.

(a) **(0.75 puntos)** Plantea un sistema de ecuaciones lineales que modelice este problema y escríbelo matricialmente.

(b) **(1 punto)** ¿Cuántos ejemplares de cada raza puede coexistir en la protectora?

(c) **(0.75 puntos)** Si la raza 2 consumiese 1 unidad del alimento B, ¿existiría otra distribución del número de ejemplares de cada raza que permitiese mantener las unidades compradas cada semana?

Problema 2:

Pregunta 2. Sea $x \in \mathbb{R}$ y las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & x \end{pmatrix}$

(a) **(1.5 puntos)** Da el rg(A) según los valores de x. Para $x = 1$, comprueba que existe A^{-1} y calcúlala.

(b) **(1 punto)** Toma $x = 1$. Supongamos que B es una matriz 3 × 3 con det(B) = 5. Calcula $\det(AB)$. Razona cuál debe ser el valor de $\det\left(\frac{1}{5}AB\right)$

Problema 3:

Pregunta 3. Se considera la función $f(x) = \dfrac{x-4}{1-x}$.

(a) **(1 punto)** Calcula el dominio de la función f y sus asíntotas.

(b) **(1 punto)** Halla en caso de que existan, los máximos y mínimos y puntos de inflexión. Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

(c) **(0.5 puntos)** Utilizando los apartados anteriores, realiza un esbozo de la gráfica de f.

Problema 4:

Pregunta 4. Dada la función $f(x) = sen\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$.

(a) **(1.25 puntos)** Calcula una primitiva que pase por el punto (0, 1).

(b) **(1.25 puntos)** Calcula el área limitada por *f*, el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{2}$.

Problema 5:

Pregunta 5. Dado el punto $A = (0, -1, 1)$ y el plano $\pi \equiv x + y + z + 3 = 0$,

(a) **(1.5 puntos)** Calcula el punto B simétrico de A respecto de π.

(b) **(1 puntos)** Calcula el área del triángulo plano cuyos vértices son A, C = (−2,−3, 1) y el origen de coordenadas.

Problema 6:

Pregunta 6. Se consideran los puntos A = (1, 1, 1), B = (1, 0, 2), C = (–1, 1, 3) y D = (–1, 0, 1).

a) **(0.75 puntos)** Estudia si existe un plano que contenga a los cuatro puntos.

(b) **(0.75 puntos)** Calcula la recta *r* que pasa por D y es perpendicular al plano π que contiene a A, B y C.

(c) **(1 punto)** Calcula el punto P intersección de $r \equiv x + 1 = -y = z - 1$ y $\pi \equiv x - y - z = 1$ del apartado anterior.

Problema 7:

Pregunta 7. En una empresa 55% de los trabajadores han hecho el curso 'ChatGPT'. El 30% de los trabajadores que han hecho este curso también han hecho el curso 'IA', el 40% de los que no han hecho el curso 'ChatGPT' han realizado el curso 'IA'.

(a) **(1.25 puntos)** Tomado un trabajador al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya realizado el curso 'IA'?

(b) **(1.25 puntos)** Si un trabajador elegido al azar no ha hecho el curso 'IA' ¿cuál es la probabilidad de que sí tenga el curso de 'ChatGPT'?

Problema 8:

Pregunta 8. Una empresa cafetera realiza una encuesta a 10000 individuos sobre el tipo de café que compran. Los resultados son: 8000 dicen comprar café torrefacto, 4000 café natural y 3000 ambos tipos de café.

(a) **(0.5 puntos)** Si se elige un individuo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que compre alguno de los dos tipos de café?

(b) **(1 punto)** Se selecciona un individuo y se le pregunta si compra café natural. Se repite la operación 100 veces, pudiendo repetirse el individuo seleccionado. Calcule aproximando por una distribución normal si fuese posible, la probabilidad de que no más de 50 individuos compre café natural.

(c) **(1 punto)** Si en el apartado anterior sólo se seleccionasen 10 individuos, ¿cuál es la probabilidad de que 5 compren café natural?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

En una protectora de animales se dan tres tipos de alimentos a tres razas de perros distintas. Cada perro de la raza 1 consume, por semana, un promedio de 2 unidades del alimento A y 1 unidad del alimento C. Cada perro de la raza 2 consume, por semana, un promedio de 1 unidad del alimento A y 1 unidad del alimento C. El consumo semanal promedio de la raza 3 es de 3 unidades de alimento A, 1 unidad de alimento B y 3 unidades de alimento C. Cada semana se compran 410 unidades del alimento A, 30 unidades del alimento B y 310 del alimento C. Se supone que toda la comida que se proporciona se consume.

(a) **(0.75 puntos)** Plantea un sistema de ecuaciones lineales que modelice este problema y escríbelo matricialmente.

(b) **(1 punto).** ¿Cuántos ejemplares de cada raza puede coexistir en la protectora?

(c) **(0.75 puntos)** Si la raza 2 consumiese 1 unidad del alimento B, ¿existiría otra distribución del número de ejemplares de cada raza que permitiese mantener las unidades compradas cada semana?

Solución:

(a) Llamamos: $\begin{cases} \boldsymbol{x = \text{"nº de perros raza 1"}} \\ \boldsymbol{y = \text{"nº de perros raza 2"}} \\ \boldsymbol{z = \text{"nº de perros raza 3"}} \end{cases}$,

Para el alimento A se consume: por la raza 1 son '2x', por la raza 2 'y' mientras que por la raza 3 son '3z', como se tiene 410 unidades del alimento A se tiene la ecuación:

$$\boldsymbol{2x + y + 3z = 410}$$

Para la raza B: $\boldsymbol{z = 30}$

Y para la C: $\boldsymbol{x + y + 3z = 310}$

Por lo que tenemos el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} \boldsymbol{2x + y + 3z = 410} \\ \boldsymbol{z = 30} \\ \boldsymbol{x + y + 3z = 310} \end{cases}$

Matricialmente: $\boldsymbol{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 410 \\ 30 \\ 310 \end{pmatrix}}$

(b) Haremos eliminación gaussiana para discutir el sistema.

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 410 \\ 0 & 0 & 1 & 30 \\ 1 & 1 & 3 & 310 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 310 \\ 0 & 0 & 1 & 30 \\ 2 & 1 & 3 & 410 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to F_3 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 310 \\ 0 & 0 & 1 & 30 \\ 0 & -1 & -3 & -210 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 310 \\ 0 & -1 & -3 & -210 \\ 0 & 0 & 1 & 30 \end{array}\right)$$

De $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 310 \\ 0 & -1 & -3 & -210 \\ 0 & 0 & 1 & 30 \end{array}\right)$ tenemos

$\rightarrow x + y + 3z = 310 \;\Leftrightarrow x + 120 + 3 \cdot 30 = 310 \Leftrightarrow x = 100$
que:$\rightarrow -y - 3z = -210 \Leftrightarrow y = -3 \cdot 30 + 210 \Leftrightarrow y = 120$
$\rightarrow z = 30$

(c) Si la raza 2 consume 1 unidad del alimento B, el sistema se transforma en:

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 410 \\ y + z = 30 \\ x + y + 3z = 310 \end{cases}$$

Con lo que la resolución por eliminación gaussiana quedará:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 410 \\ 0 & 1 & 1 & 30 \\ 1 & 1 & 3 & 310 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 310 \\ 0 & 1 & 1 & 30 \\ 2 & 1 & 3 & 410 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \rightarrow F_3 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 310 \\ 0 & 1 & 1 & 30 \\ 0 & -1 & -3 & -210 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \rightarrow +F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 310 \\ 0 & 1 & 1 & 30 \\ 0 & 0 & -2 & -180 \end{array}\right)$$

De $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 310 \\ 0 & 1 & 1 & 30 \\ 0 & 0 & -2 & -180 \end{array}\right)$ tenemos

$\rightarrow x + y + 3z = 310$
que:$\rightarrow y + z = 30 \Leftrightarrow y = 30 - 90 \Leftrightarrow y = -60$
$\rightarrow 2z = 180 \Leftrightarrow \; z = 90$

Como y=" nº de perros de la raza 2" debe ser positivo, concluimos que no es posible este supuesto.

