Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2020

Comunidad autónoma de

MURCIA

Autor: Antonio Menguiano Corbacho

UNIVERSIDAD DE MURCIA Región de Murcia Universidad Politécnica de Cartagena

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
—207 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES—
EBAU2020 - JULIO

OBSERVACIONES IMPORTANTE: Debes responder a un máximo de 5 preguntas. Cada cuestión tiene una puntuación de 2 puntos. Si se responde a más de 5 preguntas, sólo se corregirán las cinco primeras que haya respondido el estudiante. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

CUESTIÓN 1. (2 puntos) Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro a:

$$\left.\begin{array}{r} x+ay+z=1 \\ 2y+az=2 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\}$$

Resolverlo para a=3.

CUESTIÓN 2. (2 puntos) La repoblación forestal de un bosque quemado en un gran incendio se va a llevar a cabo por dos empresas diferentes de jardinería. Hay que repoblar con pinos, eucaliptos y chopos. La primera empresa es capaz de plantar, en una semana, 30 pinos, 20 eucaliptos y 20 chopos. La segunda empresa planta 20 pinos, 30 eucaliptos y 20 chopos. El coste semanal se estima en 33.000€ para la primera empresa de jardinería y de 35.000€ para la segunda. Se necesita plantar un mínimo de 60 pinos, 120 eucaliptos y 100 chopos. ¿Cuántas semanas deberá trabajar cada grupo para finalizar el proyecto con el mínimo coste?

CUESTIÓN 3. (2 puntos) El beneficio semanal obtenido en una empresa de ordenadores viene dado para la función $B(x)=-2x^2+24x-36$, donde x representa el número de ordenadores vendidos semanalmente. Calcular el número de ordenadores vendidos cada semana para que el beneficio sea máximo. ¿Cuál es este beneficio máximo?

CUESTIÓN 4. Sea la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$:

a) Determinar los valores de a y b de forma que la función tenga un extremo relativo en $x=1$ y la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x=0$ tenga de pendiente $m=-1$ (1 punto).

b) Si en la función anterior $a=-2$ y $b=-4$, determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función, así como sus extremos relativos (1 punto)

CUESTIÓN 5. (2 puntos) Representar gráficamente el recinto del plano limitado por las parábolas $f(x)=x^2-4x+6$ y $g(x)=-2x^2+5x+6$. Calcular su área.

CUESTIÓN 6. Dada la función $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$:

a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto $x=1$ (1 punto).

b) Calcular el área de la región del plano limitado por la gráfica de la función $f(x)$ el eje OX y las rectas de ecuación $x=0$ y $x=1$. (1 punto).

CUESTIÓN 7. En una ferretería se encuentran mezclados 100 tornillos de color azul, 60 de color blanco y 40 de color rojo. La probabilidad de que un tornillo sea defectuoso es de 0,01 si es azul, 0,02 si es blanco y de 0,03 si es rojo. Un comprador elige un tornillo al azar:

a) Calcule la probabilidad de que el tornillo sea defectuoso. (1 punto)

b) Sabiendo que el tornillo es defectuoso, ¿Cuál es la probabilidad de que sea blanco? (1 punto)

CUESTIÓN 8. (2 puntos) Dado dos sucesos independientes A y B se conoce que $P(A)=0,3$ y que $P(\overline{B})=0,4$. Calcular las siguientes probabilidades:

a) $P(A\cup B)$. (0,75 puntos)

b) $P(\overline{A}\cap\overline{B})$. (0,5 puntos)

c) $P(A/\overline{B})$. (0,75 puntos)

CUESTIÓN 9. Se ha estimado que el consumo medio de gasolina de los automóviles de un concesionario se distribuye según una distribución normal con una desviación típica de 0,5 litros. Se han probado 10 automóviles, elegidos aleatoriamente, de este concesionario por conductores con la misma forma de conducir y en carreteras similares, obteniendo un consumo medio de 6,5 litros por cada 100km.

a) Determine un intervalo de confianza, al 95% de confianza, para la media del gasto de gasolina de estos vehículos. (1,25 puntos)

b) Hallar el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que, con un nivel de confianza del 95%, el error cometido del consumo de gasolina sea inferior a 0,2. (0,75 puntos)

CUESTIÓN 10. En un laboratorio farmacéutico se analiza el PH de una solución y se supone que este sigue una distribución normal con una desviación típica de 0,02. Con un ensayo de 6 mediciones de la misma solución se obtuvo un PH medio de 7,91.

a) Determine un intervalo de confianza al 95% para la media de todas las determinaciones de PH de la misma solución obtenida por el mismo método. (1,25 puntos)

b) Con el mismo nivel de confianza anterior, ¿cuál será el tamaño mínimo de la muestra para que el error cometido sea inferior a 0,01? (0,75 puntos)

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
—207 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES—
EBAU2020 - **JULIO**

CRITERIOS DE VALORACIÓN

CRITERIOS GENERALES

Cada error de cálculo trivial se penalizará con 0,1 puntos y cada error de cálculo no trivial con 0,2 puntos.
Los errores ortográficos graves se tendrán en cuenta en la calificación total del ejercicio.

CRITERIOS ESPECÍFICOS

CUESTIÓN 1. (2 puntos)
- Discusión correcta: 1,5 puntos.
- Resolución correcta: 0,5 puntos.

