Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2020

Comunidad autónoma de

PAÍS VASCO

Autor: Álvaro Garmendia Antolín

Universidad del País Vasco | Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA

2020ko OHIKOA

GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II

EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

ORDINARIA 2020

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Azterketa honek zortzi ariketa ditu. Haietako LAUri erantzun behar diezu.

Jarraibideetan adierazitakoei baino galdera gehiagori erantzunez gero, erantzunak ordenari jarraituta zuzenduko dira, harik eta beharrezko kopurura iritsi arte.

Ez ahaztu azterketa-orrialde guztietan kodea jartzea.

- Kalkulagailu zientifikoak erabil daitezke, baina, **ezin ditu izan** ezaugarri hauek:
    - pantaila grafikoa
    - datuak igortzeko aukera
    - programatzeko aukera
    - ekuazioak ebazteko aukera
    - matrize-eragiketak egiteko aukera
    - determinanteen kalkulua egiteko aukera
    - deribatuak eta integralak ebazteko aukera
    - datu alfanumerikoak gordetzeko aukera.
- Orri honen atzealdean, banaketa normalaren taula dago.

Este examen tiene ocho ejercicios. Debes contestar a CUATRO de ellos.

En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.

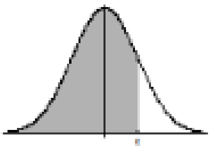
No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

- Está permitido el uso de calculadoras científicas **que no presenten** ninguna de las siguientes prestaciones:
    - pantalla gráfica
    - posibilidad de trasmitir datos
    - programable
    - resolución de ecuaciones
    - operaciones con matrices
    - cálculo de determinantes
    - derivadas e integrales
    - almacenamiento de datos alfanuméricos.
- La tabla de la distribución normal está en el anverso de esta hoja.

1

Universidad del País Vasco | Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA	EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
2020ko OHIKOA	ORDINARIA 2020
GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II	MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II



$N(0,1)$ kurbak $-\infty$-tik z-raino mugatutako azalerak

Áreas limitadas por la curva $N(0,1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5087	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'9	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000

2

Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA	EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
2020ko OHIKOA	ORDINARIA 2020
GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II	MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

A 1 [$hasta\ 2,5\ puntos$]

Se considera la ecuación matricial:

$$A \cdot X = A^t \cdot B \qquad \text{donde } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) [$0,5\ puntos$] ¿Qué dimensión debe tener la matriz X?
b) [$2\ puntos$] Resuelve la ecuación matricial.

A 2 [$hasta\ 2,5\ puntos$]

Sea $f(x)$ la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } \ 0 \le x \le 1 \\ ax + 2 & \text{si } \ 1 < x \le 2 \end{cases}$$

a) [$1\ punto$] Determina el valor del parámetro a para que la función $f(x)$ sea continua en el punto $x = 1$.
b) [$0,5\ puntos$] Realiza la representación gráfica de la función cuando $a = 2$.
c) [$1\ punto$] Calcula el área comprendida entre la función y el eje de abscisas OX para $a = 2$.

A 3 [$hasta\ 2,5\ puntos$]

En una caja hay una bola roja y una bola azul. Se han extraído dos bolas de la caja como se explica a continuación: se ha extraído una bola, y antes de sacar la segunda se ha devuelto a la caja la primera bola extraída, añadiendo otra bola del mismo color.

a) [$0,75\ puntos$] Calcula la probabilidad de que la segunda bola extraída sea roja si la primera que se ha sacado era azul.
b) [$1\ punto$] Calcula la probabilidad de que la segunda bola extraída sea azul.
c) [$0,75\ puntos$] Si la segunda bola ha sido azul, ¿cuál es la probabilidad de que la primera bola extraída haya sido roja?

A 4 [$hasta\ 2,5\ puntos$]

La altura en centímetros de las mujeres de un determinado país sigue una distribución normal de media 163 cm y desviación típica 7 cm.

a) [$1,5\ puntos$] Si se toma una mujer al azar, ¿cuál es la probabilidad de que su altura sea superior a 171 cm? ¿Y de que su altura esté comprendida entre 155 y 171 cm?
b) [$1\ punto$] Una empresa que fabrica disfraces quiere elaborar cuatro tallas en función de la altura, de tal modo que cada una de ellas sea adecuada para el 25 % de las mujeres. ¿Cuáles serán las alturas que marcarán el cambio de una talla a otra?

Universidad del País Vasco | Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA	EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
2020ko OHIKOA	ORDINARIA 2020
GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II	MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

B 1 $[\![\textit{hasta } 2,5 \textit{ puntos}]\!]$

Un guía de turismo quiere adquirir tickets de diferentes actividades para sus clientes. En concreto, quiere comprar al menos 16 tickets para acudir a un museo, 20 para realizar una visita guiada y 16 para asistir a un espectáculo.

Dos agencias disponen de ofertas para dichos tickets combinados en paquetes:

- La agencia A ofrece paquetes formados por 6 tickets para el museo, 4 para la visita guiada y 4 para el espectáculo, a 210 € cada paquete.
- La agencia B ofrece paquetes formados por 4 tickets para el museo, 6 para la visita guiada y 4 para el espectáculo, a 230 € cada paquete.

¿Cuántos paquetes deberá comprar el guía a cada agencia para que su coste sea mínimo? ¿A cuánto asciende dicho coste?

B 2 $[\![\textit{hasta } 2,5 \textit{ puntos}]\!]$

Sea la siguiente función $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

a) $[\![1 \textit{ punto}]\!]$ Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos relativos de la función.

b) $[\![0,5 \textit{ puntos}]\!]$ Calcula las asíntotas verticales y horizontales de la función.

c) $[\![0,5 \textit{ puntos}]\!]$ Representa gráficamente el área comprendida entre la función y la recta $y = \frac{x}{2}$.

d) $[\![0,5 \textit{ puntos}]\!]$ Obtén la primitiva de la función $f(x)$, sabiendo que en $x = 0$ toma el valor 1.

B 3 $[\![\textit{hasta } 2,5 \textit{ puntos}]\!]$

Sean A y B dos sucesos compatibles asociados a un experimento aleatorio.

Se sabe que $P(A) = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}5$ y $P(A \cap B) = 0{,}4$. Calcula:

a) $[\![0,65 \textit{ puntos}]\!]$ $P(A \cup B)$

b) $[\![0,6 \textit{ puntos}]\!]$ $P(A^c \cap B^c)$

c) $[\![0,6 \textit{ puntos}]\!]$ $P(A^c \cap B)$

d) $[\![0,65 \textit{ puntos}]\!]$ $P(A|B)$

B 4 $[\![\textit{hasta } 2,5 \textit{ puntos}]\!]$

El peso de las truchas de una piscifactoría sigue una distribución normal de media 250 gramos y desviación típica 50 gramos. Únicamente son aptas para la venta aquellas que superan un determinado peso.

a) $[\![1,25 \textit{ puntos}]\!]$ ¿Cuál debería ser ese peso si se quiere que el 40 % de las truchas de la piscifactoría sean aptas para la venta?

b) $[\![1,25 \textit{ puntos}]\!]$ Si dicho peso se establece en 280 gramos y en la piscifactoría hay un total de 6000 truchas, ¿cuántas de ellas se podrán poner a la venta?

