MATEMÁTICAS II

Selectividad 2022

Comunidad autónoma de

NAVARRA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES

Realiza cuatro preguntas de las ocho que se presentan.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

1º) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible.

$$\begin{cases} x+(a^2-2a)y-z=-a^2 \\ x+(a^2-4)y+(2a-3)z=-a^2-2a \\ x+(a^2-4a+4)y+(a^2-2a)z=-a^2+a-1 \end{cases}.$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

2º) Calcula los valores de t para los que la matriz $A^{26}+A^{25}$ es matriz singular, siendo $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & t-1 \end{pmatrix}$.

3º) Calcula la ecuación continua de la recta t que pasa por el punto $T(1,-5,3)$ y corta a las rectas $r \equiv \begin{cases} -x-y-z+3=0 \\ 3x+z-10=0 \end{cases}$ y $s \equiv \frac{x}{-2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{1}$.

4º) Calcula la ecuación continua de la recta s que pasa por el punto $P(1,2,-1)$, es paralela al plano $\pi \equiv 2x-y+z=0$ y corta a la recta $r \equiv \begin{cases} x-y+2z+2=0 \\ 3x-y-z-3=0 \end{cases}$.

5º) Calcula las siguientes integrales definidas:

$$I_1=\int \frac{dx}{2x\sqrt{x-1}} \text{ e } I_2=\int (3-2x)\cdot e^{-2x}\cdot dx.$$

6º) Se considera la función $f(x)=e^{\frac{1}{sen\, x+\cos x}}$:

$a)$ Estudia la continuidad de la función en el intervalo $[0,\pi]$.

$b)$ Halla su extremo relativo en ese mismo intervalo.

7º) Sea la función $f(x)=\frac{e^{x^2-2}}{x}$.

$a)$ Demuestra que la función es continua en el intervalo $[-2,-1]$.

$b)$ Comprueba que existe un valor $a \in (-2,-1)$ tal que $f'(a)=e$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

8º) Encuentra los dos puntos en que se cortan las gráficas de estas dos funciones: $f(x)=2-|x|$ y $g(x)=x^2-10$. Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

1º) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible.

$$\begin{cases} x+(a^2-2a)y-z=-a^2 \\ x+(a^2-4)y+(2a-3)z=-a^2-2a \\ x+(a^2-4a+4)y+(a^2-2a)z=-a^2+a-1 \end{cases}.$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

SOLUCIÓN

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & a^2-2a & -1 \\ 1 & a^2-4 & 2a-3 \\ 1 & a^2-4a+4 & a^2-2a \end{pmatrix}\ y$$

$$M'=\begin{pmatrix} 1 & a^2-2a & -1 & -a^2 \\ 1 & a^2-4 & 2a-3 & -a^2-2a \\ 1 & a^2-4a+4 & a^2-2a & -a^2+a-1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & a^2-2a & -1 \\ 1 & a^2-4 & 2a-3 \\ 1 & a^2-4a+4 & a^2-2a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & a(a-2) & -1 \\ 1 & (a+2)(a-2) & 2a-3 \\ 1 & (a-2)^2 & a^2-2a \end{vmatrix}=$$

$$=(a-2)\begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ 1 & a+2 & 2a-3 \\ 1 & a-2 & a^2-2a \end{vmatrix}=$$

$$=(a-2)\cdot[a(a+2)(a-2)-a+2+a(2a-3)+a+2-a^2(a-2)-$$

$$-(a-2)(2a-3)]=$$

$$=(a-2)\cdot[a(a^2-4)+4+2a^2-3a-a^3+2a^2-2a^2+3a+4a-6]=$$

$$=(a-2)\cdot[a^3-4a-a^3+2a^2+4a-2]=(a-2)(2a^2-2)=$$

$$=2(a-2)(a^2-1)=0\Rightarrow a_1=-1, a_2=1, a_3=2.$$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$\boldsymbol{Para\begin{cases} a\neq -1 \\ a\neq 1 \\ a\neq 2 \end{cases}\Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=n^{\underline{o}}\ incóg.\Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a=-1\Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 3 & -3 \end{pmatrix}\Rightarrow\{C_2=-3C_4\}\Rightarrow Rang\ M'=2.$$

$$\boldsymbol{Para\ a=-1\Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=2<n^{\underline{o}}\ incóg.\Rightarrow S.C.I.}$$

$$Para\ a=1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & -1\\ 1 & -3 & -1 & -3\\ 1 & 1 & -1 & -1\end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1,C_2,C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & -3 & -3\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix} = 3-1+3-3+3-1=4\neq 0 \Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$Para\ a=2 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -4\\ 1 & 0 & 1 & -8\\ 1 & 0 & 0 & -3\end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1,C_2,C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix}1 & -1 & -4\\ 1 & 1 & -8\\ 1 & 0 & -3\end{vmatrix} = -3+8+4-3=6\neq 0 \Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$\boldsymbol{Para\ \left\{\begin{matrix}a=1\\ a=2\end{matrix}\right\} \Rightarrow Rang\ M=2;\ Rang\ M'=3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

Se resuelve, en primer lugar, para $a\neq -1, a\neq 1\ y\ a\neq 2$:

$$\begin{pmatrix}1 & a^2-2a & -1 & -a^2\\ 1 & a^2-4 & 2a-3 & -a^2-2a\\ 1 & a^2-4a+4 & a^2-2a & -a^2+a-1\end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{matrix}F_2\to F_2-F_1\\ F_3\to F_3-F_1\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}1 & a^2-2a & -1 & -a^2\\ 0 & 2a-4 & 2a-2 & -2a\\ 0 & -2a+4 & a^2-2a+1 & a-1\end{pmatrix} \Rightarrow \{F_3\to F_3+F_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}1 & a^2-2a & -1 & -a^2\\ 0 & 2a-4 & 2a-2 & -2a\\ 0 & 0 & a^2-1 & -a-1\end{pmatrix} \Rightarrow z=\frac{-a-1}{a^2-1}=\frac{-(a+1)}{(a+1)(a-1)} \Rightarrow z=\frac{-1}{a-1}.$$

$$2(a-2)y+2(a-1)z=-2a;\ \ (a-2)y+(a-1)\cdot\frac{-1}{a-1}=-a;$$

$$(a-2)y-1=-a;\ \ (a-2)y=1-a \Rightarrow y=\frac{1-a}{a-2}.$$

$$x+a(a-2)y-z=-a^2;\ \ x+a(a-2)\cdot\frac{1-a}{a-2}-\frac{-1}{a-1}=-a^2;$$

$$x+a-a^2+\frac{1}{a-1}=-a^2;\ x+a+\frac{1}{a-1}=0;\ x=-\frac{1}{a-1}-a \Rightarrow x=\frac{-a^2+a-1}{a-1}.$$

$$\boldsymbol{Solución: x=\frac{-a^2+a-1}{a-1}, y=\frac{1-a}{a-2}, z=\frac{-1}{a-1}, \forall a\in R-\{-1,1,2\}.}$$

