Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2020

Comunidad autónoma de

VALENCIA

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Pedro Podadera Sánchez

GENERALITAT VALENCIANA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2019–2020** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JULIO

BAREMO DEL EXAMEN: **Se han de contestar tres problemas de entre los seis propuestos.** Cada problema se valorará de 0 a 10 puntos y la nota final será la media aritmética de los tres. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. Está permitido el uso de regla. Las gráficas se harán con el mismo color que el resto del examen.

Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas.

Problema 1:

Para fertilizar una parcela de cultivo se utilizan dos tipos de fertilizantes, A y B. El cultivo de la parcela necesita un mínimo de 120 kilos de nitrógeno y 110 kilos de fósforo. El fertilizante A contiene un 25% de nitrógeno y un 15% de fósforo, siendo su precio de 1,2 euros el kilo, mientras que el fertilizante B contiene un 16% de nitrógeno y un 40% de fósforo y cuesta 1,6 euros el kilo.

a) ¿Qué cantidad se necesita de cada tipo de fertilizante para que el coste de la fertilización resulte mínimo?

(8 puntos)

b) ¿Cuál es este coste mínimo? (2 puntos)

Problema 2:

Dada la función $f(x) = \frac{2x^2-3x+5}{x^2-1}$, se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. (2 puntos)

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (2 puntos)

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (2 puntos)

d) Los máximos y mínimos locales. (2 puntos)

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados de los apartados anteriores.

(2 puntos)

Problema 3:

Si un habitante de la ciudad de *Megalópolis* es portador del anticuerpo A, entonces 2 veces de cada 5 es portador del anticuerpo B. Por el contrario, si no es portador del anticuerpo A, entonces 4 veces de cada 5 no es portador del anticuerpo B. Si sabemos que la mitad de la población es portadora del anticuerpo A, calcula:

a) La probabilidad de que un habitante de *Megalópolis* sea portador del anticuerpo B.

b) La probabilidad de que si un habitante de *Megalópolis* es portador del anticuerpo B lo sea también del anticuerpo A.

c) La probabilidad de que si un habitante de *Megalópolis* no es portador del anticuerpo B, tampoco lo sea del anticuerpo A.

d) La probabilidad de que un habitante de *Megalópolis* sea portador del anticuerpo A y no lo sea del anticuerpo B.

(Cada apartado puntúa 2,5 puntos)

Problema 4:

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Halla la matriz inversa de A. (3 puntos)

b) Explica por qué la matriz B no tiene inversa. (2 puntos)

c) Razona por qué la matriz AB no tiene inversa. (2 puntos)

d) Resuelve la ecuación matricial $AB-AX=BA$. (3 puntos)

Problema 5:

Una empresa farmacéutica lanza al mercado un nuevo fármaco que se distribuye en cajas de seis unidades. La relación entre el precio de cada caja y el beneficio mensual obtenido en euros viene dada por la función:

$$B(x) = -x^2 + 16x - 55,$$

donde x es el precio de venta de una caja. Se pide:

a) ¿Qué beneficio obtiene cuando vende cada caja a 6 euros? (2 puntos)

b) ¿Entre qué valores debe fijar el precio de venta de cada caja para obtener beneficios? (2 puntos)

c) Calcula a qué precio ha de vender cada caja para que el beneficio sea máximo. ¿Cuál es el beneficio máximo? (2+1 puntos)

d) ¿Entre qué valores el beneficio crece y entre qué valores el beneficio decrece? (3 puntos)

Problema 6:

Un profesor evalúa a sus estudiantes a través de un trabajo final. El profesor sabe por experiencia que el 5% de los trabajos no son originales, sino que son plagios. El profesor dispone de un programa informático para detectar plagios. La probabilidad de que el programa no clasifique correctamente un trabajo plagiado es 0,04 y la probabilidad de que clasifique como plagio un trabajo original es 0,02.

a) Calcula la probabilidad de que un trabajo final, elegido al azar, sea clasificado como plagio por el programa informático. (3 puntos)

b) Un trabajo es inspeccionado por el programa informático y es clasificado como original. ¿Cuál es la probabilidad de que dicho trabajo sea un plagio? (4 puntos)

c) ¿Qué porcentaje de trabajos finales son plagios y a la vez son clasificados como tales por el programa? (3 puntos)

RESPUESTAS

Problema 1:

Es un problema de programación lineal ya que tenemos dos tipos de fertilizantes (A y B), un objetivo (tener un coste mínimo en la fertilización) y unas restricciones (el mínimo de nitrógeno y fósforo que necesita nuestra parcela).

Variables de decisión: Nos interesa saber qué cantidad de cada tipo de fertilizante hay que comprar por lo que las variables de decisión serán:

x — Kilos de fertilizante A.

y — Kilos de fertilizante B.

Función objetivo: Queremos tener un coste mínimo. Como cada kilo de A cuesta 1.2 euros si compramos x kilos gastamos $1.2x$. Cada kilo de B cuesta 1.6 euros con los y kilos comprados gastamos $1.6y$. Sumando ambas cantidades tenemos que la función objetivo es:

$$C(x,y) = 1.2x + 1.6y$$

Restricciones: En principio nuestras variables no pueden ser negativas por lo que aplicaremos, ya que es posible:

$$x \geq 0 \quad y \geq 0$$

Como necesitamos 120 kilos de nitrógeno como mínimo y el fertilizante A aporta un 25% de su peso tenemos que el aporte será $0.25x$ mientras que el fertilizante B aporta un 16% por lo que el aporte será $0.16y$. Debemos sumar ambas cantidades e imponer que ha de ser mayor o igual a la cantidad mínima que tenemos que poner en nuestra parcela:

$$0.25x + 0.16y \geq 120$$

Como necesitamos 110 kilos de fósforo como mínimo y el fertilizante A aporta un 15% de su peso tenemos que el aporte será $0.15x$ mientras que el fertilizante B aporta un 40% por lo que el aporte será $0.4y$. Debemos sumar ambas cantidades e imponer que ha de ser mayor o igual a la cantidad mínima que tenemos que poner en nuestra parcela:

$$0.15x + 0.4y \geq 110$$

Región factible o solución. Vendrá dada por el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x \geq 0 y \geq 0 \\ 0.25x + 0.16y \geq 120 \\ 0.15x + 0.4y \geq 110 \end{cases}$$

Las dos primeras inecuaciones nos informan que la representación será en el primer cuadrante. Para representar la tercera igualamos (quitamos la desigualdad) y despejamos la "y":

$$y = \frac{120 - 0.25x}{0.16} = \frac{12000 - 25x}{16} \text{ (hemos quitado decimales para simplificar cálculos)}$$

tabla de valores:

x	480	240	0
y	0	375	750

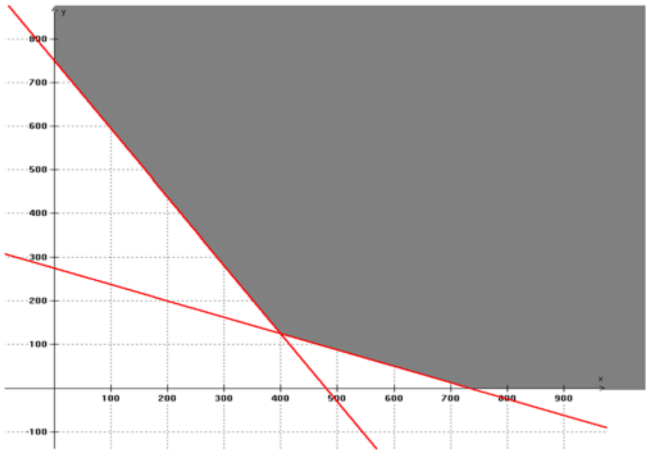
Para representar la cuarta igualamos (quitamos la desigualdad) y despejamos la "y":

$y = \frac{110-0.15x}{0.4} = \frac{11000-15x}{40}$ (hemos quitado decimales para simplificar cálculos)

tabla de valores:

x	0	400	733.33
y	22	125	0

Después de representar cada recta tenemos que sustituir un valor para hallar la región factible, en la tercera y la cuarta podemos sustituir el $(0,0)$ y nos sale que la región se extiende hacia el lado contrario a ese punto. Por lo que la representación queda:



Se trata de una región abierta que presenta tres vértices:

- El primero es el $(0,750)$ que sale directamente de nuestra representación.
- El segundo es el $(733.33,\ 0)$ que también sale de nuestra representación.
- El tercero es el corte de ambas rectas $y = \frac{12000-25x}{16}$y$y = \frac{11000-15x}{40}$ por lo que igualamos ambas ecuaciones y despejamos la x:

$$\frac{12000-25x}{16} = \frac{11000-15x}{40}$$
$$40 \cdot (12000-25x) = 16 \cdot (11000-15x)$$
$$480000 - 1000x = 176000 - 240x$$
$$304000 = 760x$$

$x = 400$

la otra componente la hallamos sustituyendo en cualquiera de las dos:

$y = \frac{12000-25\cdot 400}{16} = 125$ por lo que el punto será $(400,125)$

Los 3 vértices a estudiar son: $(0,750)$ $(733.33,\ 0)$ y $(400,125)$

La función objetivo era: $C(x,y) = 1.2x + 1.6y$ sustituimos los vértices hallados:

$C(0,750) = 1.2 \cdot 0 + 1.6 \cdot 750 = 1200$ euros

$C(733.33,0) = 1.2 \cdot 733.33 + 1.6 \cdot 0 = 879{,}996$ euros

$C(400,125) = 1.2 \cdot 400 + 1.6 \cdot 125 = 680$ euros

Como buscamos el coste mínimo tenemos que se da comprando 400 kilos del fertilizante A y 125 kilos del B y el coste mínimo es de 680 €.