Problema2:

Sea $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$ y la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{-2} & \boldsymbol{-2} \\ \boldsymbol{-2} & \boldsymbol{-3} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{2} & \boldsymbol{x} \end{pmatrix}$

(a) **(1.5 puntos)** Da el $rg(A)$ según los valores de x. Para x = 1, comprueba que existe A^{-1} y calcúlala.

(b) **(1 punto)** Toma $x = 1$. Supongamos que B es una matriz $3 \times 3\; con\; det(B) = 5$. Calcula $det(AB)$. Razona cuál debe ser el valor de $det\left(\frac{1}{5}AB\right)$

Solución:

(a) Calculo el $\boldsymbol{det(A)}$ para obtener los valores de x que lo anulan.

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{-2} & \boldsymbol{-2} \\ \boldsymbol{-2} & \boldsymbol{-3} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{2} & \boldsymbol{x} \end{vmatrix} = \boldsymbol{3x + 8 - 6 - 4x = 2 - x}$$

$|\boldsymbol{A}| = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow x = 2$

Caso 1: $x \neq \boldsymbol{2} \Rightarrow |\boldsymbol{A}| \neq \boldsymbol{0}$ y por lo tanto el $rgA = 3$

Caso 2: $x = 2 \Rightarrow \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{-2} & \boldsymbol{-2} \\ \boldsymbol{-2} & \boldsymbol{-3} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{2} & \boldsymbol{2} \end{pmatrix}$ y el $rgA = 2$ ya que el $\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -7 \neq \boldsymbol{0}$

$$\textbf{Si } \boldsymbol{x \neq 2 \Rightarrow rgA = 3}; \textbf{ Si } \boldsymbol{x = 2 \Rightarrow rgA = 2}$$

(b) Si $x = 1$, entonces $|\boldsymbol{A}| = 2 - 1 = 1$

$|\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}| = 1 \cdot 5 = 5$

$\left|\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{5}}\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}\right| = \left(\frac{1}{5}\right)^3 |\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}| = \frac{5}{125} = \frac{1}{25}$

$$\left|\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{5}}\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}\right| = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{25}}$$

Problema 3.

Se considera la función $f(x) = \frac{x-4}{1-x}$

(a) **(1 punto)** Calcula el dominio de la función f y sus asíntotas.
(b) **(1 punto)** Halla en caso de que existan, los máximos y mínimos y los puntos de inflexión. Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
(c) **(0.5 puntos)** Utilizando los apartados anteriores, realiza un esbozo de la gráfica de f.

Solución:

(a) $Dom\ f(x) = \{x \in \mathbb{R}\ /1 - x \neq 0\} = \ \mathbb{R} - \{1\}$ Todos los reales excepto el 1. (por ser fracción algebraica)

$\mathbf{A.V.}$: Hay una asíntota vertical en $x = 1$ ya que no está en el dominio de la función racional algebraica. Calculemos los limites laterales en $x = 1$ para el esbozo de la gráfica.

- $$\lim_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x-4}{1-x} = \frac{1^- -4}{1-1^-} = \frac{1^- -4}{0^+} = \frac{-3}{0^+} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x-4}{1-x} = \frac{1^+ -4}{1-1^+} = \frac{1^+ -4}{0^-} = \frac{-3}{0^-} = +\infty \end{cases},$$

$\boldsymbol{A.H.}$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x-4}{1-x} = -1 \text{ ya que el orden del polinomio del numerador es igual que el denominador} \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x-4}{1-x} = -1 \text{ ya que el orden del polinomio del numerador es igual que el denominador} \end{cases}$$

Por lo tanto, hay una $A.H.\,en\ y = -1$

(b) Calculamos primero la derivada de $f(x) = \frac{x-4}{1-x}$

$$f'(x) = \frac{(1-x)-(x-4)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1-x+x-4}{(1-x)^2} = \frac{-3}{(1-x)^2}$$

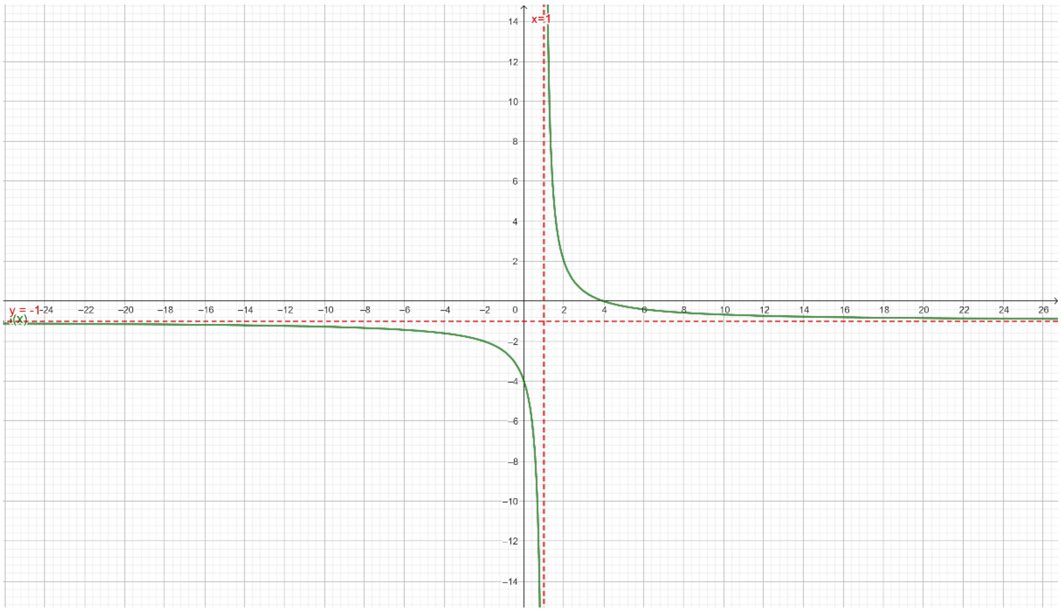
$f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in\ \mathbb{R}$ y además $f'(x) < 0\ \forall x \in\ \mathbb{R}$ por lo tanto la función **$f(x)$ no tiene puntos críticos y es decreciente en todo su dominio**

$f''(x) = \frac{-3\cdot 2(1-x)(-1)}{(1-x)^4} = \frac{6(1-x)}{(1-x)^4} = 0\ \Leftrightarrow x = 1$ que es el punto asintótico:

Estudiar el signo de la segunda derivada es estudiar el signo del numerador ya que el denominador esta elevado a una potencia par por lo que para $x \neq 1$ es siempre positivo:

	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
$1-x$	$+$	$-$
$f''(x)$	$\circlearrowleft$ $concava$	$\curvearrowright$ $convexa$

(c)



Problema 4.