Resolvemos ahora para $a=-1$. El sistema resulta $\left.\begin{matrix}x+3y-z=-1\\ x-3y-5z=1\\ x+9y+3z=-3\end{matrix}\right\}$, que es compatible indeterminado. Despreciando una ecuación, por ejemplo, la tercera, y haciendo $z=\lambda$:

$$\left.\begin{matrix}x+3y=-1+\lambda\\ x-3y=1+5\lambda\end{matrix}\right\} \Rightarrow 2x=6\lambda;\ \ x=3\lambda.\quad 3y=-1+\lambda-3\lambda;\ \ y=-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\lambda.$$

$$\boldsymbol{Solución: x=3\lambda, y=-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\lambda, z=\lambda, \forall\lambda\in R.}$$

2º) Calcula los valores de t para los que la matriz $A^{26}+A^{25}$ es matriz singular, siendo $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & t-1\end{pmatrix}$.

SOLUCIÓN

Una matriz es singular cuando no es invertible, es decir: cuando su determinante es cero, por lo cual, tiene que ser $|A^{26}+A^{25}|=0$.

$A^{26}+A^{25}=A^{25}\cdot A+A^{25}\cdot I=A^{25}\cdot(A+I)$.

Teniendo en cuanta que el determinante de un producto de matrices es igual que el producto de los determinantes de las matrices, puede hacerse lo siguiente:

$|A^{26}+A^{25}|=|A^{25}\cdot(A+I)|=|A^{25}|\cdot|(A+I)|=0.\quad (*)$

Teniendo en cuenta que $|A|=\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & t-1\end{vmatrix}=1$, sustituyendo en la expresión (*) resulta:

$(|A|)^{25}\cdot|(A+I)|=0;\;\; 1^{25}\cdot|(A+I)|=0 \Rightarrow |(A+I)|=0$.

$A+I=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & t-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & t\end{pmatrix}$.

$|(A+I)|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & t\end{vmatrix}=0;\;\; t+1=0 \Rightarrow t=-1$.

$\underline{\boldsymbol{La\ matriz\ \left[A^{26}+A^{25}\right]\ es\ singular\ para\ t=-1.}}$

3º) Calcula la ecuación continua de la recta t que pasa por el punto $T(1,-5,3)$ y corta a las rectas $r \equiv \begin{cases} -x-y-z+3=0 \\ 3x+z-10=0 \end{cases}$ y $s \equiv \frac{x}{-2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{1}$.

SOLUCIÓN

La expresión de la recta r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} -x-y-z+3=0 \\ 3x+z-10=0 \end{cases} \Rightarrow x=\lambda;\ \ z=10-3\lambda;\ \ y=3-x-z=$$

$$=3-\lambda-10+3\lambda;\ \ y=-7+2\lambda\ \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=-7+2\lambda \\ z=10-3\lambda \end{cases}.$$

Un punto y un vector director de la recta r son $A(0,-7,10)$ y $\overrightarrow{v_r}=(1,2,-3)$.

Un punto y un vector director de la recta s son $B(0,-1,2)$ y $\overrightarrow{v_s}=(2,1,-1)$.

$$\overrightarrow{AT}=\overrightarrow{OT}-\overrightarrow{OA}=[(1,-5,3)-(0,-7,10)]=(1,2,-7).$$

$$\overrightarrow{BT}=\overrightarrow{OT}-\overrightarrow{OB}=[(1,-5,3)-(0,-1,2)]=(1,-4,1).$$

Se definen los planos $\pi_1\ y\ \pi_2$ de la siguiente forma:

$$\pi_1(T;\ \overrightarrow{v_r},\overrightarrow{AT}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+5 & z-3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -7 \end{vmatrix}=0;$$

$$-14(x-1)-3(y+5)+2(z-3)-2(z-3)+6(x-1)+7(y+5)=0;$$

$$-8(x-1)+4(y+5)=0;\ \ 2(x-1)-(y+5)=0;\ \ 2x-2-y-5=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi_1 \equiv 2x-y-7=0.$$

$$\pi_2(T;\ \overrightarrow{v_s},\overrightarrow{BT}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+5 & z-3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix}=0;$$

$$(x-1)-(y+5)-8(z-3)-(z-3)-4(x-1)-2(y+5)=0;$$

$$-3(x-1)-3(y+5)-9(z-3)=0;\ \ (x-1)+(y+5)+3(z-3)=0;$$

$$x-1+y+5+3z-9=0 \Rightarrow \pi_2 \equiv x+y+3z-5=0.$$

La recta pedida es la que determinan los planos $\pi_1\ y\ \pi_2$:

$$\boldsymbol{t \equiv \begin{cases} 2x-y-7=0 \\ x+y+3z-5=0 \end{cases}}.$$

La recta t expresada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$t \equiv \begin{cases} 2x-y-7=0 \\ x+y+3z-5=0 \end{cases} \Rightarrow z=\lambda \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x-y=7 \\ x+y=5-3\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 3x=12-3\lambda;$$

$$x=4-\lambda;\ \ y=2x-7=8-2\lambda-7 \Rightarrow y=1-2\lambda.$$

$$\boldsymbol{t \equiv \begin{cases} x=4-\lambda \\ y=1-2\lambda \\ z=\lambda \end{cases}}.$$

4º) Calcula la ecuación continua de la recta s que pasa por el punto $P(1,2,-1)$, es paralela al plano $\pi \equiv 2x-y+z=0$ y corta a la recta $r \equiv \begin{cases} x-y+2z+2=0 \\ 3x-y-z-3=0 \end{cases}$.

