MATEMÁTICAS II

Selectividad 2022

Comunidad autónoma de

CASTILLA Y LEÓN

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES

El alumno deberá escoger libremente cinco problemas completos de los diez propuestos. Se expresará claramente los elegidos. Si se resolvieran más, solo se corregirán los 5 primeros que estén resueltos (según el orden de numeración de pliegos y hojas de cada pliego) y que no aparezcan totalmente tachados. Podrán usarse calculadoras no programables, que no admitan memoria para texto, ni para resolución de ecuaciones, ni para resolución de integrales, ni para representaciones gráficas. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver, justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las propuestas, claridad y coherencia en la exposición, precisión de los cálculos y en las anotaciones. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

1º) $a)$ Discutir el sistema $\begin{cases} 2x+2my-z=0 \\ x+2y+mz=0 \\ x-my+mz=0 \end{cases}$, según los distintos valores del parámetro m.

$b)$ Resuelva el sistema si $m=-2$.

2º) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcule el valor de a tal que: $A^2=A^{-1}+\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3º) $a)$ Dada la recta $r\equiv \frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+1}{4}$ y el plano $\pi\equiv 2x+y+mz=0$, calcule m para que la recta y el plano sean perpendiculares.

$b)$ Calcule el plano β perpendicular a los planos $\pi_1\equiv x+y+z=1$ y $\pi_2\equiv x-y+z=2$, que pase por el punto $P(1,2,3)$.

4º) Considere el punto $P(2,2,1)$ y el plano $\pi\equiv 2x+3y-3z+6=0$.

$a)$ Halle la recta r que pasa por P y es perpendicular a π.

$b)$ Calcule la distancia del punto $Q(2,2,-2)$ al plano π.

5º) Dada la función $f(x)=x\cdot e^x$, determínense su dominio de definición, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión. Esbócese su gráfica.

6º) Calcule: $a)$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}$. $\qquad b)$ $I=\int_0^1 x\cdot e^x\cdot dx$.

7º) Dadas las curvas de ecuaciones $y=\sqrt{3x}$, $y=\frac{1}{3}x^2$:

$a)$ Dibuje las curvas y señale el recinto plano comprendido entre ambas.

$b)$ Calcule el área de dicho recinto.

8º) $a)$ Halle el área del recinto del plano limitado por la gráfica de $f(x)=x^3-3x$, el eje OX y las rectas $x=0$ y $x=2$.

$b)$ Calcule: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot sen\, x}{2-2\cdot\cos x}$.

9º) Una corporación fabrica herramientas de tres tipos de calidades. Un 10 % de calidad Alta; un 70 % de calidad Estándar y un 20 % de calidad Baja. Se sabe que son defectuosas el 1 %; el 10 % y el 30 % del total de las herramientas, respectivamente.

a) Se elige una herramienta al azar. Definiendo correctamente los sucesos que intervienen, calcúlese la probabilidad de que sea defectuosa.

b) Se elige una herramienta que resulta ser defectuosa. Definiendo correctamente los sucesos que intervienen, calcúlese la probabilidad de que la elegida sea de calidad estándar.

10º) El tiempo que transcurre hasta la primera avería de una unidad de cierta marca de impresoras viene dado, aproximadamente, por una distribución normal con un promedio de 1.500 horas y una desviación típica de 200 horas.

a) ¿Qué porcentaje de impresoras fallarán antes de 1.000 horas de funcionamiento?

b) Si compramos 500 impresoras, ¿cuántas de esas impresoras tendrán la primera avería entre las 1.000 y 2.000 horas de uso?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

1º) Discutir el sistema $\begin{cases} 2x + 2my - z = 0 \\ x + 2y + mz = 0 \\ x - my + mz = 0 \end{cases}$:

$a)$ Discuta el sistema según los distintos valores del parámetro m.

$b)$ Resuelva el sistema si $m = -2$.

Solución:

$a)$ La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 2 & 2m & -1 \\ 1 & 2 & m \\ 1 & -m & m \end{pmatrix}$.

Por tratarse de un sistema lineal homogéneo, a efectos de rango, las matrices de coeficientes y ampliada son equivalentes.

El rango de la matriz de coeficientes en función de m es el siguiente:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 2m & -1 \\ 1 & 2 & m \\ 1 & -m & m \end{vmatrix} = 4m + m + 2m^2 + 2 + 2m^2 - 2m^2 = 0;$$

$$2m^2 + 5m + 2 = 0;\ \ m = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-5 \pm 3}{4} \Rightarrow m_1 = -2;\ \ m_2 = -\frac{1}{2}.$$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius, un sistema es compatible determinado cuando los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada son iguales e iguales al número de incógnitas; en el caso que nos ocupa el número de incógnitas es tres, por lo cual:

$$Para \begin{Bmatrix} m \neq -2 \\ m \neq -1/2 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ A = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.$$

$$\boldsymbol{Para \begin{Bmatrix} m \neq -2 \\ m \neq -\frac{1}{2} \end{Bmatrix} el\ sistema\ tiene\ solamente\ la\ solución\ trivial\ x = y = z = 0}$$

.

$$Para\ m = -2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 \neq 0 \Rightarrow Rang\ A = 2.$$

$$Para\ m = -\frac{1}{2} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1/2 \\ 1 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \Rightarrow Rang\ A = 2.$$

$$\boldsymbol{Para \begin{Bmatrix} m = -2 \\ m = -\frac{1}{2} \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ A = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

$b)$ Para $m = -2$ el sistema resulta $\begin{cases} 2x - 4y - z = 0 \\ x + 2y - 2z = 0 \\ x + 2y - 2z = 0 \end{cases}$, que es compatible indeterminado y equivalente al sistema $\left.\begin{matrix} 2x - 4y - z = 0 \\ x + 2y - 2z = 0 \end{matrix}\right\}$. Haciendo $z = 8\lambda$:

$$\left.\begin{matrix} 2x - 4y = 8\lambda \\ x + 2y = 16\lambda \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} x - 2y = 4\lambda \\ x + 2y = 16\lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2x = 20\lambda;\ x = 10\lambda;\ 2y = -6\lambda;\ y = -3\lambda.$$

$$\underline{\boldsymbol{Soluci\acute{o}n}: \boldsymbol{x = 10\lambda,\ y = -3\lambda,\ z = 8\lambda,\ \forall\lambda \in R.}}$$

Problema 2:

2º) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcule el valor de a tal que: $A^2 = A^{-1} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & a^2 + a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = a;\ \ A^t = \begin{pmatrix} a & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix};\ \ Adj.\, de\ A^t = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{Adj.de\ A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & a \end{pmatrix}}{a} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{a} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^2 = A^{-1} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 & a^2 + a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} a^2 = \frac{1}{a} \\ a^2 + a = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{a = 1}}.$$

Problema 3:

3º) $a)$ Dada la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{4}$ y el plano $\pi \equiv 2x + y + mz = 0$, calcule m para que la recta y el plano sean perpendiculares.