4

Ejercicio A1:

Se considera la ecuación matricial $AX = A^tB$, donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) ¿Qué dimensión debe tener la matriz X?
b) Resuelve la ecuación matricial

Solución:

a) Sea la dimensión de X, m x n. La matriz A es de dimensión 3 x 3, luego para poder multiplicarla por X, m debe valer 3.

La dimensión de AtB es 3 x 1, y esa debe ser la dimensión de AX, que ahora es 3 x n, por lo que n debe vale 1.

La matriz X debe tener dimensión 3 x 1.

b) Sea $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Planteamos el sistema y lo resolvemos:

$$A \cdot X = A^t \cdot B \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a + 2b - c \\ b + 2c \\ a + 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\to \begin{cases} a + 2b - c = 3 \\ b + 2c = 6 \\ a + 2b = -1 \end{cases} \to \begin{cases} a + 2b - c = 3 \\ c = 3 - b/2 \\ a = -1 - 2b \end{cases} \to \begin{cases} -1 - 2b + 2b - 3 - b/2 = 3 \\ c = 3 - b/2 \\ a = -1 - 2b \end{cases} \to \begin{cases} b = 14 \\ c = -4 \\ a = -29 \end{cases} \to$$

$$\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} -29 \\ 14 \\ -4 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio A2:

Sea *f(x)* la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad 0 \le x \le 1 \\ ax+2 & si \quad 1 < x \le 2 \end{cases}$$

a) Determina el valor del parámetro a para que la función sea continua en $x = 1$
b) Realiza la representacíin gráfica de la función cuando $a = 2$.
c) Calcula el área comprendida entre la función y el eje de abscisas OX para $a = 2$

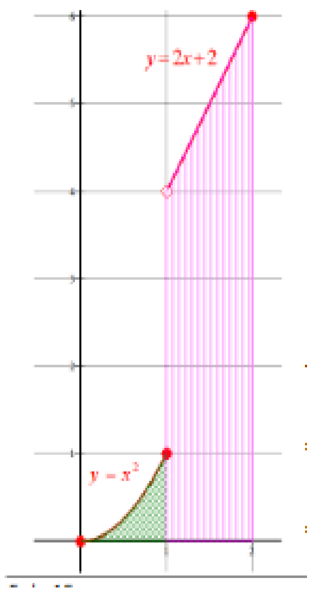
Solución:

a) La función es una función definida por dos trozos, ambos funciones polinómicas, luego siempre continuas. El caso dudoso es el punto de corte de las dos ramas. Para que sea continua basta imponer que para el valor 1 tengan el mismo valor:

$$f(1) = (1)^2 = 1 \to a(1) + 2 = a + 2 = 1 \to a = -1.$$

a = -1 para que la función sea continua.

b) La función $f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad 0 \le x \le 1 \\ 2x+2 & si \quad 1 < x \le 2 \end{cases}$ está formada por un trozo de parábola en (0, 1) y un segmento de recta de extremos (1, 4) y (2, 6).



c) Planteamos el área:

$$Área = \int_0^1 x^2dx + \int_1^2 (2x+2)dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{2x^2}{2} + 2x\right]_1^2 = \left(\frac{1^3}{3} - 0\right) + \left((4+4) - (1+2)\right)$$
$$= \frac{1}{3} + 5 = \frac{16}{3}\boldsymbol{u^2}$$

$$\boldsymbol{Área = \frac{16}{3}\, u^2}$$

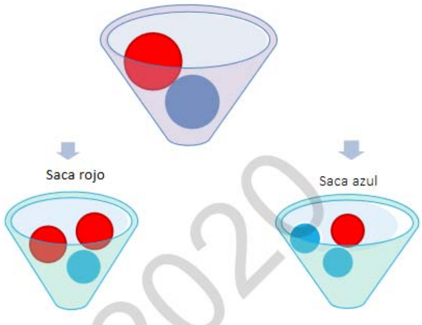
Ejercicio A3:

En una caja hay una bola roja y una bola azul. Se han extraido dos bolas de la aja como se explica a continación: se ha extraido una bola, y antes de sacar la segunda se ha devuelto a la caja la primera bola extraida, añadiendo otra bola del mismo color.

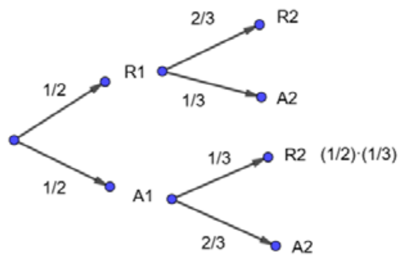
a) Calcula la probabilidad de que la segunda bola extraida sea roja si la primera que se ha sacado era azul.
b) Calcula la probabilidad de que la segunda bola extraida sea azul
c) Si la segunda bola ha sido azul, ¿cual es la probabilidad de que la primera bola extraida haya sido roja?

Solución:

Llamamos $A1$ a que la primera bola extraida sea azul, $R1$ a que sea roja. Llamamos $A2$ a que la seguda bola extraida sea azul, y $R2$ a que sea roja.



Hacemos un diagrama en árbol:



a) Nos piden la probabilidad de que la segunda bola extraida sea roja si la primera que se ha sacado era azul, es decir la probabilidad condicionada $P(R2/A1)$ que según el árbol es 1/3.

$P(R2/A1)$ = P(segunda bola sea roja/primera haya sido azul) = 1/3.

b) Nos piden la probabilidad de que la segunda bola extraida sea azul, P(A2), lo que ocurre en dos de las ramas:

P(segunda azul) = (1/2) · (1/3) + (1/2) · (2/3) = 3/6 = 1/2.

$P(A2)$ = P(segunda azul) = 1/2.

c) Sabiendo que la segunda bola ha sido azul, nos piden determinar la probabilidad de que la primera bola extraida haya sido roja, es decir P(primera roja/segunda azul) = $P(R1/A2)$.

Sabemos que P(primera roja y segunda azul) = P(primera roja/segunda azul) · P(segunda azul), luego

P(primera roja/segunda azul) = P(primera roja y segunda azul)/ P(segunda azul)

Según el árbol P(primera roja y segunda azul) = (1/2) · (1/3), y en el apartado b) hemos calculado P(segunda azul) = 1/2, por lo que:

P(primera roja/segunda azul) = $\dfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{3}$

$P(R1/A2)$ = P(primera roja/segunda azul) = 1/3.

Ejercicio A4:

La altura en centímetros de las mujeres de un determinado país sigue una distribución normal de media 163 cm y desviación típica 7 cm.

a) Si se toma una mujer al azar, ¿cuál es la probabilidad de que su altura sea superior a 171 cm? ¿Y de que su altura esté comprendida entre 155 y 171 cm?

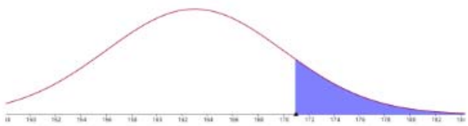
b) Una empresa que fabrica disfrces quiere elaborar cuatro tallas en función de la atura, de tal modo que cada una de ellas sea adecuada para el 25 % de las mujeres. ¿Cuáles serán las alturas que marcarán el cambio de una talla a otra?

Solución:

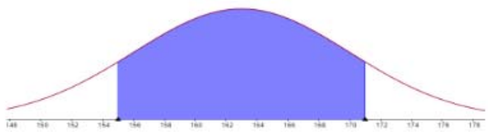
Sabemos que la altura de las mujeres sigue una distribución normal de media 163 y desviación típica 7.

