MATEMÁTICAS II

Selectividad 2022

Comunidad autónoma de

MURCIA

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano

Región de Murcia	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

OBSERVACIONES IMPORTANTES: Se debe responder a un máximo de 4 cuestiones y no es necesario hacerlo en el mismo orden en que están enunciadas. Si se responde a más de 4 cuestiones, sólo se corregirán las 4 primeras, en el orden que haya respondido el estudiante. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.
Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

1º) La suma de las edades de Carmela, Esperanza y Aurora es 68 años. La edad de Carmela es 5 años más que la mitad de la suma de las edades de Esperanza y Aurora. Además, dentro de 4 años la edad de Aurora será la edad que actualmente tiene Esperanza. Calcule las edades de cada una de ellas.

2º) Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

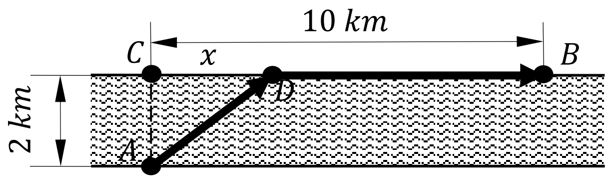
$a)$ Si I denota la matriz identidad de orden 3, compruebe que $A^3 = -I$ y calcule A^{2023}.

$b)$ Calcule la inversa de A.

$c)$ Resuelva la ecuación matricial $AX - B^t = A^2$, donde B^t denota la matriz traspuesta de B.

3º) En este ejercicio se puede utilizar el resultado del apartado $a)$ para realizar el apartado $b)$, aun en el caso en que no se sepa realizar el apartado $a)$.

Un triatleta participa en una competición de SwimRun en la que debe ir desde el punto A, situado en la orilla de un canal de agua en reposo de 2 km de ancho, hasta el punto B, situado en la otra orilla del canal y a una distancia de 10 km del punto C (punto opuesto de A), tal y como se indica en la figura. Para ello, debe ir nadando desde A hasta cualquier punto D de la otra orilla del canal y continuar corriendo desde D hasta B. El triatleta tiene plena libertad para elegir D.



$a)$ Sabiendo que el triatleta es capaz de nadar a una velocidad de 4 km/h y de correr a una velocidad de 12 km/h, demuestre que el tiempo total empleado por el triatleta en ir desde A hasta B (pasando por D) viene dado por la función $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+4}}{4} + \frac{10-x}{12}$, donde x denota la distancia de C a D.

$b)$ Calcule cuál debe ser el punto D para que el tiempo empleado por el triatleta en ir desde A hasta B sea mínimo. ¿Cuánto tardará en dicho caso?

4º) Considere la función $f(x) = x \cdot Lx$, definida para $x > 0$.

$a)$ Calcule la derivada de $f(x)$ y determine sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$b)$ Calcule la integral indefinida de la función $f(x)$.

$c)$ Determine la primitiva de la función $f(x)$ cuya gráfica pasa por el punto $P(1, 0)$.

5º) Considere las rectas $r \equiv \frac{x+2}{-1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{0}$ y $s \equiv \begin{cases} x - z = 0 \\ y = 1 \end{cases}$.

$a)$ Estudie la posición relativa de ambas rectas.

$b)$ En caso de que las rectas se corten, calcule la ecuación del plano que las contiene y el ángulo que forman ambas rectas. En caso de que las rectas se crucen, calcula la perpendicular común a ambas rectas.

6º) Considere los puntos $A(1, -1, 2)$ y $B(3, 5, 2)$.

$a)$ Determine la ecuación del plano π perpendicular al segmento AB y que pasa por el punto medio de dicho segmento.

$b)$ Calcule la distancia del punto A al plano π.

7º) Dos urnas A y B contienen bolas de colores con la siguiente composición: la urna A contiene 6 bolas blancas y 4 bolas negras, y la urna B contiene 2 bolas blancas, 4 bolas negras y 3 bolas rayadas. Se saca al azar una bola de la urna A y se mete en la urna B. A continuación, se saca al azar una bola de la urna B. Calcule:

$a)$ La probabilidad de que la bola que se saca de la urna B sea rayada.

$b)$ La probabilidad de que la bola que se saca de la urna B sea blanca, sabiendo que la bola que se sacó de la urna A era blanca.

$c)$ La probabilidad de que la bola que se saca de la urna B sea negra.

8º) En este ejercicio trabaje con 4 decimales para las probabilidades.

El cociente intelectual (CI) de los estudiantes universitarios sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ desconocidas. Se sabe que la media es igual a 10 veces la desviación típica y que el 93,32 % de los estudiantes tiene un CI menor de 115.

$a)$ Calcule la media y la desviación típica de esta distribución.

$b)$ Si se eligen al azar 5 estudiantes universitarios, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente 3 de ellos tengan un CI mayor de 115?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

1º) La suma de las edades de Carmela, Esperanza y Aurora es 68 años. La edad de Carmela es 5 años más que la mitad de la suma de las edades de Esperanza y Aurora. Además, dentro de 4 años la edad de Aurora será la edad que actualmente tiene Esperanza. Calcule las edades de cada una de ellas.

Solución

Sean x, y, z las edades actuales de Carmela, Esperanza y Aurora, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=68 \\ x-5=\frac{y+z}{2} \\ y=z+4 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y+z=68 \\ 2x-10=y+z \\ y-z=4 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y+z=68 \\ 2x-y-z=10 \\ y-z=4 \end{array}\right\}.$$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 68 & 1 & 1 \\ 10 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{68+10-4+4+68+10}{1+2+1+2}=\frac{156}{6}=26.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 68 & 1 \\ 2 & 10 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix}}{6}=\frac{-10+8+4+136}{6}=\frac{138}{6}=23.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 68 \\ 2 & -1 & 10 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{6}=\frac{-4+136-10-8}{6}=\frac{114}{6}=19.$$

$\underline{\boldsymbol{Carmela\ tiene\ 26\ \text{años}, Esperenza\ tiene\ 23\ \text{años}\ y\ Aurora\ tiene\ 19\ \text{años}.}}$

2º) Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$a)$ Si I denota la matriz identidad de orden 3, compruebe que $A^3 = -I$ y calcule A^{2023}.