CUESTIÓN 2. (2 puntos)
- Resolución correcta: 2 puntos.

CUESTIÓN 3. (2 puntos)
- Resolución correcta: 2 puntos.

CUESTIÓN 4. (2 puntos)
- Apartado a): 1 punto.
- Apartado b): 1 punto.

CUESTIÓN 5. (2 puntos)
- Representar gráficamente el recinto: 0,75 puntos.
- Calcular su área: 1,25 puntos.

CUESTIÓN 6. (2 puntos)
- Apartado a): 1 punto.
- Apartado b): 1 punto.

CUESTIÓN 7. (2 puntos)

- Apartado a): 1 punto.
- Apartado b): 1 punto.

CUESTIÓN 8. (2 puntos)

- Apartado a): 0,75 puntos.
- Apartado b): 0,5 puntos.
- Apartado c): 0,75 puntos.

CUESTIÓN 9. (2 puntos)

- Dar la expresión general del intervalo: 0,75 puntos.
- Sustituir bien los valores: 0,5 puntos.
- Dar la expresión del error: 0,25 puntos.
- Calcular el tamaño: 0,5 puntos.

CUESTIÓN 10. (2 puntos)

- Dar la expresión general del intervalo: 0,75 puntos.
- Sustituir bien los valores: 0,5 puntos.
- Dar la expresión del error: 0,25 puntos.
- Calcular el tamaño: 0,5 puntos.

SOLUCIONES CONVOCATORIA ORDINARIA DE 2020

Cuestión 1:

1º) Discutir el sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{array}{r} x+ay+z=1 \\ 2y+az=2 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\}$ en función de los valores del parámetro a. Resolverlo para $a=3$.

Solución:

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$M=\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $M'=\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 2 & a & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=2+a^2-2-a=0;\;\; a^2-a=0 \Rightarrow a_1=0, a_2=1.$$

$$\underline{Para \begin{Bmatrix} a\neq 0 \\ a\neq 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=nº\ incóg. \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Determinado.}$$

$$Para\ a=0 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=2-2-2=-2\neq 0 \Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$\underline{Para\ a=0 \Rightarrow Rang\ M=2;\ Rang\ M'=3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$$Para\ a=1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_2=C_4\} \Rightarrow Rang\ M'=2.$$

$$\underline{Para\ a=1 \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=2<nº\ incóg. \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Indeterminado.}$$

Para $a=3$ el sistema es $\left.\begin{array}{r} x+3y+z=1 \\ 2y+3z=2 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\}$, que es compatible determinado. Resolviendo por la regla de Cramer:

$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{3^2-3}=\frac{2+2+9-2-3-6}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$ $\quad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{6}=\frac{2+3-2-3}{6}=\frac{0}{6}=0.$

$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{6}=\frac{2+6-2-2}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$

$$\underline{Solución: x=\frac{1}{3},\ y=0,\ z=\frac{2}{3}.}$$

Cuestión 2:

2º) La repoblación forestal de un bosque quemado en un gran incendio se va a llevar a cabo por dos empresas diferentes de jardinería. Hay que repoblar con pinos, eucaliptos y chopos. La primera empresa es capaz de plantar, en una semana, 30 pinos, 20 eucaliptos y 20 chopos. La segunda empresa planta 20 pinos, 30 eucaliptos y 20 chopos. El coste semanal se estima en 33 000 euros para la primera empresa de jardinería y de 35 000 euros para la segunda. Se necesita plantar un mínimo de 60 pinos, 120 eucaliptos y 100 chopos. ¿Cuántas semanas deberá trabajar cada grupo para finalizar el proyecto con el coste mínimo?

Solución:

Sean x e y el número semanas que trabajan la primera y la segunda empresa, respectivamente.

Las restricciones son las siguientes: $\left.\begin{array}{r} 30x + 20y \geq 60 \\ 20x + 30y \geq 120 \\ 20x + 20y \geq 100 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 3x + 2y \geq 6 \\ 2x + 3y \geq 12 \\ x + y \geq 5 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{array}\right\}.$

① $\Rightarrow 3x + 2y \geq 6 \Rightarrow y \geq \frac{6-3x}{2} \Rightarrow O(0,0) \to No.$

x	0	2
y	3	0

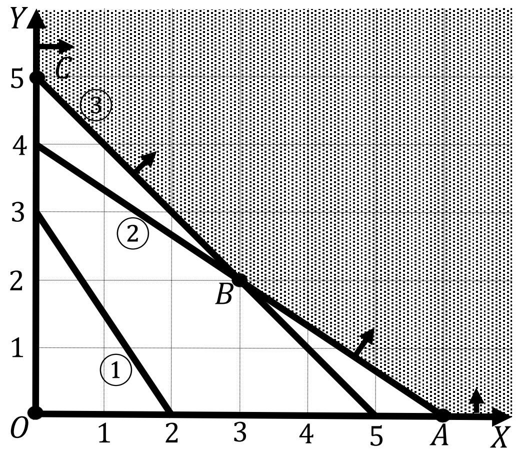
② $\Rightarrow 2x + 3y \geq 12 \Rightarrow y \geq \frac{12-2x}{3} \Rightarrow O(0,0) \to No.$

x	0	6
y	4	0

③ $\Rightarrow x + y \geq 5 \Rightarrow y \geq 5 - x \Rightarrow O(0,0) \to No.$

x	0	5
y	5	0

La región factible, que es abierta, es la que aparece sombreada en la figura adjunta.