Problema 2:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados.

Se trata de una función polinómica racional por lo que existirá en todos los puntos salvo en aquellos en los que se anule el denominador de la misma. Igualamos a cero el denominador:

$x^2 - 1 = 0 \to x = \pm 1$ por lo que no existe en esos puntos.

El **dominio** será: $Domf(x) = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$

Los **puntos de corte con el eje OX** son los valores de x cuando $f(x) = 0$:

$f(x) = \frac{2x^2-3x+5}{x^2-1} = 0$ por ser una fracción algebraica vale cero cuando es cero el numerador:

$2x^2 - 3x + 5 = 0 \to x = \frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 2\cdot 5}}{2\cdot 2} = \frac{3\pm\sqrt{9-40}}{4}$ como la raíz (discriminante) es negativa sabemos que no tiene solución real por lo que la función **NO CORTA al eje OX.**

El **punto de corte con el eje OY** es el valor de *f(x)* cuando $x = 0$:

$f(0) = \frac{2\cdot 0^2-3\cdot 0+5}{0^2-1} = -5$ por lo que es el punto $(0,-5)$

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

La asíntota horizontal está en el valor, si existe, del límite:

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-3x+5}{x^2-1} = 2$ luego tiene asíntota horizontal en $y = 2$

Siempre que hay asíntota horizontal es útil (aunque no lo piden) calcular las tendencias (es ver por dónde va la función respecto de la asíntota)

Para ello le damos un valor relativamente grande (positivo) y relativamente pequeño (negativo) y lo comparamos con el valor de la asíntota (2):

$f(100) = \frac{2\cdot 100^2-3\cdot 100+5}{100^2-1} = \frac{19705}{9999} \simeq 1.97$ (va por debajo de la asíntota)

$f(-100) = \frac{2\cdot(-100)^2-3\cdot(-100)+5}{(-100)^2-1} = \frac{20305}{9999} \simeq 2.03$ (va por encima de la asíntota)

Para las asíntotas verticales tenemos que conocer puntos de discontinuidad del dominio donde la función pueda tender a infinito. Tenemos dos: $x = \pm 1$, calculamos los límites:

$\lim_{x\to 1} \frac{2x^2-3x+5}{x^2-1} = \left(\frac{4}{0}\right) = \begin{cases} \lim_{x\to 1^-} \frac{2x^2-3x+5}{x^2-1} = -\infty \\ \lim_{x\to 1^+} \frac{2x^2-3x+5}{x^2-1} = +\infty \end{cases}$ por lo que $x = 1$ es asíntota vertical

$\lim_{x\to -1} \frac{2x^2-3x+5}{x^2-1} = \left(\frac{10}{0}\right) = \begin{cases} \lim_{x\to -1^-} \frac{2x^2-3x+5}{x^2-1} = +\infty \\ \lim_{x\to -1^+} \frac{2x^2-3x+5}{x^2-1} = -\infty \end{cases}$ por lo que $x = -1$ es asíntota vertical

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

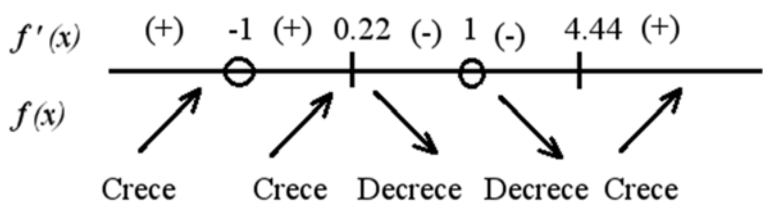
Para hallarlos derivamos la función e igualamos a cero la derivada:

$$f'(x) = \frac{(4x-3)\cdot(x^2-1)-(2x^2-3x+5)\cdot(2x)}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^2-14x+3}{(x^2-1)^2} = 0$$

Por ser una fracción algebraica vale cero cuando es cero el numerador:

$3x^2-14x+3=0 \rightarrow x = \frac{14\pm\sqrt{14^2-4\cdot3\cdot3}}{2\cdot3} = \frac{14\pm\sqrt{160}}{6} = \begin{cases} \frac{7+2\sqrt{10}}{3} \simeq 4.44 \\ \frac{7-2\sqrt{10}}{3} \simeq 0.225 \end{cases}$ por lo que tiene dos posibles puntos críticos.

Estos puntos son los posibles máximos, mínimos o puntos de inflexión. Con estos puntos y las discontinuidades del dominio $x=\pm1$ estudiamos el signo de la derivada antes y después de los valores



considerados.

Los valores calculados para establecer el signo han sido:

$$f'(-2) \simeq 3.89 > 0$$
$$f'(0) = 3 > 0$$
$$f'(0.5) \simeq -5.78 < 0$$
$$f'(2) = -13 < 0$$
$$f'(5) \simeq 0.014 > 0$$

Por lo que tenemos que la función crece en]-∞,-1[U]-1,0.22[U]4.44,+∞[

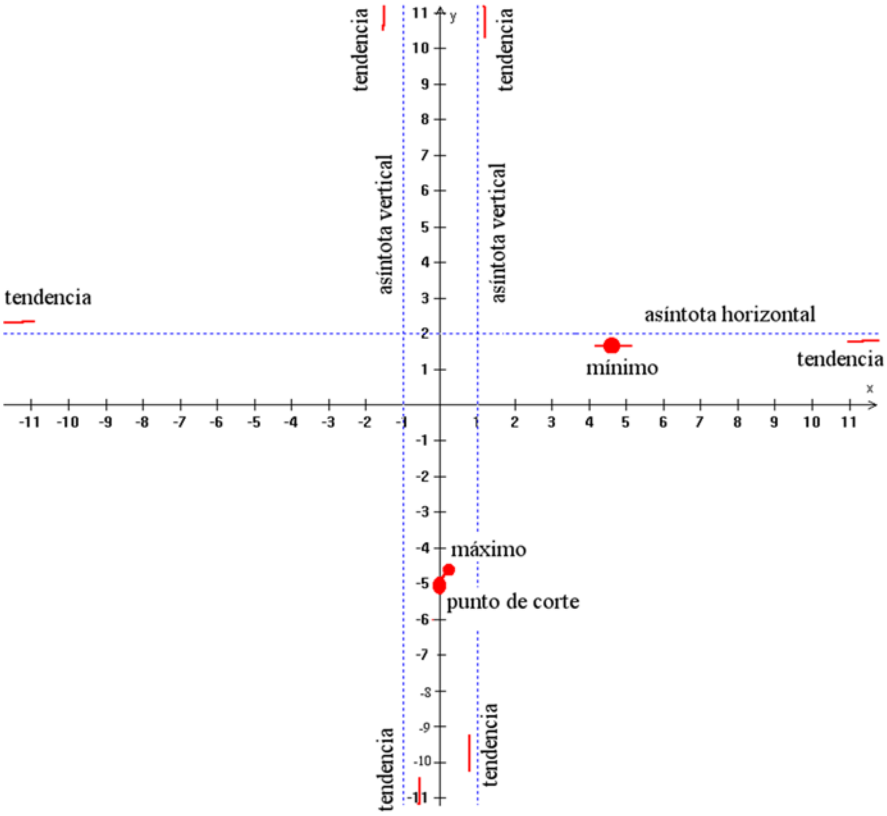
Decrece en]0.22,1[U]1,4.44[

d) Los máximos y mínimos locales.

