# Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

# Selectividad 2020

# Comunidad autónoma de

# NAVARRA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Álvaro Garmendia Antolín

Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad
CURSO: 2019-2020
ASIGNATURA: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**

upna
Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

**Elija tres de los seis ejercicios siguientes**

## EJERCICIO 1:

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -3 & 1 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, responda a las siguientes cuestiones:

i) Determine el valor de $m$ para que **AB** = **BA**. (3.5 puntos)

ii) Calcule $C\,B^{-1}$ y $D\,C^{t}$. (3.5 puntos)

iii) ¿Qué dimensión debe tener una matriz **N** para que pueda calcularse el producto **DNC** ? ¿Y para que $NBD^t$ sea una matriz cuadrada? Razone las respuestas. (3 puntos)

## EJERCICIO 2:

i) Calcule el valor de los parámetros de la función $f(x) = -x^3 + ax^2 + bx + c$, sabiendo que tiene un extremo relativo en el punto $(-1{,}0)$ y un punto de inflexión en el punto $x = 1/3$. (5 puntos)

ii) Calcule las asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{3x^2+1}{x-2}$ (5 puntos)

## EJERCICIO 3:

Una empresa tecnológica clasifica a sus 40 empleados en tres secciones: Portátiles (16 empleados), Telefonía (20 empleados) y Sonido (4 empleados). El 25% de los trabajadores de la sección Portátiles, el 40% de Telefonía y 3 trabajadores de Sonido tienen titulación C1 en inglés. Se selecciona al azar un empleado de la empresa.

i) Calcule la probabilidad de que no tenga titulación C1 en inglés y trabaje en la sección de Sonido. (3 puntos)

ii) Calcule la probabilidad de que trabaje en la sección de Telefonía, sabiendo que tiene titulación C1 en inglés. (3.5 puntos)

iii) Consideremos los sucesos A "el empleado trabaja en la sección Portátiles" y el suceso B "el empleado tiene titulación C1 en inglés". Compruebe si los sucesos A y B son o no independientes. (3.5 puntos)

## EJERCICIO 4:

Una empresa fabrica dos tipos de biocombustibles a partir de aceites vegetales (T1 y T2) y vende cada tonelada de biocombustible a un precio de 2000 euros y 1800 euros, respectivamente. Cada tonelada de biocombustible T1 requiere 3 horas de proceso en la línea de producción y 2 unidades de materia prima. Cada tonelada de biocombustible T2 requiere 1 hora de proceso en la línea de producción y 4 unidades de materia prima. Cada semana la empresa dispone de 195 unidades de materia prima y de 90 horas de tiempo de proceso en la línea de producción. Determine cuántas toneladas de cada tipo de biocombustible se deberá fabricar semanalmente para maximizar el precio total de venta, sabiendo que además se desea fabricar un total de al menos 40 toneladas de biocombustible.

i) Plantee el problema. (4 puntos)

ii) Resuélvalo gráficamente. (4 puntos)

iii) Analice gráficamente qué ocurriría si se considerara un objetivo de tipo ecológico, y se deseara minimizar el nivel de contaminación asociado a este proceso de producción, sabiendo que fabricar una tonelada de biocombustible T1 produce 5 unidades de contaminación y fabricar una tonelada de biocombustible T2 produce 10 unidades de contaminación. (2 puntos)

## EJERCICIO 5:

Sea la función $y = x^3 - 3x^2$.

i) Calcule los puntos de corte con los ejes. (1 punto)

ii) Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento. Calcule los máximos y mínimos. (3 puntos)

iii) Dibuje el recinto limitado por la función y el eje OX. (2 puntos)

iv) Calcule el área de dicho recinto. (4 puntos)

## EJERCICIO 6:

El tiempo que la población de jóvenes de una región dedica mensualmente a hacer deporte sigue una distribución normal con varianza de 16 horas$^2$. El tiempo medio obtenido a partir de una muestra aleatoria de 64 jóvenes de dicha región es de 25.8 horas.

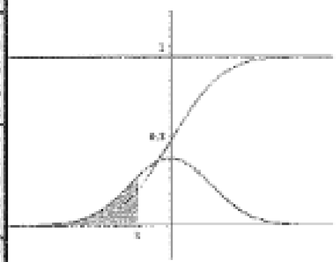
i) Calcule un intervalo de confianza para la media poblacional, con un nivel de confianza del 97%. (5 puntos)

ii) Con los datos de esa muestra se ha calculado el siguiente intervalo de confianza para el tiempo medio que los jóvenes de dicha región dedican mensualmente a hacer deporte: [24.9775,26.6225]. Determine el nivel de confianza de este intervalo, justificando su respuesta. (5 puntos)

(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

## Tabla de la distribución normal estándar Z ~ N(0,1)

$$P(Z<k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{k} e^{-t^2/2}\,dt$$



| k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -3,5 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 |
| -3,4 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0002 |
| -3,3 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0003 |
| -3,2 | 0,0007 | 0,0007 | 0,0006 | 0,0006 | 0,0006 | 0,0006 | 0,0006 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0005 |
| -3,1 | 0,0010 | 0,0009 | 0,0009 | 0,0009 | 0,0008 | 0,0008 | 0,0008 | 0,0008 | 0,0007 | 0,0007 |
| -3,0 | 0,0013 | 0,0013 | 0,0013 | 0,0012 | 0,0012 | 0,0011 | 0,0011 | 0,0011 | 0,0010 | 0,0010 |
| -2,9 | 0,0019 | 0,0018 | 0,0018 | 0,0017 | 0,0016 | 0,0016 | 0,0015 | 0,0015 | 0,0014 | 0,0014 |
| -2,8 | 0,0026 | 0,0025 | 0,0024 | 0,0023 | 0,0023 | 0,0022 | 0,0021 | 0,0021 | 0,0020 | 0,0019 |
| -2,7 | 0,0035 | 0,0034 | 0,0033 | 0,0032 | 0,0031 | 0,0030 | 0,0029 | 0,0028 | 0,0027 | 0,0026 |
| -2,6 | 0,0047 | 0,0045 | 0,0044 | 0,0043 | 0,0041 | 0,0040 | 0,0039 | 0,0038 | 0,0037 | 0,0036 |
| -2,5 | 0,0062 | 0,0060 | 0,0059 | 0,0057 | 0,0055 | 0,0054 | 0,0052 | 0,0051 | 0,0049 | 0,0048 |
| -2,4 | 0,0082 | 0,0080 | 0,0078 | 0,0075 | 0,0073 | 0,0071 | 0,0069 | 0,0068 | 0,0066 | 0,0064 |
| -2,3 | 0,0107 | 0,0104 | 0,0102 | 0,0099 | 0,0096 | 0,0094 | 0,0091 | 0,0089 | 0,0087 | 0,0084 |
| -2,2 | 0,0139 | 0,0136 | 0,0132 | 0,0129 | 0,0125 | 0,0122 | 0,0119 | 0,0116 | 0,0113 | 0,0110 |
| -2,1 | 0,0179 | 0,0174 | 0,0170 | 0,0166 | 0,0162 | 0,0158 | 0,0154 | 0,0150 | 0,0146 | 0,0143 |
| -2,0 | 0,0228 | 0,0222 | 0,0217 | 0,0212 | 0,0207 | 0,0202 | 0,0197 | 0,0192 | 0,0188 | 0,0183 |
| -1,9 | 0,0287 | 0,0281 | 0,0274 | 0,0268 | 0,0262 | 0,0256 | 0,0250 | 0,0244 | 0,0239 | 0,0233 |
| -1,8 | 0,0359 | 0,0351 | 0,0344 | 0,0336 | 0,0329 | 0,0322 | 0,0314 | 0,0307 | 0,0301 | 0,0294 |
| -1,7 | 0,0446 | 0,0436 | 0,0427 | 0,0418 | 0,0409 | 0,0401 | 0,0392 | 0,0384 | 0,0375 | 0,0367 |
| -1,6 | 0,0548 | 0,0537 | 0,0526 | 0,0516 | 0,0505 | 0,0495 | 0,0485 | 0,0475 | 0,0465 | 0,0455 |
| -1,5 | 0,0668 | 0,0655 | 0,0643 | 0,0630 | 0,0618 | 0,0606 | 0,0594 | 0,0582 | 0,0571 | 0,0559 |
| -1,4 | 0,0808 | 0,0793 | 0,0778 | 0,0764 | 0,0749 | 0,0735 | 0,0721 | 0,0708 | 0,0694 | 0,0681 |
| -1,3 | 0,0968 | 0,0951 | 0,0934 | 0,0918 | 0,0901 | 0,0885 | 0,0869 | 0,0853 | 0,0838 | 0,0823 |
| -1,2 | 0,1151 | 0,1131 | 0,1112 | 0,1093 | 0,1075 | 0,1056 | 0,1038 | 0,1020 | 0,1003 | 0,0985 |
| -1,1 | 0,1357 | 0,1335 | 0,1314 | 0,1292 | 0,1271 | 0,1251 | 0,1230 | 0,1210 | 0,1190 | 0,1170 |
| -1,0 | 0,1587 | 0,1562 | 0,1539 | 0,1515 | 0,1492 | 0,1469 | 0,1446 | 0,1423 | 0,1401 | 0,1379 |
| -0,9 | 0,1841 | 0,1814 | 0,1788 | 0,1762 | 0,1736 | 0,1711 | 0,1685 | 0,1660 | 0,1635 | 0,1611 |
| -0,8 | 0,2119 | 0,2090 | 0,2061 | 0,2033 | 0,2005 | 0,1977 | 0,1949 | 0,1922 | 0,1894 | 0,1867 |
| -0,7 | 0,2420 | 0,2389 | 0,2358 | 0,2327 | 0,2296 | 0,2266 | 0,2236 | 0,2206 | 0,2177 | 0,2148 |
| -0,6 | 0,2743 | 0,2709 | 0,2676 | 0,2643 | 0,2611 | 0,2578 | 0,2546 | 0,2514 | 0,2483 | 0,2451 |
| -0,5 | 0,3085 | 0,3050 | 0,3015 | 0,2981 | 0,2946 | 0,2912 | 0,2877 | 0,2843 | 0,2810 | 0,2776 |
| -0,4 | 0,3446 | 0,3409 | 0,3372 | 0,3336 | 0,3300 | 0,3264 | 0,3228 | 0,3192 | 0,3156 | 0,3121 |
| -0,3 | 0,3821 | 0,3783 | 0,3745 | 0,3707 | 0,3669 | 0,3632 | 0,3594 | 0,3557 | 0,3520 | 0,3483 |
| -0,2 | 0,4207 | 0,4168 | 0,4129 | 0,4090 | 0,4052 | 0,4013 | 0,3974 | 0,3936 | 0,3897 | 0,3859 |
| -0,1 | 0,4602 | 0,4562 | 0,4522 | 0,4483 | 0,4443 | 0,4404 | 0,4364 | 0,4325 | 0,4286 | 0,4247 |
| -0,0 | 0,5000 | 0,4960 | 0,4920 | 0,4880 | 0,4840 | 0,4801 | 0,4761 | 0,4721 | 0,4681 | 0,4641 |