Los vértices de la región factible son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 0 \\ 2x + 3y = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow A(6,0).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x + 3y = 12 \\ x + y = 5 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 2x + 3y = 12 \\ -2x - 2y = -10 \end{array}\right\} \Rightarrow B(3,2).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 0 \\ x + y = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow C(0,5).$

La función de objetivos es: $f(x,y) = 33\,000x + 35\,000y.$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow f(6,0) = 33\,000 \cdot 6 + 35\,000 \cdot 0 = 198\,000 + 0 = 198\,000.$

$B \Rightarrow f(3,2) = 33\,000 \cdot 3 + 35\,000 \cdot 2 = 99\,000 + 70\,000 = 169\,000.$

$C \Rightarrow f(0,5) = 33\,000 \cdot 0 + 35\,000 \cdot 5 = 0 + 175\,000 = 175\,000.$

El valor mínimo se produce en el punto $B(3,2)$.

$\underline{El\ coste\ es\ mínimo\ con\ \mathbf{3}\ semanas\ de\ la\ primera\ empresa\ y\ \mathbf{2}\ de\ la\ segunda.}$

$\underline{El\ mínimo\ coste\ es\ de\ \mathbf{169\,000}\ euros.}$

Cuestión 3:

3º) El beneficio semanal obtenido en una empresa de ordenadores viene dado por la función

$B(x) = -2x^2 + 24x - 36$, donde x representa el número de ordenadores vendidos semanalmente. Calcular el número de ordenadores vendidos cada semana para que el beneficio sea máximo. ¿Cuál es este beneficio máximo?

Solución:

La función $B(x)$ es una parábola cóncava (∩) por ser negativo el coeficiente de x^2; su vértice (máximo) es el siguiente:

$$B'(x) = -4x + 24. \quad B'(x) = 0 \Rightarrow -4x + 24 = 0;\ -x + 6 = 0 \Rightarrow x = 6.$$

$$\underline{El\ beneficio\ es\ máximo\ cuando\ se\ venden\ \mathbf{6}\ ordenadores\ cada\ semana}.$$

$$B(6) = -2 \cdot 6^2 + 24 \cdot 6 - 36 = -72 + 144 - 36 = 144 - 108 = 36.$$

$$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ \mathbf{36}\ unidades\ (que\ no\ se\ especifican)}.$$

Cuestión 4:

4º) Sea la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$:

$a)$ Determinar los valores de a y b de forma que la función tenga un extremo relativo en $x = 1$ y la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$ tenga de pendiente $m = -1$.

$b)$ Si en la función anterior $a = -2$ y $b = -4$, determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como sus extremos relativos.

Solución:

$a)$ Por tener un extremo relativo en $x = 1$ es $f'(1) = 0$.

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b.$ $\qquad f'(1) = 3 \cdot 1^2 + 2a \cdot 1 + b = 2a + b + 3.$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 2a + b + 3 = 0;\ \ 2a + b = -3.$ (*)

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de la primera derivada de la función en ese punto, por lo cual:

$m = f'(0) = -1.$ $\qquad f'(0) = 3 \cdot 0^2 + 2a \cdot 0 + b = -1 \Rightarrow \underline{b = -1}.$

Sustituyendo el valor obtenido en la expresión (*):

$2a + b = -3;\ \ 2a - 1 = -3;\ \ 2a = -2 \Rightarrow \underline{a = -1}.$

$$\boldsymbol{a = -1;\ b = -1}$$

$b)$ Para $a = -2$ y $b = -4$ la función es $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 1$.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$f'(x) = 3x^2 - 4x - 4.$ $\qquad f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 4x - 4 = 0;\ \ x = \frac{4 \pm \sqrt{16+48}}{2 \cdot 3} =$

$= \frac{4 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{4 \pm 8}{6} = \frac{2 \pm 4}{3} \Rightarrow x_1 = -\frac{2}{3}, x_2 = 2.$

Por ser $f(x)$ polinómica, las raíces de su primera derivada dividen su dominio, que es R, en los intervalos $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right), \left(-\frac{2}{3}, 2\right)$ y $(2, +\infty)$, donde la función es, alternativamente, creciente o decreciente. Considerando, por ejemplo, $x = 0 \in \left(-\frac{2}{3}, 2\right)$:

$f'(9) = 3 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 - 4 = -4 < 0 \Rightarrow Decreciente.$

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función, que son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \cup (2, +\infty).}$$

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x \in \left(-\frac{2}{3}, 2\right).}$$