Tipificamos la variable normal: Z: $\frac{X-\mu}{\sigma}=\frac{X-163}{7}$

a) $P1=P(X>171)=P\left(Z>\frac{171-163}{7}\right)=P(Z>1.14)=1-P(Z\le 1.14)=1-0.8729=0.1271$



$$P2=P(155\ \le X\le 171)=P\left(\frac{155-163}{7}\le Z\le\frac{171-163}{7}\right)=P(-1.14\le Z\le 1.14)$$
$$=P(Z\le 1.14)-\big(1-P(Z\le 1.14)\big)=0.8729-(1-0.8729)=0.7428$$

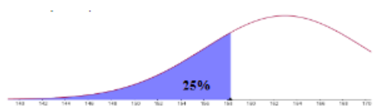


$$P(X>171)=0.1271$$
$$P(155\ \le X\le 171)=0.7428$$

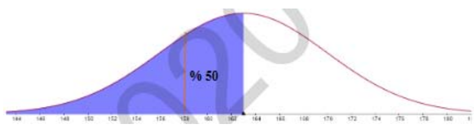
b) Buscamos los puntos a, b y c de paso de unas tallas a otras, siendo

$P(X\le a)=0.25$; $(X\le b)=0.50$; $P(X\le c)=0.75$. Tipificamos:

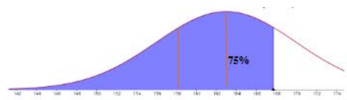
$$P(X\le a)=P\left(Z\le\frac{a-163}{7}\right)=0.25\to\frac{a-163}{7}=-0.675$$
$$\to a=158.275$$



$$P(X\le b)=P\left(Z\le\frac{b-163}{7}\right)=0.50\to\frac{b-163}{7}=0$$
$$\to b=163$$



$$P(X\le c)=P\left(Z\le\frac{c-163}{7}\right)=0.75\to\frac{c-163}{7}=0.675$$
$$\to c=167.725$$



Las tres alturas que indicarán el paso de una talla a la siguiente son: 158.275 cm, 163 cm y 167.725 cm.

Ejercicio B1:

Un guía de turismo quiere adquirir tickets de diferentes actividades para sus clientes. En concreto quiere comprar al menos 16 tickets para acudir a un museo, 20 para realizar una visita guiada y 16 para asistir a un espextáculo. Dos agentes disponen de ofertas para dichos tickets combinados en paquetes:

- La agencia A ofrece paquetes formados por 6 tickets para el museo, 4 para la visita guiada y 4 para el espectáculo, a 210 euros cada paquete.
- La agencia B ofrece paquetes formados por 4 tickets para el museo, 6 para la visita guiada y 4 para el espectáculo, a 230 euros cada paquete.

¿Cuántos paquetes deberá comprar el guía a cada agencia para que su coste sea mínimo? ¿A cuánto asciende dicho coste?

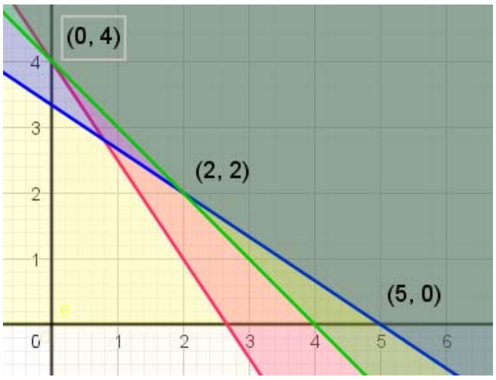
Solución:

Sea x el número de paquetes de la agencia A y sea y el de la agencia B. Representamos el enunciado en una tabla:

Agencia	Tickets museo	Visita guiada	Espectáculo	Coste	Cantidad
A:	6	4	4	210	x
B:	4	6	4	230	y

La función objetivo es: $C(x, y) = 210x + 230y$

Región factible:



Las restricciones son:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ \mathbf{6x + 4y \geq 16} \\ \mathbf{4x + 6y \geq 20} \\ \mathbf{4x + 4y \geq 16} \end{cases}$$

Los vértices son: (0, 4); (2, 2); (5, 0)

Evaluamo la función objetivo en los vértices:

$C(0, 4) = 230(4) = 920$

$C(2, 2) = 210(2) + 230(2) = 880$

$C(5, 0) = 210(5) = 1050.$

Luego el coste es mínimo en (2, 2), por lo que

El guía debe comprar **2** paquetes de la agencia A y **2** paquetes de la agencia B, con un coste de **880** euros.

Ejercicio B2:

Sea la siguiente función $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

a) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos relativos de la función.

b) Calcula las asíntotas verticales y horizontales de la función.

c) Representa graficamente el área comprendida entre la función y la recta $y = x/2$.

d) Obtén la primitiva de la función $f(x)$ sabiendo que en $x = 0$ toma el valor 1.

Solución:

a) Para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento estudiamos el signo de la derivada primera:

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1} \to f'(x) = \frac{(x^2+1) - x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

El denominador es siempre positivo, por lo que estudiamos el signo del numerador, que es una parábola de ramas hacia abajo con vértice en (1, 0), y puntos de corte con el eje de abscisas en (–1, 0) y (1, 0).

La función es decreciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y es creciente en $(-1, +1)$.

En -1 la función pasa de ser decreciente a ser creciente, luego tiene un mínimo en el punto $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$.

En 1 la función pasa de ser creciente a ser decreciente, luego tiene un máximo en el punto $\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

Máximo relativo: $\left(1, \frac{1}{2}\right)$. Mínimo relativo: $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$.

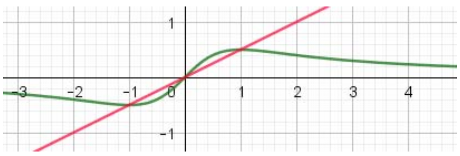
b) Las asíntotas verticales están en los valores en los que se anule, el denominador, que no se anula nunca, luego no hay asíntotas verticales.

Estudiamos el comportamiento en el infinito: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$. Luego $y = 0$ es una asíntota horizontal. Estudiamos la relación entre la función y la asíntota:

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0^-$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0^+$.

La función no tiene asíntotas verticales. La recta $\boldsymbol{y = 0}$ es una asíntota horizontal.

c) Hallamos los puntos de intersección:



$\frac{x}{x^2+1} = \frac{x}{2} \to 2 = x^2 + 1 \to x^2 = 1 \to x = \pm 1$; $\left(1, \frac{1}{2}\right)$; $(-1, \frac{-1}{2})$.

$$Área = \int_{-1}^{0} \left(\frac{x}{2} - \frac{x}{x^2+1}\right)dx + \int_{0}^{1} \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{2}\right) dx$$

Al ser ambas funciones de simetría impar podemos asegurar que:

$$Área = 2\int_{0}^{1} \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{2}\right) dx = \int_{0}^{1} \left(\frac{2x}{x^2+1} - x\right) dx = \left[Ln(x^2+1) - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = Ln2 - \frac{1}{2}$$

d) $F(x) = \int \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2}(Ln(x^2+1) + C \to F(0) = 1 = \frac{1}{2}(Ln(1) + C = C \to C = 1$.