| k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0,5000 | 0,5040 | 0,5080 | 0,5120 | 0,5160 | 0,5199 | 0,5239 | 0,5279 | 0,5319 | 0,5359 |
| 0,1 | 0,5398 | 0,5438 | 0,5478 | 0,5517 | 0,5557 | 0,5596 | 0,5636 | 0,5675 | 0,5714 | 0,5753 |
| 0,2 | 0,5793 | 0,5832 | 0,5871 | 0,5910 | 0,5948 | 0,5987 | 0,6026 | 0,6064 | 0,6103 | 0,6141 |
| 0,3 | 0,6179 | 0,6217 | 0,6255 | 0,6293 | 0,6331 | 0,6368 | 0,6406 | 0,6443 | 0,6480 | 0,6517 |
| 0,4 | 0,6554 | 0,6591 | 0,6628 | 0,6664 | 0,6700 | 0,6736 | 0,6772 | 0,6808 | 0,6844 | 0,6879 |
| 0,5 | 0,6915 | 0,6950 | 0,6985 | 0,7019 | 0,7054 | 0,7088 | 0,7123 | 0,7157 | 0,7190 | 0,7224 |
| 0,6 | 0,7257 | 0,7291 | 0,7324 | 0,7357 | 0,7389 | 0,7422 | 0,7454 | 0,7486 | 0,7517 | 0,7549 |
| 0,7 | 0,7580 | 0,7611 | 0,7642 | 0,7673 | 0,7704 | 0,7734 | 0,7764 | 0,7794 | 0,7823 | 0,7852 |
| 0,8 | 0,7881 | 0,7910 | 0,7939 | 0,7967 | 0,7995 | 0,8023 | 0,8051 | 0,8078 | 0,8106 | 0,8133 |
| 0,9 | 0,8159 | 0,8186 | 0,8212 | 0,8238 | 0,8264 | 0,8289 | 0,8315 | 0,8340 | 0,8365 | 0,8389 |
| 1,0 | 0,8413 | 0,8438 | 0,8461 | 0,8485 | 0,8508 | 0,8531 | 0,8554 | 0,8577 | 0,8599 | 0,8621 |
| 1,1 | 0,8643 | 0,8665 | 0,8686 | 0,8708 | 0,8729 | 0,8749 | 0,8770 | 0,8790 | 0,8810 | 0,8830 |
| 1,2 | 0,8849 | 0,8869 | 0,8888 | 0,8907 | 0,8925 | 0,8944 | 0,8962 | 0,8980 | 0,8997 | 0,9015 |
| 1,3 | 0,9032 | 0,9049 | 0,9066 | 0,9082 | 0,9099 | 0,9115 | 0,9131 | 0,9147 | 0,9162 | 0,9177 |
| 1,4 | 0,9192 | 0,9207 | 0,9222 | 0,9236 | 0,9251 | 0,9265 | 0,9279 | 0,9292 | 0,9306 | 0,9319 |
| 1,5 | 0,9332 | 0,9345 | 0,9357 | 0,9370 | 0,9382 | 0,9394 | 0,9406 | 0,9418 | 0,9429 | 0,9441 |
| 1,6 | 0,9452 | 0,9463 | 0,9474 | 0,9484 | 0,9495 | 0,9505 | 0,9515 | 0,9525 | 0,9535 | 0,9545 |
| 1,7 | 0,9554 | 0,9564 | 0,9573 | 0,9582 | 0,9591 | 0,9599 | 0,9608 | 0,9616 | 0,9625 | 0,9633 |
| 1,8 | 0,9641 | 0,9649 | 0,9656 | 0,9664 | 0,9671 | 0,9678 | 0,9686 | 0,9693 | 0,9699 | 0,9706 |
| 1,9 | 0,9713 | 0,9719 | 0,9726 | 0,9732 | 0,9738 | 0,9744 | 0,9750 | 0,9756 | 0,9761 | 0,9767 |
| 2,0 | 0,9772 | 0,9778 | 0,9783 | 0,9788 | 0,9793 | 0,9798 | 0,9803 | 0,9808 | 0,9812 | 0,9817 |
| 2,1 | 0,9821 | 0,9826 | 0,9830 | 0,9834 | 0,9838 | 0,9842 | 0,9846 | 0,9850 | 0,9854 | 0,9857 |
| 2,2 | 0,9861 | 0,9864 | 0,9868 | 0,9871 | 0,9875 | 0,9878 | 0,9881 | 0,9884 | 0,9887 | 0,9890 |
| 2,3 | 0,9893 | 0,9896 | 0,9898 | 0,9901 | 0,9904 | 0,9906 | 0,9909 | 0,9911 | 0,9913 | 0,9916 |
| 2,4 | 0,9918 | 0,9920 | 0,9922 | 0,9925 | 0,9927 | 0,9929 | 0,9931 | 0,9932 | 0,9934 | 0,9936 |
| 2,5 | 0,9938 | 0,9940 | 0,9941 | 0,9943 | 0,9945 | 0,9946 | 0,9948 | 0,9949 | 0,9951 | 0,9952 |
| 2,6 | 0,9953 | 0,9955 | 0,9956 | 0,9957 | 0,9959 | 0,9960 | 0,9961 | 0,9962 | 0,9963 | 0,9964 |
| 2,7 | 0,9965 | 0,9966 | 0,9967 | 0,9968 | 0,9969 | 0,9970 | 0,9971 | 0,9972 | 0,9973 | 0,9974 |
| 2,8 | 0,9974 | 0,9975 | 0,9976 | 0,9977 | 0,9977 | 0,9978 | 0,9979 | 0,9979 | 0,9980 | 0,9981 |
| 2,9 | 0,9981 | 0,9982 | 0,9982 | 0,9983 | 0,9984 | 0,9984 | 0,9985 | 0,9985 | 0,9986 | 0,9986 |
| 3,0 | 0,9987 | 0,9987 | 0,9987 | 0,9988 | 0,9988 | 0,9989 | 0,9989 | 0,9989 | 0,9990 | 0,9990 |
| 3,1 | 0,9990 | 0,9991 | 0,9991 | 0,9991 | 0,9992 | 0,9992 | 0,9992 | 0,9992 | 0,9993 | 0,9993 |
| 3,2 | 0,9993 | 0,9993 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9995 | 0,9995 | 0,9995 |
| 3,3 | 0,9995 | 0,9995 | 0,9995 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9997 |
| 3,4 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9998 |
| 3,5 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 |

***EJERCICIO 1:***

*Dadas las matrices* $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ m & -5\end{pmatrix}$, *y* $B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $C=(-3,1)$ *y* $D=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, *responda a las siguientes cuestiones:*

i. *Determine el valor de m para que $AB = BA$.*
ii. *Calcule $CB^{-1}$ y $DC^t$.*
iii. *¿Qué dimensión debe tener la matriz $N$ para que pueda calcularse el producto $DNC$? ¿Y para que $NBD^t$ sea una matriz cuadrada? Razone las respuestas*

***Solución:***

i. $A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ m & -5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -m-5 & -10\end{pmatrix}$;

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ m & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1+2m & -10\end{pmatrix}$$

Todos los términos son ya iguales salvo: $-m-5=1+2m\to m=-2$

$$\boldsymbol{m=-2.}$$

ii. $CB^{-1}$: Calculamos la matriz inversa de $B$. $B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, su determinante vale -2,

$B^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1/2 & 1/2\end{pmatrix}$, $C\cdot B^{-1}=(-3,1)\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1/2 & 1/2\end{pmatrix}=(7/2,1/2)$,

$D\cdot C^t=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\ -3\\ 5\end{pmatrix}$.

$$C\cdot B^{-1}=(7/2,1/2);\ D\cdot C^t=\begin{pmatrix}7\\ -3\\ 5\end{pmatrix}.$$

iii. $DNC$: Las dimensiones son (*3 x 2) x (a x b) x (1 x 2).* Para poder efectuar el producto a debe ser igual a 2, y b a 1. Luego la matriz $N$ debe tener 2 filas y 1 columna.