$b)$ Calcule el plano β perpendicular a los planos $\pi_1 \equiv x + y + z = 1$ y $\pi_2 \equiv x - y + z = 2$, que pase por el punto $P(1, 2, 3)$.

Solución:

$a)$ Para que la recta r y el plano π sean perpendiculares es necesario que el vector director de la recta, $\overrightarrow{v_r} = (2, 1, 4)$, y el vector normal del plano, $\vec{n} = (2, 1, m)$, sean linealmente dependientes, es decir: que sus componentes sean proporcionales.

$$\frac{2}{2} = \frac{1}{1} = \frac{4}{m} \Rightarrow m = 4.$$

$$\underline{\boldsymbol{La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ son\ perpendiculares\ para\ m = 4.}}$$

$b)$ Los vectores normales de $\pi_1 \equiv x + y + z = 1$ y $\pi_2 \equiv x - y + z = 2$ son, respectivamente, los siguientes: $\overrightarrow{n_1} = (1, 1, 1)$ y $\overrightarrow{n_2} = (1, -1, 1)$.

Un vector normal del plano β pedido es cualquiera que sea linealmente dependientes del producto vectorial de los vectores normales de los planos dados.

$$\overrightarrow{n'_\beta} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = i + j - k - k + i - j = 2i - 2k \Rightarrow \overrightarrow{n_\beta} = (1, 0, -1).$$

La expresión general de β es la siguiente: $\beta \equiv x - z + D = 0$.

Si el plano β contiene al punto $P(1, 2, 3)$ tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} \beta \equiv x - z + D = 0 \\ P(1, 2, 3) \end{array}\right\} \Rightarrow 1 - 3 + D = 0 \Rightarrow D = 2.$$

$$\underline{\boldsymbol{\beta \equiv x - z + 2 = 0.}}$$

Problema 4:

4º) Considere el punto $P(2, 2, 1)$ y el plano $\pi \equiv 2x + 3y - 3z + 6 = 0$.

$a)$ Halle la recta r que pasa por P y es perpendicular a π.

$b)$ Calcule la distancia del punto $Q(2, 2, -2)$ al plano π.

Solución:

$a)$ Un vector normal de π es $\vec{n} = (2, 3, -3)$.

El vector $\vec{n}$ es director de la recta r pedida, por lo cual su ecuación es:

$$\underline{\boldsymbol{r \equiv \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 2 + 3\lambda. \\ z = 1 - 3\lambda \end{cases}}}$$

$b)$ La distancia del punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula $d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. Aplicando la fórmula al punto $Q(2, 2, -2)$ y al plano $\pi \equiv 2x + 3y - 3z + 6 = 0$:

$$d(Q, \pi) = \frac{|2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 - 3 \cdot (-2) + 6|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-3)^2}} = \frac{|4 + 6 + 6 + 6|}{\sqrt{4 + 9 + 9}} = \frac{22}{\sqrt{22}} = \sqrt{22}.$$

$$\underline{\boldsymbol{d(Q, \pi) = \sqrt{22}\ unidades}}.$$

Problema 5:

5º) Dada la función $f(x) = x \cdot e^x$, determínense su dominio de definición, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión. Esbócese su gráfica.

Solución:

El dominio de $f(x) = x \cdot e^x$ es R por ser producto de dos funciones continuas en R, por tanto: $\underline{D(f) \Rightarrow R}$.

La función $f(x) = x \cdot e^x$ es continua en su dominio por ser producto de dos funciones continuas.

No tiene asíntotas verticales por tener R como dominio.

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x \cdot e^x) = \infty \cdot \infty = \infty.$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x \cdot e^x) = -\infty \cdot e^{-\infty} = -\frac{\infty}{e^{\infty}} = -\frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Ind. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\frac{1}{e^x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\frac{-e^x}{e^{2x}}} = -\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\frac{1}{e^x}} = -e^{-\infty} = -\frac{1}{e^{\infty}} = -\frac{1}{\infty} = 0.$$

$$\underline{\boldsymbol{El\ eje\ de\ abscisas\ es\ asíntota\ horizontal\ en\ su\ parte\ negativa.}}$$

No tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las horizontales.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = e^x(1+x).$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^x(1+x) = 0 \Rightarrow x = -1.$$

Teniendo en cuenta la continuidad de la función, su dominio, y que, por ejemplo, $f'(0) = e^0(1+0) = 1 > 0$, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{\boldsymbol{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -1).}}$$

$$\underline{\boldsymbol{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (-1, +\infty).}}$$

Para que una función tenga un extremo relativo es condición necesaria que se anule su primera derivada. Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = e^x \cdot 1 + e^x \cdot (1+x) = e^x(2+x).$$

$$f''(-1) = e^{-1} \cdot (2-1) = \frac{1}{e} > 0 \Rightarrow Mínimo\ para\ x = -1.$$

$$f(-1) = -1 \cdot e^{-1} = -\frac{1}{e} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{Mínimo\ relativo\ y\ absoluto: P\left(-1, -\frac{1}{e}\right).}}$$

Una función es cóncava $(\cap)$ o convexa $(\cup)$ cuando su segunda derivada es negativa o positiva, respectivamente.