$\boldsymbol{C = 1}$

Ejercicio B3:

Sean A y B dos sucesos compatibles asociados a un experimento aleatorio: Se sabe que $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.5$ y $P(A \cap B) = 0.4$. Calcula:

a) $P(A \cup B)$.

b) $P(A^C \cap B^C)$.

c) $P(A^C \cap B)$.

d) $P(A/B)$

Solución:

Llevamos los datos dados a una tabla de contingencia o tabla de doble entrada, y completamos los datos que faltan:

	A	A^C	
B	0.4		0.5
B^C			
	0.6		1

	A	A^C	
B	0.4	0.1	0.5
B^C	0.2	0.3	0.5
	0.6	0.4	1

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.6 + 0.5 - 0.4 = 0.7$.

$$P(A \cup B) = 0.7.$$

b) Mirando la tabla vemos que $P(A^C \cap B^C) = 0.3$.

$$P(A^C \cap B^C) = 0.3.$$

c) Mirando la tabla vemos que $P(A^C \cap B) = 0.1$.

$$P(A^C \cap B) = 0.1.$$

d) Sabemos que $P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(B) \cdot P(A/B)$. Luego: $0.4 = 0.5 \cdot P(A/B)$. Despejando: $P(A/B) = 0.4/0.5 = 4/5 = 0.8$.

$$P(A/B) = 0.8$$

Ejercicio B4:

El peso de las truchas de una piscifactoria sigue una distribución normal de media 250 gramos y desviación típica 50 gramos. Únicamente son aptas para la venta aquellas que superan un determinado peso.

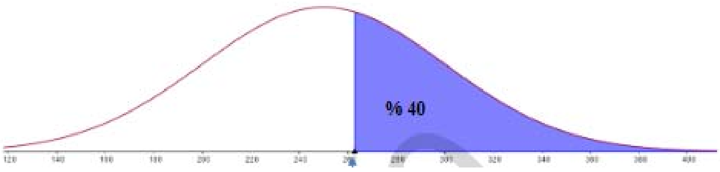
a) ¿Cuál debería ser ese peso si se quiere que el 40 % de las truchas de la piscifactoría sean aptas para la venta?
b) Si dicho peso se establece en 280 gramos y en la piscifactoria hay un total de 6000 truchas, ¿cuántas de ellas se pondrán a la venta?

Solución:

Sabemos que el peso de las truchas sigue una distribución normal de media 250 gramos y desviación típica 50 gramos.

Tipificamos la variable normal: Z: $\frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-250}{50}$

a) $P(X \geq a) = P\left(Z \geq \frac{a-250}{50}\right) = 0.4 = 1 - P\left(Z < \frac{a-250}{50}\right) \to P\left(Z < \frac{a-250}{50}\right) = 0.6.$



Buscamos en la tabla de la distribución normal el valor 0.6, y obtenemos que:

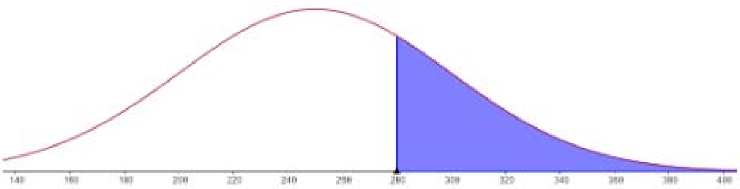
$$\frac{a-250}{50} = 0.255 \to a = 250 + (0.255)50 = 262.75.$$

El peso mínimo para que el 40 % de las truchas de la piscifactoría sean aptas para la venta es de 262.75 gramos.

b) $P(X \geq 280) = P\left(Z \geq \frac{280-250}{50}\right) = P\left(Z \geq \frac{30}{50} = \frac{3}{5} = 0.6\right) = 1 - P(Z \leq 0.6) =$

Buscamos en la tabla de la distribución normal:

$1 - P(Z \leq 0.6) = 1 - 0.7257 = 0.2743.$



Se pondrán a la venta en 27.43 % de las truchas. Como hay 6000 truchas, calculamos el 27.43 % de 6000 y se obtiene 1646, luego entonces se pondrán a la venta 1646 truchas.

Se pondrán a la venta **1646** truchas

Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA — EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

2020ko OHIKOA — ORDINARIA 2020

GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II — MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

B 1 [$\mathit{hasta}\ 2,5\ \mathit{puntos}$]

Un guía de turismo quiere adquirir tickets de diferentes actividades para sus clientes. En concreto, quiere comprar al menos 16 tickets para acudir a un museo, 20 para realizar una visita guiada y 16 para asistir a un espectáculo.
Dos agencias disponen de ofertas para dichos tickets combinados en paquetes:

- La agencia A ofrece paquetes formados por 6 tickets para el museo, 4 para la visita guiada y 4 para el espectáculo, a 210 € cada paquete.
- La agencia B ofrece paquetes formados por 4 tickets para el museo, 6 para la visita guiada y 4 para el espectáculo, a 230 € cada paquete.

¿Cuántos paquetes deberá comprar el guía a cada agencia para que su coste sea mínimo? ¿A cuánto asciende dicho coste?

B 2 [$\mathit{hasta}\ 2,5\ \mathit{puntos}$]

Sea la siguiente función $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

a) [$1\ \mathit{punto}$] Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos relativos de la función.
b) [$0,5\ \mathit{puntos}$] Calcula las asíntotas verticales y horizontales de la función.
c) [$0,5\ \mathit{puntos}$] Representa gráficamente el área comprendida entre la función y la recta $y = \frac{x}{2}$.
d) [$0,5\ \mathit{puntos}$] Obtén la primitiva de la función $f(x)$, sabiendo que en $x = 0$ toma el valor 1.

B 3 [$\mathit{hasta}\ 2,5\ \mathit{puntos}$]
Sean A y B dos sucesos compatibles asociados a un experimento aleatorio.
Se sabe que $P(A) = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}5$ y $P(A \cap B) = 0{,}4$. Calcula:

a) [$0,65\ \mathit{puntos}$] $P(A \cup B)$
b) [$0,6\ \mathit{puntos}$] $P(A^c \cap B^c)$
c) [$0,6\ \mathit{puntos}$] $P(A^c \cap B)$
d) [$0,65\ \mathit{puntos}$] $P(A|B)$

B 4 [$\mathit{hasta}\ 2,5\ \mathit{puntos}$]

El peso de las truchas de una piscifactoría sigue una distribución normal de media 250 gramos y desviación típica 50 gramos. Únicamente son aptas para la venta aquellas que superan un determinado peso.

a) [$1,25\ \mathit{puntos}$] ¿Cuál debería ser ese peso si se quiere que el 40 % de las truchas de la piscifactoría sean aptas para la venta?
b) [$1,25\ \mathit{puntos}$] Si dicho peso se establece en 280 gramos y en la piscifactoría hay un total de 6000 truchas, ¿cuántas de ellas se podrán poner a la venta?

4

Universidad del País Vasco | Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA	EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
2020ko EZOHIKOA	EXTRAORDINARIA 2020
GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II	MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Azterketa honek zortzi ariketa ditu. Haietako LAUri erantzun behar diezu.

Jarraibideetan adierazitakoei baino galdera gehiagori erantzunez gero, erantzunak ordenari jarraituta zuzenduko dira, harik eta beharrezko kopurura iritsi arte.