SOLUCIÓN

El haz de planos β paralelos a $\pi \equiv 2x-y+z=0$ tiene por expresión general $\beta \equiv 2x-y+z+D=0$.

De los infinitos planos del haz β, el plano γ que contiene al punto $P(1,2,-1)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} \beta \equiv 2x-y+z+D=0 \\ P(1,2,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow 2\cdot 1-2-1+D=0;\ -1+D=0 \Rightarrow D=1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \gamma \equiv 2x-y+z+1=0.$

El punto Q de corte de la recta r con el plano γ es la solución del sistema que forman: $\left.\begin{array}{r} x-y+2z=-2 \\ 3x-y-z=3 \\ 2x-y+z=-1 \end{array}\right\}$. Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{2-6-1-2+2+3}{-1-6+2+4-1+3}=\frac{-2}{1}=-2.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{1}=3-6+4-12-1+6=-6.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{1}=1+6-6-4+3-3=-3.$$

El punto de corte es $Q(-2,-6,-3)$.

La recta s pedida es la que contiene a los puntos $P(1,2,-1)$ y $Q(-2,-6,-3)$.

$\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}=[(1,2,-1)-(-2,-6,-3)]=(3,8,2).$

$$\boldsymbol{s \equiv \frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{8}=\frac{z+1}{2}}.$$

5º) Calcula las siguientes integrales definidas:

$$I_1 = \int \frac{dx}{2x\sqrt{x-1}} \ e \ I_2 = \int (3-2x) \cdot e^{-2x} \cdot dx.$$

SOLUCIÓN

$$I_1 = \int \frac{dx}{2x\sqrt{x-1}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \sqrt{x-1} = t \to x-1 = t^2 \\ \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \cdot dx = dt \\ x = t^2+1 \end{array} \right\} \Rightarrow \int \frac{1}{t^2+1} \cdot dt = arc\,tg\,t + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{I_1 = \int \frac{dx}{2x\sqrt{x-1}} = arc\,tg\,\sqrt{x-1} + C.}}$$

$$I_2 = \int (3-2x) \cdot e^{-2x} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} 3-2x = u \to du = -2 \cdot dx \\ dv = e^{-2x} \cdot dx \to v = -\frac{1}{2} \cdot e^{-2x} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3-2x) \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot e^{-2x}\right) - \int -\frac{1}{2} \cdot e^{-2x} \cdot (-2 \cdot dx) =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot e^{-2x} \cdot (3-2x) - \int e^{-2x} \cdot dx = -\frac{1}{2} \cdot e^{-2x} \cdot (3-2x) + \frac{1}{2} \cdot e^{-2x} + C =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot e^{-2x} \cdot [(3-2x) - 1] + C = -\frac{1}{2} \cdot e^{-2x} \cdot (2-2x) + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{I_2 = \int (3-2x) \cdot e^{-2x} \cdot dx = e^{-2x} \cdot (x-1) + C.}}$$

6º) Se considera la función $f(x) = e^{\frac{1}{sen\,x+\cos x}}$:

$a)$ Estudia la continuidad de la función en el intervalo $[0, \pi]$.

$b)$ Halla su extremo relativo en ese mismo intervalo.

SOLUCIÓN

$a)$ La función $f(x)$ es continua en R, excepto los valores reales de x que anulan la expresión $sen\,x + \cos x$, en cuyo caso, la función no está definida por ser:

$f(x) = e^{\frac{1}{0}} = e^{\infty} = \infty.$

$sen\,x + \cos x = 0 \Rightarrow sen\,x = -\cos x \Rightarrow x = \left\{\frac{3\pi}{4};\ \frac{7\pi}{4};\ \frac{11\pi}{4};\ \frac{15\pi}{4} \cdots\right\}$, en general:

$x = \frac{4k-1}{4}\pi, \forall k \in N.$

Para $k = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{3\pi}{4} \in [0, \pi].$ Para $k = 2 \Rightarrow x_2 = \frac{7\pi}{4} \notin [0, \pi].$

La función está definida en $[0, \pi], \forall x \in R - \left\{\frac{3\pi}{4}\right\}.$

Por ser $f(x)$ una función compuesta por funciones continuas de x, $sen\ x\ y \cos x$:

$\underline{\boldsymbol{f(x)\ es\ continua\ en\ [0, \pi], excepto\ para\ x = \frac{3\pi}{4}}}.$

$b)$ La condición necesaria para que una función tenga un extremo relativo, máximo o mínimo, es que se anule su primera derivada en ese punto.

Para obtener la derivada de la función se procede del modo siguiente:

$f(x) = e^{\frac{1}{sen\,x+\cos x}} \Rightarrow L[f(x)] = \frac{1}{sen\,x+\cos x}.$

$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{-1\cdot(\cos x - sen\,x)}{(sen\,x+\cos x)^2} \Rightarrow f'(x) = e^{\frac{1}{sen\,x+\cos x}} \cdot \frac{sen\,x-\cos x}{(sen\,x+\cos x)^2}.$

$f'(x) = 0 \Rightarrow e^{\frac{1}{sen\,x+\cos x}} \cdot \frac{sen\,x-\cos x}{(sen\,x+\cos x)^2} = 0.$

Por ser $e^{\frac{1}{sen\,x+\cos x}} \neq 0, \forall x \in R$ y $(sen\,x + \cos x)^2 \neq 0, \forall x \in D(f)$:

$f'(x) = 0 \Rightarrow sen\,x - \cos x = 0;\ \ sen\,x = \cos x \Rightarrow x = \lambda\pi + \frac{\pi}{4}, \forall \lambda \in Z.$

Para $\lambda = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{4} \in [0, \pi].$ Para $\lambda = 1 \Rightarrow x_2 = \frac{5\pi}{4} \notin [0, \pi].$

El único extremo relativo se encuentra para $x = \frac{\pi}{4}$.

Para diferenciar si se trata de un máximo o de un mínimo relativo puede recurrirse a la segunda derivada, pero lo engorroso del proceso recomienda su determinación por el signo de la primera derivada en diferentes intervalos.