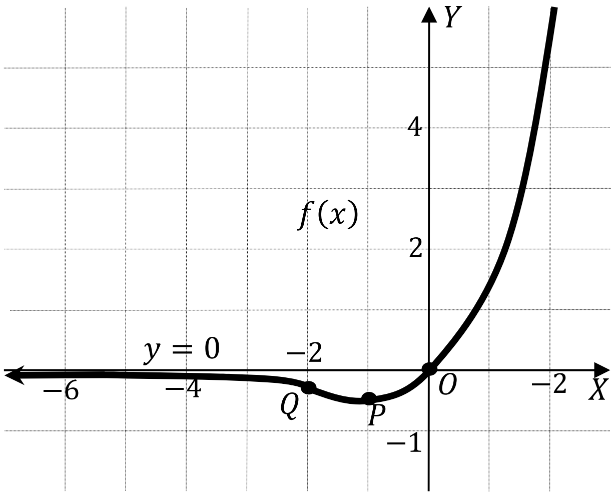
$f''(x) = 0 \Rightarrow e^x(2+x) = 0;\;\; e^x \neq \forall x \in R \Rightarrow 2 + x = 0 \Rightarrow x = -2.$

$$\underline{\boldsymbol{Concavidad}\ (\cap): \boldsymbol{f''(x) < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -2).}}$$

$$\underline{\boldsymbol{Convexidad}\ (\cup): \boldsymbol{f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (-2, +\infty).}}$$

$f(-2) = -2 \cdot e^{-2} = -\frac{2}{e^2} \Rightarrow Punto\ de\ inflexión: Q\left(-2, -\frac{2}{e^2}\right).$

Con los datos anteriores y teniendo en cuenta que la función contiene al origen, la representación gráfica, aproximada, de la función es la que indica la figura siguiente.



Problema 6:

6º) Calcule: $a)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}$. $b)\ I=\int_0^1 x\cdot e^x\cdot dx$.

Solución:

$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}=\frac{e^0-0-1}{0^2}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}\Rightarrow Indet.\Rightarrow \{L'Hopital\}\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=$

$$=\frac{e^0-1}{2\cdot 0}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}\Rightarrow Indet.\Rightarrow \{L'Hopital\}\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}=\frac{e^0}{2}\Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}=\frac{1}{2}}}.$$

$b)\ I=\int_0^1 x\cdot e^x\cdot dx.$

Se determina, en primer lugar, la integral indefinida:

$A=\int x\cdot e^x\cdot dx\Rightarrow\begin{Bmatrix} u=x\to du=dx \\ e^x\cdot dx=dv\to v=e^x\end{Bmatrix}\Rightarrow x\cdot e^x-\int e^x\cdot dx=$

$=x\cdot e^x-e^x\Rightarrow A=e^x(x-1).$

$I=\int_0^1 x\cdot e^x\cdot dx=[e^x(x-1)]_0^1=[e^1(1-1)]-[e^0(0-1)]=$

$$=e\cdot 0-1\cdot(-1)\Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{I=\int_0^1 x\cdot e^x\cdot dx=1}}.$$

Problema 7:

7º) Dadas las curvas de ecuaciones $y = \sqrt{3x},\ y = \frac{1}{3}x^2$:

a) Dibuje las curvas y señale el recinto plano comprendido entre ambas.

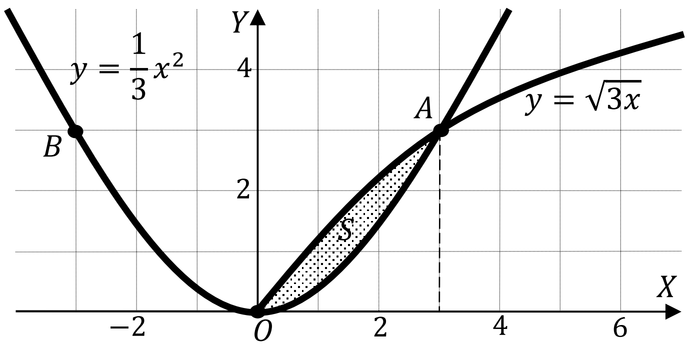
b) Calcule el área de dicho recinto.

Solución:

a) Los puntos de corte de las dos curvas tienen por abscisas las raíces de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones.

$$\sqrt{3x} = \frac{1}{3}x^2;\ \ 3\sqrt{3x} = x^2;\ \ 27x = x^4;\ \ x^4 - 27x = 0;\ \ x(x^3 - 27) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \to O(0,0) \\ x_2 = 3 \to A(3,3) \end{cases}.$$



La curva $y = \sqrt{3x}$ tiene por dominio $[0, +\infty)$ y es creciente en su dominio, por ser $y' = \frac{3}{2\sqrt{3x}} > 0$ para cualquier valor perteneciente al dominio de la función.

La curva $y = \frac{1}{3}x^2$ es una parábola convexa $(\cup)$, por ser positivo el coeficiente de x^2, cuyo vértice es el origen y, por simetría, contiene al punto $B(-3, 3)$.

La representación gráfica de la situación, aproximada, se expresa en la figura adjunta.

b) Por ser las ordenadas de la curva $y = \sqrt{3x}$ mayores que las correspondientes ordenadas de la curva $y = \frac{1}{3}x^2$, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S = \int_0^3 \left(\sqrt{3x} - \frac{1}{3}x^2\right) \cdot dx = \int_0^3 \left(\sqrt{3} \cdot x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}x^2\right) \cdot dx = \left[\sqrt{3} \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3}\right]_0^3 =$$

$$= \left[\sqrt{3} \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{9}\right]_0^3 = \left[\frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot x\sqrt{x} - \frac{x^3}{9}\right]_0^3 = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot 3 \cdot \sqrt{3} - \frac{3^3}{9}\right) - 0 = 6 - 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{S = 3\ u^2}}.$$

Autor: ANTONIO MENGUIANO
www.apuntesmareaverde.org.es

Problema 8:

8º) a) Halle el área del recinto del plano limitado por la gráfica de $f(x) = x^3 - 4x$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

b) Calcule: $\lim_{x \to 0} \frac{x \cdot sen\, x}{2 - 2 \cdot \cos x}$.