$NBD^t$: Para que sea una matriz cuadrada: ($a$ x $b$) x (2 x 2) x (2 x 3). La transpuesta de $D$ tiene de dimensión 2 x 3. Para poder efectuar el producto, $b$ debe vale 2. Y para que el resultado sea una matriz cuadrada $a$ = 3.

Para poder efectuar $DNC$ la matriz $N$ debe tener 2 filas y una columna: 3 x 1.

Para que $NBD^t$ sea una matriz cuadrada la matriz $N$ debe tener 3 filas y 2 columnas: 3 x 2.


Autor: Álvaro Garmendia Antolín
www.apuntesmareaverde.org.es

***EJERCICIO 2:***

**i.** Calcule el valor de los parámetros de la función $f(x) = -x^3 + ax^2 + bx + c$ sabiendo que tiene un extremo relativo en el punto (–1, 0) y un punto de inflexión en el punto $x$ = 1/3.

**ii.** Calcule las asíntotas de la función $f(x) = \frac{3x^2+1}{x-2}$

***Solución:***

i. Para imponer que la función tenga un extremo relativo en (–1, 0), calculamos la derivada primera y la igualamos a cero.

$f'(x) = -3x^2 + 2ax + b \quad \to f'(-1) = -3(-1)^2 + 2a(-1) + b = -3 - 2a + b = 0 \to b = 2a + 3$

Para que tenga un punto de inflexión en $x$ = 1/3, imponemos que se anule la derivada segunda en ese punto:

$f''(x) = -6x + 2a \quad \to f''\left(\frac{1}{3}\right) = -6\left(\frac{1}{3}\right) + 2a = 0 = -2 + 2a \to a = 1.$

Y $b = 2a + 3 = 2 + 3 = 5$

$\boldsymbol{a = 1; b = 5}$.

ii. Calculamos las asíntotas verticales observando dónde se anula el denominador:

Hay una asíntota vertical para $x$ = 2.

Estudiamos el comportamiento en el infinito:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+1}{x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{x} = \lim_{x\to\infty} 3x$$

Cuando $x$ tiende a $+\infty$ infinito, $f(x)$ tiende a $+\infty$, y cuando tiende a $-\infty$, tiende a $-\infty$. Tiene una asíntota oblicua para paralela a la recta $y = 3x$. Vamos a determinar la ordenada en el origen:

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - 3x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+1}{x-2} - 3x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+1}{x-2} - \frac{3x(x-2)}{x-2}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{(3x^2+1)-(3x^2-6x)}{x-2} = \lim_{x\to\infty}\frac{6x+1}{x-2} = 6$$

Por tanto, la asíntota oblicua es: $y = 3x + 6$.

Asíntota vertical: $\boldsymbol{x = 2}$. Asíntota oblicua: $\boldsymbol{y = 3x + 6}$.

***EJERCICIO 3:***

Una empresa tecnológica clasifica a sus 40 empleados en tres secciones: Portátiles (16 empleados), Telefonía (20 empleados) y Sonido (4 empleados). El 25 % de los trabajadores de la sección Portátiles, el 40 % de Telefonía y 3 trabajadores de Sonido tienen titulación C1 en inglés. Se selecciona al azar un empleado de la empresa.

i. Calcule la probabilidad de que no tenga titulación C1 en inglés y trabaje en Sonido.

ii. Calcule la probabilidad de que trabaje en la sección de Telefonía, sabiendo que tiene titulación C1 en inglés.

iii. Consideremos los sucesos $A$ "el empleado trabaja en la sección de Portátiles" y el suceso $B$ "el empleado tiene titulación C1 en inglés". Comprueba si los sucesos $A$ y $B$ son o no independientes.

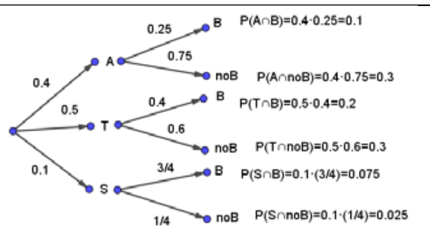
***Solución:***

Llamamos $A$ al suceso "trabajar en Portátiles", $T$ al suceso trabajar en Telefonía y $S$ al suceso trabajar en Sonido. Llamamos $B$ a tener la titulación C1 en inglés y $noB$, a no tenerla.

Según el enunciado sabemos que: $P(A) = 16/40 = 2/5 = 0.4$; $P(T) = 20/40 = 1/2 = 0.5$; $P(S) = 4/40 = 1/10 = 0.1$. $P(B/A) = 0.25$; $P(B/T) = 0.4$; $P(B/S) = 3/4 = 0.75$.

Podemos llevar los datos a un diagrama en árbol, o a una tabla de contingencia.

Sabemos que $P(A \cap B) = P(B/A) \cdot P(A) = 0.25 \cdot 0.4 = 0.1$; $P(T \cap B) = P(B/T) \cdot P(T) = 0.4 \cdot 0.5 = 0.2$; $P(S \cap B) = P(B/S) \cdot P(S) = 0.75 \cdot 0.1 = 0.075$.




| | $A$ | $T$ | $S$ | |
|---|---|---|---|---|
| $B$ | 0.25 · 0.4 = 0.1 | 0.4 · 0.5 = 0.2 | 0.75 · 0.1 = 0.075 | 0.375 |
| $noB$ | 0.3 | 0.3 | 0.025 | 0.625 |
| | 0.4 | 0.5 | 0.1 | 1 |

Nos piden:

i. Nos piden: $P(noB \cap S) = 0.025$, según el árbol y según la tabla. Lo hemos obtenido restando a 0.1, 0.075, es decir: $P(noB \cap S) = P(S) - P(S \cap B) = 0.1 - 0.075 = 0.025$.

O bien multiplicando: $0.1 \cdot (1(4) = 0.075 = P(S) \cdot P(noB / S)$

$$P(noB \cap S) = 0.025$$

ii. Nos piden: $P(T / B) = P(B) \cdot P(T \cap B) = 0.325 \cdot 0.2 = 0.650$

$P(B) = P(A \cap B) + P(T \cap B) + P(S \cap B) = 0.1 + 0.2 + 0.075 = 0.375$.

$P(T / B) = P(T \cap B) / P(B) = 0.2 / 0.375 = 0.5333$.

$$P(T / B) = 0.5333$$

iii. Podemos comprobarlo de varias formas: Viendo si a) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$; b) $P(A/B) = P(A)$; c) $P(B/A) = P(B)$.

a) $P(A \cap B) = 0.1$; $P(A) = 0.4$; $P(B) = 0.375$; $P(A) \cdot P(B) = 0.4 \cdot 0.375 = 0.15 \neq 0.1$.

Son sucesos dependientes.

### *EJERCICIO 4:*

Una empresa fabrica dos tipos de biocombustibles a partir de aceites vegetales (T1 y T2) y vende cada tonelada de biocombustible a un precio de 2000 euros y 1800 euros respectivamente. Cada tonelada de biocombustible T1 requiere 3 horas de proceso en la línea de producción y 2 unidades de materia prima. Cada tonelada de biocombustible T2 requiere 1 hora de proceso en la línea de producción y 4 unidades de materia prima. Cada semana la empresa dispone de 195 unidades de materia prima y de 90 horas de tiempo de proceso en la línea de producción. Determine cuántas toneladas de cada tipo de biocombustible se deberá fabricar semanalmente para maximizar el precio total de venta, sabiendo que además se desea fabricar un total de al menos 40 toneladas de biocombustible.