Dada la función $f(x) = sen\,(\frac{\pi}{2} - 2x)$.

(a) **(1.25 puntos)** Calcula una primitiva que pase por el punto $(0,1)$

(b) **(1.25 puntos)** Calcula el área limitada por f, el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{2}$

Solución:

(a) $\boldsymbol{F(x) = \int sen\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)dx = \frac{1}{2}cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + C}$

Como $\boldsymbol{F(0) = 1}$ entonces se ha de cumplir que:

$\boldsymbol{\frac{1}{2}cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + C = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}cos\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) + C = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot 0 + C = 1 \Leftrightarrow C = 1}$, por lo tanto, la primitiva será

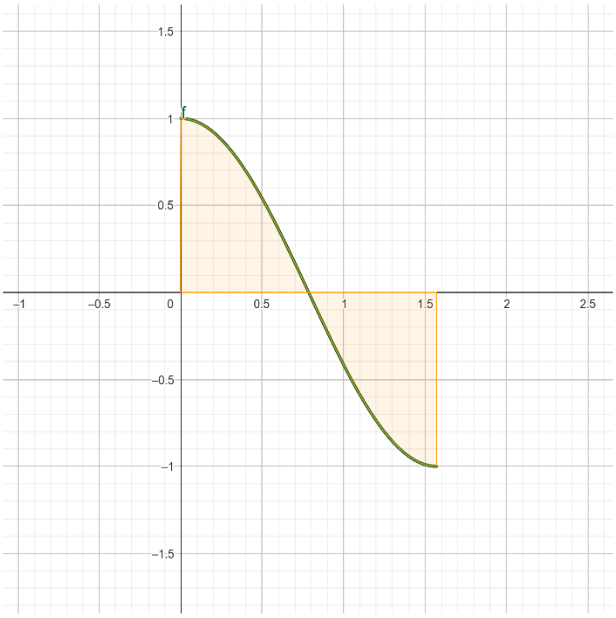
$$\boldsymbol{F(x) = \frac{1}{2}cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + 1}$$

(b) El área limitada es la integral definida:

$$A = \int_0^{\pi/2}\left|sen\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)\right|dx, \quad y \;\; como\; 0 < x < {\pi}/{2} \quad \Rightarrow \quad {\pi}/{2} > {\pi}/{2} - 2x > {\pi}/{2}$$

$y\; sen\left({\pi}/{2} - 2x\right) = 0 \Leftrightarrow x = {\pi}/{4}$, por lo tanto, el área será:

$$\boldsymbol{A = 2\left|\int_0^{\pi/4} sen\,(\frac{\pi}{2} - 2x)\,dx\right| = 2\left|F({\pi}/{4}) - F(0)\right|}$$
$$\boldsymbol{= 2\left|\frac{\cos(\pi/2 - 2\,{\pi}/{4})}{2} - \frac{\cos(\pi/2 - 0)}{2}\right| = 2\cdot\left|\frac{\cos(0)}{2} - \frac{\cos(\pi/2)}{2}\right|}$$
$$\boldsymbol{= 2\cdot\left|\frac{1}{2} - 0\right| = 1}$$



Problema 5.

Dado el punto $A = (0, -1, 1)$ y el plano $\pi = x + y + z + 3 = 0$.

(a) **(1.5 puntos)** Calcula el punto B simétrico de A respecto de π.

(b) **(1 puntos)** Calcula el área del triángulo plano cuyos vértices son $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C} = (-2, -3, 1)$ y el origen de coordenadas.

Solución:

(a) Para calcular el pto. simétrico de a respecto de $\boldsymbol{\pi}$ construimos primero la recta $\boldsymbol{r}$ tal que: $\begin{cases} \boldsymbol{r} \perp \boldsymbol{\pi} \\ \boldsymbol{A} \in \boldsymbol{r} \end{cases}$,

Tomaremos como vector director de $\boldsymbol{r}$ al vector $\overrightarrow{\boldsymbol{n_\pi}} = (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$ del plano pues queremos que $\boldsymbol{r} \perp \boldsymbol{\pi}$

Así $\boldsymbol{r} \equiv \begin{cases} \boldsymbol{x} = \quad \boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{y} = -\mathbf{1} + \boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{z} = \mathbf{1} + \boldsymbol{\lambda} \end{cases}$, $\boldsymbol{\lambda} \epsilon \mathbb{R}$ (ecuaciones paramétricas). Buscamos ahora el pto. $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{r} \cap \boldsymbol{\pi}$

Un pto cualquiera de r será de la forma $(\boldsymbol{\lambda}, -\mathbf{1} + \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{1} + \boldsymbol{\lambda})$ y para que esté en $\boldsymbol{\pi}$ tendrá que cumplir su ecuación por lo tanto se tiene que cumplir que: $\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{1} + \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{1} + \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{3} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{3}\boldsymbol{\lambda} = -\mathbf{3} \Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda} = -\mathbf{1}$

Entonces el punto $\boldsymbol{P} = (-\mathbf{1}, -\mathbf{2}, \mathbf{0})$. Solo nos falta el punto simétrico de A respecto de π que será:

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} + 2\overrightarrow{\boldsymbol{AP}} = (\mathbf{0}, -\mathbf{1}, \mathbf{1}) + \mathbf{2}(-\mathbf{1}, -\mathbf{1}, -\mathbf{1}) = (-\mathbf{2}, -\mathbf{3}, -\mathbf{1})$$

(b) Para calcular el área del triángulo partiremos del vértice O que facilita mucho las cuentas ya que los vectores $\overrightarrow{\boldsymbol{OA}} = (\mathbf{0}, -\mathbf{1}, \mathbf{1})$ $\boldsymbol{y}$ $\overrightarrow{\boldsymbol{OC}} = (-\mathbf{2}, -\mathbf{3}, -\mathbf{1})$ por lo que:

$$\text{Á}\boldsymbol{rea_T} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{\boldsymbol{OA}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{OC}}\right\| = \left\| \begin{vmatrix} \vec{\boldsymbol{\imath}} & \vec{\boldsymbol{\jmath}} & \vec{\boldsymbol{k}} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{2} & -\mathbf{3} & -\mathbf{1} \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{2}\sqrt{\mathbf{4} + \mathbf{4} + \mathbf{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{\mathbf{12}} = \sqrt{\mathbf{3}}$$

Problema 6.

Se consideran los puntos $A = (1,1,1), B = (1,0,2), C = (-1,1,3)\ y\ D = (-1,0,1)$.