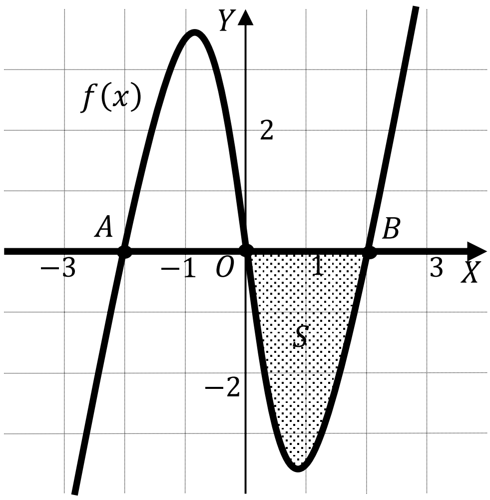
Solución:

a) Para hacer la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 4x$ se tiene en cuenta que es simétrica con respecto al origen, por ser $f(-x) = -f(x)$; sus puntos de corte con el eje de abscisas son los siguientes:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 4x = 0;$$

$$x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \to A(-2, 0) \\ x_2 = 0 \to O(0, 0) \\ x_3 = 2 \to B(2, 0) \end{cases}.$$

La representación gráfica de la situación, aproximada, se expresa en la figura adjunta.



Se ha tenido en cuenta, además de lo anterior, que por ejemplo, $f(1) = 1^3 - 4 \cdot 1 < 0$.

De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_2^0 f(x) \cdot dx = \int_2^0 (x^3 - 4x) \cdot dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2}\right]_2^0 =$$

$$0 - \left(\frac{2^4}{4} - \frac{4 \cdot 2^2}{2}\right) = -4 + 8 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{S = 4\, u^2}}.$$

$$b) \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot sen\, x}{2 - 2 \cdot \cos x} = \frac{0 \cdot sen\, 0}{2 - 2 \cdot \cos 0} = \frac{0}{2 - 2 \cdot 1} = \frac{0}{0} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{1 \cdot sen\, x + x \cdot \cos x}{2 \cdot sen\, x} = \frac{sen\, 0 + 0 \cdot \cos 0}{2 \cdot sen\, 0} = \frac{0 + 0 \cdot 1}{2 \cdot 0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\cos x + 1 \cdot \cos x - x \cdot sen\, x}{2 \cdot \cos x} = \frac{\cos 0 + \cos 0 - 0 \cdot sen\, 0}{2 \cdot \cos 0} = \frac{1 + 1 - 0}{2 \cdot 1} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{\lim_{x \to 0} \frac{x \cdot sen\, x}{2 - 2 \cdot \cos x} = 1}}.$$

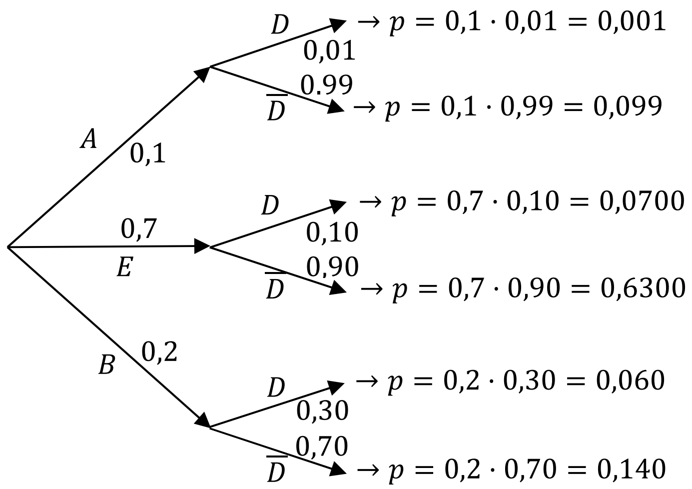
Problema 9:

9º) Una corporación fabrica herramientas de tres tipos de calidades. Un 10 % de calidad Alta; un 70 % de calidad Estándar y un 20 % de calidad Baja. Se sabe que son defectuosas el 1 %; el 10 % y el 30 % del total de las herramientas, respectivamente.

a) Se elige una herramienta al azar. Definiendo correctamente los sucesos que intervienen, calcúlese la probabilidad de que sea defectuosa.

b) Se elige una herramienta que resulta ser defectuosa. Definiendo correctamente los sucesos que intervienen, calcúlese la probabilidad de que la elegida sea de calidad estándar.

Solución:



a) $\quad P = P(D) = P(A \cap D) + P(E \cap D) + P(B \cap D) =$

$= P(A) \cdot P(D/A) + P(E) \cdot P(D/E) + P(B) \cdot P(D/B) =$

$= 0{,}1 \cdot 0{,}01 + 0{,}7 \cdot 0{,}10 + 0{,}2 \cdot 0{,}30 = 0{,}001 + 0{,}070 + 0{,}060 = \underline{0{,}131}.$

b) $\quad P = P(E/D) = \frac{P(E \cap D)}{P(D)} = \frac{P(E) \cdot P(D/E)}{P(D)} = \frac{0{,}7 \cdot 0{,}10}{0{,}131} = \frac{0{,}070}{0{,}131} = \underline{0{,}5344}.$

Problema 10:

10º) El tiempo que transcurre hasta la primera avería de una unidad de cierta marca de impresoras viene dado, aproximadamente, por una distribución normal con un promedio de 1.500 horas y una desviación típica de 200 horas.

$a)$ ¿Qué porcentaje de impresoras fallarán antes de 1.000 horas de funcionamiento?

$b)$ Si compramos 500 impresoras, ¿cuántas de esas impresoras tendrán la primera avería entre las 1.000 y 2.000 horas de uso?

Solución:

$a)$ $Datos$: $\mu = 1.500$; $\sigma = 200$.

$X \rightarrow N(\mu;\ \sigma) = N(1.500;\ 200)$. Tipificando la variable: $Z = \frac{X-1.500}{200}$.