$b)$ Calcule la inversa de A.

$c)$ Resuelva la ecuación matricial $AX - B^t = A^2$, donde B^t denota la matriz traspuesta de B.

Solución

$a)$ $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot A =$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I.$$

$$\underline{\textit{Queda comprobado que } \boldsymbol{A^3 = -I}}.$$

$$A^{2023} = A^{3\cdot 674+1} = A^{3\cdot 674} \cdot A^1 = (A^3)^{674} \cdot A = (-I)^{674} \cdot A = I^{674} \cdot A = I \cdot A = A \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{A^{2023} = A}}.$$

$b)$ $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 12 + 15 - 16 - 12 = -1.$ $\quad A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 3 \\ 4 & -5 & 4 \end{pmatrix}$.

$$Adj. de\ A^t = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}}{-1} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}}}.$$

$c)$ $AX - B^t = A^2;\ \ A \cdot X = A^2 + B^t;\ \ A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (A^2 + B^t);$

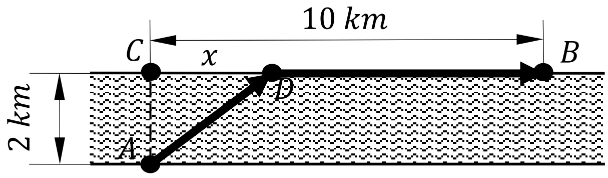
$I \cdot X = A^{-1} \cdot (A^2 + B^t) \Rightarrow \underline{X = A^{-1} \cdot (A^2 + B^t)}.$

$$A^2 + B^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 5 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$X = A^{-1} \cdot (A^2 + B^t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 5 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\underline{\Rightarrow \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-9} & \mathbf{-14} \\ \mathbf{0} & \mathbf{7} & \mathbf{11} \end{pmatrix}.}$$

3º) En este ejercicio se puede utilizar el resultado del apartado $a)$ para realizar el apartado $b)$, aun en el caso en que no se sepa realizar el apartado $a)$.



Un triatleta participa en una competición de SwimRun en la que debe ir desde el punto A, situado en la orilla de un canal de agua en reposo de 2 km de ancho, hasta el punto B, situado en la otra orilla del canal y a una distancia de 10 km del punto C (punto opuesto de A), tal y como se indica en la figura. Para ello, debe ir nadando desde A hasta cualquier punto D de la otra orilla del canal y continuar corriendo desde D hasta B. El triatleta tiene plena libertad para elegir D.

$a)$ Sabiendo que el triatleta es capaz de nadar a una velocidad de 4 km/h y de correr a una velocidad de 12 km/h, demuestre que el tiempo total empleado por el triatleta en ir desde A hasta B (pasando por D) viene dado por la función $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+4}}{4} + \frac{10-x}{12}$, donde x denota la distancia de C a D.

$b)$ Calcule cuál debe ser el punto D para que el tiempo empleado por el triatleta en ir desde A hasta B sea mínimo. ¿Cuánto tardará en dicho caso?

Solución

$a)$ $\quad \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2 = 2^2 + x^2 = 4 + x^2;\ \overline{AD} = \sqrt{4+x^2}. \qquad \overline{DB} = 10 - x.$

$$v = \frac{e}{t} \Rightarrow t = \frac{e}{v} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} t_{\overline{AD}} = \frac{\overline{AD}}{4} = \frac{\sqrt{4+x^2}}{4} \\ t_{\overline{DB}} = \frac{\overline{BD}}{12} = \frac{10-x}{12} \end{array} \right\} \Rightarrow t = t_{\overline{AD}} + t_{\overline{DB}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{Queda\ demostrado\ que\ t \Rightarrow f(x) = \frac{\sqrt{x^2+4}}{4} + \frac{10-x}{12}}}.$$

$b)$ $\quad$ Para que el tiempo sea mínimo es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$$f'(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2x}{2\cdot\sqrt{x^2+4}} + \frac{1}{12} \cdot (-1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{1}{12} = 0;\ \frac{3x}{\sqrt{x^2+4}} - 1 = 0;$$

$$\frac{3x}{\sqrt{x^2+4}} = 1;\ 3x = \sqrt{x^2+4};\ 9x^2 = x^2 + 4;\ 8x^2 = 4;\ x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = +\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x \cong 0{,}707\ km.$

$$\underline{\boldsymbol{El\ tiempo\ empleado\ es\ mínimo\ cuando\ D\ esta\ a\ 707\ metros\ de\ C}}.$$

El tiempo mínimo se produce para $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}+4}}{4} + \frac{10-\frac{\sqrt{2}}{2}}{12} = \frac{\sqrt{\frac{9}{2}}}{4} + \frac{\frac{20-\sqrt{2}}{2}}{12} = \frac{3}{4\sqrt{2}} + \frac{20-\sqrt{2}}{24} = \frac{3\sqrt{2}}{8} + \frac{20-\sqrt{2}}{24} = \frac{9\sqrt{2}+20-\sqrt{2}}{24} =$$

$$= \frac{8\sqrt{2}+20}{24} = \frac{2\sqrt{2}+5}{6} \cong 1{,}3047\ horas = 1\ hora + 0{,}3047\ horas =$$

$$= 1\ hora + 60 \cdot 0{,}3047\ minutos = 1\ hora + 18{,}2843\ minutos =$$

$= 1\ hora + 18\ minutos + 0{,}2843\ minutos =$

$= 1\ hora + 18\ minutos + 60 \cdot 0{,}2843\ segundos =$

$= 1\ hora + 18\ minutos + 17\ segundos.$

$\underline{\boldsymbol{El\ tiempo\ mínimo\ que\ emplea\ el\ triatleta\ es\ de\ 1\ h\ 10\ m\ 17\ s.}}$

4º) Considere la función $f(x) = x \cdot Lx$, definida para $x > 0$.

$a)$ Calcule la derivada de $f(x)$ y determine sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$b)$ Calcule la integral indefinida de la función $f(x)$.

$c)$ Determine la primitiva de la función $f(x)$ cuya gráfica pasa por el punto $P(1, 0)$.