Para el estudio en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ se considera el valor $\frac{\pi}{6} \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

Para $x=\frac{\pi}{6}=30^\circ \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=e^{\frac{1}{sen\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}}}\cdot\frac{sen\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{6}}{\left(sen\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}\right)^2}=e^{\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}}\cdot\frac{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=$

$=e^{\frac{1}{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}}\cdot\frac{\frac{1-\sqrt{3}}{2}}{\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=(+)\cdot\frac{(-)}{(+)}<0 \Rightarrow$ En el intervalo $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ la función es decreciente, lo cual implica, teniendo en cuenta la continuidad de la función, que para $x=\frac{\pi}{4}$ la función tiene un mínimo relativo.

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=e^{\frac{1}{sen\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}}}=e^{\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}}=e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}.$

$\underline{\boldsymbol{La\ funci\acute{o}n\ f(x)\ tiene\ un\ m\acute{i}nimo\ relativo\ en\ el\ punto\ P\left(\frac{\pi}{4},e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right).}}$

7º) Sea la función $f(x) = \frac{e^{x^2-2}}{x}$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[-2, -1]$.

b) Comprueba que existe un valor $a \in (-2, -1)$ tal que $f'(a) = e$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

SOLUCIÓN

a) La función $f(x) = \frac{e^{x^2-2}}{x}$ es continua en $R - \{0\}$, por ser el cociente de dos funciones continuas, en R el numerador y en $R - \{0\}$ el denominador y, teniendo en cuenta que $0 \notin [-2, -1]$:

$$\underline{\boldsymbol{La\ funci\acute{o}n\ f(x)\ es\ continua\ en\ [-2, -1].}}$$

b) $f'(x) = \frac{2x \cdot e^{x^2-2} \cdot x - e^{x^2-2} \cdot 1}{x^2} = \frac{e^{x^2-2} \cdot (2x^2-1)}{x^2}$.

La función $f'(x)$ es continua en $(-2, -1)$ por ser un cociente tal que el numerador es el producto de dos funciones continuas en R y el denominador es una función continua en $R - \{0\}$ y, teniendo en cuenta que $0 \notin (-2, -1)$, por lo cual, la función $f'(x) = \frac{e^{x^2-2} \cdot (2x^2-1)}{x^2}$ es continua en $(-2, -1)$.

Teniendo en cuanta el teorema de los valores intermedios o desigualdad de Darboux, que dice que, "si una función es continua en un intervalo $[a, b]$ toma todos los valores comprendidos entre $f(a)\ y\ f(b)$ al menos una vez".

$f'(-2) = \frac{e^{(-2)^2-2} \cdot [2 \cdot (-2)^2 - 1]}{(-2)^2} = \frac{e^2 \cdot 7}{4} \cong 12{,}93.$

$f'(-1) = \frac{e^{(-1)^2-2} \cdot [2 \cdot (-1)^2 - 1]}{(-1)^2} = \frac{e^{-1} \cdot 1}{1} = \frac{1}{e} \cong 0{,}37.$

De lo anterior se deduce que:

$f'(-1) \cong 0{,}37 < f'(a) = e \cong 2{,}72 < f'(-2) \cong 12{,}93$, con lo cual:

$$\underline{\boldsymbol{Queda\ probado\ que\ existe\ a \in (-2, -1)\ tal\ que\ f'(a) = e.}}$$

8º) Encuentra los dos puntos en que se cortan las gráficas de estas dos funciones: $f(x) = 2 - |x|$ y $g(x) = x^2 - 10$. Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas.

SOLUCIÓN

En primer lugar, nótese que ambas funciones son simétricas con respecto al eje de ordenadas por ser $f(-x) = f(x)$ y $g(-x) = g(x)$.

Teniendo en cuenta que $|x| = \begin{cases} -x & si \;\; x \leq 0 \\ x & si \;\; x > 0 \end{cases}$, la función $f(x) = 2 - |x|$ puede redefinirse de la forma siguiente: $f(x) = \begin{cases} 2 + x & si \;\; x \leq 0 \\ 2 - x & si \;\; x > 0 \end{cases}$.

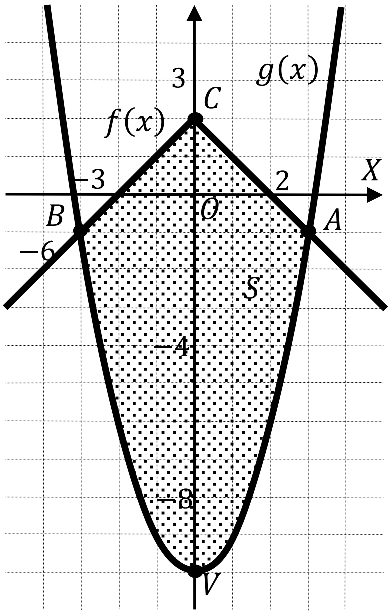
Los puntos de corte de las funciones tienen por abscisas las raíces de las ecuaciones que resultan de la igualación de sus expresiones.

Para $x > 0$: $f(x) = g(x) \Rightarrow 2 - x = x^2 - 10; \;\; x^2 + x - 12 = 0;$

$= \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} x_1 = -4, no\ es > 0 \\ x_2 = 3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow x = 3 \Rightarrow A(3, -1).$

Por simetría, otro punto de corte es $B(-3, -1)$.

Teniendo en cuenta que $f(0) = 2 \Rightarrow C(0, 2)$ y que la función $g(x) = x^2 - 10$ es una parábola convexa (∪), por ser positivo el coeficiente de x^2, cuyo vértice es el punto $V(0, -10)$, la representación gráfica de la situación se expresa, de forma aproximada, en la gráfica adjunta.



Teniendo en cuenta la simetría de las funciones, que en el intervalo de la superficie a calcular las ordenadas de la función $f(x)$ son iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de la función $g(x)$, y de la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = 2 \cdot \int_0^3 [f(x) - g(x)] \cdot dx = 2 \cdot \int_0^3 [(2 - x) - (x^2 - 10)] \cdot dx =$$

$$= 2 \cdot \int_0^3 (-x^2 - x + 12) \cdot dx = 2 \cdot \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 12x \right]_0^3 =$$

$$= 2 \cdot \left[\left(-\frac{3^3}{3} - \frac{3^2}{2} + 12 \cdot 3 \right) - 0 \right] = 2 \cdot \left(-9 - \frac{9}{2} + 36 \right) = 2 \cdot \left(27 - \frac{9}{2} \right) = 54 - 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{S = 45\ u^2}}.$$

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

I INSTRUCCIONES GENERALES

Realiza cuatro preguntas de las ocho que se presentan.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

1º) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible.

$$\begin{cases}(a^2-1)x+ay+a^2z=1\\(a^2-1)x+(a+1)y+(a^2+a)z=2.\\y+(a^2+2a)z=a+2\end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

2º) Demuestra que se cumple $|A\cdot B|=0$ para toda matriz A de dimensión 3×2, siendo $B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\end{pmatrix}$.