$P = P(X < 1.000) = P\left(Z < \frac{1.000-1.500}{200}\right) = P\left(Z < \frac{-500}{200}\right) = P(Z < -2{,}5) =$

$= P(Z > 2{,}5) = 1 - P(Z \leq 2{,}5) = 1 - 0{,}9938 = \underline{0{,}0062 = 0{,}62\ \%}.$

$b)$ $P = P(1.000 \leq X \leq 31) = P\left(\frac{1.000-1.500}{200} \leq Z \leq \frac{2.000-1.500}{200}\right) =$

$= P\left(\frac{-500}{200} \leq Z \leq \frac{500}{200}\right) = P(-2{,}5 \leq Z \leq 2{,}5) = P(Z \leq 2{,}5) - P(Z \leq -2{,}5) =$

$= P(Z \leq 2{,}5) - [1 - P(Z \leq 2{,}5)] = P(Z \leq 2{,}5) - 1 + P(Z \leq 2{,}5) =$

$= 2 \cdot P(Z \leq 2{,}5) - 1 = 2 \cdot 0{,}9938 - 1 = 1{,}9876 - 1 = 0{,}9876.$

$N = 500 \cdot P = 500 \cdot 0{,}9876 = 493{,}8.$

$\underline{\boldsymbol{Tendrán\ la\ primera\ avería\ entre\ 1.000\ y\ 2.000\ horas\ 494\ impresoras.}}$

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES

El alumno deberá escoger libremente cinco problemas completos de los diez propuestos. Se expresará claramente los elegidos. Si se resolvieran más, solo se corregirán los 5 primeros que estén resueltos (según el orden de numeración de pliegos y hojas de cada pliego) y que no aparezcan totalmente tachados. Podrán usarse calculadoras no programables, que no admitan memoria para texto, ni para resolución de ecuaciones, ni para resolución de integrales, ni para representaciones gráficas. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver, justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las propuestas, claridad y coherencia en la exposición, precisión de los cálculos y en las anotaciones. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

1º) $a)$ Discuta el sistema $\begin{cases} x+y+mz=4 \\ 2x-y+2z=3 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$ según los valores del parámetro m.

$b)$ Resuelva el sistema si $m=2$.

2º) $a)$ Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, hállese la matriz X tal que $AX+B=C$.

$b)$ Dadas las matrices $M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, N=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, explíquese cuáles de los productos $M \cdot N, M \cdot P, N \cdot P$ pueden calcularse, y calcúlense cuando se pueda.

3º) $a)$ Calcule el plano π que pasa por el punto $P(1,0,1)$ y es paralelo a los siguientes vectores: $\vec{u}=(1,1,1)$ y $\vec{v}=(1,2,3)$.

$b)$ Calcule el plano β paralelo al plano $\alpha \equiv 3x+2y+2z+1=0$ que pase por el punto $Q(1,2,3)$.

4º) $a)$ Encuéntrense las ecuaciones de la recta t que está contenida en el plano $\alpha \equiv x-y=0$, es paralela al plano $\beta \equiv 2x-3y+z=4$ y pasa por el punto $P(1,1,3)$.

$b)$ Hállese la ecuación del plano que es paralelo a la recta $r \equiv x-1=y+2=\frac{z-1}{2}$ y pasa por los puntos $A(0,3,1)$ y $B(-2,1,-1)$.

5º) Dada la función $f(x)=\frac{x^2}{2-x}$, se pide:

$a)$ Encuentre su dominio y calcule sus asíntotas, si las tiene.

$b)$ Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos relativos, si los tiene.

6º) $a)$ Calcule $\lim\limits_{x \to 0} \frac{L(1+x)}{e^x-1}$.

$b)$ Estudiando previamente el signo de la función en el intervalo $[0,3]$, hállese el área limitada por la gráfica de la función $f(x)=x^3-9x$ y el eje de abscisas, cuando x varía en el intervalo $[0,3]$.

7º) $a)$ Enuncie el teorema de Bolzano.

$b)$ Averigüe si la función $f(x) = x + sen\ x - 2$ se anula en algún punto del intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

8º) $a)$ Estudie el signo de la función $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$ en el intervalo $[0, 2]$.

$b)$ Calcule el área limitada por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje de abscisas en el intervalo $[0, 2]$.

9º) Entre los participantes de un torneo internacional de ajedrez:

--- El 28 % de ellos son rusos, de los cuales las tres cuartas partes son grandes maestros.

--- El 24 % son estadounidenses y entre ellos la mitad son grandes maestros.

--- El 48 % son del resto del mundo, de los cuales un tercio son grandes maestros.

Considerando los sucesos: R: “ser ruso”; E: “ser estadounidense”; M: “no ser ruso ni estadounidense” y GM: “ser gran maestro”.

$a)$ Indique cuáles son los valores de $P(GM/R);\ P(GM/E);\ P(GM/M)$.

$b)$ Calcule la probabilidad de que al elegir al azar a uno de los participantes en el torneo, sea un gran maestro.

$c)$ Se elige al azar a uno de los grandes maestros del torneo, ¿cuál es la probabilidad de que sea ruso?

10º) La variable agudeza visual de una población se ajusta a una distribución normal de media 2 cpg (ciclos por segundo) y desviación típica 1 cpg. A los individuos con una agudeza visual inferior a 1,1 cpg se les considera con “problemas visuales graves”.

$a)$ ¿Qué porcentaje de la población tiene “problemas visuales graves”?

$b)$ ¿Qué porcentaje de la población tiene una agudeza visual entre 2 y 2,9 cpg?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Problema 1:

1º) $a)$ Discuta el sistema $\begin{cases} x+y+mz=4 \\ 2x-y+2z=3 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$ según los valores del parámetro m.

$b)$ Resuelva el sistema si $m=2$.

Solución:

$a)$ Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ y $A'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & m & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}=-1-4m+2+m+4-2=0;\ \ 3-3m=0;$$

$1-m=0 \Rightarrow m=1.$

$$\underline{\boldsymbol{Para\ a \neq 1 \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 3 = n^{\underline{o}}\ inc\acute{o}g. \Rightarrow S.C.D.}}$$

$$Para\ a=1 \Rightarrow A'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1=C_3\} \Rightarrow\ Rang\ A' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}=-16+3+4+6=-3 \neq 0 \Rightarrow Rang\ A'=3.$$

$$\underline{\boldsymbol{Para\ a=1 \Rightarrow Rang\ A=2;\ Rang\ A'=3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}}$$

$b)$ Para $m=2$ el sistema resulta $\left.\begin{array}{r} x+y+2z=4 \\ 2x-y+2z=3 \\ x-2y+z=0 \end{array}\right\}$, que es compatible determinado. Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{3-3\cdot 2}=\frac{-4-12+16-3}{-3}=\frac{-3}{-3}=1. \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-3}=\frac{3+8-6-8}{-3}=\frac{-3}{-3}=1.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{-3}=\frac{-16+3+4+6}{-3}=\frac{-3}{-3}=1.$$

$$\underline{\boldsymbol{Soluci\acute{o}n\!: x=1,\ y=1,\ z=1.}}$$

Problema 2:

2º) $a)$ Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, hállese la matriz X tal que $AX + B = C$.