(a)**(0.75 puntos)** Estudia si existe un plano que contenga a los cuatro puntos.

(b)**(0.75 puntos)** Calcula la recta r que pasa por D y es perpendicular al plano π que contiene a $A, B\ y\ C$.

(c) **(1 punto)** Calcula el punto P intersección de $\boldsymbol{r \equiv x+1 = -y = z-1}$ y $\boldsymbol{\pi \equiv x - y - z = 1}$

Solución:

(a) Un plano π contiene a los cuatro puntos si los vectores:

$$\overrightarrow{AB} = (0,-1,1), \overrightarrow{AC} = (-2,0,2)\ y\ \overrightarrow{AD} = (-2,-1,0)\ son\ linealemente\ dependientes$$

Comprobamos la dependencia calculando el det:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \end{vmatrix} = \mathbf{6 \neq 0}, \textbf{ por lo tanto } \nexists \boldsymbol{\pi} \textbf{ un plano que contenga a los cuatro puntos}$$

(b) Primero calculamos el plano $\pi \equiv \{A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$, con la ecuación del plano: que desarrollando por la primera fila:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} X-1 & Y-1 & Z-1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \text{ que desarrollando por la primera fila queda:}$$

$$\pi \equiv (X-1)\cdot(-2) - (Y-1)\cdot 2 + (Z-1)\cdot(-2) = 0$$

$$\boldsymbol{\pi \equiv X + Y + Z - 3 = 0}$$

que tiene como $\overrightarrow{n_\pi} = (1,1,1)$, por lo que la recta s que pasa por $D = (-1,0,1)$ y es perpendicular a π será:

$$s \equiv \begin{cases} x = -1 \mp \alpha \\ y = \quad \alpha \\ z = 1 + \alpha \end{cases}, \alpha \epsilon \mathbb{R}$$

(c) Para calcular el punto que comparten r y π sustituimos en la ecuación del plano las coordenadas de un punto genérico de r que será, según sus ecuaciones paramétricas

$r \equiv \begin{cases} x = -1 \mp \alpha \\ y = \quad -\alpha \\ z = 1 + \alpha \end{cases}, \alpha \epsilon \mathbb{R}$ de la forma $(-1+\alpha, -\alpha, 1+\alpha)$y calculamos el valor de α para que cumpla la ecuación de π:

$$\pi \equiv (-1+\alpha) - \alpha + (1+\alpha) - 3 = 0$$

Donde $\alpha = 3$, $por\ lo\ que\ el\ punto\ será\ \boldsymbol{P = (2, -3, 4)}$

Autores: Juan Antonio Martínez García y Sergio Manso Bravo

Problema 7.

En una empresa 55% de los trabajadores han hecho el curso 'ChatGPT'. El 30% de los trabajadores que han hecho este curso también han hecho el curso 'IA', el 40% de los que no han hecho el curso 'ChatGPT' han realizado el curso 'IA'.

(a) **(1.25 puntos)** Tomado un trabajador al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya realizado el curso 'IA'?

(b) **(1.25 puntos)** Si un trabajador elegido al azar no ha hecho el curso 'IA' ¿cuál es la probabilidad de que sí tenga el curso de 'ChatGPT'?

Solución:

(a) Demos nombres a los sucesos:

Sea $C =$ *"ha hecho el curso de CharGPT"*

$IA =$ *"ha hecho el curso de IA"*

Del enunciado deducimos que: $p(C) = 0{,}55$

$p(IA) = 0{,}55 \quad p(IA/C) = 0{,}30 \;\; p(IA/\bar{C}) = 0{,}30$

Por el teorema de la probabilidad total:

$$\boldsymbol{p(IA) = p(IA \cap C) + p(IA \cap \overline{C}) = p(C) \cdot p(IA/\overline{C}) + p(\overline{C}) \cdot p(IA/\overline{C})}\textbf{=0,55·0,3+0,45·0,4=0,3450}$$

(b) Pide $p(C/\overline{IA}) = \frac{p(C \cap \overline{IA})}{p(\overline{IA})} = \frac{p(C) \cdot p(\overline{IA}/C)}{p(\overline{IA})} = \frac{0{,}55 \cdot (1-0.3)}{1-0{,}3450} = \mathbf{0{,}5878}$ (Aplicando la definición de probabilidad condicionada y calculando la probabilidad del complementario.

Problema 8.

Una empresa cafetera realiza una encuesta a 10000 individuos sobre el tipo de café que compran. Los resultados son: 8000 dicen comprar café torrefacto, 4000 café natural y 3000 ambos tipos de café.

(a) **(0.5 puntos)** Si se elige un individuo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que compre alguno de los dos tipos de café?

(b) **(1 punto)** Se selecciona un individuo y se le Problema si compra café natural. Se repite la operación 100 veces, pudiendo repetirse el individuo seleccionado. Calcule aproximando por una distribución normal si fuese posible, la probabilidad de que no más de 50 individuos compre café natural.

(c) **(1 punto)** Si en el apartado anterior sólo se seleccionasen 10 individuos, ¿cuál es la probabilidad de que 5 compren café natural?

$*$ *Algunos valores de la función de distribución* $N(0,1)$ *son*: $F(x) = P(Z \leq x), F(0) = 0.5, F(0.15) = 0.5596,$

$F(2.0412) = 0.9793, F(0.9793) = 0.8340, F(0.5596) = 0.7112, F(0.6294) = 0.7356, F(0.8159) = 0.7939,$
$F(0.9) = 0.8159, F(1.28) = 0.9.$

Solución:

(a) Sean los sucesos:

$\boldsymbol{T = \text{" } Compra\ café\ torrefacto\text{"}}$, entonces: $\boldsymbol{p(T) = \frac{8000}{10000} = 0,8}$

$\boldsymbol{N = \text{" } Compra\ café\ natural\text{"}}$, entonces: $\boldsymbol{p(N) = \frac{4000}{10000} = 0,4}$

Sabemos también que $\boldsymbol{p(T \cap N) = 0,3}$

Entonces:

$$\boldsymbol{p(compre\ alguno\ de\ los\ dos) = p(N \cup T) = p(T) + p(N) - p(N \cap T) = 8,8 + 0,4 - 0,3 = 0,9}$$

(b) Al repetir un experimento que sólo puede tener éxito (compra café natural) o fracaso (no lo compra) definimos la $\boldsymbol{v.a. X =}$ $\boldsymbol{\text{"}n^{\underline{o}}\ de\ veces\ que\ resulta\ comprar\ café\ natural\ de\ 100\ intentos\text{"}}$ que resulta ser una binomial con $\boldsymbol{n = 100\ y\ p = p(N)}$,

Entonces $\boldsymbol{X \sim B(100, 0,4)}$ con $\boldsymbol{\mu = np = 40\ y\ \sigma = \sqrt{npq} = 4,8990}$

Como $\boldsymbol{n = 100 \geq 30}$, $\boldsymbol{np = 100 \cdot 0,4 = 40 \geq 5}$ y $\boldsymbol{nq = 60 \geq 5}$

entonces podemos aproximar la binomial por una $\boldsymbol{X \sim N(np, \sqrt{npq}) = N(40, 4,8990)}$