- i) Plantee el problema.
- ii) Resuélvalo gráficamente.
- iii) Analice que ocurriría si se considerara un objetivo de tipo ecológico, y se deseara minimizar el nivel de contaminación asociado a este proceso de producción, sabiendo que fabricar una tonelada de biocombustible T1 produce 5 unidades de contaminación y fabricar una tonelada del biocombustible T2 produce 10 unidades de contaminación.

### *Solución:*

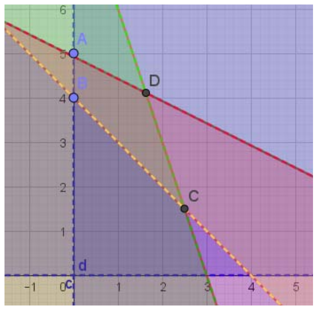
i) Llamamos $x$ a las toneladas de biocombustible T1, e $y$ a las de T2.

- La función beneficio es: $B(x, y) = 2000x + 1800y$.

- Las restricciones son:

$$\begin{cases} 3x + y \leq 90 \\ 2x + 4y \leq 195 \\ x + y \geq 40 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$$

- Representamos la región factible:




Hemos representado los semiplanos dados por las restricciones.

ii) La región factible es el cuadrilátero de vértices:

$A$(0, 197/4) = (0, 49.25) que es la intersección de la recta $2x + 4y = 197$, con $x = 0$.

$B$(0, 40) que es la intersección de la recta $x + y = 40$, con $x = 0$.

$C$(25, 15) que es la intersección de la recta $x + y = 40$, con $3x + y = 90$.

$D$ que es la intersección de la recta $2x + 4y = 197$, con $3x + y = 90$:

$$\begin{cases} 2x + 4y = 197 \\ 3x + y = 90 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + 4(90 - 3x) = 197 = 2x + 360 - 12x = 197 \rightarrow 10x = 360 - 197 = 163 \\ y = 90 - 3x \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 16.3 \\ y = 90 - 3(16.3) = 90 - 48.9 = 41.1 \end{cases} \rightarrow D\left(\frac{163}{10}, \frac{211}{10}\right) = D(16.3, 41.1)$$

Calculamos la función beneficio en cada vértice:

$A$: $B$(0, 4.925) = 1800(49.25) = 87 750 euros.

$B$: $B$(0, 40) = 1800(40) = 72 000 euros.

$C$: $B$(25, 15) = 2000(25) + 1800(15) = 50000 + 27000 = 77 000 euros.

$D$: $B(16.3, 41.1)$ = 2000(16.3) + 1800(41.1) = 106 580 euros.

El beneficio es máximo produciendo 16.3 toneladas de T1 y 41.1 toneladas de T2.

iii) Llamamos *Cont* a la función contaminación que queremos minimizar: $Cont(x, y) = 5x + 10y$.

Calculamos la contaminación para cada vértice:

$A$: *Cont* (0, 4.925) = 10(49.25) = 492.5 unidades de contaminación

$B$: *Cont* (0, 40) = 10(40) = 400 unidades de contaminación

$C$: *Cont* (25, 15) = 5(25) + 10(15) = 125 + 150 = 275 unidades de contaminación

$D$: *Cont* (16.3, 41.1) = 5(16.3) + 10(41.1) = 492.5 unidades de contaminación

La mínima contaminación se consigue produciendo 25 toneladas de T1 y 15 toneladas de T2.

***EJERCICIO 5:***

Sea la función $y = x^3 - 3x^2$

i) Calcule los puntos de corte con los ejes.
ii) Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento. Calcule los máximos y mínimos
iii) Dibuje el recinto limitado por la función y el eje $OX$.
iv) Calcule el área de dicho recinto.

***Solución:***

i) Para $x$ = 0, se anula $y$. Resolvemos la ecuación: $x^3 - 3x^2 = 0 = x^2(x-3)$. La función tiene un punto de corte doble en $x$ = 0, y también pasa por (0, 3).

Puntos de corte: (0, 0), (0, 3).

ii) Hallamos la derivada primera y los puntos dónde se anula:

$$y = x^3 - 3x^2 \to y' = 3x^2 - 6x = 0 = 3x(x-2)$$

Se anula en $x$ = 0 y en $x$ = 2. Los intervalos de crecimiento y decrecimiento son: $(-\infty, 0)$; $(0, 2)$; $(2, +\infty)$.

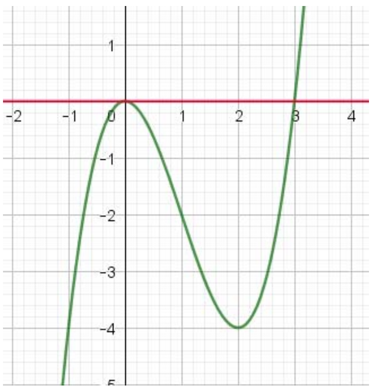
Estudiamos el signo de la derivada primera:

| $(-\infty, 0)$ | $(0, 2)$ | $(2, +\infty)$ |
|---|---|---|
| + | − | + |
| ↗ | ↘ | ↗ |

La función es creciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, y decreciente en (0, 2). Como para $x$ = 0, pasa de creciente a decreciente, en ese punto alcanza un máximo: (0, 0) es un máximo relativo. Como en $x$ = 2 la función pasa de decreciente a creciente, en ese punto alcanza un mínimo relativo: (2, –4).

Creciente: $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$. Decreciente: (0, 2). Máximo relativo: (0, 0). Mínimo relativo: (2, –4).

iii)




Con los datos que tenemos, dibujamos la curva, y observamos que el eje de abscisas está siempre por encima de la curva. Que el recinto limitado es el del intervalo (0, 3) donde la curva es negativa.

iv) La integral pedida es:

$$Área = \int_0^3 (0 - (x^3 - 3x^2))dx = \int_0^3 (-x^3 + 3x^2)dx = \left[\frac{-x^4}{4} + \frac{3x^3}{3}\right]_0^3 = \left(\frac{-81}{4} + 27\right) - (0)$$
$$= \frac{-81 + 108}{4} = \frac{27}{4} \cong 6.75$$

El área de la región encerrada es de **27/4 u² = 6.25 u²**

***EJERCICIO 6:***

El tiempo que la población de una región dedica mensualmente a hacer deporte sigue una distribución normal con varianza de 16 horas. El tiempo medio obtenido a partir de una muestra aleatoria de 64 jóvenes de dicha región es de 25.8 horas.

i) Calcule un intervalo de confianza para la media poblacional, con un nivel de confianza del 97 %.

ii) Con los datos de esa muestra se ha calculado el siguiente intervalo de confianza para el tiempo medio que los jóvenes de dicha región dedican mensualmente a hacer deporte: [24.9775, 26.6225]. Determine el nivel de confianza de este intervalo, justificando su respuesta.

***Solución:***

i) Como el nivel de confianza es del 97 % sabemos que $1 - \alpha = 1.97$, luego $\alpha = 1 - 0.97 = 0.03$. Por tanto:

$z_{\alpha/2} = z_{0.015} = 2.17$, ya que $1 - 0.015 = 0.9850$.

Los datos que conocemos son: $z_{\alpha/2} = 2.17$; $\bar{x} = 25.8$; $\sigma = \sqrt{16} = 4$; $n = 64$.

La fórmula que nos da el intervalo de confianza es:

$$\left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Sustituimos los datos:

$$\left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(25.8 - 2.17 \cdot \frac{4}{\sqrt{64}}, 25.8 - 2.17 \cdot \frac{4}{\sqrt{64}}\right) = \left(25.8 - \frac{2.17}{2}, 25.8 - \frac{2.17}{2}\right)$$
$$= (24.715, 25.885)$$

Intervalo de confianza para la media poblacional con un nivel de confianza del 97 % es $(24.715, 25.885)$.

ii) Nos dan el intervalo: [24.9775, 26.6225] de longitud: $E = \frac{26.6225 - 24.9775}{2} = \frac{1.6450}{2} = 0.8225$.

Sabemos que: $\sigma = \sqrt{16} = 4$; $n = 64$; $E = 0.8225$.

La fórmula que debemos usar es:

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Despejando y sustituyendo:

$$z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{E \cdot \sqrt{n}}{\sigma} = \frac{0.8225 \cdot \sqrt{64}}{\sqrt{16}} = 0.8225 \cdot 2 = 1.645$$

Buscamos en la tabla de la N(0, 1) los valores 1.64 y 1.65 obtenemos que $\frac{0.9495 - 0.9505}{2} = \frac{1.9}{2} = 0.95$

$1 - \alpha/2 = 0.95$, $\alpha/2 = 1 - 0.95 = 0.05$, $\alpha = 0.1$. Por tanto $1 - \alpha = 1 - 0.1 = 0.9$.

El nivel de confianza del intervalo es del 90 %.

Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad
CURSO: 2019-2020
ASIGNATURA: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**

upna
Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

**Elija tres de los seis ejercicios siguientes**

## EJERCICIO 1:

i) Clasifique el siguiente sistema en función del número de soluciones y resuélvalo utilizando el método de Gauss.