Solución

$a)$ $f'(x) = 1 \cdot Lx + x \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow \underline{f'(x) = Lx + 1}$.

Una función es creciente o decreciente cuando su derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$f'(x) = 0 \Rightarrow Lx + 1 = 0;\ \ Lx = -1 \Rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

Teniendo en cuenta que el dominio de la función es $D(f) \Rightarrow (0, +\infty)$, los periodos de crecimiento o decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x \epsilon \left(0, \frac{1}{e}\right)}.$$

$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x \epsilon \left(\frac{1}{e}, +\infty\right)}.$$

$b)$ $I = \int x \cdot Lx \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} u = Lx \rightarrow du = \frac{1}{x} \cdot dx \\ x \cdot dx = dv \rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{matrix} \right\} \Rightarrow Lx \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \cdot dx =$

$= \frac{x^2}{2} \cdot Lx - \frac{1}{2} \cdot \int x \cdot dx = \frac{x^2}{2} \cdot Lx - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C = \frac{x^2}{4} \cdot (2Lx - 1) + C.$

$$\underline{\boldsymbol{I = \int x \cdot Lx \cdot dx = \frac{x^2}{4} \cdot (2Lx - 1) + C.}}$$

$c)$ La función $f(x)$ tienen infinitas funciones primitivas, y tienen por expresión la función obtenida en el apartado anterior: $F(x) = \frac{x^2}{4} \cdot (2Lx - 1) + C$.

De las infinitas funciones primitivas de $f(x)$ la que contiene al punto $P(1, 0)$ es la que satisface su ecuación:

$F(1) = 0 \Rightarrow \frac{1^2}{4} \cdot (2L1 - 1) + C = 0;\ \ \frac{1}{4} \cdot (2 \cdot 0 - 1) + C = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{4}$.

$$\underline{\boldsymbol{F(x) = \frac{x^2}{4} \cdot (2Lx - 1) + \frac{1}{4}.}}$$

5º) Considere las rectas $r \equiv \frac{x+2}{-1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{0}$ y $s \equiv \begin{cases} x - z = 0 \\ y = 1 \end{cases}$.

a) Estudie la posición relativa de ambas rectas.

b) En caso de que las rectas se corten, calcule la ecuación del plano que las contiene y el ángulo que forman ambas rectas. En caso de que las rectas se crucen, calcula la perpendicular común a ambas rectas.

Solución

a) Un punto y un vector director de la recta r son $A(-2,3,0)$ y $\overrightarrow{v_r} = (1,-1,0)$.

La expresión de la recta s dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$s \equiv \begin{cases} x - z = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow x = z = \lambda \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1. \\ z = \lambda \end{cases}$$

Un punto y un vector director de la recta s son $B(0,1,0)$ y $\overrightarrow{v_s} = (1,0,1)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas r y s se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Se considera el vector $\vec{w}$ que tiene como origen el punto $A \in r$ y extremo el punto $B \in s$: $\vec{w} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(0,1,0) - (-2,3,0)] = (2,-2,0)$.

Según que los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\}$ sean o no coplanarios las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\}$ son coplanarios cuando el rango del determinante que forman es cero y las rectas r y s se cortan; en caso contrario, se cruzan.

$$Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -2 + 2 = 0 \Rightarrow Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\} = 2 < 3 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}$ *son coplanarios*.

Las rectas r y s se cortan en un punto.

La expresión de s por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = -2 - \mu \\ y = 3 + \mu \\ z = 0 \end{cases}$.

Si las rectas se cortan en un punto tiene que cumplirse: $\left.\begin{array}{r} \lambda = -2 - \mu \\ 1 = 3 + \mu \\ \lambda = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda = 0;\ \mu = -2$.

El punto de corte es: $\boldsymbol{B(0,1,0)}$.

b) El plano π que contiene a las rectas tiene la siguiente expresión general:

$$\pi(B;\ \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}) \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0;\ -x + z - (y-1) = 0;$$

$$-x+z-y+1=0 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{\pi \equiv x+y-z-1=0}}.$$

El ángulo que forman dos rectas es el menor de los ángulos que forman sus vectores directores:

$\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s} = |\overrightarrow{v_r}| \cdot |\overrightarrow{v_s}| \cdot \cos\beta \Rightarrow \frac{|\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s}|}{|\overrightarrow{v_r}| \cdot |\overrightarrow{r_s}|} = \frac{|(1,-1,0)\cdot(1,0,1)|}{\sqrt{1^2+(-1)^2} \cdot \sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|1|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2} = 0{,}5 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\beta = arc\cos 0,5} \Rightarrow \underline{\boldsymbol{\beta = 60°}}.$$

6º) Considere los puntos $A(1,-1,2)\ y\ B(3,5,2)$.

a) Determine la ecuación del plano π perpendicular al segmento AB y que pasa por el punto medio de dicho segmento.

b) Calcule la distancia del punto A al plano π.

Solución

a) Los puntos $A(1,-1,2)\ y\ B(3,5,2)$ determinan el vector:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(3,5,2)-(1,-1,2)] = (2,6,0)$.

El punto medio del segmento AB es el siguiente:

$M \Rightarrow \left\{x = \frac{1+3}{2} = 2;\ \ y = \frac{-1+5}{2} = 2;\ \ z = \frac{2+2}{2} = 2\right\} \Rightarrow M(2,2,2)$.

El vector normal del plano es cualquiera que sea linealmente dependiente del vector $\overrightarrow{AB} \Rightarrow \vec{n} = (1,3,0)$.

La expresión general del haz de planos β perpendiculares al segmento AB es la siguiente: $\beta \equiv x + 3y + D = 0$.