Así: $\boldsymbol{p(X \leq 50) = p(X^* \leq 50.5) = p\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{70-\mu}{\sigma}\right) = p\left(Z \leq \frac{50,5-40}{4.8990}\right) = p(Z \leq 2.1433) = F(2.1433)}$

(* corrección por continuidad. No se facilitaba en los datos del problema $\boldsymbol{F(2.1433)}$ por lo que se deja indicado, la respuesta sería correcta con los criterios de corrección del curso 2023-24)

Sin la corrección quedaría:

$$\boldsymbol{p(X \leq 50) = p\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{70-\mu}{\sigma}\right) = p\left(Z \leq \frac{50-40}{4.8990}\right) = p(Z \leq 2.0412) = F(2.0412) = 0,9793}$$

(c) Sea $\boldsymbol{Y = \text{"}n^{\underline{o}}\ de\ veces\ que\ resulta\ comprar\ café\ natural\ de\ 10\ intentos\text{"}}$

$\boldsymbol{Y \sim B(10, 0,4)}$ y $\boldsymbol{p(Y=5) = \binom{10}{5} 0.4^5 \cdot 0.6^{10-5} = 0.2007}$

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023–2024** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

➢Responda en el pliego en blanco a **cuatro preguntas cualesquiera** de entre las ocho que se proponen. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de **2.5 puntos**.

➢Agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos o que no coincidan con las indicadas conllevarán la **anulación** de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s)

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

Pregunta 1. Una fábrica produce tazas, platos y teteras de cerámica. Por cada uno de estos productos se utiliza una cantidad fija de material, que se introduce en la máquina de la cual sale la pieza preparada para el embalaje. En cada taza la máquina utiliza 5 minutos, 4 en cada plato y 8 en cada tetera. El coste del material utilizado es 3 e cada taza, 4 € cada plato y 3 € cada tetera. Se hace un estudio de la producción durante 50 minutos y se calcula que el coste es de 26 €.

(a) **(0.75 puntos)** Plantea un sistema de ecuaciones lineales que modelice el problema y escríbelo matricialmente.

(b) **(1 punto)** Suponiendo que en estos 50 minutos se fabricaron en total exactamente 8 piezas, calcula, si es posible, cuántas unidades se produjeron de cada tipo.

(c) **(0.75 puntos)** Si se consigue rebajar el tiempo de elaboración de cada tetera de 8 a 5 minutos, ¿sería posible fabricar exactamente 10 piezas?

Problema 2:

Pregunta 2. Sea $x \in \mathbb{R}$ y las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & x \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) **(0.75 puntos)** Decide de forma razonada si se pueden realizar las operaciones siguientes CAB y BAC. ¿Cuál sería la dimensión de la matriz resultante si pudiese realizarse?

(b) **(1.75 puntos)** Calcula según los valores de x el rango de A. Para $x = 0$, comprueba que existe A^{-1} y calcúlala.

Problema 3:

Pregunta 3. Se considera la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{1 - x}$.

(a) **(1 punto)** Calcula el dominio de la función f y sus asíntotas.

(b) **(1 punto)** Halla en caso de que existan, los máximos y mínimos y puntos de inflexión. Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

(c) **(0.5 puntos)** Utilizando los apartados anteriores, realiza un esbozo de la gráfica de f.

Problema 4:

Pregunta 4. Dada la función $f(x) = sen(\pi - 2x)$.

(a) **(1.25 puntos)** Calcula una primitiva que pase por el punto $\left(\dfrac{\pi}{2}, 1\right)$.

(b) **(1.25 puntos)** Calcula el área limitada por f, el eje X y las rectas $x = -\dfrac{\pi}{4}$ y $x = \dfrac{\pi}{4}$.

Problema 5:

Pregunta 5. Se consideran los puntos $A = (0, -1, 1)$ y $B = (2, 1, 3)$ de $\mathbb{R}^3$.

(a) **(1.25 puntos)** Encuentra la ecuación del plano π que cumple que los dos puntos son simétricos respecto a él.

(b) **(1.25 puntos)** Encuentra la ecuación continua de la recta r perpendicular al plano $\pi' \equiv x + y + z = 3$ y que contiene al punto $Q = (1, 0, 1)$.

Problema 6:

Pregunta 6. Se consideran los puntos $A = (1,1,1)$, $B = (1,0,2)$, $C = (-1,1,3)$ y $D = (-1,0,1)$.

(a) **(0.75 puntos)** Estudia si existe un plano que contenga a los cuatro puntos.

(b) **(0.75 puntos)** Calcula la recta r que pasa por D y es perpendicular al plano π que contiene a A, B y C.

(c) **(1 punto)** Calcula el punto P intersección de r y π del apartado anterior.

Problema 7:

Pregunta 7. En un instituto el 55% de los estudiantes del curso 2023-2024 hacen el Bachillerato de la modalidad de Ciencias y Tecnología. El 30% de los estudiantes que cursan el Bachillerato de Ciencias y Tecnología cursan como optativa la asignatura 'Proyecto de Investigación Integrado' y de los que no hacen este Bachillerato, el 40% cursan esta asignatura como optativa.

(a) **(1.25 puntos)** Tomado un estudiante al azar del total de matriculados en Bachillerato, ¿cuál es la probabilidad de que curse la asignatura 'Proyecto de Investigación Integrado'?

(b) **(1.25 puntos)** Si un estudiante elegido al azar no cursa la asignatura 'Proyecto de Investigación Integrado', ¿cuál es la probabilidad de que curse el Bachillerato de Ciencias y Tecnología?

Problema 8:

Pregunta 8. En una comunidad autónoma se estudia la cantidad media de basura que se genera por habitante durante dos meses. Se observa que sigue una distribución normal de media 85 Kg y desviación típica 15 Kg.

(a) **(0.75 puntos)** ¿Qué porcentaje de población genera más de 90 Kg cada dos meses?

(b) **(0.75 puntos)** Si se toma una muestra de 10000 habitantes, ¿cuántos generan menos de 90 Kg de basura?

(c) **(1 punto)** Se hace una campaña de concienciación y se observa que de las 10000 personas de la muestra, 5596 generan menos de 70 kg de basura. Suponiendo que se mantiene la desviación típica, ¿cuál es la nueva media? ¿Ha funcionado la campaña?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JULIO

Problema 1:

Una fábrica produce tazas, platos y teteras de cerámica. Por cada uno de estos productos se utiliza una cantidad fija de material, que se introduce en la máquina de la cual sale la pieza preparada para el embalaje. En cada taza la máquina utiliza 5 minutos, 4 en cada plato y 8 en cada tetera. El coste del material utilizado es 3 € cada taza, 4 € cada plato y 3 € cada tetera. Se hace un estudio de la producción durante 50 minutos y se calcula que el coste es de 26 €.

(a) **(0.75 puntos)** Plantea un sistema de ecuaciones lineales que modelice el problema y escríbelo matricialmente.

(b) **(1 punto)** Suponiendo que en estos 50 minutos se fabricaron en total exactamente 8 piezas, calcula, si es posible, cuántas unidades se produjeron de cada tipo.