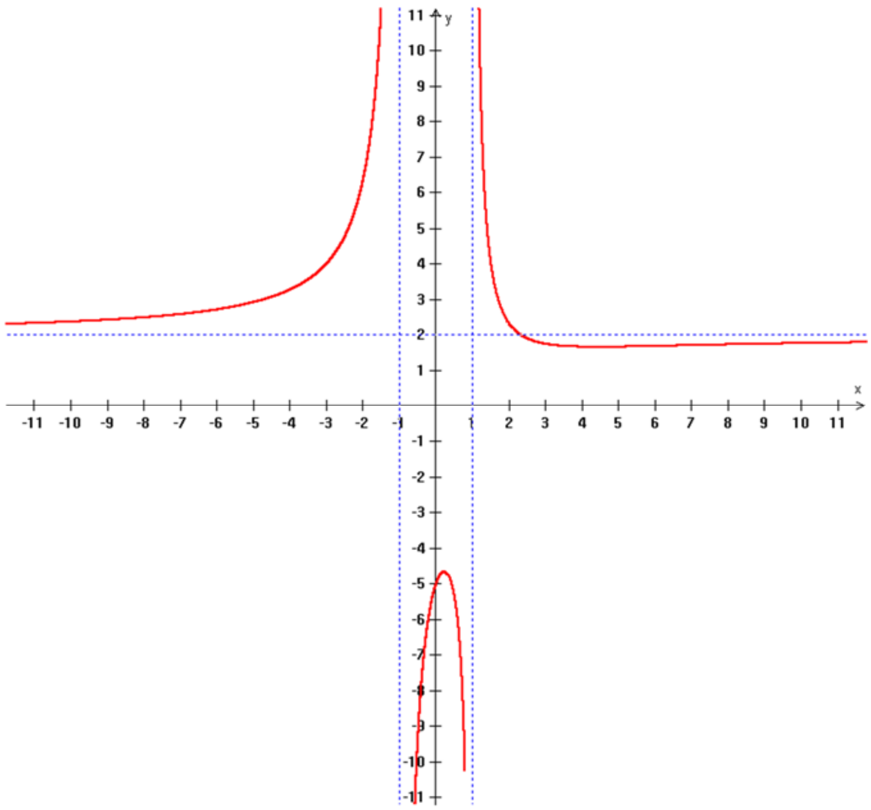
Por lo visto en el apartado anterior la función presenta un máximo en el punto de abscisa $x = 0.22 \rightarrow$ $(0.22,\text{-}4.66)$ (hemos calculado $f(0.22)$) y un mínimo en el punto de abscisa $x = 4.44 \rightarrow$ $(4.44{,}1.66)$ (hemos calculado $f(4.44)$)

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados de los apartados anteriores.

Dibujamos el punto de corte $(0,\text{-}5)$, el mínimo, el máximo, las asíntotas verticales en $x=\pm1$ (con sus tendencias a infinito) y la asíntota horizontal con sus tendencias y obtenemos:



La gráfica queda así:



Autor: Pedro Podadera Sánchez
www.apuntesmareaverde.org.es

Problema 3:

Es un problema de probabilidad, definimos los sucesos:

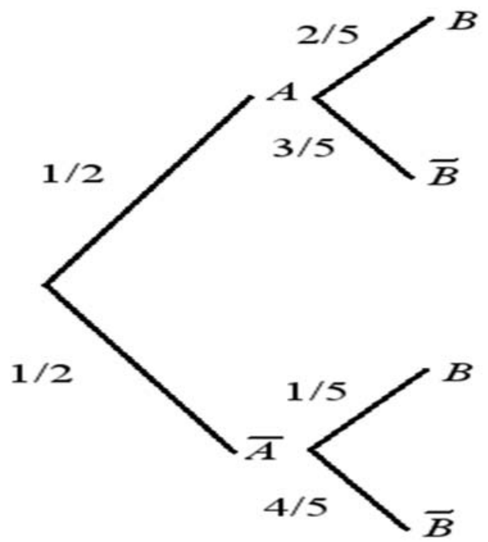
A → "Ser portador del anticuerpo A"

B → "Ser portador del anticuerpo B"

En el enunciado nos dan las siguientes probabilidades:

- Si un habitante de la ciudad de Megalópolis es portador del anticuerpo A, entonces 2 veces de cada 5 es portador del anticuerpo B. Se trata de una probabilidad condicionada: $P(B/A) = \frac{2}{5} = 0.4$
- Podemos deducir entonces que, si es portador del anticuerpo A, 3 veces de cada 5 no es portador del anticuerpo B:
$$P(\overline{B}/A) = \frac{3}{5} = 0.6$$
- Por otro lado, si no es portador del anticuerpo A, entonces 4 veces de cada 5 no es portador del anticuerpo B. Se trata de nuevo de una condicionada:
$$P(\overline{B}/\overline{A}) = \frac{4}{5} = 0.8$$
- Podemos deducir que si no es portador del anticuerpo A, entonces 1 vez de cada 5 es portador del anticuerpo B.
$$P(B/\overline{A}) = \frac{1}{5} = 0.2$$
- Por último nos dicen que sabemos que la mitad de la población es portadora del anticuerpo A, por lo que tenemos que: $P(A) = \frac{1}{2} = 0.5$
- Podemos deducir que la otra mitad de la población no es portadora del anticuerpo A, por lo que tenemos que: $P(\overline{A}) = \frac{1}{2} = 0.5$

El problema se puede resolver por tabla de contingencias o por árbol, yo lo voy a resolver por árbol. Podemos elaborar el árbol a partir de ser o no portador del anticuerpo A y después si se es o no del B



situamos las probabilidades deducidas anteriormente:

Contestamos ahora a las cuestiones planteadas:

a) La probabilidad de que un habitante de Megalópolis sea portador del anticuerpo B.

Nos preguntan por $P(B)$aplicando el teorema de la probabilidad total tenemos que la probabilidad del suceso será la suma de las probabilidades que nos llevan a él, es decir:

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) + P(\overline{A}) \cdot P(B/\overline{A}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{10} = 0.3 = 30\%$$

b) La probabilidad de que si un habitante de Megalópolis es portador del anticuerpo B lo sea también del anticuerpo A.

Como sabemos que el habitante es portador del anticuerpo B se trata de una probabilidad a posteriori por lo que aplicamos la fórmula de Bayes:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Hallamos $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$

La $P(B) = \frac{3}{10}$ (la tenemos del apartado anterior)

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{10}} = \frac{2}{3} \simeq 0.6667 = 66.67\%$$

c) La probabilidad de que si un habitante de Megalópolis no es portador del anticuerpo B, tampoco lo sea del anticuerpo A.

Como sabemos que el habitante no es portador del anticuerpo B se trata de una probabilidad a posteriori por lo que aplicamos la fórmula de Bayes:

$$P(\overline{A}/\overline{B}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})}$$

Hallamos $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}/\overline{A}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{5}$

La $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$ (por el suceso contrario)

$$P(\overline{A}/\overline{B}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{7}{10}} = \frac{4}{7} \simeq 0.5714 = 57.14\%$$

d) La probabilidad de que un habitante de Megalópolis sea portador del anticuerpo A y no lo sea del anticuerpo B.

Aquí la cuestión cambia por la conjunción "y" ya no se trata de una condicionada sino de una intersección:

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) \cdot P(\overline{B}/A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10} = 0.3 = 30\%$$

Problema 4:

a) Halla la matriz inversa de A.

La inversa la podemos hacer por Gauss o determinantes (sólo de una forma):

Por determinantes: $A^{-1}=\frac{1}{|A|}(AdjA)^t$

$|A|=\begin{vmatrix}2 & 5\\ 1 & 2\end{vmatrix}=4-5=-1\neq 0$ luego $\exists A^{-1}$

$$A^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -5 & 2\end{pmatrix}^t=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}2 & -5\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 5\\ 1 & -2\end{pmatrix}$$

Si lo hacemos por Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|cc}2 & 5 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 1\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}2 & 5 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 2\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}2 & 0 & -4 & 10\\ 0 & -1 & -1 & 2\end{array}\right)\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 5\\ 1 & -2\end{pmatrix}$$

$F_2=2F_2-F_1$ $F_1=F_1+5F_2$ $F_1=F_1/2$ $F_2=F_2/(-1)$

Hay que comprobar que lo hemos hecho bien (no es obligatorio):

$\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 5\\ 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ Como da la identidad está bien calculada.

b) Explica porqué la matriz B no tiene inversa.

Una matriz no tiene inversa cuando su determinante vale cero.

Calculamos el determinante de B:

$|B|=\begin{vmatrix}2 & 4\\ 1 & 2\end{vmatrix}=2\cdot 2-1\cdot 4=0$ como su determinante es cero $\nexists B^{-1}$

c) Razona porqué la matriz AB no tiene inversa.

Calculamos la matriz producto:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 2+5\cdot 1 & 2\cdot 4+5\cdot 2\\ 1\cdot 2+2\cdot 1 & 1\cdot 4+2\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 18\\ 4 & 8\end{pmatrix}$$

Una matriz no tiene inversa cuando su determinante vale cero.

Calculamos el determinante de AB:

$|AB|=\begin{vmatrix}9 & 18\\ 4 & 8\end{vmatrix}=9\cdot 8-4\cdot 18=72-72=0$ como su determinante es cero $\nexists(AB)^{-1}$

d) Resuelve la ecuación matricial $AB-AX=BA$

Resolvemos la ecuación con las letras:

$AB-AX=BA$ (Vamos a pasar la X al otro miembro)

$AB = BA + AX$ (Pasamos la BA al otro miembro)

$AB - BA = AX$ (Premultiplicamos o multiplicamos por la inversa de A)

$A^{-1} \cdot (AB - BA) = A^{-1} \cdot AX$ (Aplicamos que$A \cdot A^{-1} = I$)

$A^{-1} \cdot (AB - BA) = I \cdot X$ (Aplicamos que el producto por la inversa deja igual la matriz)

$$A^{-1} \cdot (AB - BA) = X$$

Por lo que tenemos que: $X = A^{-1} \cdot (AB - BA)$

Tenemos ya calculadas la inversa de A y el producto AB. Calculamos ahora el producto BA:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 4 \cdot 1 & 2 \cdot 5 + 4 \cdot 2 \\ 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 5 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 18 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Hacemos las operaciones indicadas:

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 9 & 18 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 18 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9-8 & 18-18 \\ 4-4 & 8-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \cdot 1 + 5 \cdot 0 & -2 \cdot 0 + 5 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + (-2) \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Luego $X = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Problema 5:

a) ¿Qué beneficio obtiene cuando vende cada caja a 6 euros?