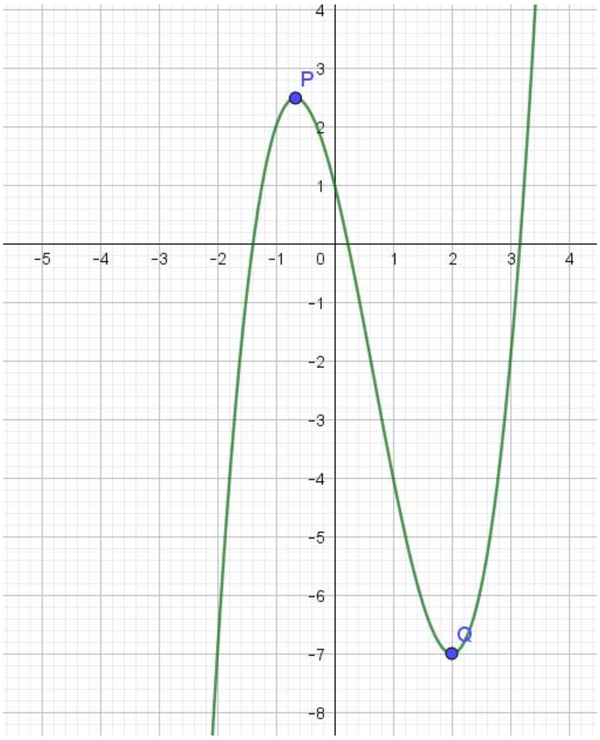
De los periodos de crecimiento y decrecimiento y teniendo en cuenta que la función es continua, la función tiene un máximo relativo para $x = -\frac{2}{3}$ y un mínimo relativo para $x = 2$.

$$f\left(-\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}\right)^3 - 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + 1 = -\frac{8}{27} - \frac{8}{9} + \frac{8}{3} + 1 =$$

$$= \frac{-8-24+72+27}{27} = \frac{99-32}{27} = \frac{67}{27} \Rightarrow \underline{Máximo\ relativo: P\left(-\frac{2}{3}, \frac{67}{27}\right)}.$$

$$f(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 1 = 8 - 8 - 8 + 1 = -7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{Mínimo\ relativo: Q(2, -7)}.$$



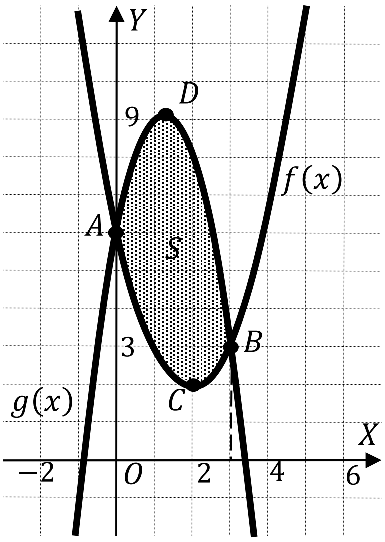
$$Máximo\ relativo: P\left(-\frac{2}{3}, \frac{67}{27}\right) = (-0.67, 2.48);\ \ Mínimo\ relativo: Q(2, -7)$$

Cuestión 5:

5º) Representar gráficamente el recinto del plano limitado por las siguientes parábolas: $f(x) = x^2 - 4x + 6$ y $g(x) = -2x^2 + 5x + 6$. Calcular su área.

Solución:

a) Los puntos de corte de las dos funciones tienen por abscisas las raíces de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:



$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 - 4x + 6 = -2x^2 + 5x + 6;$$

$$3x^2 - 9x = 0;\ \ 3x(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \to A(0,6) \\ x_2 = 3 \to B(3,3) \end{cases}.$$

La función $f(x) = x^2 - 4x + 6$ es una parábola convexa ($\cup$) cuyo vértice es el siguiente:

$$f'(x) = 2x - 4 = 0 \Rightarrow 2(x-2) = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Vértice: C(2,2).$$

La función $g(x) = -2x^2 + 5x + 6$ es una parábola cóncava ($\cap$) cuyo vértice es el siguiente:

$$g'(x) = -4x + 5 = 0 \Rightarrow x = -\tfrac{5}{4}.$$

$$g\left(-\tfrac{5}{4}\right) = -2 \cdot \left(-\tfrac{5}{4}\right)^2 + 5 \cdot \left(-\tfrac{5}{4}\right) + 6 = -\tfrac{50}{16} - \tfrac{25}{4} + 6 = -\tfrac{25}{8} - \tfrac{25}{4} + 6 =$$

$$= \tfrac{-25+50+48}{8} = \tfrac{98-25}{8} = \tfrac{73}{8} \Rightarrow Vértice: D\left(-\tfrac{5}{4}, \tfrac{73}{8}\right).$$

La representación gráfica de la situación se expresa, de forma aproximada, en la figura adjunta.

Para el cálculo del área pedida se tiene en cuenta que en el intervalo correspondiente a la superficie a calcular todas las ordenadas de $g(x)$ son iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de $f(x)$, por lo cual la superficie es la siguiente:

$$S = \int_0^3 [g(x) - f(x)] \cdot dx = \int_0^3 [(-2x^2 + 5x + 6) - (x^2 - 4x + 6)] \cdot dx =$$

$$= \int_0^3 (-3x^2 + 9x) \cdot dx = \left[-\tfrac{3x^3}{3} + \tfrac{9x^2}{2}\right]_0^3 = \left[-x^3 + \tfrac{9x^3}{2}\right]_0^3 = \left(-3^3 + \tfrac{9 \cdot 3^2}{2}\right) - 0 =$$

$$= -27 + \tfrac{81}{2} = \tfrac{81-54}{2} = \tfrac{27}{2}.$$

$$\boldsymbol{S = \tfrac{27}{2}\ u^2 = 13.5\ u^2.}$$

Cuestión 6:

6º) Dada la función $f(x)=\frac{1}{x+1}$:

$a)$ Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto $x=1$.