$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + y + z = 4 \\ 3x + 3y + z = 5 \end{cases} \qquad \text{(7 puntos)}$$

ii) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, calcule $AB$ e indique qué relación hay entre $A$ y $B$. (3 puntos)

## EJERCICIO 2:

Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2+3x+4}{x}$

i) Calcule los máximos y mínimos. (3 puntos)

ii) Calcule $\int_1^2 f(x)dx$ (4 puntos)

iii) Calcule la derivada de la función $g(x)$, siendo $g(x) = f(x) + \ln(5x-3)^2 + xe^{3x}$ (3 puntos)

## EJERCICIO 3:

El peso (en toneladas) de los contenedores que transporta una empresa de servicios de transporte marítimo puede aproximarse a una distribución normal con desviación de 3 toneladas.

i) Se realizó un estudio tomando una muestra aleatoria simple de contenedores y se calculó un intervalo de confianza al 97% para la media poblacional, con un error máximo de 0.651. Calcule el tamaño de la muestra que se tomó en ese estudio. (5 puntos)

ii) Se decide realizar otro estudio y se selecciona una muestra de contenedores, obteniéndose los siguientes pesos (en toneladas): 20.25, 17.5, 21.8, 15.7, 14.6, 17.2, 23.1, 11.7, 18.3. Construya un intervalo de confianza para el peso medio de los contenedores, con un nivel de confianza del 93%. (5 puntos)

(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

## EJERCICIO 4:

Una empresa diseña y vende dos tipos de telas (T1 y T2) con un precio de venta de 60 euros/m$^2$ y 100 euros/m$^2$, respectivamente. Para cubrir la demanda semanal debe fabricar un total de al menos 15 m$^2$ de telas. Para elaborar un m$^2$ de tela T1 se necesitan 2 horas de máquina y 6 carretes de hilo. Para elaborar un m$^2$ de tela T2 se requieren 4 horas de máquina y 3 carretes de hilo. La disponibilidad semanal de estos dos recursos es de 80 horas de máquina y 150 carretes de hilo. ¿Cuántos m$^2$ de cada tipo de tela tiene que vender la empresa si busca maximizar el beneficio semanal, sabiendo que el coste de elaborar un m$^2$ de cada tipo de tela es 15 y 10 euros, respectivamente?

i) Plantee el problema. (4 puntos)
ii) Resuélvalo gráficamente. (4 puntos)
iii) Analice gráficamente qué ocurriría si se quiere elaborar al menos el triple de m$^2$ de tela T1 que de tela T2. (2 puntos)

## EJERCICIO 5:

Considere la siguiente función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & x \le 1 \\ x^2 - 6x + 5 & 1 < x < 4 \\ 2x - 11 & x \ge 4 \end{cases}$$

i) Calcule las derivadas laterales de $f(x)$ en $x = 4$, utilizando la definición de derivada. (4 puntos)
ii) ¿La función $f(x)$ es derivable en $x = 4$? ¿Es continua en $x = 4$? Justifique la respuesta. (2 puntos)
iii) Calcule la siguiente integral: $\int \sqrt{6x - 1}\, dx$ (4 puntos)

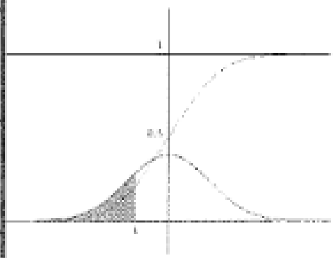
## EJERCICIO 6:

En un centro de bachillerato aprobaron la prueba de acceso a la universidad 112 estudiantes de los 140 que se presentaron. En un segundo centro aprobaron la prueba el 60% de los 110 estudiantes presentados.

i) Se selecciona un estudiante al azar. Calcule la probabilidad de que haya aprobado. (3 puntos)
ii) Se selecciona un estudiante al azar. Calcule la probabilidad de que proceda del segundo centro, sabiendo que el estudiante ha suspendido. (4 puntos)
iii) Se seleccionan tres estudiantes al azar sin reemplazamiento. Calcule la probabilidad de que pertenezcan al mismo centro. (3 puntos)

## Tabla de la distribución normal estándar Z ~ N(0,1)

$$P(Z<k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{k} e^{-t^2/2}\,dt$$



| k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -3,5 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 |
| -3,4 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0002 |
| -3,3 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0003 |
| -3,2 | 0,0007 | 0,0007 | 0,0006 | 0,0006 | 0,0006 | 0,0006 | 0,0006 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0005 |
| -3,1 | 0,0010 | 0,0009 | 0,0009 | 0,0009 | 0,0008 | 0,0008 | 0,0008 | 0,0008 | 0,0007 | 0,0007 |
| -3,0 | 0,0013 | 0,0013 | 0,0013 | 0,0012 | 0,0012 | 0,0011 | 0,0011 | 0,0011 | 0,0010 | 0,0010 |
| -2,9 | 0,0019 | 0,0018 | 0,0018 | 0,0017 | 0,0016 | 0,0016 | 0,0015 | 0,0015 | 0,0014 | 0,0014 |
| -2,8 | 0,0026 | 0,0025 | 0,0024 | 0,0023 | 0,0023 | 0,0022 | 0,0021 | 0,0021 | 0,0020 | 0,0019 |
| -2,7 | 0,0035 | 0,0034 | 0,0033 | 0,0032 | 0,0031 | 0,0030 | 0,0029 | 0,0028 | 0,0027 | 0,0026 |
| -2,6 | 0,0047 | 0,0045 | 0,0044 | 0,0043 | 0,0041 | 0,0040 | 0,0039 | 0,0038 | 0,0037 | 0,0036 |
| -2,5 | 0,0062 | 0,0060 | 0,0059 | 0,0057 | 0,0055 | 0,0054 | 0,0052 | 0,0051 | 0,0049 | 0,0048 |
| -2,4 | 0,0082 | 0,0080 | 0,0078 | 0,0075 | 0,0073 | 0,0071 | 0,0069 | 0,0068 | 0,0066 | 0,0064 |
| -2,3 | 0,0107 | 0,0104 | 0,0102 | 0,0099 | 0,0096 | 0,0094 | 0,0091 | 0,0089 | 0,0087 | 0,0084 |
| -2,2 | 0,0139 | 0,0136 | 0,0132 | 0,0129 | 0,0125 | 0,0122 | 0,0119 | 0,0116 | 0,0113 | 0,0110 |
| -2,1 | 0,0179 | 0,0174 | 0,0170 | 0,0166 | 0,0162 | 0,0158 | 0,0154 | 0,0150 | 0,0146 | 0,0143 |
| -2,0 | 0,0228 | 0,0222 | 0,0217 | 0,0212 | 0,0207 | 0,0202 | 0,0197 | 0,0192 | 0,0188 | 0,0183 |
| -1,9 | 0,0287 | 0,0281 | 0,0274 | 0,0268 | 0,0262 | 0,0256 | 0,0250 | 0,0244 | 0,0239 | 0,0233 |
| -1,8 | 0,0359 | 0,0351 | 0,0344 | 0,0336 | 0,0329 | 0,0322 | 0,0314 | 0,0307 | 0,0301 | 0,0294 |
| -1,7 | 0,0446 | 0,0436 | 0,0427 | 0,0418 | 0,0409 | 0,0401 | 0,0392 | 0,0384 | 0,0375 | 0,0367 |
| -1,6 | 0,0548 | 0,0537 | 0,0526 | 0,0516 | 0,0505 | 0,0495 | 0,0485 | 0,0475 | 0,0465 | 0,0455 |
| -1,5 | 0,0668 | 0,0655 | 0,0643 | 0,0630 | 0,0618 | 0,0606 | 0,0594 | 0,0582 | 0,0571 | 0,0559 |
| -1,4 | 0,0808 | 0,0793 | 0,0778 | 0,0764 | 0,0749 | 0,0735 | 0,0721 | 0,0708 | 0,0694 | 0,0681 |
| -1,3 | 0,0968 | 0,0951 | 0,0934 | 0,0918 | 0,0901 | 0,0885 | 0,0869 | 0,0853 | 0,0838 | 0,0823 |
| -1,2 | 0,1151 | 0,1131 | 0,1112 | 0,1093 | 0,1075 | 0,1056 | 0,1038 | 0,1020 | 0,1003 | 0,0985 |
| -1,1 | 0,1357 | 0,1335 | 0,1314 | 0,1292 | 0,1271 | 0,1251 | 0,1230 | 0,1210 | 0,1190 | 0,1170 |
| -1,0 | 0,1587 | 0,1562 | 0,1539 | 0,1515 | 0,1492 | 0,1469 | 0,1446 | 0,1423 | 0,1401 | 0,1379 |
| -0,9 | 0,1841 | 0,1814 | 0,1788 | 0,1762 | 0,1736 | 0,1711 | 0,1685 | 0,1660 | 0,1635 | 0,1611 |
| -0,8 | 0,2119 | 0,2090 | 0,2061 | 0,2033 | 0,2005 | 0,1977 | 0,1949 | 0,1922 | 0,1894 | 0,1867 |
| -0,7 | 0,2420 | 0,2389 | 0,2358 | 0,2327 | 0,2296 | 0,2266 | 0,2236 | 0,2206 | 0,2177 | 0,2148 |
| -0,6 | 0,2743 | 0,2709 | 0,2676 | 0,2643 | 0,2611 | 0,2578 | 0,2546 | 0,2514 | 0,2483 | 0,2451 |
| -0,5 | 0,3085 | 0,3050 | 0,3015 | 0,2981 | 0,2946 | 0,2912 | 0,2877 | 0,2843 | 0,2810 | 0,2776 |
| -0,4 | 0,3446 | 0,3409 | 0,3372 | 0,3336 | 0,3300 | 0,3264 | 0,3228 | 0,3192 | 0,3156 | 0,3121 |
| -0,3 | 0,3821 | 0,3783 | 0,3745 | 0,3707 | 0,1669 | 0,3632 | 0,3594 | 0,3557 | 0,3520 | 0,3483 |
| -0,2 | 0,0207 | 0,4168 | 0,4129 | 0,4090 | 0,4052 | 0,4013 | 0,3974 | 0,3936 | 0,3897 | 0,3859 |
| -0,1 | 0,4602 | 0,4562 | 0,4522 | 0,4483 | 0,4443 | 0,4404 | 0,4364 | 0,4325 | 0,4286 | 0,4247 |
| -0,0 | 0,5000 | 0,4960 | 0,4920 | 0,4880 | 0,4840 | 0,4801 | 0,4761 | 0,4721 | 0,4681 | 0,4641 |