Hay que sustituir el valor de cada caja en la función beneficio:

$$B(6) = -(6)^2 + 16 \cdot 6 - 55 = -36 + 96 - 55 = 5$$

Luego el beneficio obtenido es de 5 €

b) ¿Entre qué valores debe fijar el precio de venta de cada caja para obtener beneficios?

Para obtener beneficios se tiene que verificar que:

$$B(x) = -x^2 + 16x - 55 \geq 0$$

Resolvemos la inecuación de segundo grado. Para ello resolvemos la ecuación y comprobamos el signo antes y después de las soluciones:

$$-x^2 + 16x - 55 = 0 \rightarrow x = \frac{-16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-55)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-16 \pm \sqrt{36}}{-2} = \begin{cases} \frac{-16+6}{-2} = 5 \\ \frac{-16-6}{-2} = 11 \end{cases}$$

Signo de la función antes del 5: $B(4) = -4^2 + 16 \cdot 4 - 55 = -7 < 0$

Signo de la función entre el 5 y el 11: $B(8) = -8^2 + 16 \cdot 8 - 55 = 9 > 0$

Signo de la función después del 11: $B(12) = -12^2 + 16 \cdot 12 - 55 = -7 < 0$

Luego el intervalo donde la función beneficios es positiva es el $[5.11]$

Por lo que debemos fijar el precio de venta entre los valores de 5€ y 11€ para obtener beneficios.

También se puede justificar diciendo que la función beneficio es una parábola invertida y que es positiva entre los puntos de corte con el eje OX.

c) Calcula a qué precio ha de vender cada caja para que el beneficio sea máximo. ¿Cuál es el beneficio máximo?

Como buscamos un máximo de la función beneficio tenemos que derivar la función e igualar a cero la derivada:

$B'(x) = -2x + 16 = 0 \rightarrow \ x = 8$

Para justificar que es máximo calculamos la segunda derivada en el punto crítico calculado:

$B''(x) = -2 \rightarrow \ B''(8) = -2 < 0$

Como la segunda derivada es negativa el punto **es un máximo**.

Luego el precio de venta que nos da un beneficio máximo es de 8 €

El beneficio obtenido a ese precio lo hallamos sustituyendo en la función:

$$B(8) = -8^2 + 16 \cdot 8 - 55 = 9$$

Si vendemos la caja a 8 € obtenemos un beneficio mensual de 9 €

También se puede buscar el máximo diciendo que la función es una parábola invertida y que, por lo tanto, tiene un máximo en el vértice de la parábola que se sitúa en $x_v = \frac{-b}{2a}$(para nuestro caso sería: $x_v = \frac{-16}{2\cdot(-1)} = 8$)

d) ¿Entre qué valores el beneficio crece y entre qué valores el beneficio decrece?

La función será creciente si su derivada es positiva y decreciente cuando es negativa. Estudiamos el signo de la derivada antes y después del valor que la hace cero $x = 8$(lo hemos calculado en el apartado anterior)

$$B'(7) = -2 \cdot 7 + 16 = 2 > 0 B'(9) = -2 \cdot 9 + 16 = -2 < 0$$

Luego la función crece en el intervalo]-∞,8[y decrece en el]8,+∞[

Sin embargo, y teniendo en cuenta la naturaleza de la función tenemos dos posibles respuestas:

La función crece en el intervalo [0,8[y decrece a partir del $x = 8$(no tienen sentido precios por unidad negativos)

O bien la función crece en el intervalo [5,8[y decrece en el]8,11] (no tiene sentido comercial vender a precios que generan pérdidas)

Este mismo razonamiento se puede hacer en base a que la función es una parábola invertida y crece antes de su vértice y decrece después del mismo.

Problema 6:

Es un problema de probabilidad. Podemos definir los sucesos de diferentes maneras. Para no liarnos vamos a distinguir entre lo que es el trabajo y lo que dice el programa. Definimos los sucesos de la siguiente manera

O → "Trabajo original" (no es plagio)

O → "Trabajo NO original" (sí es plagio)

C → "El programa dice que es copia" (independientemente de su naturaleza)

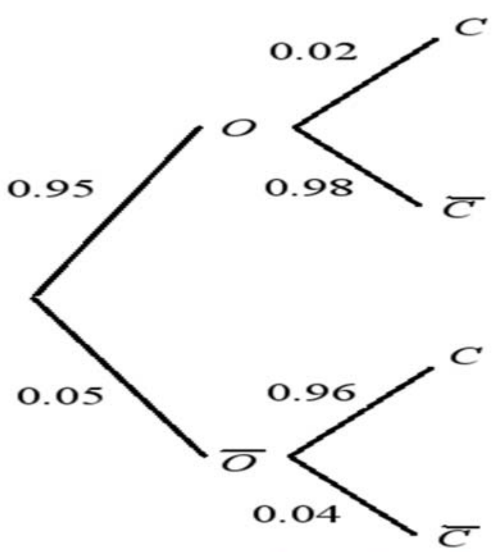
C → "El programa dice que NO es copia" (independientemente de su naturaleza)

En el enunciado nos dan las siguientes probabilidades:

- El 5% de los trabajos no son originales, sino que son plagios. Por lo que tenemos que $P(\overline{O}) = 0.05$
- Por el suceso contrario tenemos que el 95% serán originales por lo que $P(O) = 0.95$
- Si el programa no clasifica correctamente un trabajo plagiado quiere decir que está diciendo que no es copia cuando sí lo es, es decir $P(\overline{C}/\overline{O}) = 0.04$
- Por el suceso contrario podemos deducir que sí clasifica correctamente un trabajo plagiado con una probabilidad de: $P(C/\overline{O}) = 0.96$
- Por último tenemos que nos dicen que la probabilidad de que clasifique como plagio un trabajo original es 0.02. Esa probabilidad es: $P(C/O) = 0.02$
- Por el suceso contrario podemos deducir que la probabilidad de que clasifique como no copia un trabajo original es 0.98 → $P(\overline{C}/O) = 0.98$

El problema se puede resolver por tabla de contingencias o por árbol. Yo lo voy a resolver por árbol ya que los datos que tenemos son de condicionadas. Sólo hace falta resolverlo de una forma y los resultados han de ser iguales.

<u>Por diagrama de árbol</u>:



Podemos situar las probabilidades que nos dan como ves en la figura:

Respondemos a las cuestiones:

a) Calcula la probabilidad de que un trabajo final, elegido al azar, sea clasificado como plagio por el programa informático.

Nos preguntan por $P(C)$aplicando el teorema de la probabilidad total tenemos que la probabilidad del suceso será la suma de las probabilidades que nos llevan a él, es decir:

$$P(C) = P(O \cap C) + P(\overline{O} \cap C) = P(O) \cdot P(C/O) + P(\overline{O}) \cdot P(C/\overline{O}) = 0.95 \cdot 0.02 + 0.05 \cdot 0.96 = 0.067 = 6.7\%$$

b) Un trabajo es inspeccionado por el programa informático y es clasificado como original. ¿Cuál es la probabilidad de que dicho trabajo sea un plagio?

Aquí nos dicen que el programa ya lo ha clasificado como original por lo que estamos ante probabilidad a posteriori y utilizamos la fórmula de Bayes:

$$P(\overline{O}/\overline{C}) = \frac{P(\overline{O} \cap \overline{C})}{P(\overline{C})}$$

Calculamos las probabilidades requeridas:

$$P(\overline{O} \cap \overline{C}) = P(\overline{O}) \cdot P(\overline{C}/\overline{O}) = 0.05 \cdot 0.04 = 0.002$$

$$P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - 0.067 = 0.933$$

$$P(\overline{O}/\overline{C}) = \frac{P(\overline{O} \cap \overline{C})}{P(\overline{C})} = \frac{0.002}{0.933} \simeq 0.0021 = 0.21\%$$

c) ¿Qué porcentaje de trabajos finales son plagios y a la vez son clasificados como tales por el programa?

Al aparecer la conjunción “y” nos tenemos que dar cuenta que nos están pidiendo una intersección. La probabilidad pedida es $P(\overline{O} \cap C)$

$$P(\overline{O} \cap C) = P(\overline{O}) \cdot P(C/\overline{O}) = 0.05 \cdot 0.96 = 0.048 = 4.8\%$$

GENERALITAT VALENCIANA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2019–2020** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA DE SEPTIEMBRE

BAREMO DEL EXAMEN: **Se han de contestar tres problemas de entre los seis propuestos.** Cada problema se valorará de 0 a 10 puntos y la nota final será la media aritmética de los tres. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. Está permitido el uso de regla. Las gráficas se harán con el mismo color que el resto del examen.

Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas.