$b)$ Calcular el área de la región del plano limitado por la gráfica de la función $f(x)$, el eje OX y las rectas de ecuación $x=0$ y $x=1$.

Solución:

$a)$ El punto de tangencia es: $f(1)=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2} \Rightarrow P\left(1,\frac{1}{2}\right)$.

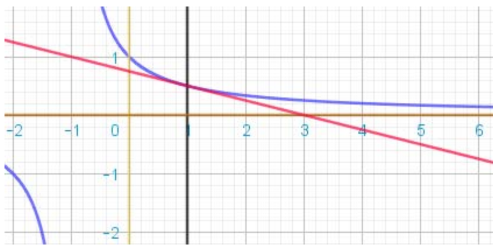
La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto:

$f'(x)=\frac{-1}{(x+1)^2}$. $\qquad m=f'(1)=\frac{-1}{(1+1)^2}=-\frac{1}{4}$.

La ecuación de una recta conocidos el punto de tangente y la pendiente viene dada por la expresión $y-y_0=m\cdot(x-x_0)$:

$y-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}\cdot(x-1);\;\; 4y-2=-x+1.$

$\underline{Recta\ tangente: t\equiv \boldsymbol{x+4y-3=0}}.$



$b)$ En el intervalo $(0,1)$ todas las ordenadas de la función $f(x)=\frac{1}{x+1}$ son positivas, por lo cual, la superficie pedida es la siguiente:

$$S=\int_0^1 f(x)\cdot dx=\int_0^1 \frac{1}{x+1}\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x+1=t \\ dx=dt \end{matrix}\middle| \begin{matrix} x=1\rightarrow t=2 \\ x=0\rightarrow t=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \int_1^2 \frac{1}{t}\cdot dt=$$

$=[Lt]_1^2=L2-L1=L2-0=L2.$

$$\underline{\boldsymbol{S=L2\ u^2\cong 0.69\ u^2}}.$$

Cuestión 7:

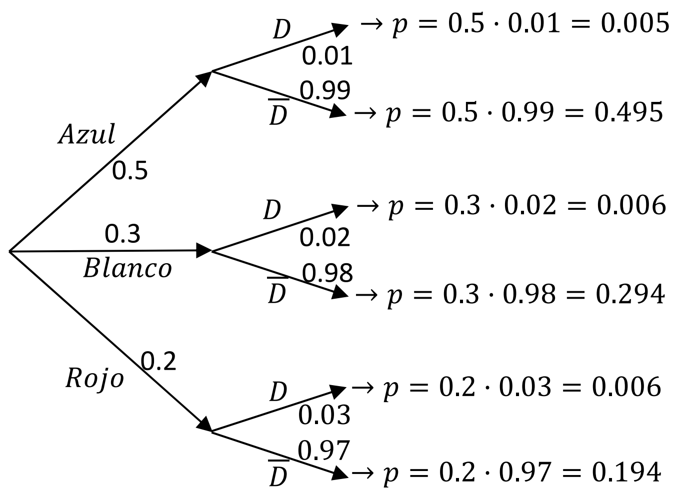
7º) En una ferretería se encuentran mezclados 100 tornillos de color azul, 60 de color blanco y 40 de color rojo. La probabilidad de que un tornillo sea defectuoso es de 0.01 si es azul, 0.02 si es blanco y de 0.03 si es rojo. Un comprador elige un tornillo al azar:

a) Hallar la probabilidad de que el tornillo sea defectuoso.

b) Sabiendo que el tornillo es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que sea blanco?

Solución:

$$n = 100 + 60 + 40 = 200;\ \ P(A) = 0.5;\ \ P(B) = 0.3;\ \ P(R) = 0.2.$$



$a)\qquad P = P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(R \cap D) =$

$= P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) + P(R) \cdot P(D/R) =$

$= 0.6 \cdot 0.99 + 0.3 \cdot 0.98 + 0.2 \cdot 0.97 = 0.005 + 0.006 + 0.006 = \underline{0.017}.$

La probabilidad de que el tornillo sea defectuoso es $\mathbf{0.017}$

$$b)\ P = P(B/D) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{P(B) \cdot P(D/B)}{P(D)} = \frac{0.3 \cdot 0.98}{0.017} = \frac{0.006}{0.017} = \underline{0.3529}.$$

Sabiendo que el tornillo es defectuoso, la probabilidad de que sea blanco es $\mathbf{0.3529}$

Cuestión 8:

8º) Dados dos sucesos independientes A y B se conoce que $P(A) = 0.3$ y que $P(\overline{B}) = 0.4$. Calcular las siguientes probabilidades:

$a)$ $P(A \cup B)$.

$b)$ $P(\overline{A} \cap \overline{B})$.

$c)$ $P(A/\overline{B})$.