| k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0,5000 | 0,5040 | 0,5080 | 0,5120 | 0,5160 | 0,5199 | 0,5239 | 0,5279 | 0,5319 | 0,5359 |
| 0,1 | 0,5398 | 0,5438 | 0,5478 | 0,5517 | 0,3557 | 0,5596 | 0,5636 | 0,5675 | 0,5714 | 0,5753 |
| 0,2 | 0,5793 | 0,5832 | 0,5871 | 0,5910 | 0,5948 | 0,5987 | 0,6026 | 0,6064 | 0,6103 | 0,6141 |
| 0,3 | 0,6179 | 0,6217 | 0,6255 | 0,6293 | 0,6331 | 0,6368 | 0,6406 | 0,6443 | 0,6480 | 0,6517 |
| 0,4 | 0,6554 | 0,6591 | 0,6628 | 0,6664 | 0,6700 | 0,6736 | 0,6772 | 0,6808 | 0,6844 | 0,6879 |
| 0,5 | 0,6915 | 0,6950 | 0,6985 | 0,7019 | 0,7054 | 0,7088 | 0,7123 | 0,7157 | 0,7190 | 0,7224 |
| 0,6 | 0,7257 | 0,7291 | 0,7324 | 0,7357 | 0,7389 | 0,7422 | 0,7454 | 0,7486 | 0,7517 | 0,7549 |
| 0,7 | 0,7580 | 0,7611 | 0,7642 | 0,7673 | 0,7704 | 0,7734 | 0,7764 | 0,7794 | 0,7823 | 0,7852 |
| 0,8 | 0,7881 | 0,7910 | 0,7939 | 0,7967 | 0,7995 | 0,8023 | 0,8051 | 0,8078 | 0,8106 | 0,8133 |
| 0,9 | 0,8159 | 0,8186 | 0,8212 | 0,8238 | 0,8264 | 0,8289 | 0,8315 | 0,8340 | 0,8365 | 0,8389 |
| 1,0 | 0,8413 | 0,8438 | 0,8461 | 0,8485 | 0,8508 | 0,8531 | 0,8554 | 0,8577 | 0,8599 | 0,8621 |
| 1,1 | 0,8643 | 0,8665 | 0,8686 | 0,8708 | 0,8729 | 0,8749 | 0,8770 | 0,8790 | 0,8810 | 0,8830 |
| 1,2 | 0,8849 | 0,8869 | 0,8888 | 0,8907 | 0,8925 | 0,8944 | 0,8962 | 0,8980 | 0,8997 | 0,9015 |
| 1,3 | 0,9032 | 0,9049 | 0,9066 | 0,9082 | 0,9099 | 0,9115 | 0,9131 | 0,9147 | 0,9162 | 0,9177 |
| 1,4 | 0,9192 | 0,9207 | 0,9222 | 0,9236 | 0,9251 | 0,9265 | 0,9279 | 0,9292 | 0,9306 | 0,9319 |
| 1,5 | 0,9332 | 0,9345 | 0,9357 | 0,9370 | 0,9382 | 0,9394 | 0,9406 | 0,9418 | 0,9429 | 0,9441 |
| 1,6 | 0,9452 | 0,9463 | 0,9474 | 0,9484 | 0,9495 | 0,9505 | 0,9515 | 0,9525 | 0,9535 | 0,9545 |
| 1,7 | 0,9554 | 0,9564 | 0,9573 | 0,9582 | 0,9591 | 0,9599 | 0,9608 | 0,9616 | 0,9625 | 0,9633 |
| 1,8 | 0,9641 | 0,9649 | 0,9656 | 0,9664 | 0,9671 | 0,9678 | 0,9686 | 0,9693 | 0,9699 | 0,9706 |
| 1,9 | 0,9713 | 0,9719 | 0,9726 | 0,9732 | 0,9738 | 0,9744 | 0,9750 | 0,9756 | 0,9761 | 0,9767 |
| 2,0 | 0,9772 | 0,9778 | 0,9783 | 0,9788 | 0,9793 | 0,9798 | 0,9803 | 0,9808 | 0,9812 | 0,9817 |
| 2,1 | 0,9821 | 0,9826 | 0,9830 | 0,9834 | 0,9838 | 0,9842 | 0,9846 | 0,9850 | 0,9854 | 0,9857 |
| 2,2 | 0,9861 | 0,9864 | 0,9868 | 0,9871 | 0,9875 | 0,9878 | 0,9881 | 0,9884 | 0,9887 | 0,9890 |
| 2,3 | 0,9893 | 0,9896 | 0,9898 | 0,9901 | 0,9904 | 0,9906 | 0,9909 | 0,9911 | 0,9913 | 0,9916 |
| 2,4 | 0,9918 | 0,9920 | 0,9922 | 0,9925 | 0,9927 | 0,9929 | 0,9931 | 0,9932 | 0,9934 | 0,9936 |
| 2,5 | 0,9938 | 0,9940 | 0,9941 | 0,9943 | 0,9945 | 0,9946 | 0,9948 | 0,9949 | 0,9951 | 0,9952 |
| 2,6 | 0,9953 | 0,9955 | 0,9956 | 0,9957 | 0,9959 | 0,9960 | 0,9961 | 0,9962 | 0,9963 | 0,9964 |
| 2,7 | 0,9965 | 0,9966 | 0,9967 | 0,9968 | 0,9969 | 0,9970 | 0,9971 | 0,9972 | 0,9973 | 0,9974 |
| 2,8 | 0,9974 | 0,9975 | 0,9976 | 0,9977 | 0,9977 | 0,9978 | 0,9979 | 0,9979 | 0,9980 | 0,9981 |
| 2,9 | 0,9981 | 0,9982 | 0,9982 | 0,9983 | 0,9984 | 0,9984 | 0,9985 | 0,9985 | 0,9986 | 0,9986 |
| 3,0 | 0,9987 | 0,9987 | 0,9987 | 0,9988 | 0,9988 | 0,9989 | 0,9989 | 0,9989 | 0,9990 | 0,9990 |
| 3,1 | 0,9990 | 0,9991 | 0,9991 | 0,9991 | 0,9992 | 0,9992 | 0,9992 | 0,9992 | 0,9993 | 0,9993 |
| 3,2 | 0,9993 | 0,9993 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9995 | 0,9995 | 0,9995 |
| 3,3 | 0,9995 | 0,9995 | 0,9995 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9997 |
| 3,4 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9998 |
| 3,5 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 |

***EJERCICIO 1:***

i) Clasifique el siguiente sistema en función del número de soluciones y resuélvalo utilizando el método de Gauss. $\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + y + z = 4 \\ 3x + 3y + z = 5 \end{cases}$.

ii) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, calcule $AB$ e indique qué relación hay entre $A$ y $B$.