(c) **(0.75 puntos)** Si se consigue rebajar el tiempo de elaboración de cada tetera de 8 a 5 minutos, ¿sería posible fabricar exactamente 10 piezas?

Solución:

(a) Llamamos: $\begin{cases} x = \text{"nº de tazas"} \\ y = \text{"nº de platos"} \\ z = \text{"nº de teteras"} \end{cases}$ con lo que obtengo las ecuaciones:

$$\begin{cases} 5x + 4y + 8z = 50 \quad (tiempo) \\ 3x + 4y + 3z = 26 \ (coste\ en\ €) \end{cases}$$

Sistema que matricialmente podemos expresar como: $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 8 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 26 \end{pmatrix}$

Si en total produzco 8 piezas quiere decir que $x + y + z = 8$

Por lo que el sistema quedaría: $\begin{cases} x + y + z = 8 \\ 5x + 4y + 8z = 50 \\ 3x + 4y + 3z = 26 \end{cases}$ Matricialmente la matriz ampliada sobre la que

(b) haremos eliminación gaussiana para discutir el sistema.

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 5 & 4 & 8 & 50 \\ 3 & 4 & 3 & 26 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3 - 3F_1]{F_2 \to F_2 - 5F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to F_3 + F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 12 \end{array}\right)$$

Y tenemos una matriz triangular inferior de ceros, es decir con $det \neq 0$ i.e. rgA' $3 =$ nº de incógnitas, por lo que el Sistema es Compatible Determinado

De $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 12 \end{array}\right)$ tenemos que: $\begin{array}{l} \to x + y + z = 8 \ \Leftrightarrow x + 2 + 4 = 8 \Leftrightarrow x = 2 \\ \to y = 2 \\ \to 3z = 12 \ \Leftrightarrow z = 4 \end{array}$

Se fabrican dos tazas, 2 platos y 4 teteras

(c) Si se rebaja el tiempo por tetera de 8 a 5 minutos y suponiendo que el tiempo de elaboración no cambia la ecuación correspondiente al tiempo quedará $5x + 4y + 5z = 50$.

Para saber si sería posible fabricar exactamente 10 piezas veremos si tiene solución el sistema: $\begin{cases} x + y + z = 10 \\ 5x + 4y + 5z = 50 \\ 3x + 4y + 3z = 26 \end{cases}$

Igual que antes hacemos eliminación gaussiana sobre la matriz ampliada del sistema:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 5 & 4 & 5 & 50 \\ 3 & 4 & 3 & 26 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3 - 3F_1]{F_2 \to F_2 - 5F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to F_3 + F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Tenemos que el $rg\, A$ es dos ya que la última fila es de ceros y rgA'=3 ya que el menor $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ tiene determinante $1 \cdot 1 \cdot 2 = 2 \neq 0$ por lo tanto S.I. no hay solución,

No es posible producir 10 piezas exactamente.

Pregunta 2.

Sea x ∈ R y las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & x \end{pmatrix}, B = (1 \quad 1 \quad 2), C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(a) **(0.75 puntos)** Decide de forma razonada si se pueden realizar las operaciones siguientes CAB y BAC. ¿Cuál sería la dimensión de la matriz resultante si pudiese realizarse?

(b) **(1.75 puntos)** Calcula según los valores de x el rango de A. Para $x = 0$, comprueba que existe A^{-1} y calcúlala.

Solución:

(a) El producto se $\boldsymbol{CAB}$ se puede hacer ya que $\boldsymbol{C_{3x3}A_{3x1}B_{1x3} = M_{3x3}}$ el nº de columnas de A coincide con el nº de filas de B lo que daría una matriz $\boldsymbol{3x1}$ que al multiplicar por $\boldsymbol{B}$ que es $\boldsymbol{1x3}$ daría como resultado una matriz $\boldsymbol{3x3}$

El producto se $\boldsymbol{BAC}$ **NO** se puede hacer ya que $\boldsymbol{B_{1x3}A_{3x1}C_{3x3}}$ el producto $\boldsymbol{AC}$ no sería posible

(b) El menor $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ de $\boldsymbol{A}$ tiene $\boldsymbol{det \neq 0}$ por lo que $\boldsymbol{rgA \geq 2}$. Calculamos ahora

$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \boldsymbol{x} \end{vmatrix} = \boldsymbol{12 + 2x\ y\ como\ \exists\ A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0}$ entonces si:

$\boldsymbol{12 + 2x = 0 \Leftrightarrow x = 6}$. Por lo tanto:

Caso 1: Si $\boldsymbol{x = 6 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow rgA = 2}$

Caso 2: Si $\boldsymbol{x \neq 6 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rgA = 3}$

Si $\boldsymbol{x = 0\ el\ rgA = 3 \Rightarrow\ \exists\ A^{-1}}$. La calculamos con la fórmula:

$$A^{-1} = \frac{adj\ A^t}{|A|} = \frac{adj\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t}{12 + 2 \cdot 0} = \frac{\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^t}{12}$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 0 & -6 & 4 \\ 6 & -6 & 2 \end{pmatrix}^t}{12} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 6 & -6 & -6 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}}{12} =$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/3 & 1/6 \end{pmatrix}$$

Pregunta 3.

Se considera la función $f(x) = \frac{x^2-4}{1-x}$

(a) **(1 punto)** Calcula el dominio de la función f y sus asíntotas.
(b) **(1 punto)** Halla en caso de que existan, los máximos y mínimos y los puntos de inflexión. Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
(c) **(0.5 puntos)** Utilizando los apartados anteriores, realiza un esbozo de la gráfica de f.

Solución:

(d) $dom\, f(x) = \{x \in \mathbb{R} \,/ 1-x \neq 0\} = \mathbb{R} - \{1\}$ Todos los reales excepto el 1.

$A.V.$: Hay una asíntota vertical en $x = 1$ ya que no está en el dominio de la función racional algebraica. Calculemos los límites laterales para el esbozo de la gráfica.

- $$\lim_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-4}{1-x} = \frac{(1^-)^2-4}{1-1^-} = \frac{1^- -4}{0^-} = \frac{-3}{0^-} = +\infty \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-4}{1-x} = \frac{(1^+)^2-4}{1-1^+} = \frac{1^+ -4}{0^+} = \frac{-3}{0^+} = -\infty \end{cases},$$

$A.H.$:
$$\begin{cases} \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4}{1-x} = -\infty \text{ ya que el orden del polinomio del numerador es mayor que el denominador} \\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-4}{1-x} = \infty \text{ ya que el orden del polinomio del numerador es mayor que el denominador} \end{cases},$$
por lo tanto no hay AH, veamos si hay A. Oblicuas:

$A.O.: y = mx + n$, donde:

- $$\begin{cases} m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2-4}{1-x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4}{x-x^2} = -1 \\ n = \lim_{x\to-\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-4}{1-x} + x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-4+x-x^2}{1-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-4+x}{1-x} = -1 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{Por\ lo\ tanto\ y = -x - 1\ es\ Asíntota\ Oblicua\ de\ f(x)}$$