De los infinitos planos del haz β, el plano π que contiene al punto $M(2,2,2)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} \beta \equiv x + 3y + D = 0 \\ M(2,2,2) \end{array}\right\} \Rightarrow 2 + 3 \cdot 2 + D = 0;\ \ 8 + D = 0 \Rightarrow D = -8.$$

$$\underline{\boldsymbol{\pi \equiv x + 3y - 8 = 0.}}$$

b) La distancia del punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula $d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. Aplicando la fórmula al punto $A(1,-1,2)$ y al plano $\pi \equiv x + 3y - 8 = 0$:

$$d(A, \pi) = \frac{|1+3\cdot(-1)-8|}{\sqrt{1^2+3^2}} = \frac{|1-3-8|}{\sqrt{1+9}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}.$$

$$\underline{\boldsymbol{d(A, \pi) = \sqrt{10}\ unidades.}}$$

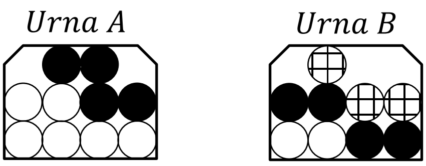
7º) Dos urnas A y B contienen bolas de colores con la siguiente composición: la urna A contiene 6 bolas blancas y 4 bolas negras, y la urna B contiene 2 bolas blancas, 4 bolas negras y 3 bolas rayadas. Se saca al azar una bola de la urna A y se mete en la urna B. A continuación, se saca al azar una bola de la urna B. Calcule:

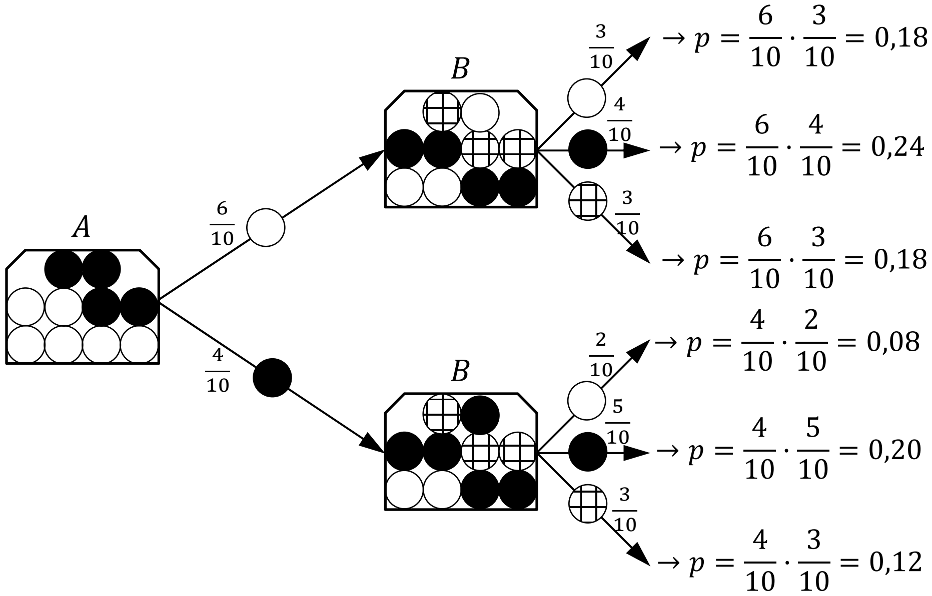
$a)$ La probabilidad de que la bola que se saca de la urna B sea rayada.

$b)$ La probabilidad de que la bola que se saca de la urna B sea blanca, sabiendo que la bola que se sacó de la urna A era blanca.

$c)$ La probabilidad de que la bola que se saca de la urna B sea negra.

Solución





$a)$ $P = P(R) = P(B \cap R) + P(N \cap R) = P(B) \cdot P(R/B) + P(N) \cdot P(R/N) =$

$= \frac{6}{10} \cdot \frac{3}{10} + \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{10} = 0{,}18 + 0{,}12 = \underline{0{,}30}.$

$b)$ Se trata de obtener bola blanca de la urna B cuando se añade una bola blanca:

$$P = \frac{n^{\underline{o}}\ de\ bolas\ blancas}{n^{\underline{o}}\ total\ de\ bolas} = \frac{3}{3+4+3} = \frac{3}{10} = \underline{0{,}30}.$$

$c)$ $P = P(N) = P(B \cap N) + P(N \cap N) = P(B) \cdot P(N/B) + P(N) \cdot P(N/N) =$

$= \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{10} + \frac{4}{10} \cdot \frac{5}{10} = 0{,}24 + 0{,}20 = \underline{0{,}44}.$

8º) En este ejercicio trabaje con 4 decimales para las probabilidades.

El cociente intelectual (CI) de los estudiantes universitarios sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ desconocidas. Se sabe que la media es igual a 10 veces la desviación típica y que el 93,32 % de los estudiantes tiene un CI menor de 115.

a) Calcule la media y la desviación típica de esta distribución.

b) Si se eligen al azar 5 estudiantes universitarios, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente 3 de ellos tengan un CI mayor de 115?

Solución

a) $Datos$: $\mu = 10\sigma$; σ.

$X \rightarrow N(10\sigma;\ \sigma)$. Tipificando la variable: $Z = \frac{X-10\sigma}{\sigma}$.

$P = P(X < 115) = P\left(Z < \frac{115-10\sigma}{\sigma}\right) = 0{,}9332$. Mirando este valor en la tabla $N(0,1)$ de forma inversa, le corresponde el valor exacto de 1,5:

$\frac{115-10\sigma}{\sigma} = 1{,}5$; $115 - 10\sigma = 1{,}5\sigma$; $115 = 11{,}5\sigma \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{\sigma = 10;\ \ \mu = 100.}}$$

b) Se trata de una distribución binomial con $n = 5\ y\ r = 3$. Hay que determinar los valores de $p\ y\ q$, para lo cual tenemos en cuenta que $p = P(X > 115)$.

Teniendo en cuenta el apartado anterior:

$p = P(X > 115) = 1 - P(X \leq 115) = 1 - 0{,}9332 \Rightarrow p = 0{,}0668$ y, en consecuencia: $q = 1 - p = 0{,}9332$.