Ez ahaztu azterketa-orrialde bakoitzean kodea jartzea.

- Kalkulagailu zientifikoak erabil daitezke, baina, **ezin ditu izan** ezaugarri hauek:
    - pantaila grafikoa
    - datuak igortzeko aukera
    - programatzeko aukera
    - ekuazioak ebazteko aukera
    - matrize-eragiketak egiteko aukera
    - determinanteen kalkulua egiteko aukera
    - deribatuak eta integralak ebazteko aukera
    - datu alfanumerikoak gordetzeko aukera.
- Orri honen atzealdean, banaketa normalaren taula dago.

Este examen tiene ocho ejercicios. Debes contestar a CUATRO de ellos.

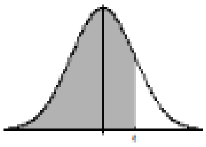
En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.

No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

- Está permitido el uso de calculadoras científicas **que no presenten** ninguna de las siguientes prestaciones:
    - pantalla gráfica
    - posibilidad de trasmitir datos
    - programable
    - resolución de ecuaciones
    - operaciones con matrices
    - cálculo de determinantes
    - derivadas e integrales
    - almacenamiento de datos alfanuméricos.
- La tabla de la distribución normal está en el anverso de esta hoja.

Universidad del País Vasco — Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA	EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
2020ko EZOHIKOA	EXTRAORDINARIA 2020
GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II	MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II



$N(0,1)$ kurbak $-\infty$-tik z-raino mugatutako azalerak

Áreas limitadas por la curva $N(0,1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'9	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000

Universidad del País Vasco — Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA	EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
2020ko EZOHIKOA	EXTRAORDINARIA 2020
GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II	MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

A 1 $[hasta\ \ 2,5\ puntos]$

Determina el valor máximo de la función objetivo $F(x,\ \ y)=5x+4y$ restringida por las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} 2y-x\geq 0 \\ y\leq 2x-3 \\ x+y\leq 9 \\ x\leq 4 \end{cases}$$

A 2 $[hasta\ 2,5\ puntos]$

Sea la función $f(x)=ax^3+bx+1$.

a) $[0,75\ puntos]$ Calcula los valores de los parámetros a y b para que $f(x)$ tenga un extremo relativo en el punto $(1,-5)$.

b) $[0,75\ puntos]$ Para $a=2$ y $b=-6$, estudiar los máximos y mínimos relativos, y los puntos de inflexión de la función $f(x)$.

c) $[1\ punto]$ Para $a=2$ y $b=-6$, calcula el área comprendida entre la función y la recta $y=2x+1$. Realiza la representación gráfica.

A 3 $[hasta\ 2,5\ puntos]$

En un instituto, el 90 % del alumnado matriculado ha nacido en la ciudad en la que está localizado dicho centro. El 42 % del alumnado son chicos, y el 54 % son chicas nacidas en la ciudad en la que se ubica el instituto.

a) $[1\ punto]$ Elegida una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no sea nacida en la ciudad donde se ubica el instituto?

b) $[0,75\ puntos]$ ¿Y la probabilidad de que sea chica y no haya nacido en la ciudad donde se ubica el instituto?

c) $[0,75\ puntos]$ Se ha elegido una persona al azar entre el alumnado y ha resultado ser nacida en la ciudad donde se ubica el instituto. ¿Cuál es la probabilidad de que sea chico?

A 4 $[hasta\ 2,5\ puntos]$

Las notas obtenidas por los estudiantes de un determinado grupo en una asignatura siguen una distribución normal de media 6,2 puntos y desviación típica 2 puntos.
Se elige un estudiante al azar. Calcula:

a) $[1\ punto]$ La probabilidad de que su nota sea superior a 7.

b) $[0,75\ puntos]$ La probabilidad de que haya obtenido una nota comprendida entre 5 y 8 puntos.

c) $[0,75\ puntos]$ Si el 25 % del alumnado con mejor nota, consiguió la calificación de "sobresaliente", ¿cuál es la nota mínima para obtener dicha calificación?

Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA	EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
2020ko EZOHIKOA	EXTRAORDINARIA 2020
GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II	MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

B 1 $[hasta\ 2,5\ puntos]$

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) $[1,25\ puntos]$ Calcular la inversa de la matriz $(A \cdot A^t)$.

b) $[0,75\ puntos]$ ¿Admite inversa la matriz $(A^t \cdot A)$?

c) $[0,5\ puntos]$ Calcular, cuando sea posible:

$$A \cdot B \qquad y \qquad A^t \cdot B$$

B 2 $[hasta\ 2,5\ puntos]$

a) $[0,5\ puntos]$ Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos relativos de la función $y = 4 - x^2$.

b) $[0,75\ puntos]$ Representar gráficamente la función dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si} \quad -2 \le x < 0 \\ 4 - x & \text{si} \quad 0 \le x \le 4 \end{cases}$$

c) $[1,25\ puntos]$ Hallar el área de la región limitada por la gráfica de $f(x)$ y el eje de abscisas.

B 3 $[hasta\ 2,5\ puntos]$

En un centro de enseñanza de Estados Unidos hay 1000 estudiantes y 100 profesores. El 10 % de los profesores son demócratas y el resto republicanos. Entre los estudiantes las proporciones son las contrarias, es decir, el 10 % de ellos son republicanos y el resto son demócratas.

a) $[1,5\ puntos]$ Si se elige una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea republicana?

b) $[1\ punto]$ Se ha elegido al azar una persona de dicho centro y ha resultado ser republicana. ¿Cuál es la probabilidad de que se trate de un estudiante?

B 4 $[hasta\ 2,5\ puntos]$

El tiempo que necesitan los alumnos de un grupo para finalizar el examen de una determinada asignatura se distribuye normalmente, con una media de 60 minutos y una desviación típica de 10 minutos.

a) $[1\ punto]$ Si se dan 75 minutos para realizar el examen, ¿qué proporción de alumnos conseguirá finalizarlo?

b) $[0,75\ puntos]$ Si se dan 80 minutos para realizar el examen, ¿qué proporción de alumnos no conseguirá finalizarlo?

c) $[0,75\ puntos]$ ¿Qué tiempo hay que dar para la realización de dicho examen si se quiere que el 96 % de los alumnos consiga terminarlo?

Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO PROBAK
PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK
CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

MATEMATICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN

1. **El examen está compuesto de cuatro ejercicios.**
2. El examen se evaluará con una puntuación entre 0 y 10 puntos.
3. **Cada ejercicio se valorará entre 0 y 2,5 puntos.**
4. En aquellas cuestiones en las que no se especifique el método de resolución que se ha de aplicar, se admitirá cualquier forma de resolverlo correctamente.

ASPECTOS QUE MERECEN VALORACIÓN POSITIVA

- Los planteamientos correctos, tanto global como de cada una de las partes, si las hubiere.
- La correcta utilización de conceptos, vocabulario y notación científica.
- El conocimiento de técnicas específicas de aplicación directa para el cálculo y/o interpretación de datos numéricos y gráficos.
- La terminación completa del ejercicio y la exactitud del resultado.
- Se considerarán igualmente válidas dos soluciones que solo se diferencien en el grado de exactitud empleado en los cálculos numéricos.
- No se tomarán en consideración errores numéricos, de cálculo, etc.…siempre que no sean de tipo conceptual.
- La claridad de las explicaciones de los pasos seguidos.
- Las ideas, gráficos, presentaciones, esquemas, etc., … que ayuden a visualizar mejor el problema y su solución.
- La pulcritud de la presentación, y cualquier otro aspecto que refleje la madurez que cabe esperar de un estudiante que aspira a entrar en la universidad.