Problema 1:

Una fábrica de juguetes artesanales produce camiones, marionetas y rompecabezas de madera. Para fabricar un camión necesita dos kilos de madera y tres horas de trabajo, mientras que para una marioneta necesita quinientos gramos de madera y cuatro horas de trabajo. En el caso de los rompecabezas necesita ochocientos gramos de madera y tres horas y media de trabajo para producir uno. Durante una semana, la empresa ha puesto en el mercado 89 juguetes utilizando exactamente 91 kilos de madera y 313 horas de trabajo. Determina el número de camiones, de marionetas y de rompecabezas producidos.

(Planteamiento correcto 5 puntos – Resolución correcta 5 puntos)

Problema 2:

Dada la función $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$, se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. (2 puntos)

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (2 puntos)

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (2 puntos)

d) Los máximos y mínimos locales. (2 puntos)

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores. (2 puntos)

Problema 3:

De dos sucesos A y B se sabe que satisfacen que $P(A)$=0,4, $P(A\cup B)$=0,8 y $P(A^C\cup B^C)$=0,7, donde A^C y B^C representan los sucesos complementarios de los sucesos A y B, respectivamente. Se pide:

a) ¿Son independientes los sucesos A y B? (2,5 puntos)

b) La probabilidad de que solo se verifique uno de los sucesos. (2,5 puntos)

c) La probabilidad de que se verifique el suceso B^c. (2,5 puntos)

d) La probabilidad de que se verifique el suceso A^c/B. (2,5 puntos)

Problema 4:

Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$y $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

se pide:

a) Calcula $(AB)^{-1}$. (4 puntos)

b) Calcula C+AB. (2 puntos)

c) ¿Son iguales las matrices C^{-1}+$(AB)^{-1}$ y $(C+AB)^{-1}$? (4 puntos)

Problema 5:

Una tienda de alquiler de bicicletas dispone mensualmente de 350 bicicletas. Haciendo un estudio entre los ingresos y los costes de explotación se ha determinado que los beneficios mensuales, en euros, se ajustan a la función

$$f(x) = 350x - x^2 - 15000,$$

siendo x el número de bicicletas alquiladas en un mes.

a) Calcula el número de bicicletas que hay que alquilar cada mes para obtener un beneficio máximo.

(3 puntos)

b) ¿Cuál es dicho beneficio máximo? (2 puntos)

c) Determina a partir de qué cantidad de bicicletas alquiladas el taller obtiene beneficios. (2,5 puntos)

d) ¿Puede tener pérdidas a pesar de alquilar una cantidad mayor de bicicletas que la obtenida en el apartado anterior? (2,5 puntos)

Problema 6:

En una determinada ciudad, se sabe que el 80% de los hogares están formados por más de una persona. Se sabe también que el 30% de los hogares de esa ciudad están suscritos al canal Panoramix. Por último, se sabe que el 20% de los hogares están formados por más de una persona y están suscritos al canal Panoramix. Seleccionamos al azar un hogar de esta ciudad.

a) Calcula la probabilidad de que el hogar seleccionado no esté suscrito al canal Panoramix.

b) Calcula la probabilidad de que el hogar seleccionado esté formado por una única persona y también esté suscrito al canal Panoramix.

c) Si sabemos que el hogar seleccionado está formado por una única persona, ¿cuál es la probabilidad de que esté suscrito al canal Panoramix?

d) Si sabemos que el hogar seleccionado está suscrito al canal Panoramix, ¿cuál es la probabilidad de que esté formado por más de una persona?

(Cada apartado puntúa 2,5 puntos)

RESPUESTAS

Problema 1:

Aunque está planteado para parecer un problema de programación lineal es de sistema de ecuaciones. Hay que fijarse que son tres incógnitas y que se emplean **exactamente** los kilos de madera y las horas de trabajo.

Como hay que determinar el número de camiones, de marionetas y de rompecabezas producidos las incógnitas son:

x - “número de camiones”

y - “número de marionetas”

z - “número de rompecabezas”

Como el total de juguetes producidos fue de 89 la suma de las tres cantidades ha de ser la cantidad total:

$$x + y + z = 89$$

Nos dicen que se utilizaron exactamente 91 kilos de madera. Producir un camión necesita 2 kilos de madera por lo que para producir x necesitaremos $2x$ kilos. Producir una marioneta necesita 0.5 kilos de madera por lo que para producir y necesitaremos $0.5y$ kilos. Producir un rompecabezas necesita 0.8 kilos de madera por lo que para producir z necesitaremos $0.8z$ kilos. Sumando las tres cantidades debemos obtener el total de madera utilizada:

$$2x + 0.5y + 0.8z = 91$$

Finalmente nos dicen que se utilizaron exactamente 313 horas de trabajo. Producir un camión necesita 3 horas de trabajo por lo que para producir x necesitaremos $3x$ horas. Producir una marioneta necesita 4 horas de trabajo por lo que para producir y necesitaremos $4y$ horas. Producir un rompecabezas necesita 3.5 horas de trabajo por lo que para producir z necesitaremos $3.5z$ horas. Sumando las tres cantidades debemos obtener el total de horas utilizadas:

$$3x + 4y + 3.5z = 313$$

Si juntamos las tres ecuaciones tenemos el sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 89 \\ 2x + 0.5y + 0.8z = 91 \\ 3x + 4y + 3.5z = 313 \end{cases}$$

La resolución del mismo la podemos hacer por Gauss o Cramer (sólo por un método) yo lo voy a hacer aquí por ambos:

Por Gauss tenemos que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 89 \\ 2 & 0.5 & 0.8 & : & 91 \\ 3 & 4 & 3.5 & : & 313 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 89 \\ 0 & -1.5 & -1.2 & : & -87 \\ 0 & 1 & 0.5 & : & 46 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 89 \\ 0 & -1.5 & -1.2 & : & -87 \\ 0 & 0 & -0.45 & : & -18 \end{pmatrix}$$

$F_2=F_2-2F_1$ $\qquad$ $F_3=1.5F_3+F_2$

$F_3=F_3-3F_1$

De la última ecuación tenemos que: $-0.45z = -18 \to z = \frac{-18}{-0.45} = 40$

Con ese valor vamos a la segunda ecuación y tenemos que:

$-1.5y - 1.2 \cdot 40 = -87 \to -1.5y - 48 = -87 \to -1.5y = -39 \to y = 26$

Con ambos valores en la primera ecuación: $x + 26 + 40 = 89 \to x + 66 = 89 \to x = 23$

Por lo tanto, los juguetes producidos fueron: cantidades invertidas fueron: 23 camiones, 26 marionetas y 40 rompecabezas.

Ahora lo resolvemos por Cramer. El sistema es de Cramer si tiene las mismas ecuaciones que incógnitas (que lo cumple) y si el determinante de la matriz de los coeficientes es diferente de cero:

$$M=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 0.5 & 0.8\\ 3 & 4 & 3.5\end{vmatrix}=1\cdot 0.5\cdot 3.5+1\cdot 0.8\cdot 3+1\cdot 2\cdot 4-1\cdot 0.5\cdot 3-1\cdot 2\cdot 3.5-1\cdot 4\cdot 0.8=0.45\neq 0$$

Aplicamos la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}89 & 1 & 1\\ 91 & 0.5 & 0.8\\ 313 & 4 & 3.5\end{vmatrix}}{0.45}=\frac{89\cdot 0.5\cdot 3.5+1\cdot 0.8\cdot 313+1\cdot 91\cdot 4-1\cdot 0.5\cdot 313-1\cdot 91\cdot 3.5-4\cdot 0.8\cdot 89}{0.45}=23$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 89 & 1\\ 2 & 91 & 0.8\\ 3 & 313 & 3.5\end{vmatrix}}{0.45}=\frac{1\cdot 91\cdot 3.5+89\cdot 0.8\cdot 3+1\cdot 2\cdot 313-1\cdot 91\cdot 3-2\cdot 89\cdot 3.5-1\cdot 0.8\cdot 313}{0.45}=26$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 89\\ 2 & 0.5 & 91\\ 3 & 4 & 313\end{vmatrix}}{0.45}=\frac{1\cdot 0.5\cdot 313+1\cdot 91\cdot 3+2\cdot 4\cdot 89-3\cdot 0.5\cdot 89-2\cdot 1\cdot 313-1\cdot 4\cdot 91}{0.45}=40$$

Lógicamente es el mismo resultado que por el método anterior (sólo hay que hacer uno de los dos)

Problema 2:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados.

Se trata de una función polinómica racional por lo que existirá en todos los puntos salvo en aquellos en los que se anule el denominador de la misma. Igualamos a cero el denominador:

$x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$por lo que no existe en ese punto.

El **dominio** será: $Dom f(x) = \mathbb{R} - \{1\}$

Los **puntos de corte con el eje OX** son los valores de x cuando $f(x) = 0$:

$f(x) = \frac{x^2}{x-1} = 0$por ser una fracción algebraica vale cero cuando es cero el numerador:

$x^2 = 0 \rightarrow x = 0$por lo que la función **CORTA al eje OX en** $(0{,}0)$**.**

El **punto de corte con el eje OY** es el valor de *f(x)* cuando $x = 0$:

$f(0) = \frac{0^2}{0-1} = 0$por lo que es el punto $(0{,}0)$

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

La asíntota horizontal está en el valor, si existe, del límite:

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{x-1} = \infty$luego **NO tiene asíntota horizontal**.