La fórmula de la probabilidad binomial de n elementos de los cuales se produzcan r viene dada por la fórmula: $P(r) = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot q^{n-r}$.

$$P = \binom{5}{3} \cdot 0{,}0668^3 \cdot 0{,}9332^2 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot 0{,}000298 \cdot 0{,}8709 = 10 \cdot 0{,}00026$$

Región de Murcia	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

OBSERVACIONES IMPORTANTES: Se debe responder a un máximo de 4 cuestiones y no es necesario hacerlo en el mismo orden en que están enunciadas. Si se responde a más de 4 cuestiones, sólo se corregirán las 4 primeras, en el orden que haya respondido el estudiante. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.
Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

1º) Un conocido defraudador fiscal tiene distribuido su dinero negro en tres paraísos fiscales, las Islas Caimán, Panamá y Fiji. La suma total de este dinero es de 150 millones de euros. Si perdiera la cuarta parte del dinero que tiene en las Islas Caimán, seguiría teniendo allí el triple del dinero que tiene en Panamá. Además, el dinero que tiene en Panamá sumado a las dos quintas partes del dinero que tiene en Fiji es exactamente la mitad del dinero que tiene en las Islas Caimán. Calcule cuánto dinero tiene en cada uno de los paraísos fiscales.

2º) Se dice que una matriz cuadrada A es idempotente si cumple que $A^2 = A$.

$a)$ Si A es una matriz idempotente, calcule razonadamente A^{2022}.

$b)$ Si A es una matriz idempotente y regular (o inversible), calcule razonadamente su determinante.

$c)$ Determine para qué valores de a y b la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ es idempotente.

3º) Considere la función $f(x) = \begin{cases} \frac{Lx}{x-1} & si\ x > 0\ y\ x \neq 1 \\ a & si\ \ x = 1 \end{cases}$:

$a)$ Calcule el límite de $f(x)$ cuando x tiende a $+\infty$.

$b)$ Determine el valor de a para que la función $f(x)$ sea continua en $x = 1$.

$c)$ Estudie si, para dicho valor de a, la función $f(x)$ es derivable en $x = 1$. En caso afirmativo, calcule el valor de la derivada de f en $x = 1$.

4º) Considere la función $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$, definida para todo valor de $x \in R$.

$a)$ Calcule la derivada de $f(x)$ y determine sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$b)$ Calcule la integral indefinida de la función $f(x)$.

$c)$ Determine la primitiva de la función $f(x)$ cuya gráfica pasa por el punto $P(0, 1)$.

5º) Considere el plano $\pi \equiv x + y + z = 1$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x - y = 0 \\ ax - z = a - 1 \end{cases}$.

$a)$ Estudie la posición relativa del plano π y de la recta r en función del parámetro a.

$b)$ Si $a = -1$ la recta r corta al plano π. Calcule en ese caso el punto de corte y el ángulo que forma la recta r con el plano π.

6º) Considere las rectas $r \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$ y $s \equiv \begin{cases} x + 2z = 1 \\ y = 0 \end{cases}$.

$a)$ Compruebe que las rectas son coplanarias (es decir, están contenidas en un mismo plano) y calcule la ecuación del plano que las contiene.

$b)$ Calcule la distancia de la recta r al plano $\pi \equiv x - y + 2z = 3$.

7º) Un estudio publicado en Environmental, Science and Technology ha revelado que la probabilidad de contraer el Covid-19 en el interior de restaurantes es 0,45. Además, según los datos de las Naciones Unidas, en el mundo hay actualmente un 50,5 % de hombres y un 49,5 % de mujeres.

$a)$ Suponiendo que los sucesos "contraer el Covid-19 en el interior de restaurantes" y "ser mujer" sean independientes, calcule la probabilidad de que una persona elegida al azar sea mujer y contraiga el Covid-19 en el interior de restaurantes.

$b)$ En el mismo supuesto que en el apartado $a)$, calcule la probabilidad de que una persona elegida al azar no sea mujer o no contraiga el Covid-19 en el interior de restaurantes.

$c)$ Si se eligen 8 personas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 4 de ellas contraigan el Covid-19 en el interior de restaurantes?

8º) En este ejercicio trabaje con 4 decimales para las probabilidades.

La altura de los individuos de una población sigue una distribución normal de media 175 cm y desviación típica 4 cm.

$a)$ Calcule la probabilidad de que un individuo elegido al azar mida más de 170 cm.

$b)$ Calcule qué porcentaje de la población mide entre 170 y 185 cm.

$c)$ Calcule la altura que es superada por el 33 % de la población.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

1º) Un conocido defraudador fiscal tiene distribuido su dinero negro en tres paraísos fiscales, las Islas Caimán, Panamá y Fiji. La suma total de este dinero es de 150 millones de euros. Si perdiera la cuarta parte del dinero que tiene en las Islas Caimán, seguiría teniendo allí el triple del dinero que tiene en Panamá. Además, el dinero que tiene en Panamá sumado a las dos quintas partes del dinero que tiene en Fiji es exactamente la mitad del dinero que tiene en las Islas Caimán. Calcule cuánto dinero tiene en cada uno de los paraísos fiscales.

Solución

Sean x, y, z las cantidades que tiene el defraudador en las Islas Caimán, Panamá y Fiji, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=150 \\ \frac{3}{4}x=3y \\ y+\frac{2}{5}z=\frac{1}{2}x \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y+z=150 \\ x-4y=0 \\ 5x-10y-4z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x=4y.$$

Resolviendo por sustitución: $\left.\begin{array}{r} 4y+y+z=150 \\ 20y-10y-4z=0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 5y+z=150 \\ 10y-4z=0 \end{array}\right\}$

$$\left.\begin{array}{r} 10y+2z=300 \\ -10y+4z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 6z=300 \Rightarrow z=50. \ 5y+50=150; \ \ 5y=100 \Rightarrow y=20.$$

$x=4\cdot 20 \Rightarrow x=80.$

El número de millones que tiene el defraudador en cada paraíso fiscal es:

$$\underline{\boldsymbol{80 \ en \ las \ Islas \ Caimán; 20 \ en \ Panamá \ y \ 50 \ en \ Fiji.}}$$

2º) Se dice que una matriz cuadrada A es idempotente si cumple que $A^2 = A$.

a) Si A es una matriz idempotente, calcule razonadamente A^{2022}.

b) Si A es una matriz idempotente y regular (o inversible), calcule razonadamente su determinante.

c) Determine para qué valores de a y b la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ es idempotente.