ASPECTOS QUE MERECEN VALORACIÓN NEGATIVA

- Los planteamientos incorrectos.
- La confusión de conceptos.
- La abundancia de errores de cálculo (por ser indicativa de deficiencias de orden básico).
- Los errores aislados, cuando indican falta de reflexión crítica o de sentido común (por ejemplo, decir que la solución a tal problema es -3,7 frigoríficos, o que cierta probabilidad vale 2,5).
- Los errores aislados, cuando conducen a problemas más sencillos que los inicialmente propuestos.
- La ausencia de explicaciones, en particular del significado de las variables que se están utilizando.

EXTRAORDINARIA. Ejercicio A1:

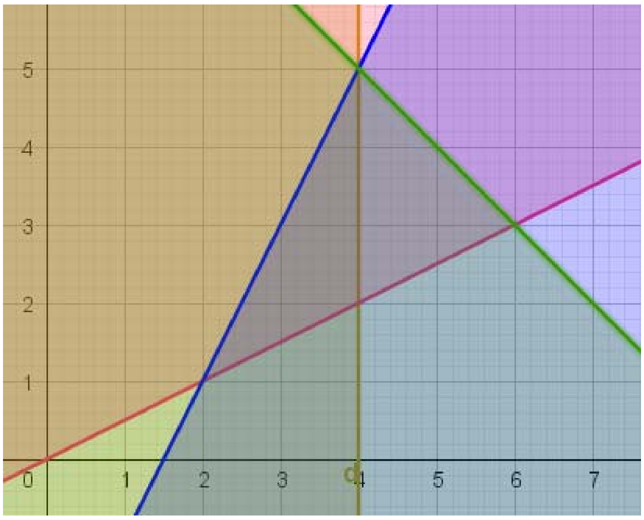
Determina el valor máximo de la función objetivo $F(x, y) = 5x + 4y$ restringida por las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} 2y - x \geq 0 \\ y \leq 2x - 3 \\ x + y \leq 9 \\ x \leq 4 \end{cases}$$

Solución:

La función objetivo es: $F(x, y) = 5x + 4y$.

La región factible es:



Las restricciones son:

$$\begin{cases} \mathbf{2y - x \geq 0} \\ \mathbf{y \leq 2x - 3} \\ \mathbf{x + y \leq 9} \\ \mathbf{x \leq 4} \end{cases}$$

Los vértices de la región factible son: $A(2, 1)$; $B(4, 2)$; $C(4, 5)$.

Evaluamos la función objetivo en los vértices:

$F(2, 1) = 5(2) + 4(1) = 14$.

$F(4, 2) = 5(4) + 4(2) = 28$.

$F(4, 5) = 5(4) + 4(5) = 40$.

Por tanto el máximo de la función objetivo se alcanza en el punto $C(4, 5)$, siendo ese valor máximo de 40.

Máximo de la función objetivo: **40**, se alcanza en $C(4, 5)$.

EXTRAORDINARIA. Ejercicio A2:

Sea la función $f(x) = ax^3 + bx + 1$.

a) Calcula los valores de los parámetros a y b para que $f(x)$ tenga un extremo relativo en el punto (1, –5).
b) Para $a = 2$ y $b = –6$, estudiar los máximos y mínimos relativos, y los puntos de inflexión de la función $f(x)$.
c) Para $a = 2$ y $b = –6$, calcula el área comprendida entre la función y la recta $y = 2x + 1$. Realiza la representación gráfica.

Solución:

a) Imponemos que la función pase por el punto (1, –5). $f(1) = a + b + 1 = –5$.

Para imponer que el punto sea un extremo relativo, se debe anular la derivada primera en ese punto:

$f'(x) = 3ax^2 + b$. Luego $f'(1) = 3a + b = 0$.

Resolvemos el sistema:

$\begin{cases} a+b=-6 \\ 3a+b=0 \end{cases}$. Restamos a la segunda ecuación la primera: $\begin{cases} 2a=6 \to a=3 \\ 3a+b=0 \to b=-\frac{9}{2} \end{cases}$.

El punto (1, –5) es un extremo relativo de la función si ***a* = 3** y ***b* = –9/2**.

b) Para los valores dados la función es: $f(x) = 2x^3 – 6x + 1$. Para estudiar los máximos y mínimos calculamos la derivada y la igualamos a cero; $f'(x) = 6x^2 – 6 = 0$. $x^2 = 1$; $x = \pm 1$;

Los posibles máximos y mínimos relativos están en los puntos:

(1, 2 – 6 + 1) = (1, –3); (–1, –2 + 6 +1) = (–1, 5).

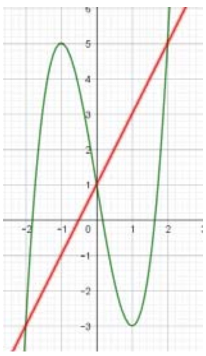
Calculamos la derivada segunda: $f''(x) = 12x$; $f''(1) = 12 > 0$; $f''(–1) = –12 < 0$.

Por lo tanto el punto (1, –3) es un mínimo relativo y (–1, 5) es un máximo relativo. Con la derivada segunda determinamos los puntos de inflexión: $f''(x) = 12x = 0$, si $x = 0$, $f(0) = 1$. El punto (0, 1) es un punto de inflexión.

Mínimo relativo: (1, –3). Máximo relativo: (–1, 5). Punto de inflexión (0, 1).

c) Buscamos los puntos de intersección entre la función y la recta:

$2x^3 – 6x + 1 = 2x + 1$; $2x^3 – 8x = 0 = 2x(x^2 – 4)$; Las raíces son: $x = 0$; $x = 2$; $x = –2$.



En la gráfica se observa que la función va por encima de la recta entre –2 y 0, y por debajo entre 0 y 2. Luego el área pedida es:

$$Área = \int_{-2}^{0} \big((2x^3-6x+1)-(2x+1)\big)dx + \int_{0}^{2} \big((2x+1)-(2x^3-6x+1)\big)dx =$$

$$\int_{-2}^{0} (2x^3-8x)dx + \int_{0}^{2} (8x-2x^3)dx = \left[\frac{2x^4}{4}-\frac{8x^2}{2}\right]_{-2}^{0} + \left[4x^2-\frac{2x^4}{4}\right]_{0}^{2}$$
$$= \big(0-(8-16)\big)+(16-8) = 16.$$

Área = 16 u²

EXTRAORDINARIA. Ejercicio A3:

En un instituto, el 90 % del alumnado ha nacido en la ciudad en la que está localizado dicho centro. El 42 % del alumnado son chicos y el 54 % son chicas nacidas en la ciudad en la que se ubica el instituto.

a) Elegida una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no sea nacida en la ciudad donde se ubica el instituto?
b) ¿Y la probabilidad de que sea chica y no haya nacido en la ciudad donde se ubica el instituto?
c) Se ha elegido una persona al azar entre el alumnado y ha resultado ser nacidad en la ciudad donde se ubica el instituto. ¿Cuál es la probabilidad de que sea chico?