Para las asíntotas verticales tenemos que conocer puntos de discontinuidad del dominio donde la función pueda tender a infinito. Tenemos uno: $x = 1$, calculamos el límite:

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2}{x-1} = \left(\frac{1}{0}\right) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x^2}{x-1} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x^2}{x-1} = +\infty \end{cases}$ por lo que$x = 1$es asíntota vertical

No lo pide pero por el tipo de función y los grados de los polinomios que intervienen (grado 2 partido grado 1) podemos suponer que tiene una **asíntota oblicua**. Para hallarla basta con realizar la división:

$\frac{x^2}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1}$por lo que la recta $f(x) = x + 1$es asíntota oblicua.

Otra forma de calcularla es suponer que la ecuación de la asíntota es $y = mx + n$y calcular los coeficientes con los límites:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2 - x} = 1$$

$n = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - mx) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x-1} - x\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-x^2+x}{x-1}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right) = 1$por lo que la asíntota oblicua es: $f(x) = x + 1$

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

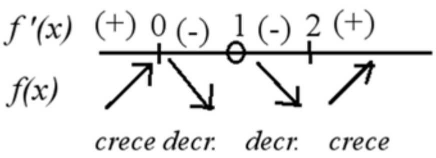
Para hallarlos derivamos la función e igualamos a cero la derivada:

$$f'(x) = \frac{2x\cdot(x-1) - x^2\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} = 0$$

Por ser una fracción algebraica vale cero cuando es cero el numerador:

$x^2 - 2x = 0 \rightarrow x = 0$ y $x = 2$ por lo que tiene dos posibles puntos críticos.

Estos puntos son los posibles máximos, mínimos o puntos de inflexión. Con estos puntos y las discontinuidades del dominio $x = 1$ estudiamos el signo de la derivada antes y después de los valores con-



siderados.

Los valores calculados para establecer el signo han sido:

$$f'(-1) \simeq 0.75 > 0$$
$$f'(0.5) = -3 < 0$$
$$f'(1.5) \simeq -3 < 0$$
$$f'(2.5) \simeq 0.55 > 0$$

Por lo que tenemos que la función crece en]-∞,0[U]2,+∞[

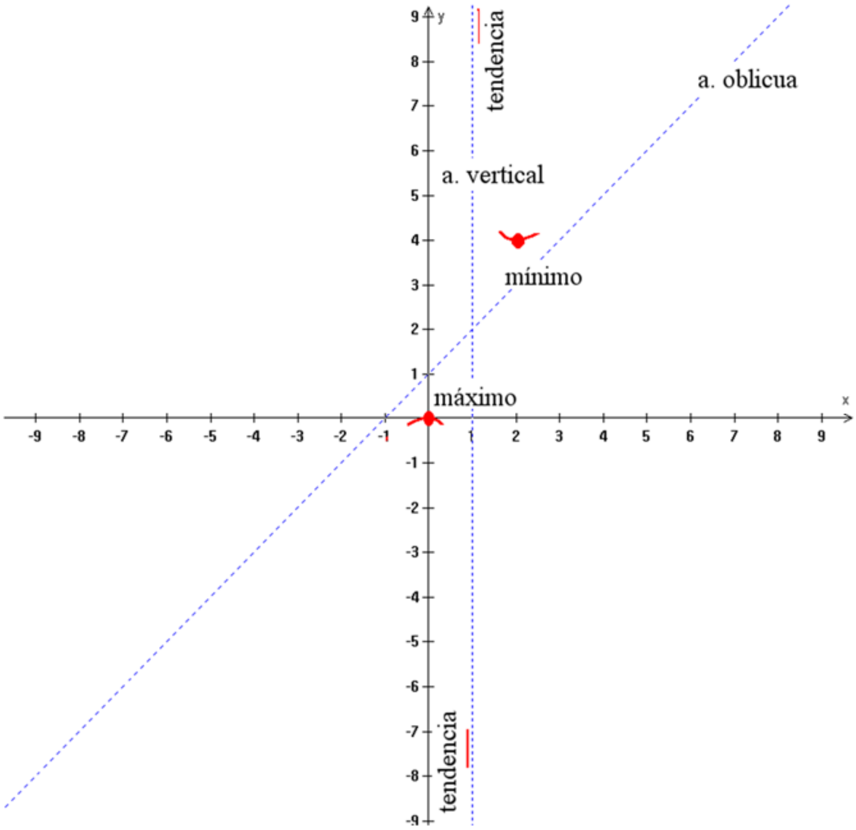
Decrece en]0,1[U]1,2[

d) Los máximos y mínimos locales.

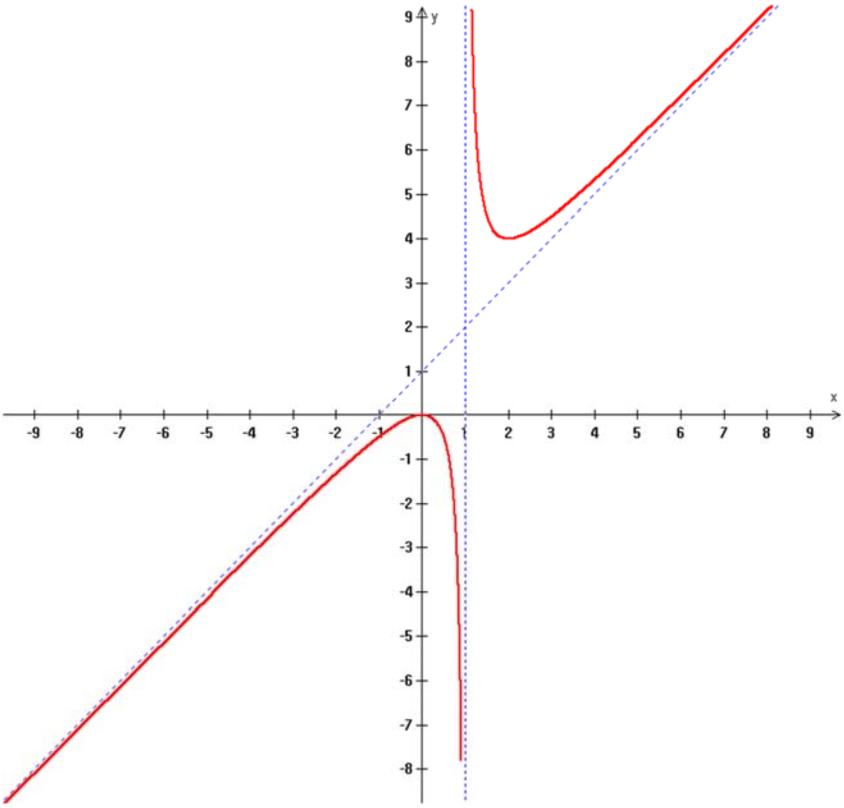
Por lo visto en el apartado anterior la función presenta un máximo en el punto de abscisa $x = 0 \rightarrow (0,0)$ (hemos calculado $f(0)$) y un mínimo en el punto de abscisa $x = 2 \rightarrow (2,4)$ (hemos calculado $f(2)$)

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados de los apartados anteriores**.**

Dibujamos el punto de corte $(0,0)$, el mínimo, el máximo, la asíntota vertical en $x = 1$ (con sus tendencias a infinito) y yo voy a dibujar también la oblicua para que se compruebe su utilidad a la hora de una buena representación, obtenemos:



La gráfica queda así:



Problema 3:

Es un problema de probabilidad de álgebra de sucesos. En el enunciado utiliza “suceso complementario” que muchas veces se llama también “contrario” y se denota por un suprarrayado.

a) ¿Son independientes los sucesos A y B?

Para saber si dos sucesos son independientes tenemos que demostrar que:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

O bien que: $P(A/B) = P(A)$

En el enunciado tenemos $P(A^C \cup B^C) = 0.7$utilizando las leyes de Morgan sabemos que:

$$P(A^C \cup B^C) = P((A \cap B)^C) = 0.7$$

Por el suceso contrario tenemos que: $P(A \cap B) = 1 - P((A \cap B)^C) = 1 - 0.7 = 0.3$

La probabilidad de la unión de dos sucesos es: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Sustituyendo valores: $0.8 = 0.4 + P(B) - 0.3 \rightarrow P(B) = 0.7$

Queríamos demostrar que: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \rightarrow 0.3 \neq 0.4 \cdot 0.7 = 0.28$luego NO son independientes

b) La probabilidad de que solo se verifique uno de los sucesos.

Vamos a utilizar la probabilidad de la diferencia de sucesos:

Si sólo se verifica el suceso A tenemos que calcular:

$P(A-B) = P(A) - P(A \cap B) = 0.4 - 0.3 = 0.1$

Si sólo se verifica el suceso B tenemos que calcular:

$P(B-A) = P(B) - P(A \cap B) = 0.7 - 0.3 = 0.4$

Sumando ambas probabilidades tenemos la que buscamos:

$P(A-B) + P(B-A) = 0.4 + 0.1 = 0.5 = 50\%$

c) La probabilidad de que se verifique el suceso B^C .