Solución:

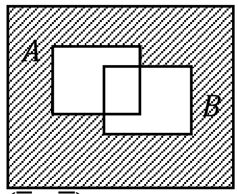
$a)$ $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0.4 = 0.6.$

Por ser A y B independientes: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0.3 \cdot 0.6 = 0.18.$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.3 + 0.6 - 0.18 = 0.9 - 018 = 0.72.$

$$P(A \cup B) = \mathbf{0.72}$$

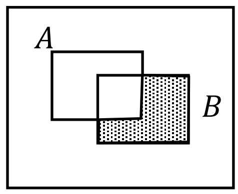
$b)$ $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.72 = \underline{0.28}.$



$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cup B)$

$$\boldsymbol{P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0.28}$$

$c)$ $P(A|\overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(\overline{B})} = \frac{0.3 - 0.18}{0.4} = \frac{0.12}{0.4} = \underline{0.3}$



$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

$$\boldsymbol{P(A|\overline{B}) = 0.3}$$

Cuestión 9:

9º) Se ha estimado que el consumo medio de gasolina de los automóviles de un concesionario se distribuye según una distribución normal con una desviación típica de 0.5 litros. Se han probado 10 automóviles, elegidos aleatoriamente, de este concesionario por conductores con la misma forma de conducir y en carreteras similares, obteniendo un consumo medio de 6.5 litros por cada 100 km.

a) Determine un intervalo de confianza, al 95 % de confianza, para la media del gasto de gasolina de esos vehículos.

b) Hallar el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que, con un nivel de confianza del 95 %, el error cometido del consumo de gasolina sea inferior a 0.2.

Solución:

a) Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1-\alpha=0.95 \ \rightarrow \ \alpha=1-0.95=0.05 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0.025}=1.96.$

$(1-0.025=0.9750 \ \rightarrow z=1.96).$

Datos: $n=10;\ \ \overline{x}=6.5;\ \ \sigma=0.5;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}}=1.96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente:

$$\left(\overline{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \ \overline{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

$\left(6.5-1.96\cdot\frac{0.5}{\sqrt{10}};\ 6.5+1.96\cdot\frac{0.5}{\sqrt{10}}\right);$

$(6.5-1.96\cdot 0.1581;\ 6.5+1.96\cdot 0.1581);\ \ (6.5-0.3099;\ 6.5+0.3099).$

$$\underline{I.C._{95\,\%}=(6.1901;\ 6.8099)}.$$

El intervalo de confianza para la media de gasto de gasolina es $\mathbf{(6.1901;\ 6.8099).}$

b) Datos: $\sigma=0.5;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}}=1.96;\ \ E=0.2.$

Siendo $E=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ \Rightarrow\ \sqrt{n}=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E}\ \Rightarrow n=\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E}\right)^2=\left(1.96\cdot\frac{0.5}{0.2}\right)^2=$

$=(1.96\cdot 2.5)^2=4.9^2=24.01.$

$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ \mathbf{25}\ automóviles}.$

Cuestión 10:

10º) En un laboratorio farmacéutico se analiza el PH de una solución y se supone que este sigue una distribución normal con una desviación típica de 0.02. Con un ensayo de 6 mediciones de la misma solución se obtuvo un PH de 7.91.

$a)$ Determine el intervalo de confianza al 95 % para la media de todas las determinaciones del PH de la misma solución obtenida por el mismo método.

$b)$ Con el mismo nivel de confianza anterior, ¿cuál será el tamaño mínimo de la muestra para que el error cometido sea inferior a 0.01?

Solución:

$a)$ Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1-\alpha=0.95 \;\rightarrow\; \alpha=1-0.95=0.05 \;\rightarrow\; z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0.025}=1.96.$

$(1-0.025=0.9750 \;\rightarrow z=1.96).$

Datos: $n=6;\;\; \overline{x}=7.91;\;\; \sigma=0.02;\;\; z_{\frac{\alpha}{2}}=1.96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente:

$$\left(\overline{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\;\; \overline{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

$\left(7.91-1.96\cdot\frac{0.02}{\sqrt{6}};\; 7.91+1.96\cdot\frac{0.02}{\sqrt{6}}\right);$

$(7.91-1.96\cdot 0.0082;\; 7.91+1.96\cdot 0.0082);\;\; (7.91-0.0160;\; 7.91-0.0160).$

$$\underline{I.C._{95\,\%}=(7.8940;\; 7.9260)}.$$

El intervalo de confianza de la media es $\mathbf{(7.8940;\; 7.9260)}$.

$b)$ Datos: $\sigma=0.02;\;\; z_{\frac{\alpha}{2}}=1.96;\;\; E=0.01.$

Siendo $E=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \;\Rightarrow\; \sqrt{n}=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E} \;\Rightarrow n=\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E}\right)^2=\left(1.96\cdot\frac{0.02}{0.01}\right)^2=$

$=(1.96\cdot 2)^2=3.92^2=15.37.$

$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ \mathbf{16}\ ensayos.}$

UNIVERSIDAD DE MURCIA — Región de Murcia — Universidad Politécnica de Cartagena

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
—207 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES—
EBAU2020 - **SEPTIEMBRE**

OBSERVACIONES IMPORTANTE: Debes responder a un máximo de 5 preguntas. Cada cuestión tiene una puntuación de 2 puntos. Si se responde a más de 5 preguntas, sólo se corregirán las cinco primeras que haya respondido el/la estudiante. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

CUESTIÓN 1. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

a) Calcule $(A-B)$ (0,5 puntos).

b) Calcule $(A-B)^{-1}$ (0,5 puntos).

c) Hallar la matriz X que verifica $AX-A=BX+B$ (1 punto).