3º) Calcula la ecuación general del plano π perpendicular al plano $\alpha\equiv 2x-y-z-1=0$, sabiendo que contiene al punto $P(-1,2,1)$ y que la intersección de ambos planos es una recta paralela a $r\equiv\begin{cases}x+y-2z-3=0\\y-z-3=0\end{cases}$.

4º) Encuentra los puntos de la recta $r\equiv\begin{cases}3x-y+z-6=0\\x-y+3z-8=0\end{cases}$ que son centro de una esfera de radio 3, tangente al plano $\pi\equiv 2x+2y-z-7=0$.

5º) Sea la función $f(x)=sen\left(\frac{\pi}{4}\cdot L\frac{1}{x}\right)$.

$a)$ Demuestra que la función es continua en el intervalo $\left[\frac{1}{e},e\right]$.

$b)$ Demuestra que existe un valor $a\in\left(\frac{1}{e},e\right)$ tal que $f'(a)=\frac{e\sqrt{2}}{1-e^2}$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

6º) Calcula los siguientes límites: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x^2+x-1}\right)^{2x-1}$ y $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(e^x-1)^2}{L(x+1)-x}$.

7º) Sea la función $f(x) = L\left(sen\ \frac{\pi x}{6} - \cos\frac{\pi x}{6}\right)$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[2, 4]$.

b) Demuestra que existe un valor $a \in (2, 4)$ tal que $f(a) = 0$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

8º) Calcula el área de la región del plano encerrada entre las gráficas de estas dos funciones: $f(x) = x^3 - 3x - 2$ y $g(x) = x - 2$.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

1º) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible.

$$\begin{cases}(a^2-1)x+ay+a^2z=1\\(a^2-1)x+(a+1)y+(a^2+a)z=2.\\y+(a^2+2a)z=a+2\end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

SOLUCIÓN

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix}a^2-1 & a & a^2\\a^2-1 & a+1 & a^2+a\\0 & 1 & a^2+2a\end{pmatrix};\ M'=\begin{pmatrix}a^2-1 & a & a^2 & 1\\a^2-1 & a+1 & a^2+a & 2\\0 & 1 & a^2+2a & a+2\end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix}a^2-1 & a & a^2\\a^2-1 & a+1 & a^2+a\\0 & 1 & a^2+2a\end{vmatrix}\Rightarrow\{F_2\to F_2-F_1\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix}a^2-1 & a & a^2\\0 & 1 & a\\0 & 1 & a^2+2a\end{vmatrix}=(a^2-1)\cdot\begin{vmatrix}1 & a\\1 & a^2+2a\end{vmatrix}=(a^2-1)(a^2+2a-a)=$$

$$=(a^2-1)(a^2+a)=a(a+1)^2(a-1)\Rightarrow a_1=0, a_2=-1, a_3=1.$$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$\boldsymbol{Para\ \begin{Bmatrix}a\neq 0\\a\neq -1\\a\neq 1\end{Bmatrix}\Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=n^{o}\ incóg.\Rightarrow}$$
$$\underline{\boldsymbol{Sistema\ Compatible\ Determinado}}$$

$$Para\ a=0\Rightarrow M'=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 1\\-1 & 1 & 0 & 2\\0 & 1 & 0 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow Rang\ M'\Rightarrow\{C_1,C_2,C_4\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix}-1 & 0 & 1\\-1 & 1 & 2\\0 & 1 & 2\end{vmatrix}=-2-1+2=-1\neq 0\Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$\underline{\boldsymbol{Para\ a=0\Rightarrow Rang\ M=2;\ Rang\ M'=3\Rightarrow Sistema\ incompatible.}}$$

$$Para\ a=-1\Rightarrow\begin{cases}M'=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 2\\0 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\{C_2=-C_3\}\Rightarrow Rang\ M'=2\\M=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0\\0 & 1 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow Rang\ M=1\end{cases}.$$

$$\underline{\boldsymbol{Para\ a=-1\Rightarrow Rang\ M=1;\ Rang\ M'=2\Rightarrow Sistema\ incompatible.}}$$

$$Para\ a=1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 3 & 3\end{pmatrix} \Rightarrow \{C_3=C_4\} \Rightarrow Rang\ M'=2$$

$$\underline{\boldsymbol{Para\ a=1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < n^{o}\ inc\acute{o}g. \Rightarrow S.C.I.}}$$

Se resuelve, en primer lugar, para $a \neq 0, a \neq -1\ y\ a \neq 1$:

$$\begin{pmatrix}a^2-1 & a & a^2 & 1\\ a^2-1 & a+1 & a^2+a & 2\\ 0 & 1 & a^2+2a & a+2\end{pmatrix} \Rightarrow \{F_2 \to F_2 - F_1\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}a^2-1 & a & a^2 & 1\\ 0 & 1 & a & 1\\ 0 & 1 & a^2+2a & a+2\end{pmatrix} \Rightarrow \{F_3 \to F_3 - F_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}a^2-1 & a & a^2 & 1\\ 0 & 1 & a & 1\\ 0 & 0 & a^2+a & a+1\end{pmatrix} \Rightarrow z = \frac{a+1}{a^2+a} = \frac{a+1}{a(a+1)} \Rightarrow z = \frac{1}{a}.$$

$y + a \cdot \frac{1}{a} = 1;\ \ y + 1 = 1 \Rightarrow y = 0.\ (a^2-1)x + a^2 \cdot \frac{1}{a} = 1;\ (a^2-1)x = 1 - a;$

$(a+1)(a-1)x = -(a-1);\ \ (a+1)x = -1 \Rightarrow x = \frac{-1}{a+1}.$

$$\underline{\boldsymbol{Soluci\acute{o}n: x = \frac{-1}{a+1}, y = 0, z = \frac{1}{a}, \forall a \in R - \{-1, 0, 1\}.}}$$