Solución

a) Las potencias sucesivas de A son las siguientes:

$A^3 = A^2 \cdot A = A \cdot A = A^2 = A.$ $A^4 = A^3 \cdot A = A \cdot A = A^2 = A.$

$A^5 = A^4 \cdot A = A \cdot A = A^2 = A.$ En general: $A^n = A, \forall n \in N.$

$$\underline{\boldsymbol{Si\ A\ es\ idempotente}: \boldsymbol{A^{2.022} = A.}}$$

b) Siendo $A^2 = A$, tiene que ser, necesariamente: $|A^2| = |A|$ y esto, en los número reales, solamente se cumple para $|A| = 0\ o\ |A| = 1$, pero como A en inversible su determinante no puede ser cero, por lo cual:

$$\underline{\boldsymbol{|A| = 1.}}$$

$$c)\ A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 2 & (1-a)^2 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{matrix} a^2 = a \\ 1-a = (1-a)^2 \\ b = b^2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\underline{\left\{ \begin{matrix} \boldsymbol{a = 0, a = 1} \\ \boldsymbol{b = 0, b = 1} \end{matrix} \right\}.}$$

3º) Considere la función $f(x)=\begin{cases}\frac{Lx}{x-1} & si\ x>0\ y\ x\neq 1\\ a\ \ si\ \ x=1\end{cases}$:

$a)$ Calcule el límite de $f(x)$ cuando x tiende a $+\infty$.

$b)$ Determine el valor de a para que la función $f(x)$ sea continua en $x=1$.

$c)$ Estudie si, para dicho valor de a, la función $f(x)$ es derivable en $x=1$. En caso afirmativo, calcule el valor de la derivada de f en $x=1$.

Solución

$a)$ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{Lx}{x-1}=\frac{L\infty}{\infty-1}=\frac{\infty}{\infty}\Rightarrow Ind.\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1-0}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{\infty}\Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} f(x)=0.}}$$

$b)$ La función $f(x)$ es continua en su dominio, excepto para $x=1$, cuya continuidad es dudosa y se va a determinar el valor real de a para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x=1\Rightarrow\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\frac{Lx}{x-1}=\frac{L1}{1-1}=\frac{0}{0}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow Ind.\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}}{1-0}=\frac{\frac{1}{1}}{1}=1.$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^+} f(x)=f(1)\Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{a=1}}.$$

$c)$ La función resulta: $f(x)=\begin{cases}\frac{Lx}{x-1} & si\ x>0\ y\ x\neq 1\\ 1\ \ si\ \ x=1\end{cases}$.

La función $f(x)$ es derivable en su dominio, excepto para $x=1$ cuya derivabilidad es dudosa; se estudia a continuación.

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales en ese punto.

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{1-\frac{1}{x}-Lx}{(x-1)^2} & si\ x>0, x\neq 1\ \ (*)\\ 0 & si\ \ x=1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow Para\ x=1\ \Rightarrow f'(1)=\begin{cases}-L1\ \ si\ \ x<0\\ 0\ \ si\ \ x\geq 0\end{cases}.$$

$$\Rightarrow\ f'(1^-)=f'(1)\Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{La\ funci\acute{o}n\ f(x)\ es\ derivable\ en\ x=1.}}$$

$(*)$ $g(x)=\frac{Lx}{x-1}\Rightarrow g'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot(x-1)-Lx\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{1-\frac{1}{x}-Lx}{(x-1)^2}$.

El valor de la derivada para $x = 1$ es el siguiente:

$$f'(1) = \frac{1-\frac{1}{1}-L1}{(1-1)^2} = \frac{0}{0} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{0+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}{2\cdot(x-1)\cdot 1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1-x}{x^2}}{2\cdot(x-1)\cdot 1} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{-(x-1)}{2x^2 \cdot (x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{-1}{2x^2} = \frac{-1}{2\cdot 1^2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{f'(1) = -\frac{1}{2}}}.$$

4º) Considere la función $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$, definida para todo valor de $x \in R$.

a) Calcule la derivada de $f(x)$ y determine sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Calcule la integral indefinida de la función $f(x)$.

c) Determine la primitiva de la función $f(x)$ cuya gráfica pasa por el punto $P(0, 1)$.

Solución

a) $f'(x) = 2x \cdot e^{-x} + x^2 \cdot (-1) \cdot e^{-x} \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{f'(x) = x \cdot e^{-x} \cdot (2 - x)}}.$$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$f'(x) = x \cdot e^{-x} \cdot (2 - x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2.$

Teniendo en cuenta que $y = f(x)$ es continua en su dominio, que es R, las raíces de su primera derivada dividen al dominio en los intervalo $(-\infty, 0), (0, 2)\ y\ (2, +\infty)$, en los cuales la función es, alternativamente, creciente o decreciente.

Considerando, por ejemplo, el valor $x = 1 \in (0, 2)$ es:

$f'(1) = 1 \cdot e^{-1} \cdot (2 - 1) = \frac{1}{e} > 0 \Rightarrow Creciente.$

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función, que son los siguientes:

$$\underline{\boldsymbol{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)}}.$$

$$\underline{\boldsymbol{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (0, 2)}}.$$

b) $I = \int e^{-x} \cdot x^2 \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} u = x^2 \to du = 2x \cdot dx \\ dv = e^{-x} \cdot dx \to v = -e^{-x} \end{matrix} \right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 \cdot (-e^{-x}) - \int -e^{-x} \cdot 2x \cdot dx = -x^2 \cdot e^{-x} + 2 \int x \cdot e^{-x} \cdot dx =$

$= -x^2 \cdot e^{-x} + 2 \cdot M = I.$ (*)

$M = \int x \cdot e^{-x} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} u = x \to du = dx \\ dv = e^{-x} \cdot dx \to v = -e^{-x} \end{matrix} \right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \cdot (-e^{-x}) - \int -e^{-x} \cdot dx = -x \cdot e^{-x} + \int e^{-x} \cdot dx = -x \cdot e^{-x} - e^{-x} + C =$

$= -e^{-x}(x + 1) + C = M.$

Sustituyendo el valor de M en la expresión (*):