CUESTIÓN 2. (2 puntos) Sea S la región del plano definida por las inecuaciones:

$$S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / y\ge 2x-4,\ y\le x-1,\ 2y\ge x,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$$

a) Representar la región S y obtener sus vértices.

b) Maximizar la función $f(x,y)=x-3y$ en S indicando los puntos de S donde se alcanza el máximo.

c) Minimizar la función $f(x,y)=x-3y$ en S indicando los puntos de S donde se alcanza el mínimo.

CUESTIÓN 3. Se ha estimado en una empresa que su beneficio en los próximos 10 años viene dado por la función: $B(t)=\begin{cases} at-t^2 & si \quad 0\le t\le 6\\ 2t & si \quad 6<t\le 10\end{cases}$ siendo t el tiempo transcurrido en años.

a) Calcular el valor del parámetro a para que la función de beneficios sea continua. (0,5 puntos).

b) Para $a=8$ represente su gráfica y diga en qué intervalo de tiempo la función crece o decrece. (1 punto).

c) Para $a=8$ indique en qué momento, de los 6 primeros años, se obtiene el máximo beneficio y cuál es su valor. (0,5 puntos).

CUESTIÓN 4. Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=(x^2-2)Lnx$ (1 punto).

b) $f(x)=e^{4x^2+2}$ (1 punto).

UNIVERSIDAD DE MURCIA — Región de Murcia — Universidad Politécnica de Cartagena

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

—207 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES—

EBAU2020 - **SEPTIEMBRE**

CUESTIÓN 5. (2 puntos) Representar gráficamente el recinto del plano limitado por la parábola $f(x)=4-x^2$ y la recta $g(x)=2+x$. Calcular su área.

CUESTIÓN 6. (2 puntos) Calcular el área del recinto limitado por la parábola $f(x)=-x^2+6x$ y el eje OX. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.

CUESTIÓN 7. Entre los alumnos ERASMUS que han llegado este curso a la Universidad de Murcia el 75% hablan inglés, el 50% hablan francés y un 5% no hablan ninguno de estos dos idiomas. Elegido un alumno al azar:

a) Calcule la probabilidad de que hable inglés o francés. (0,5 puntos).
b) Calcule la probabilidad de que hable inglés y francés. (0,5 puntos).
c) Calcule la probabilidad de que, hablando inglés, no hable francés. (1 punto).

CUESTIÓN 8. En una empresa multinacional el 60% de las reuniones se realizan a través de videoconferencia. El 40% de los empleados que asisten a estas videoconferencias son de países de la Unión Europea, mientras que en las reuniones presenciales solo el 20% son trabajadores que no pertenecen a la Unión Europea. Si elegimos un trabajador al azar:

a) Calcule la probabilidad de que pertenezca a la Unión Europea. (1 punto).
b) Sabiendo que el trabajador es de la Unión Europea, ¿Cuál es la probabilidad de que haya asistido a la reunión por videoconferencia? (1 punto).

CUESTIÓN 9. (2 puntos) El precio medio de los aspiradores de una gran superficie se distribuye según una distribución normal de desviación típica 100€. Se toma una muestra aleatoria de 9 aspiradoras de distintas marcas obteniendo un precio medio de 178,89€. Determine un intervalo de confianza al 99% para el precio medio.

Hallar el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que, con un nivel de confianza del 99%, el error cometido de estimación del precio no supere los 50€.

CUESTIÓN 10. (2 puntos) Se sabe que el peso de los tarros de cacao de un supermercado es una variable aleatoria que sigue una distribución normal con desviación típica de 1,8 gramos. Se toma una muestra aleatoria de 9 tarros y se obtiene un peso medio de 89 gramos. Obtenga un intervalo de confianza, al 95%, para la media de esta población.

¿Cuál será el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el error cometido de estimación del peso no supere 1 gramo, a un nivel de confianza del 95%?

UNIVERSIDAD DE MURCIA · Región de Murcia · Universidad Politécnica de Cartagena

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
—207 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES—
EBAU2020 - **SEPTIEMBRE**

CRITERIOS DE VALORACIÓN

CRITERIOS GENERALES

Cada error de cálculo trivial se penalizará con 0,1 puntos y cada error de cálculo no trivial con 0,2 puntos.
Los errores ortográficos graves se tendrán en cuenta en la calificación total del ejercicio.

CRITERIOS ESPECÍFICOS

CUESTIÓN 1. (2 puntos)
- Apartado a): 0,5 puntos.
- Apartado b): 0,5 puntos.
- Apartado 5): 1 punto.

CUESTIÓN 2. (2 puntos)
- Apartado a): 1 punto.
- Apartado b): 0,5 puntos.
- Apartado 5): 0,5 puntos.

CUESTIÓN 3. (2 puntos)
- Apartado a): 0,5 puntos.
- Apartado b): 1 punto.
- Apartado 5): 0,5 puntos.

CUESTIÓN 4. (2 puntos)
- Apartado a): 1 punto.
- Apartado b): 1 punto.

CUESTIÓN 5. (2 puntos)
- Representar gráficamente el recinto: 0,75 puntos.
- Calcular su área: 1,25 puntos.

UNIVERSIDAD DE MURCIA   Región de Murcia   Universidad Politécnica de Cartagena

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
—207 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES—
EBAU2020 - **SEPTIEMBRE**

CUESTIÓN 6. (2 puntos)

- Representar gráficamente el recinto: 0,75 puntos.
- Calcular su área: 1,25 puntos.