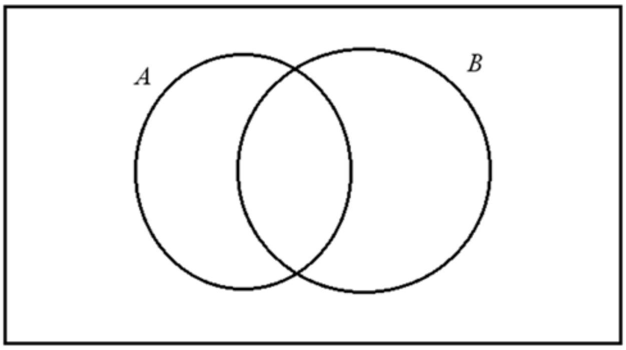
Por el suceso contrario sería: $P(B^C) = 1 - P(B) = 1 - 0.7 = 0.3 = 30\%$

d) La probabilidad de que se verifique el suceso A^C/B.

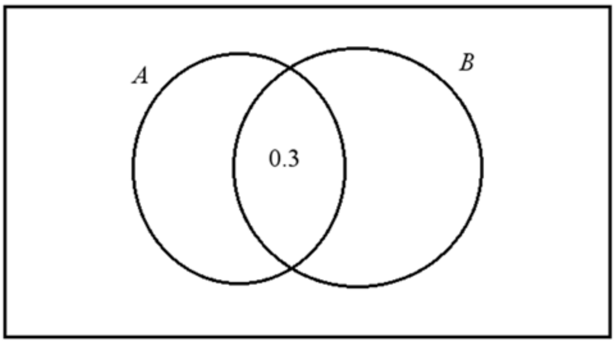
Utilizando la definición de condicionada sabemos que:

$P(A^C/B) = \frac{P(A^C \cap B)}{P(B)}$

Para calcular $P(A^C \cap B)$podemos utilizar un diagrama de Venn para dos sucesos:



Partimos de la intersección de ambos que hemos calculado antes:$P(A \cap B) = 0.3$y la situamos:

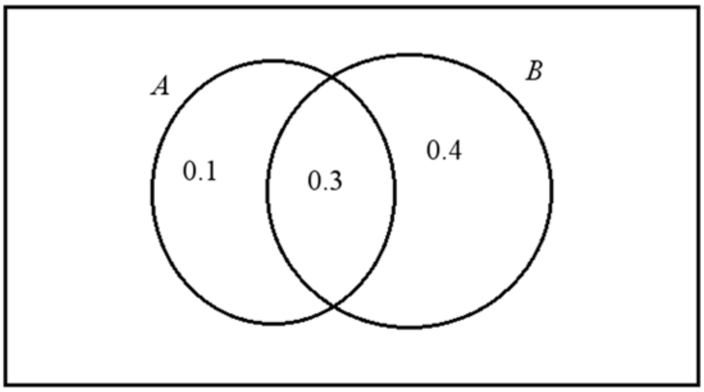


Como la probabilidad de A es 0.4 la parte del círculo A que no es la intersección valdrá:

$0.4 - 0.3 = 0.1$

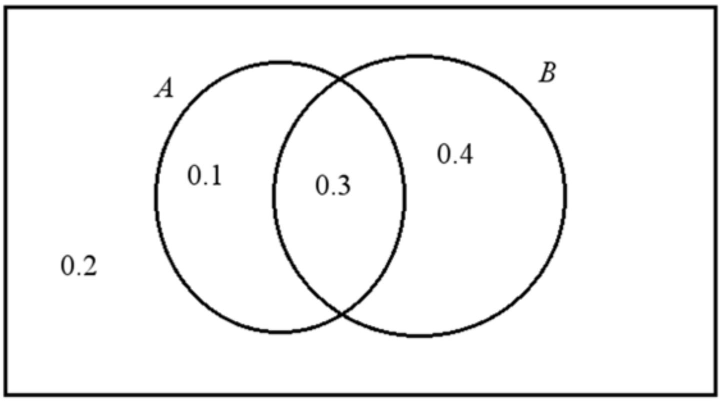
Como la probabilidad de B es 0.7 la parte del círculo B que no es la intersección valdrá:

$0.7 - 0.3 = 0.4$

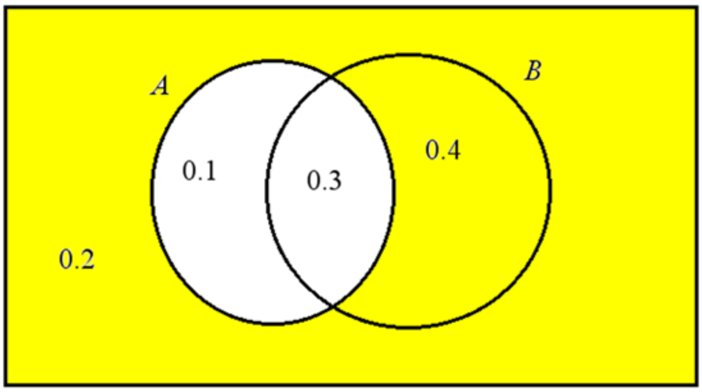


Situamos ambas en el diagrama:

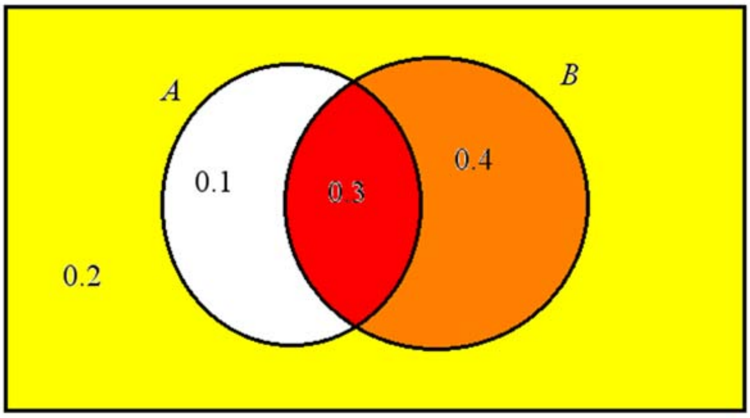
Si sumamos todas las probabilidades tenemos que: $0.3 + 0.4 + 0.1 = 0.8$por lo que la zona de fuera de los círculos es: $1 - 0.8 = 0.2$. Situándolo en el diagrama tenemos que:



Vamos a calcular: $P(A^C \cap B)$Pintamos A^C de amarillo:



Si pintamos ahora B de rojo tenemos que la zona que queda naranja (pintada dos veces) es la probabilidad buscada (la intersección)



Por lo tanto: $P(A^C \cap B) = 0.4$

Queremos calcular: $P(A^C/B) = \frac{P(A^C \cap B)}{P(B)} = \frac{0.4}{0.7} = \frac{4}{7} \simeq 0.5714 = 57.14\%$

Problema 4:

a) Calcula $(AB)^{-1}$

Tenemos que calcular el producto y después la inversa del resultado.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) \\ 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) & 1 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para calcular la inversa lo podemos hacer por la definición, Gauss o determinantes. Sólo hay que hacerlo de una forma. Yo lo voy a calcular aquí por Gauss y determinantes:

Por Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_1 \Leftrightarrow F_2}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{F_1 = F_1 - F_2}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{F_1 = F_1/(-1)}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Luego la inversa es: $(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Podemos comprobar el resultado aplicando que el producto de una matriz por su inversa es la identidad: $(AB)^{-1} \cdot (AB) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) & 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ahora la calculamos por determinantes (sólo hay que hacerlo de una forma). Aplicamos la fórmula por adjuntos:

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{|(AB)|}\left(Adj(AB)\right)^t$$

Calculamos el determinante: $|A \cdot B| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 = 1$luego $\exists (AB)^{-1}$

Aplicamos la fórmula (al ser de dimensión 2 los adjuntos son números)

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

El resultado es, lógicamente, el mismo que el anterior.

b) Calcula $C+AB$.

Del apartado anterior sabemos que:$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ por lo que la operación planteada es:

$$C + A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

c) ¿Son iguales las matrices $C^{-1}+(AB)^{-1}$y$(C+AB)^{-1}$? (4 puntos)

Para comprobarlo podemos hacer todos los cálculos que nos dicen o bien podemos fijarnos un poco y utilizar algunas propiedades de las matrices. Por el resultado del apartado a) debemos de fijarnos en que$C=(AB)^{-1}$

Por lo tanto$C^{-1}=((AB)^{-1})^{-1}=AB$

Con lo cual: $C^{-1}+(AB)^{-1}=AB+(AB)^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I$

Por otro lado tenemos que calcular: $(C+AB)^{-1}$

Por el apartado b) tenemos que$C+AB=I$por lo que $(C+AB)^{-1}=I^{-1}$

Como la inversa de la identidad es la misma identidad: $(C+AB)^{-1}=I^{-1}=I$

Por lo tanto ambas matrices son iguales a la identidad:

$$C^{-1}+(AB)^{-1}=I=(C+AB)^{-1}$$

Autor: Pedro Podadera Sánchez
www.apuntesmareaverde.org.es

Problema 5:

a) Calcula el número de bicicletas que hay que alquilar cada mes para obtener un beneficio máximo.