Solución:

Llamamos C al suceso haber nacido en la ciudad en la que está localizado el instituto, y C^c al suceso contrario. Llamamos O al suceso ser chico, y A al suceso ser chica que es el suceso contrario. Llevamos los datos dados a una tabla de contingencia o tabla de doble entrada, y completamos los datos que faltan:

	A	O	
C	0.54		0.9
C^C			
		0.42	1

	A	O	
C	0.54	0.36	0.9
C^C	0.04	0.06	0.1
	0.58	0.42	1

a) Elegida una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no sea nacida en la ciudad donde se ubica el instituto?

Nos preguntan $P(C^c)$. Por la tabla vemos que $P(C^c) = 0.1$. El porcentaje de alumnado no nacido en la ciudad es del 10 %.

$$P(C^c) = 0.1$$

b) ¿Y la probabilidad de que sea chica y no haya nacido en la ciudad donde se ubica el instituto?

Nos piden $P(A \cap C^c)$. En la tabla vemos que es $P(A \cap C^c) = 0.04$. El 4 % de las chicas no han nacido en la ciudad.

$$P(A \cap C^c) = 0.04$$

c) Se ha elegido una persona al azar entre el alumnado y ha resultado ser nacidad en la ciudad donde se ubica el instituto. ¿Cuál es la probabilidad de que sea chico?

Nos piden una probabilidad condicionada: $P(O / C)$.

Sabemos que $P(O \cap C) = P(C \cap O) = P(C) \cdot P(O / C) = 0.9 \cdot P(O / C) = 0.36$.

Luego $P(O / C) = P(C \cap O)/P(C) = 0.36/0.9 = 2/5 = 0.04$. La probabilidad de que sea chico es 0.04, es de un 4 %.

$$P(O / C) = 0.04$$

EXTRAORDINARIA. Ejercicio A4:

Las notas obtenidas por los estudiantes de un determinado grupo en una asignatura siguen una distribución normal de media 6.2 puntos y desviación típica 2 puntos. Se elige un estudiante al azar. Calcula:

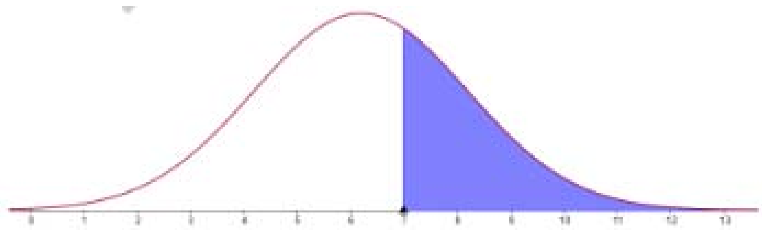
a) La probabilidad de que su nota sea superior a 7.
b) La probabilidad de que haya obtenido una nota comprendida entre 5 y 8 puntos.
c) Si el 25 % del alumnado con mejor nota, consiguió la calificación de sobresaliente, ¿cuál es la nota mínima para obtener dicha calificación?

Solución:

Nos dicen que las notas siguen una distribución normal de media 6.2 y desviación típica 2.

Tipificamos la variable normal: Z: $\frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-6.2}{2}$

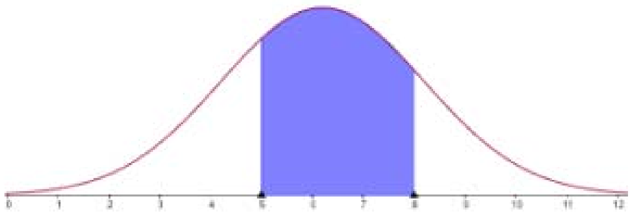
a) $P1 = P(X > 7) = P\left(Z > \frac{7-6.2}{2}\right) = P(Z > 0.4) = 1 - P(Z \leq 0.4) = 1 - 0.6554 = 0.3446$



La probabilidad de que su nota sea superior a 7 es de **0.3446**.

b) $P2 = P(5 \leq X \leq 8) = P\left(\frac{5-6.2}{2} \leq Z \leq \frac{8-6.2}{2}\right) = P(-0.6 \leq Z \leq 0.9) = P(Z \leq 0.9) - \left(1 - P(Z \leq 0.6)\right) = 0.8159 - (1 - 0.7257) = 0.5416.$

La probabilidad de que haya obtenido una nota entre 5 y 8 puntos es de **0.5416**.



c) Buscamos el punto a, que nos lo indique: $P(X > a) = 0.25$.

Tipificamos:

$$P3 = P(X > a) = P\left(Z > \frac{a-6.2}{2}\right) = 0.24 \rightarrow \frac{a-6.2}{2} = 0.675 \rightarrow a = 7.55$$

La nota mínima para tener un sobresaliente es de **7.55**.

EXTRAORDINARIA. Ejercicio B1:

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) Calcular la inversa de la matriz $(A \cdot A^t)$
b) ¿Admite inversa la matriz $(A^t \cdot A)$?
c) Calcular, cuando sea posible: $A \cdot B$ y $A^t \cdot B$

Solución:

a) Calculamos en primer lugar $(A \cdot A^t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 14 \end{pmatrix}$

La matriz tendrá inversa si su determinante es distinto de cero:

$|A \cdot A^t| = \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 14 \end{vmatrix} = 70 - 64 = 6 \neq 0$. Si tiene matriz inversa:

$$(A \cdot A^t)^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 14 & -8 \\ -8 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

$$(A \cdot A^t)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

b) Calculamos $(A^t \cdot A)$.

$(A^t \cdot A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 13 \end{pmatrix}$.

Calculamos su determinante:

$$|A^t \cdot A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 13 \end{vmatrix} = 0.$$

Luego no existe su matriz inversa.

No existe la matriz inversa de $(A^t \cdot A)$.

c) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ no se puede calcular pues B debería tener 3 filas o A, 2 columnas.

$$A^t \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$A \cdot B$ no se puede calcular y $A^t \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

EXTRAORDINARIA. Ejercicio B2:

a) Determina los intervalos de crecimieto y decrecimiento, y los máximos y mínimos relativos de la función $y = 3 - x^2$.

b) Representa graficamente la función dada por: $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & si \quad -2 \leq x < 0 \\ 4 - x & si \quad 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$

c) Hallar el área de la región limitada por la gráfica de $f(x)$ y el eje de abscisas.

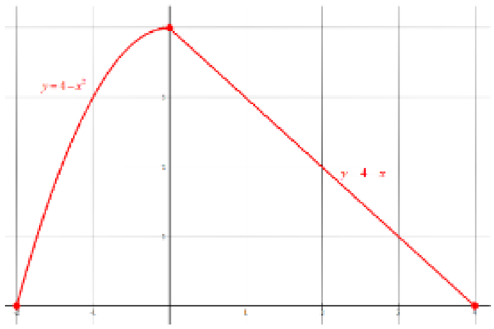
Solución:

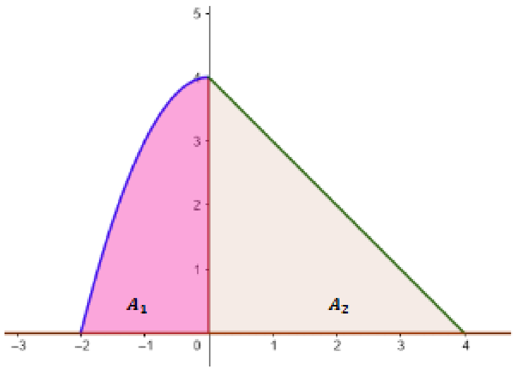
a) Para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento calculamos la derivada primera:

$y' = -2x$. La derivada primera es positiva si x es negativo, y negativa si x es positivo, por lo que los intervalos de crecimiento y decrecimiento son: La función es creciente en $(-\infty, 0)$ y es decreciente en $(0, +\infty)$. Para $x = 0$ la función pasa de ser creciente a ser decreciente, luego en ese punto se alcanza un máximo relativo: (0, 3). Como la función es una parábola, y ese máximo es el vértice, es también un máximo absoluto.