(e) Calculamos primero la derivada de $f(x) = \frac{x^2-4}{1-x}$

$$f'(x) = \frac{2x(1-x) - (x^2-4)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{2x - 2x^2 + x^2 - 4}{(1-x)^2} = \frac{-x^2 + 2x - 4}{(1-x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-16}}{-2} \notin \mathbb{R}. \text{ Por lo tanto } f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Así que $f(x)$ no tiene ni máximos ni mínimos y será monótona en todo $\mathbb{R}$, como $f(0) = -4 < 0$ $f(x)$ será decreciente en $\mathbb{R}$

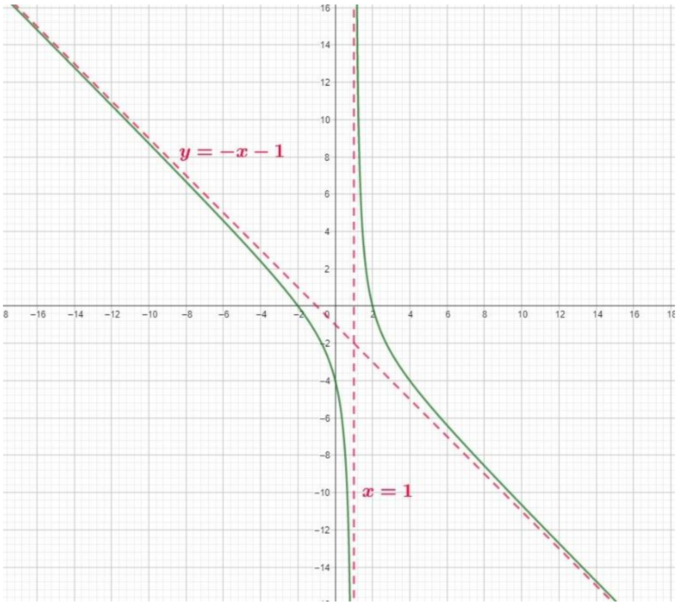
Calculando la segunda derivada e igualando a 0

$$f''(x) = \frac{(-2x+2)(1-x)^2 - (-x^2+2x-4)\cdot 2(1-x)(-1)}{(1-x)^4} = \frac{(1-x)\cdot 6}{(1-x)^4} = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ que es el punto asintótico:}$$

Estudiar el signo de la segunda derivada es estudiar el signo del numerador ya que el denominador esta elevado a una potencia par por lo que para $x \neq 1$ es siempre positivo:

	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
$1-x$	$+$	$-$
$f''(x)$	$\circlearrowleft$ *concava*	$\frown$ *convexa*

(f)



Pregunta 4.

Dada la función $f(x) = |sen\,(\pi - 2x)|$.

(a) **(1.25 puntos)** Calcula una primitiva que pase por el punto $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$

(b) **(1.25 puntos)** Calcula el área limitada por f, el eje X y las rectas $x = -\frac{\pi}{4}$ y $x = \frac{\pi}{4}$

Solución:

(a) $\boldsymbol{F(x) = \int sen\,(\pi - 2x)dx = \frac{-cos\,(\pi - 2x)}{-2}} + C$

Como $\boldsymbol{F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1}$ entonces se ha de cumplir que:

$\boldsymbol{\frac{-cos\,(\pi - 2\frac{\pi}{2})}{-2}} + C = \boldsymbol{1} \Leftrightarrow \boldsymbol{\frac{cos\,0}{2}} + C = \boldsymbol{1} \Leftrightarrow\ C = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$, por lo tanto la primitiva será

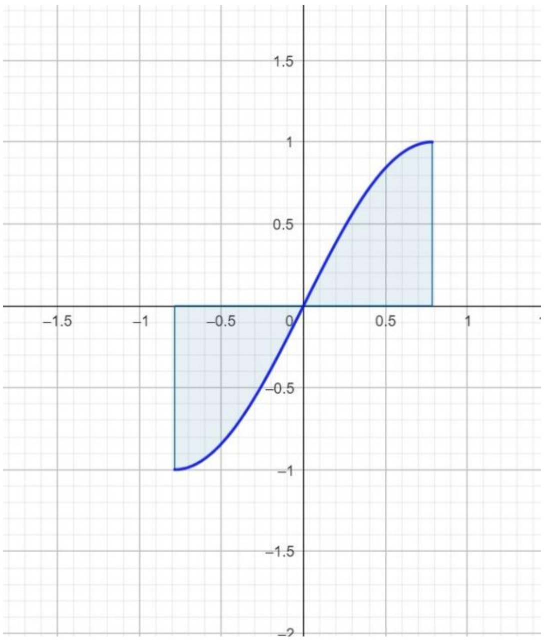
$$\boldsymbol{F(x) = \frac{cos\,(\pi - 2x)}{2} + \frac{1}{2}}$$

(b) El área limitada es la integral definida:

$$A = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} |sen\,(\pi - 2x)|\,dx, \qquad y\ como\ -{}^{\pi}/_{4} < x < {}^{\pi}/_{4} \Rightarrow \boldsymbol{{}^{\pi}/_{2} < \pi - 2x < {}^{3\pi}/_{2}}$$

$y\ sen\,(\pi - 2x) = 0 \Leftrightarrow\ \pi - 2x = \pi\ \Leftrightarrow x = 0$, por lo tanto, el área será:

$$A = 2\left|\int_0^{\pi/4} sen\,(\pi - 2x)\,dx\right| = 2\left|F({}^{\pi}/_{4}) - F(0)\right| = 2\left|\frac{\cos\,(\boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{2}\,{}^{\pi}/_{4})}{2} - \frac{\cos\,(\boldsymbol{\pi} - 0)}{2}\right| = 2 \cdot |0 + 1/2| = 1$$



A = 1 u²

Pregunta 5:

Se consideran los puntos $A = (0, -1, 1)\ y\ B = (2, 1, 3)\ de\ \mathbb{R}^3$.

(a) **(1.25 puntos)** Encuentra la ecuación del plano π que cumple que los dos puntos son simétricos respecto a él.

(b) **(1.25 puntos)** Encuentra la ecuación continua de la recta r perpendicular al plano $\pi' \equiv x + y + z = 3$ y que contiene al punto $Q = (1, 0, 1)$.

Solución:

(a) El plano que es simétrico respecto los dos puntos será un plano que pase por $M = \frac{A+B}{2} = (1,0,2)$, su punto medio y con vector normal $\overrightarrow{n_\pi} = \overrightarrow{AB} = (2,2,2)$, por lo tanto π, tendrá con ecuación:

$$\pi \equiv 2X + 2Y + 2Z + D = 0\ \ y\ como\ M \in \pi, entonces:$$
$$2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + D = 0\ \Leftrightarrow D = -6, por\ tanto$$
$$\pi \equiv 2X + 2Y + 2Z - 6 = 0$$

$$\boldsymbol{\pi \equiv X + Y + Z - 3 = 0}$$

(b) r tendrá como vector director al vector normal del plano π' , que es $\overrightarrow{n_{\pi'}} = (1,1,1)$ y además pasa por el punto $Q = (1, 0, 1)$. Por lo que la ecuación continua de r será:

$$\boldsymbol{r \equiv \frac{X-1}{1} = \frac{Y}{1} = \frac{Z-1}{1}}$$

Pregunta 6.