$I = -x^2 \cdot e^{-x} + 2 \cdot M = -x^2 \cdot e^{-x} + 2 \cdot [-e^{-x}(x + 1)] + C =$

$= -x^2 \cdot e^{-x} - 2 \cdot e^{-x}(x + 1) + C = -e^{-x}[x^2 + 2(x + 1)] + C \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{I = \int x^2 \cdot e^{-x} \cdot dx = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + C}}.$$

$c)$ Considerando la función: $F(x) = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + C$, tiene que cumplirse que $F(0) = 1 \Rightarrow -e^{-0}(0^2 + 2 \cdot 0 + 2) + C = 1;\ -1 \cdot 2 + C = 1 \Rightarrow C = 3$.

$$\underline{\boldsymbol{F(x) = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + 3.}}$$

5º) Considere el plano $\pi \equiv x+y+z=1$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x-y=0 \\ ax-z=a-1 \end{cases}$.

$a)$ Estudie la posición relativa del plano π y de la recta r en función del parámetro a.

$b)$ Si $a=-1$ la recta r corta al plano π. Calcule en ese caso el punto de corte y el ángulo que forma la recta r con el plano π.

Solución

$a)$ La recta r y el plano π determinan el sistema $\left.\begin{array}{r} x-y=0 \\ ax-z=a-1 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\}$.

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$M=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $M'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ a & 0 & -1 & a-1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Según sean los rangos de $M\ y\ M'$ pueden presentarse los siguientes casos:

1º -- $Rang\ M = Rang\ M' = 2 \Rightarrow$ La recta está contenida en el plano.

2º -- $Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow$ La recta es paralela al plano.

3º -- $Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow$ La recta es secante al plano.

$$Rang\ M \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1+1+a=0 \Rightarrow a=-2.$$

$$Para\ a=-2 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3+3-2=4 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$\underline{\boldsymbol{a \neq -2 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ son\ secantes.}}$$

$$\underline{\boldsymbol{a = -2 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow La\ recta\ r\ es\ paralela\ al\ plano\ \pi.}}$$

$b)$ Para $a=-1$, según el apartado anterior, la recta y el plano son secantes.

El sistema resulta: $\left.\begin{array}{r} x-y=0 \\ -x-z=-2 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\}$. Resolviendo por sustitución:

$$y=x \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -x-z=-2 \\ x+x+z=1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -x-z=-2 \\ 2x+z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow x=y=-1;\ \ z=3.$$

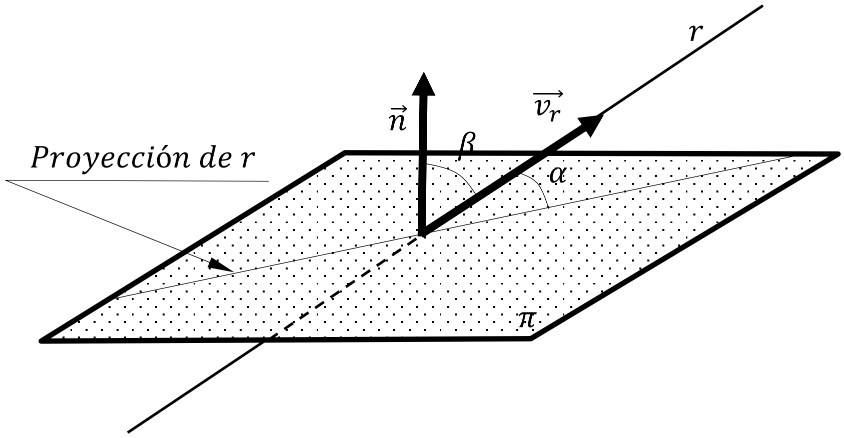
$$\underline{\boldsymbol{El\ punto\ de\ corte\ de\ la\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ es\ P(-1,-1,3).}}$$

Un vector normal del plano $\pi \equiv x+y+z=1$ es $\vec{n}=(1,1,1)$.

Para $a=-1$ la recta es $r \equiv \begin{cases} x-y=0 \\ x+z=2 \end{cases}$ y su expresión por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv$

$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$. Un vector director de r es $\overrightarrow{v_r} = (1, 1, -1)$.

Por definición de producto escalar: $\vec{n} \cdot \overrightarrow{v_r} = |\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{v_r}| \cdot \cos\beta$.



$\cos\beta = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{v_r}|}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{v_r}|}$. Por ser $\alpha\ y\ \beta$ complementarios: $sen\ \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{v_r}|}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{v_r}|}$.

$sen\ \alpha = \frac{|(1,1,1)\cdot(1,1,-1)|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{|1+1-1|}{\sqrt{1+1+1}\cdot\sqrt{1+1+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{1}{3} = 0{,}3333 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\alpha = arc\ sen\ 0,3333\ \underline{= 19^\circ\ \ 28'\ 16''}}.$$

6º) Considere las rectas $r \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$ y $s \equiv \begin{cases} x + 2z = 1 \\ y = 0 \end{cases}$.

a) Compruebe que las rectas son coplanarias (es decir, están contenidas en un mismo plano) y calcule la ecuación del plano que las contiene.

b) Calcule la distancia de la recta r al plano $\pi \equiv x - y + 2z = 3$.

Solución

a) La expresión de s por unas ecuaciones paramétricas es $s \equiv \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}$.

Un punto y un vector de r son $A(1, 0, 0)$ y $\overrightarrow{v_r} = (-1, 1, 1)$.

Un punto y un vector de s son $A(1, 0, 0)$ y $\overrightarrow{v_s} = (-2, 0, 1)$.

Por casualidad se ha obtenido el mismo punto para ambas rectas, lo cual, justifica que las rectas se cortan y, en consecuencia, son coplanarias.

El plano β que las contiene tiene la siguiente expresión general:

$$\beta(A;\ \overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0;\quad (x-1) - 2y + 2z + y = 0;$$

$$x - 1 - y + 2z = 0 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{\beta \equiv x - y + 2z - 1 = 0.}}$$

b) Un vector normal del plano $\pi \equiv x - y + 2z = 3$ es $\vec{n} = (1, -1, 2)$.