Resolvemos ahora para $a = 1$. El sistema resulta $\left.\begin{array}{r} y+z=1\\ 2y+2z=2\\ y+3z=3\end{array}\right\}$, equivalente al sistema $\left.\begin{array}{r} y+z=1\\ y+3z=3\end{array}\right\}$ que es compatible indeterminado. Haciendo $x = \lambda$:

$$\left.\begin{array}{r} y+z=1\\ y+3z=3\end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -y-z=-1\\ y+3z=3\ \ \end{array}\right\} \Rightarrow 2z = 2;\ \ z = 1;\ \ y = 0.$$

$$\underline{\boldsymbol{Soluci\acute{o}n: x = \lambda, y = 0, z = 1, \forall \lambda \in R.}}$$

2º) Demuestra que se cumple $|A \cdot B| = 0$ para toda matriz A de dimensión 3×2, siendo $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

SOLUCIÓN

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & a+2b \\ c & d & c+2d \\ e & f & e+2f \end{pmatrix}.$$

$$|A \cdot B| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a & b & a+2b \\ c & d & c+2d \\ e & f & e+2f \end{vmatrix} = 0;$$

$ad(e+2f) + cf(a+2b) + be(c+2d) - de(a+2b) - af(c+2d) -$

$-bc(e+2f) = (a+2b)(cf-de) + (c+2d)(be-af) + (e+2f)(ad-bc) =$

$= acf - ade + 2bcf - 2bde + bce - acf + 2bde - 2adf + ade - bce +$

$+2adf - 2bcf = 0.$

También puede hacerse de la forma siguiente:

$$\begin{vmatrix} a & b & a+2b \\ c & d & c+2d \\ e & f & e+2f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & a \\ c & d & c \\ e & f & e \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & 2b \\ c & d & 2d \\ e & f & 2f \end{vmatrix} = 0 + 0 = 0.$$

En la realización del ejercicio se han utilizado las siguientes propiedades de los determinantes:

1ª.- Si todos los elementos de una línea de un determinante se descomponen en dos sumandos, su determinante es igual a la suma de dos determinantes que tienen en dicha línea el primero y el segundo sumandos, respectivamente, siendo los restantes elementos iguales a los del determinante inicial.

2ª.- Si un determinante tiene dos líneas paralelas iguales o proporcionales su valor es cero.

$$\underline{\boldsymbol{|A \cdot B| = 0, \forall a, b, c, d, e, f, como\ se\ quería\ demostrar.}}$$

3º) Calcula la ecuación general del plano π perpendicular al plano $\alpha \equiv 2x - y - z - 1 = 0$, sabiendo que contiene al punto $P(-1, 2, 1)$ y que la intersección de ambos planos es una recta paralela a $r \equiv \begin{cases} x + y - 2z - 3 = 0 \\ y - z - 3 = 0 \end{cases}$.

SOLUCIÓN

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x + y - 2z - 3 = 0 \\ y - z - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow z = \lambda;\ \ y = 3 + \lambda;\ \ x = 3 + 2\lambda - 3 - \lambda = \lambda \Rightarrow$$

$\Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 + \lambda. \\ z = \lambda \end{cases}$ Un vector director de r es $\overrightarrow{v_r} = (1, 1, 1)$.

También se puede obtener un vector director de r de la forma siguiente:

Un vector director de la recta r es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan, que son $\overrightarrow{n_1} = (1, 1, -2)$ y $\overrightarrow{n_2} = (0, 1, -1)$.

$$\overrightarrow{v'_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -i + k + 2i + j = i + j + k \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = (1, 1, 1).$$

Un vector normal del plano $\alpha \equiv 2x - y - z - 1 = 0$ es $\vec{n} = (2, -1, -1)$.

La expresión general del plano π pedido es la siguiente:

$$\pi(P;\ \overrightarrow{v_r}, \vec{n}) \equiv \begin{vmatrix} x + 1 & y - 2 & z - 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$-(x + 1) + 2(y - 2) - (z - 1) - 2(z - 1) + (x + 1) + (y - 2) = 0;$$

$$3(y - 2) - 3(z - 1) = 0;\ \ y - 2 - z + 1 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{\pi \equiv y - z - 1 = 0.}}$$

4º) Encuentra los puntos de la recta $r \equiv \begin{cases} 3x - y + z - 6 = 0 \\ x - y + 3z - 8 = 0 \end{cases}$ que son centro de una esfera de radio 3, tangente al plano $\pi \equiv 2x + 2y - z - 7 = 0$.

SOLUCIÓN

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} 3x - y + z - 6 = 0 \\ x - y + 3z - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow z = \lambda \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x - y = 6 - \lambda \\ x - y = 8 - 3\lambda \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 3x - y = 6 - \lambda \\ -x + y = -8 + 3\lambda \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x = -2 + 2\lambda;\ \ x = -1 + \lambda;\ \ y = x - 8 + 3\lambda = -1 + \lambda - 8 + 3\lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = -9 + 4\lambda \ \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = -9 + 4\lambda. \\ z = \lambda \end{cases}$$

Un punto genérico de la recta r es $P(-1 + \lambda, -9 + 4\lambda, \lambda)$.

Se tiene que cumplir que la distancia $d(P, \pi) = 3$.

La distancia del punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula $d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Aplicando la fórmula al punto $P(-1 + \lambda, -9 + 4\lambda, \lambda)$ y plano $\pi \equiv 2x + 2y - z - 7 = 0$:

$$d(\pi, P) = 3 \Rightarrow \frac{|2\cdot(-1+\lambda) + 2\cdot(-9+4\lambda) - \lambda - 7|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{|-2 + 2\lambda - 18 + 8\lambda - \lambda - 7|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{|-27 + 9\lambda|}{\sqrt{9}} =$$

$$= \frac{|-27 + 9\lambda|}{3} = 3;\ \ |-27 + 9\lambda| = 9;\ \ |-3 + \lambda| = 1 \Rightarrow \begin{cases} -3 + \lambda = 1 \to \lambda_1 = 4 \\ 3 - \lambda = 1 \to \lambda_2 = 2 \end{cases}.$$

$$\lambda_1 = 4 \Rightarrow \left. \begin{cases} x = -1 + 4 = 3 \\ y = -9 + 16 = 7 \\ z = 4 \end{cases} \right\} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{P_1(3, 7, 4)}}.$$

$$\lambda_2 = 2 \Rightarrow \left. \begin{cases} x = -1 + 2 = 1 \\ y = -9 + 8 = -1 \\ z = 2 \end{cases} \right\} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{P_2(1, -1, 2)}}.$$

5º) Sea la función $f(x) = sen\left(\frac{\pi}{4} \cdot L\frac{1}{x}\right)$.