$b)$ Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, explíquese cuáles de los productos $M \cdot N, M \cdot P, N \cdot P$ pueden calcularse, y calcúlense cuando se pueda.

Solución:

$a)$ $A \cdot X + B = C;\ \ A \cdot X = C - B;\ \ A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (C - B);$

$I \cdot X = A^{-1} \cdot (C - B) \Rightarrow \underline{X = A^{-1} \cdot (C - B)}.$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1;\ \ A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ \ Adj.\,de\ A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{Adj.de\ A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}{1} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$X = A^{-1} \cdot (C - B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}}.$$

$b)$ Para que sea posible el producto de dos matrices es necesario que el número de columnas de la primera sea igual que el número de filas de la segunda.

$$M \cdot N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{No\ es\ posible}.$$

$$M \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I}.$$

$$N \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{No\ es\ posible}.$$

Problema 3:

3º) $a)$ Calcule el plano π que pasa por el punto $P(1,0,1)$ y es paralelo a los siguientes vectores: $\vec{u} = (1,1,1)$ y $\vec{v} = (1,2,3)$.

$b)$ Calcule el plano β paralelo al plano $\alpha \equiv 3x + 2y + 2z + 1 = 0$ que pase por el punto $Q(1,2,3)$.

Solución:

$a)$ La ecuación general del plano π pedido es la siguiente:

$$\pi(\vec{u}, \vec{v};\ P) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0;$$

$3(x-1) + y + 2(z-1) - (z-1) - 2(x-1) - 3y = 0;$

$$(x-1) - y + (z-1) = 0;\ \ x - 1 - y - z - 1 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{\pi \equiv x - y - z - 2 = 0.}}$$

$b)$ El haz de planos, γ, paralelos al plano $\alpha \equiv 3x + 2y + 2z + 1 = 0$ tiene por expresión general $\gamma \equiv 3x + 2y + 2z + D = 0$.

De los infinitos planos de haz γ, el plano β pedido es el que contiene al punto $Q(1,2,3)$.

$$\left.\begin{array}{r} \gamma \equiv 3x + 2y + 2z + D = 0 \\ Q(1,2,3) \end{array}\right\} \Rightarrow 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + D = 0;$$

$$3 + 4 + 6 + D = 0 \Rightarrow D = -13 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{\beta \equiv 3x + 2y + 2z - 13 = 0.}}$$

Problema 4:

4º) a) Encuéntrense las ecuaciones de la recta t que está contenida en el plano $\alpha \equiv x - y = 0$, es paralela al plano $\beta \equiv 2x - 3y + z = 4$ y pasa por el punto $P(1, 1, 3)$.

b) Hállese la ecuación del plano que es paralelo a la recta $r \equiv x - 1 = y + 2 = \frac{x-1}{2}$ y pasa por los puntos $A(0, 3, 1)$ y $B(-2, 1, -1)$.

Solución:

a) El vector director de la recta t es perpendicular al vector normal del plano α por estar contenida en él y, también es perpendicular la vector normal del plano β por ser paralela a él, por lo cual, es perpendicular a los vectores normales a los planos. Un vector perpendicular a dos vectores dados es linealmente dependiente del producto vectorial de los dos vectores, es decir: $\overrightarrow{v_t}$ es linealmente dependiente de los vectores $\overrightarrow{n_\alpha}$ y $\overrightarrow{n_\beta}$.

$$\overrightarrow{n_\alpha} = (1, -1, 0) \;\; y \;\; \overrightarrow{n_\beta} = (2, -3, 1).$$

$$\overrightarrow{v'_t} = \overrightarrow{n_\alpha} \wedge \overrightarrow{n_\beta} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -i - 3k + 2k - j = -i - j - k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{v_t} = (1, 1, 1) \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda. \\ z = 3 + \lambda \end{cases}}}$$

b) $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = [(0, 3, 1) - (-2, 1, -1)] = (2, 2, 2).$

$$\overrightarrow{v_r} = (1, 1, 2).$$

$$\pi(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{v_r};\; A) \equiv \begin{vmatrix} x & y-3 & z-1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0;$$

$4x + 2(y-3) + 2(z-1) - 2(z-1) - 2x - 4(y-3) = 0;\;\; 2x - 2(y-3) = 0;$

$$x - (y-3) = 0 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{\pi \equiv x - y + 3 = 0.}}$$

Problema 5:

5º) Dada la función $f(x)=\frac{x^2}{2-x}$, se pide:

a) Encuentre su dominio y calcule sus asíntotas, si las tiene.

b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos relativos, si los tiene.

Solución:

a) Por tratarse de una función racional su dominio es R, excepto los valores de x que anulan el denominador:

$$2-x=0;\ \ x=2 \Rightarrow \underline{D(f) \Rightarrow R-\{2\}}.$$

Asíntotas horizontales: son de la forma $y=k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{2-x}=\pm\infty \Rightarrow \underline{No\ tiene\ asíntotas\ horizontales}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$2-x=0;\ \ x=2 \Rightarrow \underline{La\ recta\ x=2\ es\ asíntota\ vertical}.$$

Asíntotas oblicuas: Son de la forma $y=mx+n$, siendo:

$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ y $n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]$, con m finito y $m\neq 0$.

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{2-x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x-x^2}=-1.$$

$$n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{2-x}+x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-x^2}{2-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2-x}=-2.$$

$$\underline{\boldsymbol{Asíntota\ oblicua}: \boldsymbol{y=-x-2}.}$$

b) Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x)=\frac{2x\cdot(2-x)-x^2\cdot(-1)}{(2-x)^2}=\frac{4x-2x^2+x^2}{(2-x)^2}=\frac{4x-x^2}{(2-x)^2}=\frac{x(4-x)}{(2-x)^2}.$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{x(4-x)}{(2-x)^2}=0;\ x(4-x)=0 \Rightarrow x_1=0, x_2=4.$$

Como quiera que el denominador de la derivada es positivo para los valores reales de x pertenecientes al dominio de R, el signo de $f'(x)$ es el que tenga el numerador, al cual lo dividen las raíces de la derivada en los intervalos $(-\infty,0), (0,4)\ y\ (4,+\infty)$, donde la $f'(x)$ es, alternativamente, positiva o negativa.