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{v_r} = (1, -1, 2) \cdot (-1, 1, 1) = -1 - 1 + 2 = 0 \Rightarrow$ La recta r y el plano π son paralelos.

La distancia de una recta a un plano paralelo es equivalente a la distancia de un punto de la recta al plano.

La distancia del punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula $d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. Aplicando la fórmula al punto $A(1, 0, 0)$ y al plano $\pi \equiv x - y + 2z - 3 = 0$:

$$d(r, \pi) = d(A, \pi) = \frac{|1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{|1 - 0 + 0 - 3|}{\sqrt{1 + 1 + 4}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{d(r, \pi) = \frac{\sqrt{6}}{3}\ u.}}$$

7º) Un estudio publicado en Environmental, Science and Technology ha revelado que la probabilidad de contraer el Covid-19 en el interior de restaurantes es 0,45. Además, según los datos de las Naciones Unidas, en el mundo hay actualmente un 50,5 % de hombres y un 49,5 % de mujeres.

a) Suponiendo que los sucesos "contraer el Covid-19 en el interior de restaurantes" y "ser mujer" sean independientes, calcule la probabilidad de que una persona elegida al azar sea mujer y contraiga el Covid-19 en el interior de restaurantes.

b) En el mismo supuesto que en el apartado a), calcule la probabilidad de que una persona elegida al azar no sea mujer o no contraiga el Covid-19 en el interior de restaurantes.

c) Si se eligen 8 personas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 4 de ellas contraigan el Covid-19 en el interior de restaurantes?

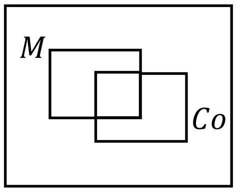
Solución

a) $Datos$: $P(Co) = 0{,}45;\ \ P(H) = 0{,}505;\ \ P(M) = 0{,}495.$

Dos sucesos Co y M son independientes si $P(Co \cap M) = P(Co) \cdot P(M)$.

$$P = P(Co \cap M) = P(Co) \cdot P(M) = 0{,}45 \cdot 0{,}495 = \underline{0{,}2228}.$$

b) $$P\left(\overline{M} \cup \overline{Co}\right) = 1 - P(M \cap Co) = 1 - 0{,}2228 = \underline{0{,}7772}.$$



$P\left(\overline{M} \cup \overline{Co}\right) = 1 - P(M \cap Co)$

c) Se trata de una distribución binomial de las siguientes características:

$n = 8;\ \ p = 0{,}45;\ \ q = 1 - 0{,}45 = 0{,}55.$ $\qquad P(r) = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot q^{n-r}.$

La probabilidad pedida es equivalente a la unidad menos la probabilidad de que se contagien, como mucho, 3 personas:

$$P = 1 - [P(0) + P(1) + P(2) + P(3)] =$$

$$= 1 - \left[\binom{8}{0} \cdot 0{,}45^0 \cdot 0{,}55^8 + \binom{8}{1} \cdot 0{,}45^1 \cdot 0{,}55^7 + \binom{8}{2} \cdot 0{,}45^2 \cdot 0{,}55^6 + \binom{8}{3} \cdot 0{,}45^3 \cdot 0{,}55^5\right] =$$

$$= 1 - \left(1 \cdot 1 \cdot 0{,}00837 + 8 \cdot 0{,}45 \cdot 0{,}01522 + \tfrac{8!}{6! \cdot 2!} \cdot 0{,}2025 \cdot 0{,}02768 + \tfrac{8!}{5! \cdot 3!} \cdot 0{,}09113 \cdot 0{,}05033\right) =$$

$$= 1 - (0{,}00837 + 0{,}05479 + 0{,}15695 + 0{,}25685) = 1 - 0{,}47696 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{P = 0{,}52304}}.$$

8º) En este ejercicio trabaje con 4 decimales para las probabilidades.

La altura de los individuos de una población sigue una distribución normal de media 175 cm y desviación típica 4 cm.

a) Calcule la probabilidad de que un individuo elegido al azar mida más de 170 cm.

b) Calcule qué porcentaje de la población mide entre 170 y 185 cm.

c) Calcule la altura que es superada por el 33 % de la población.

Solución

$a)\ Datos:\ \mu = 175;\ \ \sigma = 4.$

$X \to N(\mu;\ \sigma) = N(175, 4).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-175}{4}$.

$P = P(X > 170) = P\left(Z > \frac{170-175}{4}\right) = P\left(Z > \frac{-5}{4}\right) = P(Z > -1{,}25) =$

$$= \boldsymbol{P(Z \le 1,25) = \underline{0,8944}.}$$

$b)\ P = P(170 < X < 185) = P\left(\frac{170-175}{4} < Z < \frac{185-175}{4}\right) = P\left(\frac{-5}{4} < Z < \frac{10}{4}\right) =$

$= P(-1{,}25 < Z < 2{,}5) = P(Z < 2{,}5) - P(Z < -1{,}25) =$

$= P(Z < 2{,}5) - [1 - P(Z \le 1{,}25)] = P(Z < 2{,}5) - 1 + P(Z \le 1{,}25) =$

$= 0{,}9938 - 1 + 0{,}8944 = 1{,}8882 - 1 = \underline{0{,}8882}$.

$c)\ Datos:\ \mu;\ \ \sigma = 4.$

$X \to N(\mu;\ \sigma) = N(\mu, 4).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-175}{4}$.

$P = P(X > \beta) = P\left(Z > \frac{\beta-175}{4}\right) = 0{,}33;\ \ P\left(Z \le \frac{\beta-175}{4}\right) = 1 - 0{,}33 = 0{,}67.$

Mirando en la tabla $N(0, 1)$, al valor 0,6700 le corresponde 0,44, por lo cual:

$\frac{\beta-175}{4} = 0{,}44;\ \ \beta - 175 = 1{,}76 \Rightarrow \beta = 176{,}76.$

$$\underline{\boldsymbol{El\ 33\ \%\ de\ la\ población\ tiene\ una\ altura\ superior\ a\ 176,76\ cm.}}$$