***Solución:***

i) Las matrices de los coeficientes, $C$, y ampliada, $A$, son:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Calculamos sus rangos haciendo combinaciones lineales entre las filas:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 6 & -2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Comprobamos que tanto la matriz de los coeficientes como la matriz ampliada tienen de rango 2, menor que el número de incógnitas, por lo que, según el Teorema de Rouché Frobenius, el sistema es compatible e indeterminado, es decir, tiene infinitas soluciones:

$$.\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + y + z = 4 \\ 3x + 3y + z = 5 \end{cases} \to \begin{cases} x - y + z = 3 \\ 3y - z = -2 \\ 0 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x - y + (3y + 2) = 3 \\ 3y - z = -2 \\ 0 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3y + 2 = z \\ 0 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$$

Sistema compatible indeterminado: $x = 1 - 2t$; $y = t$; $z = 2 + 3t$.

ii) $$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to A \cdot B = I.$$

Al multiplicar las matrices hemos obtenido la matriz identidad, por lo que la matriz $B$ es inversa de la matriz $A$, y $A$ es la matriz inversa de la $B$.

$A \cdot B = I$, las matrices $A$ y $B$ son inversas.

***EJERCICIO 2:***

Dada la función $f(x) = \frac{x^2+3x+4}{x}$.

i) Calcule los máximos y mínimos.

ii) Calcule $\int_1^2 f(x)dx$

iii) Calcule la derivada de la función $g(x)$, siendo $g(x) = f(x) + Ln(5x-3)^2 + xe^{3x}$.

***Solución:***

i) Calculamos la derivada primera y la igualamos a cero:

$$f(x) = \frac{x^2+3x+4}{x} \to f'(x) = \frac{(2x+3)x-(x^2+3x+4)1}{x^2} = \frac{x^2-4}{x^2} = 0.$$

La derivada primera se anula en $x$ = 2 y en $x$ = –2, donde estarán los posibles máximos o mínimos. Con el signo de la derivada obtenemos los intervalos de crecimiento y decrecimiento. Estudiamos el signo de la derivada primera:

| $(-\infty,-2)$ | $(-2,0)\cup(0,2)$ | $(2,+\infty)$ |
|---|---|---|
| + | − | + |
| ↗ | ↘ | ↗ |

La función es creciente en $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$, y decreciente en (-2, 2). Como para $x$ = –2, pasa de creciente a decreciente el punto es un máximo, en (–2, –1). Como en $x$ = 2, la función pasa de decreciente a creciente, en el punto hay un mínimo, en (2, 7).

También podríamos haber usado la derivada segunda:

$$f(x) = \frac{x^2+3x+4}{x} \to f'(x) = \frac{x^2-4}{x^2} \to f''(x) = \frac{(2x)x^2-(x^2-4)2x}{x^4} = \frac{8x}{x^4} = \frac{8}{x^3} \to$$

$$f''(-2) < 0; Máximo; \ f''(2) > 0, Mínimo$$

(–2, –1) es un máximo. (2, 7) es un mínimo.

ii) $\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 \frac{x^2+3x+4}{x}dx = \int_1^2 \left(x+3+\frac{4}{x}\right)dx = \left[\frac{x^2}{2} + 3\text{x} + 4\text{Ln(x)}\right]_1^2 = (2+6+$ $4\text{Ln}(2)) - \left(\frac{1}{2}+3+4Ln(1)\right) = 5 + 4\text{Ln}(2) - \frac{1}{2} = \frac{9}{2} + \text{Ln}(16)$

$$\int_1^2 f(x)dx = \frac{9}{2} + \text{Ln}(16)$$

iii) $g(x) = f(x) + Ln(5x-3)^2 + xe^{3x} = f(x) + 2Ln(5x-3) + xe^{3x} \to$

$g'(x) = f'(x) + \frac{2(5)}{5x-3} + (1\cdot e^{3x} + x\cdot 3\cdot e^{3x}) = \frac{x^2-4}{x^2} + \frac{10}{5x-3} + e^{3x}(1+3x).$

$$g'(x) = \frac{x^2-4}{x^2} + \frac{10}{5x-3} + e^{3x}(1+3x).$$

***EJERCICIO 3:***

El peso (en toneladas) de los contenedores que transporta una empresa de servicios de transporte marítimo puede aproximarse a una distribución normal con desviación típica de 3 toneladas.

i) Se realizó un estudio tomando una muestra aleatoria simple de contenedores y se calculó un intervalo de confianza al 97 % para la media poblacional, con un error máximo de 0.651. Calcule el tamaño de la muestra que se tomó en ese estudio.

ii) Se decide realizar otro estudio y se selecciona una muestra de contenedores, obteniéndose los siguientes pesos (en toneladas): 20.25, 17.5, 21.8, 15.7, 14.6, 17.2, 23.1, 11.7, 18.3. Construya el intervalo de confianza para el peso medio de los contenedores, con un nivel de confianza del 93 %

***Solución:***

i) Como el nivel de confianza es del 97 % sabemos que $1 - \alpha = 1.97$, luego $\alpha = 1 - 0.97 = 0.03$. Por tanto:

$z_{\alpha/2} = z_{0.015} = 2.17$, ya que $1 - 0.015 = 0.9850$.

Los datos que conocemos son: $z_{\alpha/2} = 2.17$; $\sigma = 3$; $E = 0.651$.

La fórmula que debemos usar es:

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Despejando y sustituyendo:

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0.651 = 2.17 \cdot \frac{3}{\sqrt{n}} \rightarrow \sqrt{n} = \frac{0.651}{2.17 \cdot 3} = 10 \rightarrow n = 100$$

El tamaño de la muestra que se utilizó en el estudio es de **100** contenedores.

ii) Ahora conocemos la muestra. Calculamos la media muestral:

$$\bar{x} = \frac{20.25 + 17.5 + 21.8 + 15.7 + 14.6 + 17.2 + 23.1 + 11.7 + 18.3}{9} = \frac{160.15}{9} = 17.794$$

Como el nivel de confianza es del 93 % sabemos que $1 - \alpha = 0.93$, luego $\alpha = 1 - 0.93 = 0.03$.

Como $1 - 0.0350 = 0.9650$ entonces $z = 1.81$. Por tanto: $z_{\alpha/2} = z_{0.035} = 1.81$.

Los datos que conocemos son: $z_{\alpha/2} = 1.81$. $\bar{x} = 17.794$; $\sigma = 3$; $n = 9$.

La fórmula que nos da el intervalo de confianza es:

$$\left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Sustituimos los datos:

$$\left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(17.794 - 1.81 \cdot \frac{3}{\sqrt{9}}, 17.794 - 1.81 \cdot \frac{3}{\sqrt{9}}\right)$$
$$= (17.794 - 1.81, 17.794 - 1.81) = (15.948, 19.604)$$

El intervalo de confianza pedido es de $\mathbf{(15.948, 19.604)}$.



Autor: Álvaro Garmendia Antolín
www.apuntesmareaverde.org.es

***EJERCICIO 4:***

Una empresa diseña y vende dos tipos de telas (T1 y T2) con un precio de venta de 60 euros/m$^2$ y 100 euros/m$^2$ respectivamente. Para cubrir la demanda semanal debe fabricar un total de al menos 15 m$^2$ de tela. Para elaborar un m$^2$ de tela T1 se necesitan 2 horas de máquina y 6 carretes de hilo. Para elaborar un m$^2$ de tela T2 se requieren 4 horas de máquina y 3 carretes de hilo. La disponibilidad de estos dos recursos es de 80 horas de máquina y 150 carretes de hilo. ¿Cuántos m$^2$ de cada tipo de tela tiene que vende la empresa si busca maximizar el beneficio semanal, sabiendo que el coste de elaborar un m$^2$ de cada tipo de tela es de 15 y 10 euros, respectivamente?

i) Plantee el problema

ii) Resuélvalo gráficamente

iii) Analice gráficamente qué ocurriría si se quiere elaborar al menos el triple de m$^2$ de T1 que de tela T2.

***Solución:***

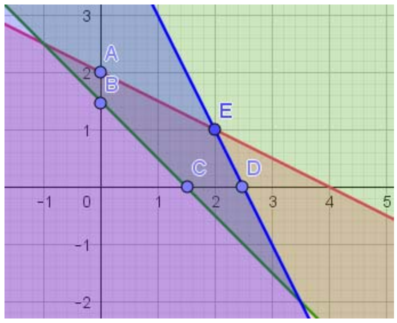
i) Llamamos $x$ a los m$^2$ de tela T1, e $y$ a los de T2.

- La función objetivo es: $B(x, y) = (60 - 15)x + (100 - 10)y = 45x + 90y$.

- Las restricciones son:

$$\begin{cases} 2x + 4y \leq 80 \\ 6x + 3y \leq 150 \\ x + y \geq 15 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 2y \leq 40 \\ 2x + y \leq 50 \\ x + y \geq 15 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$$

- Representamos la región factible:




Hemos representado los semiplanos dados por las restricciones.

ii) La región factible es el pentágono irregular dado de vértices:

$A(0, 20)$ que es la intersección de la recta $2x + 4y = 80$, con $x = 0$.

$B(0, 15)$ que es la intersección de la recta $x + y = 15$, con $x = 0$.

$C(15, 0)$ que es la intersección de la recta $x + y = 15$, con $y = 0$.