Considerando, por ejemplo, $x=1\in(0,4)$:

$f'(1) = \frac{1\cdot(4-1)}{(2-1)^2} = \frac{3}{1} > 0.$

Teniendo en cuanta el dominio de la función y de lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$\underline{\boldsymbol{Decrecimiento}: \boldsymbol{f'(x) < 0 \Rightarrow x\epsilon(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)}.}$$

$$\underline{\boldsymbol{Crecimiento}: \boldsymbol{f'(x) > 0 \Rightarrow x\epsilon(0, 2) \cup (2, 4)}.}$$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su primera derivada en ese punto. Esta condición necesaria no es suficiente; para que exista el máximo o mínimo es necesario que no se anule la segunda derivada en ese punto para el valor que anula la primera derivada.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = \frac{(4-2x)\cdot(2-x)^2-(4x-x^2)\cdot[2\cdot(2-x)\cdot(-1)]}{(2-x)^4} = \frac{(4-2x)\cdot(2-x)+2(4x-x^2)}{(2-x)^3} =$$

$$= \frac{8-4x-4x+2x^2+8x-2x^2}{(2-x)^3} \Rightarrow f''(x) = \frac{8}{(2-x)^3}.$$

$f''(0) = \frac{8}{(2-0)^3} = \frac{8}{8} = 1 > 0 \Rightarrow$ Mín. relativo para $x = 0$.

$f(0) = 0 \Rightarrow \underline{Mín: O(0,0)}.$

$f''(4) = \frac{8}{(2-4)^3} = \frac{8}{-8} = -1 < 0 \Rightarrow$ Máx. relativo para $x = 4$.

$f(4) = \frac{4^2}{2-4} = \frac{16}{-2} = -8 \Rightarrow \underline{Máx: A(4,-8)}.$

Problema 6:

6º) $a)$ Calcule $\lim_{x\to 0} \frac{L(1+x)}{e^x-1}$.

$b)$ Estudiando previamente el signo de la función en el intervalo $[0,3]$, hállese el área limitada por la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 9x$ y el eje de abscisas, cuando x varía en el intervalo $[0,3]$.

Solución:

$a)$ $\lim_{x\to 0} \frac{L(1+x)}{e^x-1} = \frac{L(1+0)}{e^0-1} = \frac{L1}{1-1} = \frac{0}{0} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{e^x} =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{(1+x)\cdot e^x} = \frac{1}{(1+0)\cdot e^0} = \frac{1}{1\cdot 1} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{\lim_{x\to 0} \frac{L(1+x)}{e^x-1} = 1.}}$$

$b)$ Teniendo en cuenta que $f(-x) = (-x)^3 - 9\cdot(-x) = -x^3 + 9x = -f(x)$, la función es simétrica con respecto al origen.

Los puntos de corte con el eje de abscisas de la función son los siguientes:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 9x = 0;\ \ x(x^2-9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \to A(-3,0) \\ x_2 = 0 \to O(0,0) \\ x_3 = 3 \to B(3,0) \end{cases}.$$

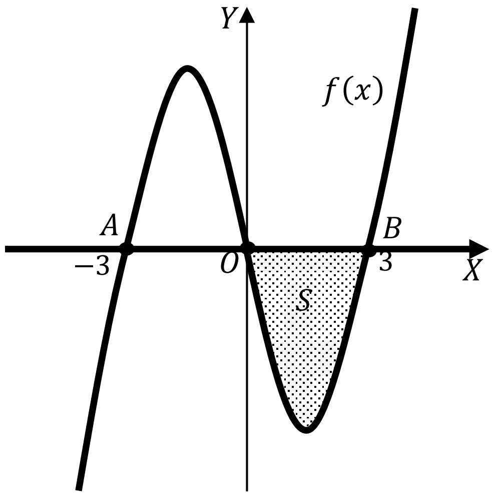
Teniendo en cuenta que $f(1) = 1 - 9 = -8 < 0$, la representación gráfica, aproximada, de la función, donde se sombrea la superficie a calcular, es la que se indica en la figura adjunta.

$S = \int_3^0 f(x)\cdot dx + \int_3^0 (x^3-9x)\cdot dx =$

$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{9x^2}{2}\right]_3^0 = 0 - \left(\frac{3^4}{4} - \frac{9\cdot 3^2}{2}\right) =$

$= -\frac{81}{4} + \frac{81}{2} = -\frac{81+162}{4} = \frac{81}{4}.$

$$\underline{\boldsymbol{S = \frac{81}{4}u^2 = 20,25\ u^2.}}$$



Problema 1:

7º) a) Enuncie el teorema de Bolzano.

b) Averigüe si la función $f(x) = x + sen\ x - 2$ se anula en algún punto del intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Solución:

a) El teorema de Bolzano dice que "si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$".

b) La función $f(x) = x + sen\ x - 2$ es continua en su dominio, que es R, por ser suma de funciones continuas en R, por lo cual, le es aplicable el teorema de Bolzano a cualquier intervalo finito que se considere.

$f(0) = 0 + sen\ 0 - 2 = 0 - 2 = -2 < 0.$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + sen\ \frac{\pi}{2} - 2 = \frac{\pi}{2} + 1 - 2 = \frac{\pi}{2} - 1 > 0.$

Teniendo en cuenta lo anterior se puede afirmar que:

$\boldsymbol{A\ la\ funci\acute{o}n\ f(x)\ le\ es\ aplicable\ el\ teorema\ de\ Bolzano\ en\ el\ intervalo\ \left[0, \frac{\pi}{2}\right]}$.

Problema 8:

8º) $a)$ Estudie el signo de la función $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$ en el intervalo $[0, 2]$.

$b)$ Calcule el área limitada por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje de abscisas en el intervalo $[0, 2]$.