En $(-\infty, 0)$ la función es creciente y en $(0, +\infty)$ es decreciente, En (0, 3) alcanza un máximo relativo.

b) Es una función a trozos. La primera rama es una parábola de vértice, que es un máximo, (0, 4). La segunda rama es una recta de ordenada en el origen (0, 4) y pendiente –1.





c) Calculamos el área en cada uno de los intervalos de definición de la función:

$$Área = \int_{-2}^{0} (4 - x^2)dx + \int_{0}^{4} (4 - x)dx = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{0} + \left[4x - \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{4}$$
$$= \left(0 - \left(-8 - \frac{-8}{3}\right)\right) + \left(\left(16 - \frac{16}{2}\right) - 0\right) = 8 - \frac{8}{3} + 8 = \frac{40}{3}$$

$$Área = \frac{40}{3} u^2 = 13.33\ u^2$$

EXTRAORDINARIA. Ejercicio B3:

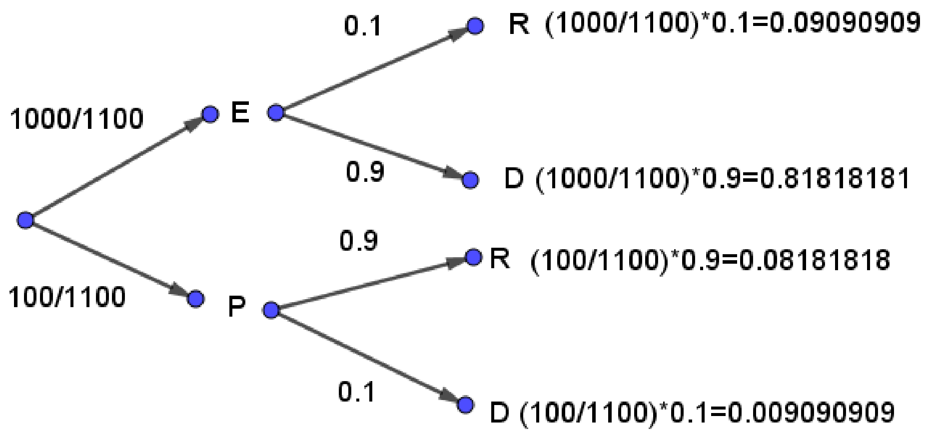
En un centro de enseñanza de Estados Unidos hay 1000 estudiantes y 100 profesores. El 10 % de los profesores son demócratas y el resto republicanos. Entre los estudiantes las proporciones son las contrarias, es decir, un 10 % de ellos son republicanos y el resto son demócratas.

a. Si se elige una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea republicana?
b. Se ha elegido al azar una persona de dicho centro y ha resultado ser republicana. ¿Cuál es la probabilidad de que se trate de un estudiante?

Solución:

Llamamos E al suceso ser estudiante y P al suceso se profesor, D al suceso ser demócrata y R al suceso ser republicano. Podemos resolver el problema haciendo un diagrama de árbol.

Hacemos el diagrama de árbol:



a) Siguiendo el árbol tenemos que:

$P(R) = P(E) \cdot P(R/E) + P(P) \cdot P(R/P) = P(E \cap R) + P(P \cap R)$ = (1000/1100) · 0.1 + (100/1100) · 0.9 = 0.090909090 + 0.081818181 = 0.17272727.

La probabilidad de que una persona elegida al azar sea republicana es de **0.17272727**.

b) Sabemos que $P(E / R) = P(E \cap R)/P(R)$ = (1000/1100) · 0.1 / 0.17272727 = 0.52631579.

Se ha elegido al azar una persona de dicho centro y ha resultado ser republicana. La probabilidad de que se trate de un estudiante es del 0.52631579.

EXTRAORDINARIA. Ejercicio B4:

El tiempo que necesitan los alumnos de un grupo para finaliza el examen de una determinada asignatura se distribuye normalmente, con una media de 60 minutos y una desviación típica de 10 minutos.

a) Si se dan 75 minutos para realizar el examen, ¿qué proporción de alumnos conseguirá finalizarlo?
b) Si se dan 80 minutos para realizar el examen, ¿qué proporción de alumnos no conseguirá finalizarlo?
c) ¿Qué tiempo hay que dar para la realización de dicho examen si se quiere que el 96 % de los alumnos consiga terminarlo?

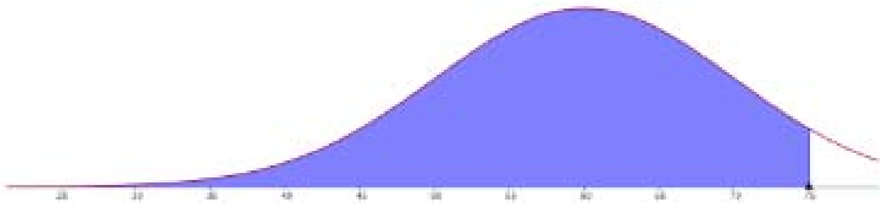
Solución:

Sabemos que el tiempo para finalizar un examen sigue una distribución normal de media 60 y desviación típica 10.

Tipificamos la variable normal: Z: $\frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-60}{10}$

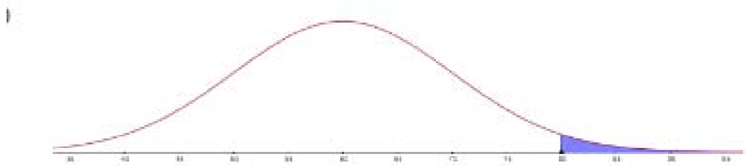
a) $P(X \leq 75) = P\left(Z \leq \frac{75-60}{10}\right) = P(Z \leq 1.5) = 0.9332$

Si se dan 75 minutos para realizar el examen, el **93.32 %** de los alumnos conseguirá finalizarlo



b) $P(X \geq 80) = P\left(Z \geq \frac{80-60}{10}\right) = P(Z \geq 2) = 1 - P(Z < 2) = 1 - 0.9772 = 0.0228.$

Si se dan 80 minutos para realizar el examen, la proporción de alumnos que no conseguirá finalizarlo es del **2.28 %.**



c) $P(X \leq a) = 0.96 = P\left(Z \leq \frac{a-60}{10}\right) \rightarrow \frac{a-60}{10} = 1.75 \rightarrow a = 60 + 17.5 = 77.5.$

Si se dejan **77.5 minutos** para la realización de dicho examen el 96 % de los alumnos conseguirá terminarlo.