$D(150/6, 0) = D(25, 0)$ que es la intersección de la recta $6x + 3y = 150$, con $y = 0$

$E(20, 10)$ que es la intersección de la recta $6x + 3y = 150$, con $2x + 4y = 80$:

$$\begin{cases} 2x + 4y = 80 \\ 6x + 3y = 150 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 2y = 40 \\ 2x + y = 50 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 40 - 2y \\ 2(40 - 2y) + y = 50 \rightarrow 80 - 50 = 3y \end{cases} \rightarrow E(20,10)$$

Calculamos la función objetivo en cada vértice:

$A$: $B(0, 20) = 90(20) = 1800$ euros.

$B$: $B(0, 15) = 90(15) = 1350$ euros.

$C$: $B(15, 0) = 45(15) = 670$ euros.

$D$: $B(25, 0) = 45(25) = 1125$ euros.

$E$: $B(20, 10) = 45(20) + 90(10) = 900 + 900 = 1800$ euros.


Autor: Álvaro Garmendia Antolín
www.apuntesmareaverde.org.es

El beneficio es máximo en cualquier punto del intervalo $A$(0, 20), $E$(20, 10)

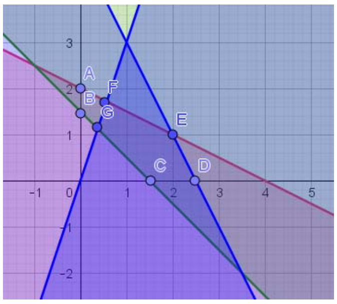
El beneficio máximo es de **1 800** euros, que se produce con 0 m$^2$ de T1 y 20 de T2; o 20 m$^2$ de T1 y 10 de T2; o en cualquier punto intermedio, como 10 m$^2$ de T1 y 15 de T2.

iii) Añadimos la restricción $3x \geq y$

- Las restricciones son:

$$\begin{cases} 2x + 4y \leq 80 \\ 6x + 3y \leq 150 \\ x + y \geq 15 \\ x \geq 0; y \geq 0; 3x \geq y \end{cases}$$

- Representamos la región factible:




En la nueva región factible eliminamos los vértices $A$ y $B$, y añadimos: $F$(80/14, 80/42) intersección de la recta $2x + 4y = 80$ con la recta $y = 3x$, y $G$(15/4, 15/12) intersección de la recta $x + y = 15$, con la recta $y = 3x$.

Ya vimos que el beneficio era máximo, antes, en el segmento $AE$, ahora seguirá siéndolo en el segmento $FE$, y será de 1 800 euros para cualquier punto de dicho segmento:

El beneficio máximo es de **1 800** euros, que se produce con 40/7 m$^2$ de T1 y 40/21 de T2; o 20 m$^2$ de T1 y 10 de T2; o en cualquier punto intermedio.

**EJERCICIO 5:**

Considere la siguiente función definida a trozos:

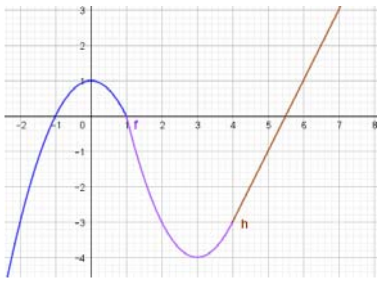
$$f(x)=\begin{cases} 1-x^2 & x\le 1\\ x^2-6x+5 & 1<x<4\\ 2x-11 & x\ge 4\end{cases}$$

i) Calcule las derivadas laterales de $f(x)$ en $x = 4$, utilizando la definición de derivada.

ii) ¿La función $f(x)$ es derivable en $x = 4$? ¿Es continua en $x = 4$? Justifique la respuesta

iii) Calcule la siguiente integral: $\int \sqrt{6x-1}dx$

**Solución:**




La función dada es una función definida a trozos formada por 3 funciones polinómicas, por tanto, continuas y derivables en toda la recta real. Los únicos puntos dudosos son los puntos de unión de los trozos: $x = 1$, y $x = 4$. Estudiamos en primer lugar la continuidad en $x = 4$:

$$x^2-6x+5 \to (4)^2-6(4)+5 = 16-24+5 = -3$$

$$2x-11 \to 2(4)-11 = 8-11 = -3$$

La función es continua en $x = 4$. Si no fuera continua no podría derivable.

i) Aplicamos la definición derivada:

$$f'(4^-)=\lim_{x\to 4^-}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}$$

$$=\lim_{x\to 4^-}\frac{(x^2-6x+5)-(-3)}{x-4}$$

$$=\lim_{x\to 4^-}\frac{x^2-6x+8}{x-4}=\lim_{x\to 4^-}\frac{(x-4)(x-2)}{x-4}=\lim_{x\to 4^-}(x-2)=2$$

$$f'(4^+)=\lim_{x\to 4^+}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim_{x\to 4^+}\frac{(2x-11)-(-3)}{x-4}=\lim_{x\to 4^+}\frac{(2x-8)}{x-4}=2$$

Las derivadas laterales coinciden, luego la función es derivable en $x = 4$.

ii) Ya hemos visto que la función es continua en toda la recta real, luego es continua en $x = 4$. Y hemos visto que es derivable en $x = 4$.

**La función es continua en toda la recta real y derivable en $x = 4$**

No lo piden, pero sin embargo, en $x = 1$, NO es derivable. La derivada a la izquierda vale: -2, y la derivada a la derecha vale 2.

iii) $\int \sqrt{6x-1}dx = \int (6x-1)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{(6x-1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{3}{2}} = \frac{2\sqrt{(6x+1)^3}}{3}+C$

$$\int \sqrt{6x-1}dx = \frac{2\sqrt{(6x+1)^3}}{3}+C$$

***EJERCICIO 6:***

En un centro de bachillerato aprobaron la prueba de acceso a la universidad 112 estudiantes de los 140 que se presentaron. En un segundo centro aprobaron la prueba el 60 % de los 110 estudiantes presentados.

i) Se selecciona un estudiante al azar. Calcule la probabilidad de que haya aprobado.

ii) Se selecciona un estudiante al azar. Calcule la probabilidad de que proceda del segundo centro, sabiendo que el estudiante ha suspendido.

iii) Se seleccionan tres estudiantes al azar sin reemplazamiento. Calcule la probabilidad de que pertenezcan al mismo centro.

***Solución:***

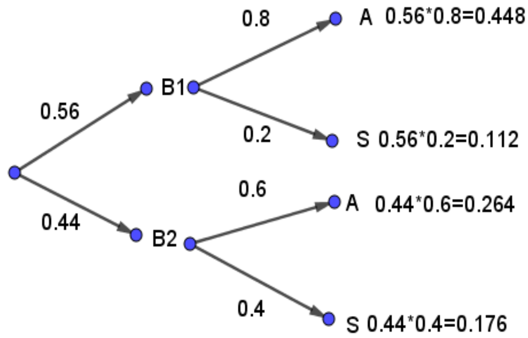
Llamamos $A$ al suceso haber aprobado y $S$ al de haber suspendido. Llamamos $B1$ al suceso ser del primer centro de bachillerato, y $B2$ al ser del segundo centro.

Los datos que nos dan son:

$P(B1) = \frac{140}{140+110} = \frac{140}{250} = \frac{14}{25} = 0.56$; $P(B2) = \frac{110}{140+110} = \frac{11}{25} = 0.44$;

$P(A/B1)$ = 112/140 = 0.8; $P(A/B2)$ = 0.6.

Hacemos un diagrama de árbol, y lo completamos:




i) La probabilidad de que un estudiante haya aprobado vemos que es igual a:

$P(A) = P(B1) * P(A/B1) + P(B2) * P(A/B2) =$

0.56 * 0.8 + 0.44 * 0.6 = 0.448 + 0.264 = 0.712.

La probabilidad de que un estudiante haya aprobado es igual a **0.712**.

ii) Nos piden ahora: $P(B2/S)$.

$$P(B2/S) = \frac{P(B2 \cap S)}{P(S)} = \frac{P(B2)\cdot P(S/B2)}{P(B1)\cdot P(S/B1)+P(B2)\cdot P(S/B2)} = \frac{0.176}{0.112+0.176} = \frac{0.176}{0.288} = 0.611.$$

La probabilidad de que el estudiante proceda del segundo centro sabiendo que ha suspendido es **0.611**.

iii) Ahora nos piden la probabilidad de que 3 estudiantes procedan del mismo centro. El diagrama de árbol es distinto. Habría que seguir dos ramas, sin reemplazamiento:

$$P = P(B1) * P(B1) * P(B1) + P(B2) * P(B2) * P(B2) = \frac{140}{250}\cdot\frac{139}{249}\cdot\frac{138}{248} + \frac{110}{250}\cdot\frac{109}{249}\cdot\frac{108}{248} = \frac{2\,685\,480+1\,294\,920}{15\,438\,000} = \frac{3\,980\,400}{15\,438\,000} = 0.25783133.$$

La probabilidad de que 3 estudiantes procedan del mismo centro es aproximadamente **0.26**.