$a)$ Demuestra que la función es continua en el intervalo $\left[\frac{1}{e}, e\right]$.

$b)$ Demuestra que existe un valor $a \in \left(\frac{1}{e}, e\right)$ tal que $f'(a) = \frac{e\sqrt{2}}{1-e^2}$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

SOLUCIÓN

$a)$ Las funciones $sen\, u$ y $\cos u$ existen y son continuas para cualquier valor real de x. Siendo $u = h(x)$, demostrar lo pedido es equivalente a demostrar que es continua la función $h(x) = \frac{\pi}{4} \cdot L\frac{1}{x}$.

La función $h(x) = \frac{\pi}{4} \cdot L\frac{1}{x}$ es continua en $\left[\frac{1}{e}, e\right]$ por ser $x \in \left[\frac{1}{e}, e\right] \Rightarrow x > 0$ y, en consecuencia $\frac{1}{x} > 0$, teniendo en cuanta que la función logaritmo neperiano está definida en $(0, +\infty)$.

$$\underline{\textit{Queda demostrado que } f(x) = sen\left(\frac{\pi}{4} \cdot L\frac{1}{x}\right) \textit{ es continua en } \left[\frac{1}{e}, e\right].}$$

$b)$ $f(x) = sen\left(\frac{\pi}{4} \cdot L\frac{1}{x}\right) = sen\, u \Rightarrow f'(x) = u' \cdot \cos u.$ (*)

$$u = \frac{\pi}{4} \cdot L\frac{1}{x} = \frac{\pi}{4} \cdot (L1 - Lx) = \frac{\pi}{4} \cdot (0 - Lx) \Rightarrow u = -\frac{\pi}{4} \cdot Lx.$$

$u' = -\frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{4x}$. Sustituyendo en (*):

$$f'(x) = -\frac{\pi}{4x} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot L\frac{1}{x}\right).$$

La función $f'(x)$ es continua en $\left(\frac{1}{e}, e\right)$ por ser producto de dos funciones continuas en $\left(\frac{1}{e}, e\right)$ y teniendo en cuenta el aparado anterior.

Teniendo en cuanta el teorema de los valores intermedios o desigualdad de Darboux, que dice que, “si una función es continua en un intervalo $[a, b]$ toma todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$ al menos una vez”.

$$f'\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{\pi \cdot e}{4} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot Le\right) = -\frac{\pi \cdot e}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi \cdot e}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\pi \cdot e\sqrt{2}}{8} \cong -1{,}51.$$

$$f'(e) = -\frac{\pi}{4e} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot L\frac{1}{e}\right) = -\frac{\pi}{4e} \cdot \left(-\cos\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4e} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\pi\sqrt{2}}{8e} \cong -0{,}20.$$

Demostrar lo pedido, según lo anterior, equivale a demostrar que:

$$f'\left(\frac{1}{e}\right) < \frac{e\sqrt{2}}{1-e^2} < f'\left(\frac{1}{e}\right) \Rightarrow -1{,}51 < \frac{e\sqrt{2}}{1-e^2} < -0{,}20.$$

Siendo $\frac{e\sqrt{2}}{1-e^2} \cong -0{,}60$, se cumple, en efecto, que: $-1{,}51 < -0{,}60 < -0{,}20$.

$$\underline{\textit{Queda probado que existe } a \in \left(\frac{1}{e}, e\right) \textit{ tal que } f'(a) = \frac{e\sqrt{2}}{1-e^2}.}$$

6º) Calcula los siguientes límites: $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2}{x^2+x-1}\right)^{2x-1}$ y $\lim_{x \to 0} \frac{(e^x-1)^2}{L(x+1)-x}$.

SOLUCIÓN

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2}{x^2+x-1}\right)^{2x-1} = 1^{\infty} \Rightarrow Ind.\ tipo\ nº\ e \Rightarrow \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2+x-1-x+1}{x^2+x-1}\right)^{2x-1} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2+x-1}{x^2+x-1} + \frac{-x+1}{x^2+x-1}\right)^{2x-1} = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{-x+1}{x^2+x-1}\right)^{2x-1} = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x^2+x-1}{-x+1}}\right)^{2x-1} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x^2+x-1}{-x+1}}\right)^{(2x-1)\cdot\frac{x^2+x-1}{-x+1}\cdot\frac{-x+1}{x^2+x-1}} = \lim_{x \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x^2+x-1}{-x+1}}\right)^{\frac{x^2+x-1}{-x+1}}\right]^{(2x-1)\cdot\frac{-x+1}{x^2+x-1}} =$$

$$= \left[\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x^2+x-1}{-x+1}}\right)^{\frac{x^2+x-1}{-x+1}}\right]^{\frac{-2x^2+2x+x-1}{x^2+x-1}} = \left[\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x^2+x-1}{-x+1}}\right)^{\frac{x^2+x-1}{-x+1}}\right]^{\frac{-2x^2+3x-1}{x^2+x-1}} =$$

$$= e^{\lim_{x \to \infty} \frac{-2x^2+3x-1}{x^2+x-1}} = e^{-2} \Rightarrow \underline{\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2}{x^2+x-1}\right)^{2x-1} = \frac{1}{e^2}}.$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(e^x-1)^2}{L(x+1)-x} = \frac{\left(e^0-1\right)^2}{L(0+1)-0} = \frac{(1-1)^2}{L1} = \frac{0}{0} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hotipal\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{2\cdot(e^x-1)\cdot e^x}{\frac{1}{x+1}-1} = \lim_{x \to 0} \frac{2e^x\cdot(e^x-1)}{\frac{1-x-1}{x+1}} = \lim_{x \to 0} \frac{2e^x\cdot(e^x-1)}{\frac{-x}{x+1}} = \frac{2\cdot e^0\cdot(e^0-1)}{\frac{-0}{0+1}} = \frac{2\cdot 1\cdot 0}{\frac{0}{1}} = \frac{0}{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{L'Hotipal\} \Rightarrow -2 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{e^{2x}-e^x}{\frac{x}{x+1}} = -2 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{2e^{2x}-e^x}{\frac{1\cdot(x+1)-x\cdot 1}{(x+1)^2}} = -2 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{2e^{2x}-e^x}{\frac{x+1-x}{(x+1)^2}} =$$

$$= -2 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{2e^{2x} - e^x}{\frac{1}{(x+1)^2}} = -2 \cdot \frac{2e^0 - e^0}{\frac{1}{(0+1)^2}} = -2 \cdot \frac{2 \cdot 1 - 1}{1} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{\lim_{x \to 0} \frac{(e^x-1)^2}{L(x+1)-x} = -2.}}$$