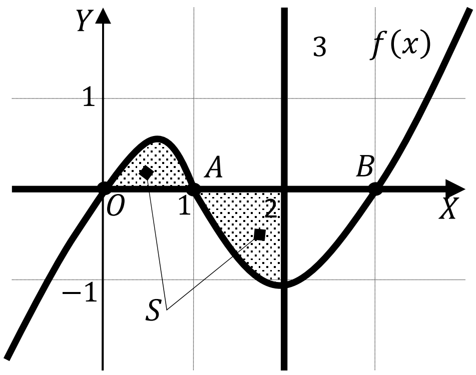
Solución:

$a, b)$ La función $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$, tiene los siguientes puntos de corte con el eje de abscisas:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 4x^2 + 3x = 0;\ \ x(x^2 - 4x + 3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0.$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0;\ \ x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = 2 \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 1 \rightarrow A(1, 0) \\ x_3 = 3 \rightarrow B(3, 0) \end{cases}.$$

Teniendo en cuenta, por ejemplo, que $f(2) = 8 - 16 + 6 = -2 < 0$, la representación gráfica, aproximada, de la función, donde se sombrea la superficie a calcular, es la que se indica en la figura adjunta.



$$S = \int_0^1 f(x) \cdot dx + \int_2^1 f(x) \cdot dx =$$

$$= [F(x)]_0^1 + [F(x)]_2^1 =$$

$$= F(1) - F(0) + F(1) - F(2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = 2 \cdot F(1) - F(0) - F(2). \quad (*)$$

$$F(x) = \int (x^3 - 4x^2 + 3x) \cdot dx = \frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + C.$$

Sustituyendo el valor obtenido de $F(x)$ en la expresión (*):

$$S = 2 \cdot \left(\frac{1^4}{4} - \frac{4 \cdot 1^3}{3} + \frac{3 \cdot 1^2}{2}\right) - 0 - \left(\frac{2^4}{4} - \frac{4 \cdot 2^3}{3} + \frac{3 \cdot 2^2}{2}\right) =$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2}\right) - 4 + \frac{32}{3} - 6 = \frac{1}{2} - \frac{8}{3} + 3 - 10 + \frac{32}{3} = \frac{1}{2} + 1 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{S = \frac{3}{2} u^2 = 1,5\ u^2.}$$

Problema 9:

9º) Entre los participantes de un torneo internacional de ajedrez:

--- El 28 % de ellos son rusos, de los cuales las tres cuartas partes son grandes maestros.

--- El 24 % son estadounidenses y entre ellos la mitad son grandes maestros.

--- El 48 % son del resto del mundo, de los cuales un tercio son grandes maestros.

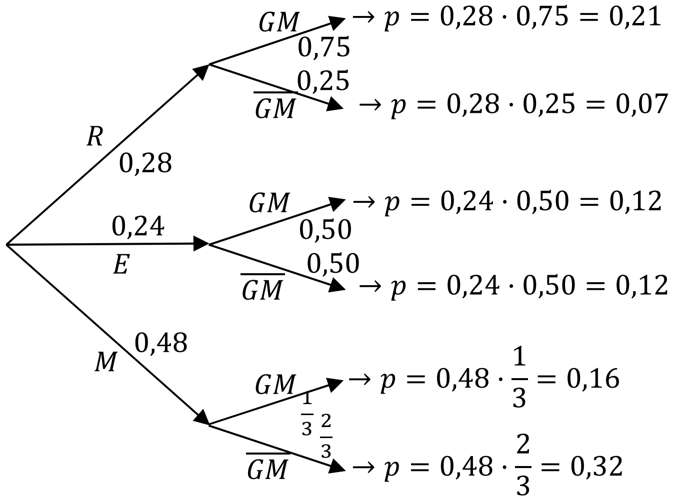
Considerando los sucesos: R: "ser ruso"; E: "ser estadounidense"; M: "no ser ruso ni estadounidense" y GM: "ser gran maestro".

a) Indique cuáles son los valores de $P(GM/R);\ P(GM/E);\ P(GM/M)$.

b) Calcule la probabilidad de que al elegir al azar a uno de los participantes en el torneo, sea un gran maestro.

c) Se elige al azar a uno de los grandes maestros del torneo, ¿cuál es la probabilidad de que sea ruso?

Solución:



a) $\quad P = P(GM/R) = \frac{3}{4} = \underline{0{,}75}. \quad P(GM/E) = \underline{0{,}5}. \quad P = P(GM/M) = \underline{\frac{1}{3} \cong 0{,}33}.$

(Sorprendente la pregunta: son datos del ejercicio)

b) $P = P(GM) = P(R \cap GM) + P(E \cap GM) + P(M \cap GM) =$

$= P(R) \cdot P(GM/R) + P(E) \cdot P(GM/E) + P(M) \cdot P(GM/M) =$

$= 0{,}28 \cdot 0{,}75 + 0{,}24 \cdot 0{,}50 + 0{,}48 \cdot \frac{1}{3} = 0{,}21 + 0{,}12 + 0{,}16 = \underline{0{,}49}.$

b) $\quad P = P(R/GM) = \frac{P(R \cap GM)}{P(GM)} = \frac{P(R) \cdot P(GM/R)}{P(GM)} = \frac{0{,}28 \cdot 0{,}75}{0{,}49} = \frac{0{,}21}{0{,}49} = \underline{0{,}4286}.$

Problema 10:

10º) La variable agudeza visual de una población se ajusta a una distribución normal de media 2 cpg (ciclos por segundo) y desviación típica 1 cpg. A los individuos con una agudeza visual inferior a 1,1 cpg se les considera con "problemas visuales graves".

a) ¿Qué porcentaje de la población tiene "problemas visuales graves"?

b) ¿Qué porcentaje de la población tiene una agudeza visual entre 2 y 2,9 cpg?

Solución:

$a)\ Datos:\ \mu = 2;\ \ \sigma = 1.$

$X \rightarrow N(\mu;\ \sigma) = N(2,1).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-2}{1}$.

$P = P(X < 1{,}1) = P\left(Z < \frac{1{,}1-2}{1}\right) = P(Z < -0{,}9) = P(Z > 0{,}9) =$

$= 1 - P(Z \leq 0{,}9) = 1 - 0{,}8159 = \underline{0{,}1841 = 18{,}41\ \%}.$

$b)\ P = P(2 < X < 2{,}9) = P\left(\frac{2-2}{1} < Z < \frac{2{,}9-2}{1}\right) = P(0 < Z < 0{,}9) =$

$= P(Z < 0{,}9) - P(Z < 0) = 0{,}8159 - 0{,}5 = \underline{0{,}3159 = 31{,}59\ \%}.$