Tenemos que buscar un máximo a la función beneficios. Para ello se deriva la función y se iguala a cero la derivada:

$f(x) = 350x - x^2 - 15000 \rightarrow f'(x) = 350 - 2x = 0 \rightarrow x = \frac{350}{2} = 175$

Para comprobar que es máximo hacemos la segunda derivada y sustituimos el valor hallado:

$f''(x) = -2 \rightarrow f''(175) = -2 < 0$por lo que se trata de un **máximo**.

Por lo cual, para obtener un beneficio mensual máximo hay que alquilar 175 bicicletas.

El apartado también se puede resolver razonando que la función beneficios es una parábola cóncava (con el vértice hacia arriba) por lo que presenta un máximo en dicho vértice y cuya abscisa se calcula con la fórmula $x = \frac{-b}{2a}$

b) ¿Cuál es dicho beneficio máximo?

Para hallarlo sustituimos el valor hallado en la función beneficio:

$f(x) = 350x - x^2 - 15000 \rightarrow f(175) = 350 \cdot 175 - 175^2 - 15000 = 15625$

Por lo que el máximo beneficio es de 15625 €

c) Determina a partir de qué cantidad de bicicletas alquiladas el taller obtiene beneficios.

Vamos a calcular los ceros de la función, es decir, cuando obtiene beneficio cero:

$$f(x) = 350x - x^2 - 15000 = 0$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado:

$$x = \frac{-350 \pm \sqrt{350^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-15000)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-350 \pm 250}{-2} = \begin{cases} \frac{-350 \pm 250}{-2} = \frac{-100}{-2} = 50 \\ \frac{-350 \pm 250}{-2} = \frac{-600}{-2} = 300 \end{cases}$$

Como es una función continua (es una parábola) vamos a comprobar el signo de la misma antes y después de los ceros:

$$f(0) = 350 \cdot 0 - 0^2 - 15000 = -15000 < 0$$

$$f(60) = 350 \cdot 60 - 60^2 - 15000 = 2400 > 0$$

$$f(310) = 350 \cdot 310 - 310^2 - 15000 = -2600 < 0$$

Eso implica que:

En el intervalo $[0,50]$la función beneficio es negativa por lo que **tiene pérdidas**.

En el intervalo $[50,300]$la función beneficio es positiva por lo que **tiene beneficios**.

En el intervalo $[300,+\infty[$ la función beneficio es negativa por lo que **tiene pérdidas**.

Podemos afirmar que, a partir de 50 bicicletas, la empresa obtiene beneficios.

El apartado también se puede resolver razonando que la función beneficios es una parábola cóncava (con el vértice hacia arriba) por lo que entre los puntos de corte con el eje de abscisas es positiva y en el resto negativa.

d) ¿Puede tener pérdidas a pesar de alquilar una cantidad mayor de bicicletas que la obtenida en el apartado anterior?

Este apartado lo hemos contestado en el anterior ya que hemos demostrado que en el intervalo $[300,+\infty[$ la función beneficio es negativa por lo que **tiene pérdidas**.

Así podemos afirmar que si la empresa alquila más de 300 bicicletas podrá tener pérdidas.

Problema 6:

Es un problema de probabilidad. Tenemos que definir los sucesos yo he optado por estas letras:

U – Hogar unifamiliar (formado por una persona)

U – Hogar NO unifamiliar (formado por varias personas)

S – Suscritos al canal Panoramix

S – No suscritos al canal Panoramix

A partir de la definición de los sucesos vamos a ver qué probabilidades nos dan en el enunciado:

- El 80% de los hogares están formados por más de una persona eso quiere decir que:

$$P(\overline{U}) = 0.8$$

- Podemos deducir, por el suceso contrario u opuesto, que:

$$P(U) = 1 - P(\overline{U}) = 1 - 0.8 = 0.2$$

- El 30% de los hogares de esa ciudad están suscritos al canal Panoramix por lo que:

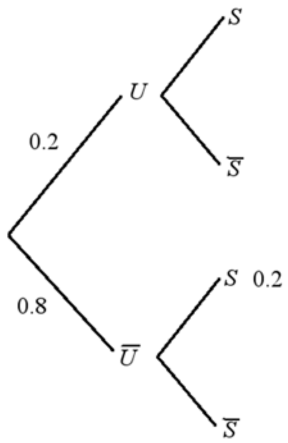
$$P(S) = 0.3$$

- Podemos deducir, por el suceso contrario u opuesto, que:

$$P(\overline{S}) = 1 - P(S) = 1 - 0.3 = 0.7$$

- Por último, se sabe que el 20% de los hogares están formados por más de una persona y están suscritos al canal Panoramix. Esta es una intersección (aparece la "y") por lo que la probabilidad que nos dan es:

$$P(\overline{U} \cap S) = 0.2$$



Vamos a situar todas esta probabilidades en un árbol:

Fijémonos en que no podemos utilizar aún el dato de la suscripción, tal y como hemos elaborado el árbol. Vamos a intentar terminar de poner las probabilidades que nos faltan:

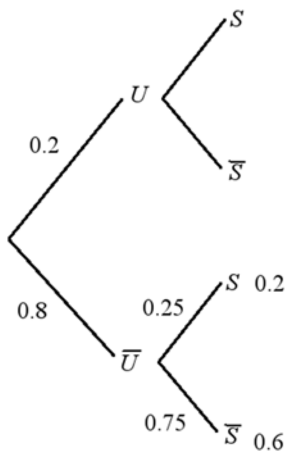
$$P(S/\overline{U}) = \frac{P(\overline{U} \cap S)}{P(\overline{U})} = \frac{0.2}{0.8} = \frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$$

Por otro lado, como la suma de las probabilidades de un nudo ha de ser 1, tenemos que:

$$P(\overline{S}/\overline{U}) = 1 - 0.25 = 0.75$$

Una vez tenemos la condicionada es fácil sacar la intersección:

$$P(\overline{U} \cap \overline{S}) = P(\overline{U}) \cdot P(\overline{S}/\overline{U}) = 0.8 \cdot 0.75 = 0.6 = 60\%$$



Con esto tenemos toda una rama completa:

Para completar el árbol utilizamos la Probabilidad total. Sabemos que el el 30% de los hogares de esa ciudad están suscritos al canal Panoramix. Por lo que:

$$P(S) = P(S \cap U) + P(S \cap \overline{U}) \rightarrow 0.3 = P(S \cap U) + 0.2 \rightarrow P(S \cap U) = 0.1$$

Como la suma de todas las probabilidades al final del árbol ha de ser la unidad (suceso seguro tenemos que:

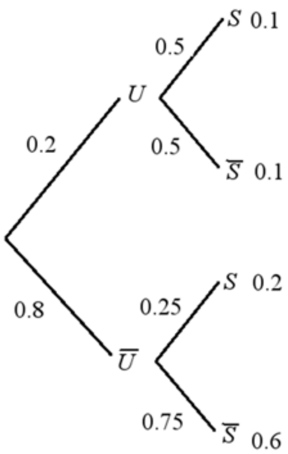
$$P(U \cap \overline{S}) = 1 - 0.6 - 0.2 - 0.1 = 0.1$$

Con esas dos probabilidades podemos deducir las condicionadas correspondientes y acabar nuestro árbol:

$$P(S/U) = \frac{P(S \cap U)}{P(U)} = \frac{0.1}{0.2} = 0.5$$

$$P(\overline{S}/U) = \frac{P(\overline{S} \cap U)}{P(U)} = \frac{0.1}{0.2} = 0.5$$

Nuestro árbol completo es:



Ahora podemos contestar a las cuestiones planteadas.

a) Calcula la probabilidad de que el hogar seleccionado no esté suscrito al canal Panoramix.

La hemos calculado en la introducción del ejercicio:

Por el suceso contrario u opuesto, tenemos que:

$$P(\overline{S}) = 1 - P(S) = 1 - 0.3 = 0.7 = 70\%$$

b) Calcula la probabilidad de que el hogar seleccionado esté formado por una única persona y también esté suscrito al canal Panoramix.

Nos preguntan por la intersección:$P(U \cap S)$

Lo podemos leer directamente del árbol:$P(U \cap S) = 0.1 = 10\%$

c) Si sabemos que el hogar seleccionado está formado por una única persona, ¿cuál es la probabilidad de que esté suscrito al canal Panoramix?

Se trata de probabilidad a posteriori por lo que utilizamos la fórmula de Bayes:

$$P(S/U) = \frac{P(S \cap U)}{P(U)} = \frac{0.1}{0.2} = 0.5 = 50\%$$

d) Si sabemos que el hogar seleccionado está suscrito al canal Panoramix, ¿cuál es la probabilidad de que esté formado por más de una persona?

Se trata de probabilidad a posteriori por lo que utilizamos la fórmula de Bayes:

$$P(\overline{U}/S) = \frac{P(\overline{U} \cap S)}{P(S)} = \frac{0.2}{0.3} = \frac{2}{3} \simeq 0.6667 = 66.67\%$$