Se consideran los puntos $A = (1,1,1), B = (1,0,2), C = (-1,1,3)$ y $D = (-1,0,1)$.

(a) **(0.75 puntos)** Estudia si existe un plano que contenga a los cuatro puntos.
(b) **(0.75 puntos)** Calcula la recta r que pasa por D y es perpendicular al plano π que contiene a A, B y C.
(c) **(1 punto)** Calcula el punto P intersección de r y π del apartado anterior.

Solución:

(d) Un plano π contiene a los cuatro puntos si los vectores:

$$\overrightarrow{AB} = (0,-1,1), \overrightarrow{AC} = (-2,0,2)\ y\ \overrightarrow{AD} = (-2,-1,0)\ son\ linealemente\ dependientes$$

Comprobamos la dependencia calculando el det:

$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 4 + 2 = 6$, por lo tanto:

***No existe* π un plano que contenga a los cuatro puntos**

(e) Primero calculamos el plano $\pi \equiv \{A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$, con la ecuación del plano:

$\pi \equiv \begin{vmatrix} X-1 & Y-1 & Z-1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$ que desarrollando por la primera fila:

$$\pi \equiv (X-1)\cdot(-2) - (Y-1)\cdot 2 + (Z-1)\cdot(-2) = 0$$

$\boldsymbol{\pi \equiv X + Y + Z - 3 = 0}$, que tiene como $\overrightarrow{n_\pi} = (1,1,1)$, por lo que la recta r que pasa por $D = (-1,0,1)$ y es perpendicular a π será:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 - \alpha \\ y = \quad \alpha\ , \alpha \epsilon \mathbb{R} \\ z = 1 + \alpha \end{cases}$$

(f) Para calcular el punto que comparten r y π sustituimos en la ecuación del plano las coordenadas de un punto genérico de r y calculamos el valor de α para que cumpla la ecuación de π:

$$\pi \equiv (1-\alpha) + \alpha + (1+\alpha) - 3 = 0$$

Donde $\alpha = 1$,

$$\boldsymbol{por\ lo\ que\ el\ punto\ será\ P = (0,1,2)}$$

Pregunta 7.

En un instituto el 55% de los estudiantes del curso 2023-2024 hacen el Bachillerato de la modalidad de Ciencias y Tecnología. El 30% de los estudiantes que cursan el Bachillerato de Ciencias y Tecnología cursan como optativa la asignatura 'Proyecto de Investigación Integrado' y de los que no hacen este Bachillerato, el 40% cursan esta asignatura como optativa.

(a) **(1.25 puntos)** Tomado un estudiante al azar del total de matriculados en Bachillerato, ¿cuál es la probabilidad de que curse la asignatura 'Proyecto de Investigación Integrado'?

(b) **(1.25 puntos)** Si un estudiante elegido al azar no cursa la asignatura 'Proyecto de Investigación Integrado, ¿cuál es la probabilidad de que curse el Bachillerato de Ciencias y Tecnología?

Solución:

(a) Demos nombre a los sucesos:

Sea $C =$ ”$cursar\ el\ bachillerato\ de\ ciencias\ y\ tecnología\ en\ el\ curso$ $2023 - 24$”

$I =$ ”$cursar\ la\ optativa$:'$Proyecto\ de\ investigación\ integrado$'”

Entonces: $p(C) = 0{,}55 \quad p(C/I) = 0{,}30$

$P(\bar{C}) = 0{,}45 \quad p(\bar{C}/I) = 0.40$

¿$p(I)$?

Por el teorema de la probabilidad total:

$\boldsymbol{p(I)} = p(C \cap I) + p(\bar{C} \cap I) = p(C) \cdot p(C\ /\ I) + p(\bar{C}) \cdot\ p(\bar{C}\ /\ I) = 0{,}55 \cdot 0{,}30 + 0{,}45 \cdot 0{,}4 = 0{,}165 + 0{,}18 = \mathbf{0{,}345}$

(b) Se pregunta $\boldsymbol{p(C/\bar{I})} = \frac{p(C \cap \bar{I})}{p(\bar{I})} = \frac{p(C) \cdot p(\bar{I}/C)}{1 - p(I)} = \frac{0{,}55 \cdot (1 - 0{,}30)}{1 - 0{,}345} = \mathbf{0{,}5878}$

Autores: Juan Antonio Martínez García y Sergio Manso Bravo

Pregunta 8.

En una comunidad autónoma se estudia la cantidad media de basura que se genera por habitante durante dos meses. Se observa que sigue una distribución normal de media 85 Kg y desviación típica 15 Kg.

(a) **(0.75 puntos)** ¿Qué porcentaje de población genera más de 90 Kg cada dos meses?
(b) **(0.75 puntos)** Si se toma una muestra de 10000 habitantes, ¿cuántos generan menos de 90 Kg de basura?
(c) **(1 punto)** Se hace una campaña de concienciación y se observa que, de las 10000 personas de la muestra, 5596 generan menos de 70 kg de basura. Suponiendo que se mantiene la desviación típica, ¿cuál es la nueva media? ¿Ha funcionado la campaña?

* Algunos valores de la función de distribución $N(0,1) son$: $F(x) = P(Z \le x), F(0) = 0.5, F(0.15) = 0.5596, F(0.3333) = 0.6294, F(0.385) = 0.65, F(0.5596) = 0.7112, F(0.6294) = 0.7356, F(0.8159) = 0.7939, F(0.9) = 0.8159, F(1.28) = 0.9$.

Solución:

Sea $x =$ "*Cantidad, en kg, de basura generada por habitante durante dos meses*", entonces según el enunciado $X \sim N(85,15)$

(a) Calculamos $\boldsymbol{p(X \ge 90)} = p\left(\frac{X-85}{15} \ge \frac{90-85}{15}\right) = p(Z \ge 0{,}3333) = 1 - F(0{,}3333) = 1 - 0{,}6294 = \mathbf{0{,}3706}$
Donde $Z \sim N(0,1)$, es decir el 37,06% de la población generará más de $90kg$.

(b) Si tomamos una muestra de tamaño $n = 10000$ significa que repetimos el experimento 10000 veces y la $p(X \le 90) = 1 - p(X \ge 90) = 1 - 0{,}3706 = 0{,}6294$, es decir que $10000 \cdot 0{,}6294 = 6294\ personas\ generaran\ menos\ de\ 90kg\ de\ basura\ de\ las\ 10000$

(c) Observamos que $p(X \le 70) = \frac{5596}{10000} = 0{,}5596$, si $\sigma = 15$ como antes veamos cual será la nueva μ

De $p(X \le 70) = 0{,}5596$ al tipificar ... $p\left(\frac{X-\mu}{15} \le \frac{70-\mu}{15}\right) = p\left(Z \le \frac{70-\mu}{15}\right) = \boldsymbol{F}\left(\frac{\mathbf{70}-\boldsymbol{\mu}}{\mathbf{15}}\right) = \mathbf{0{,}5596}$

Y ya que $F(0{,}15) = 0{,}5596$, entonces $\frac{70-\mu}{15} = 0{,}15 \Leftrightarrow \boldsymbol{\mu} = \mathbf{67{,}75}$