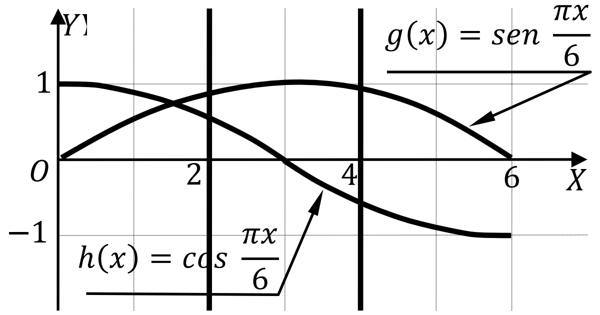
7º) Sea la función $f(x) = L\left(sen\,\frac{\pi x}{6} - \cos\frac{\pi x}{6}\right)$.

$a)$ Demuestra que la función es continua en el intervalo $[2, 4]$.

$b)$ Demuestra que existe un valor $a \in (2, 4)$ tal que $f(a) = 0$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

SOLUCIÓN

$a)$



Considerando las funciones trigonométricas $g(x) = sen\,\frac{\pi x}{6}$ y $h(x) = cos\,\frac{\pi x}{6}$, cuyas gráficas, de forma aproximada, se expresan en la figura adjunta en torno al intervalo $(2, 4)$, se observa que, en el mencionado intervalo, todas las ordenadas de la función $g(x) = sen\,\frac{\pi x}{6}$ son mayores que las correspondientes ordenadas de la función $h(x) = cos\,\frac{\pi x}{6}$, por lo cual se puede deducir que la función $\gamma(x) = g(x) - h(x)$ es tal que $\gamma(x) > 0, \forall x \in (2, 4)$.

Para la representación gráfica se ha tenido en cuenta lo siguiente:

$g(x) = sen\,\frac{\pi x}{6} = 0 \Rightarrow \frac{\pi x}{6} = \pi;\;\; \frac{x}{6} = 1 \Rightarrow x = 6.$

$h(x) = cos\,\frac{\pi x}{6} = 0 \Rightarrow \frac{\pi x}{6} = \frac{\pi}{2};\;\; \frac{x}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 3.$

La función $\gamma(x)$ es continua en R, por ser función diferencia de dos funciones continuas en R.

Teniendo en cuenta que el dominio de la función logaritmo neperiano es $(0, +\infty)$, de todo lo anterior se deduce, y como se quería demostrar que:

$$\underline{\boldsymbol{La\ funci\acute{o}n\ f(x) = L\left(sen\,\frac{\pi x}{6} - \cos\frac{\pi x}{6}\right)\ es\ continua\ en\ (2, 4).}}$$

$b)$ A la función $f(x) = L\left(sen\,\frac{\pi x}{6} - \cos\frac{\pi x}{6}\right)$ le es aplicable el teorema de Bolzano, que dice que "si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$"

$$f(2) = L\left(sen\,\frac{2\pi}{6} - \cos\frac{2\pi}{6}\right) = L\left(sen\,\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{3}\right) = L\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) = L\,\frac{\sqrt{3}-1}{2} < 0.$$

$$f(4) = L\left(sen\,\frac{4\pi}{6} - \cos\frac{4\pi}{6}\right) = L\left(sen\,\frac{2\pi}{3} - \cos\frac{2\pi}{3}\right) = L\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) = L\,\frac{\sqrt{3}+1}{2} > 0.$$

$$\underline{\boldsymbol{Queda\ demostrado\ que\ existe\ a \in (2, 4)\ tal\ que\ f(a) = 0.}}$$

8º) Calcula el área de la región del plano encerrada entre las gráficas de estas dos funciones: $f(x) = x^3 - 3x - 2$ y $g(x) = x - 2$.

SOLUCIÓN

Los puntos de corte de las dos funciones tienen como abscisas las raíces de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^3 - 3x - 2 = x - 2;\ \ x^3 - 4x = 0;\ \ x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 2.$$

Considerando el valor $x = -1 \in (-2, 0)$:

$$\left.\begin{array}{l} f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) - 2 = -1 + 3 - 2 = 0 \\ g(-1) = -1 - 2 = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow f(-1) > g(-1).$$

Considerando el valor $x = 1 \in (2, 0)$:

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 - 2 = 1 - 3 - 2 = -4 \\ g(1) = 1 - 2 = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow g(-1) > f(-1).$$

De lo anterior se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_{-2}^{0}[f(x) - g(x)] \cdot dx + \int_{0}^{2}[g(x) - f(x)] \cdot dx =$$

$$= \int_{-2}^{0}[(x^3 - 3x - 2) - (x - 2)] \cdot dx + \int_{0}^{2}[(x - 2) - (x^3 - 3x - 2)] \cdot dx =$$

$$= \int_{-2}^{0}(x^3 - 3x - 2 - x + 2) \cdot dx + \int_{0}^{2}(x - 2 - x^3 + 3x + 2) \cdot dx =$$

$$= \int_{-2}^{0}(x^3 - 4x) \cdot dx + \int_{0}^{2}(4x - x^3) \cdot dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^2}{2}\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{4x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_{0}^{2} =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{-2}^{0} + \left[2x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_{0}^{2} = 0 - \left[\frac{(-2)^4}{4} - 2 \cdot (-2)^2\right] + \left(2 \cdot 2^2 - \frac{2^4}{4}\right) - 0 =$$

$$= -4 + 8 + 8 - 4 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{S = 8\ u^2}}.$$