CUESTIÓN 7. (2 puntos)

- Apartado a): 0,5 puntos.
- Apartado b): 0,5 puntos.
- Apartado 5): 1 punto.

CUESTIÓN 8. (2 puntos)

- Apartado a): 1 punto.
- Apartado b): 1 punto.

CUESTIÓN 9. (2 puntos)

- Dar la expresión general del intervalo: 0,5 puntos.
- Sustituir bien los valores: 0,5 puntos.
- Dar la expresión del error: 0,5 puntos.
- Calcular el tamaño: 0,5 puntos.

CUESTIÓN 10. (2 puntos)

- Dar la expresión general del intervalo: 0,5 puntos.
- Sustituir bien los valores: 0,5 puntos.
- Dar la expresión del error: 0,5 puntos.
- Calcular el tamaño: 0,5 puntos.

SOLUCIONES CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE 2020

Cuestión 1:

1º) Sean las marices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $y\ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$a)$ Calcule $A - B$.

$b)$ Calcule $(A - B)^{-1}$.

$c)$ Hallar la matriz X que verifica $AX - A = BX + B$.

Solución:

$a)\ A - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}}$.

$$A - B = \underline{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}}$$

$b)$ $|A - B| = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -2.\ (A - B)^t = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

$Adj.de\ (A - B)^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

$$(A - B)^{-1} = \frac{Adj.de\ (A - B)^t}{|A - B|} \Rightarrow$$

$$\underline{(A - B)^{-1} = -\tfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}.$$

$c)\ AX - A = BX + B;\ \ AX - BX = A + B;\ \ (A - B) \cdot X = A + B;.$

$(A - B)^{-1} \cdot (A - B) \cdot X = (A - B)^{-1} \cdot (A + B);\ \ I \cdot X = (A - B)^{-1} \cdot (A + B).$

$$\underline{X = (A - B)^{-1} \cdot (A + B)}.$$

$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

$X = (A + B) \cdot (A - B)^{-1} = -\tfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = -\tfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$.

$$\underline{X = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}}.$$

Cuestión 2:

2º) Sea S la región del plano definida por las siguientes inecuaciones:

$$S = \{(x, y) \in |y \geq 2x - 4;\ \ y \leq x - 1;\ \ 2y \geq x;\ \ x \geq 0;\ \ y \geq 0\}.$$

$a)$ Representar la región S y obtener sus vértices.

$b)$ Maximizar la función $f(x, y) = x - 3y$ en S indicando los puntos de S donde se alcanza el máximo.

$c)$ Minimizar la función $f(x, y) = x - 3y$ en S indicando los puntos de S donde se alcanza el mínimo.

Solución:

$a)$

① $\Rightarrow y \geq 2x - 4 \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	2	4
y	0	4

② $\Rightarrow y \leq x - 1 \Rightarrow O(0,0) \rightarrow No.$

x	1	5
y	0	4

③ $\Rightarrow 2y \geq x;\ \ y \geq \frac{x}{2} \Rightarrow P(1,0) \rightarrow No.$

x	0	6
y	0	3

La región factible es la zona que aparece sombreada de la figura adjunta.

Los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{aligned} x - y = 1 \\ x - 2y = 0 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} x - y = 1 \\ -x + 2y = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$

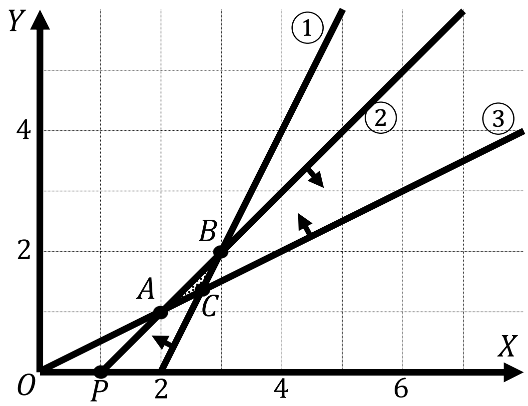
$y = 1;\ \ x = 2 \Rightarrow \underline{A(2, 1)}.$

$B \Rightarrow \left.\begin{aligned} 2x - y = 4 \\ x - y = 1 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} 2x - y = 4 \\ -x + y = -1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$

$x = 3;\ \ y = 2 \Rightarrow \underline{B(3, 2)}.$

$C \Rightarrow \left.\begin{aligned} 2x - y = 4 \\ x - 2y = 0 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} 4x - 2y = 8 \\ -x + 2y = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 3x = 8;$

$x = \frac{8}{3};\ y = \frac{4}{3} \Rightarrow \underline{C\left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right)}.$



$b, c)$ La función de objetivos es $f(x, y) = x - 3y.$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow f(2, 1) = 2 - 3 \cdot 1 = 2 - 3 = -1.$

$B \Rightarrow f(3, 2) = 3 - 3 \cdot 2 = 3 - 6 = -3.$

$C \Rightarrow f\left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right) = \frac{8}{3} - 3 \cdot \frac{4}{3} = \frac{8-12}{3} = -\frac{4}{3}.$

El máximo se produce en el punto $\boldsymbol{A(2, 1)}$ *y el mínimo en el punto* $\boldsymbol{B(3, 2)}$.

Cuestión 3:

3º) Se ha estimado en una empresa que su beneficio en los próximos 10 años viene dado por la función $B(t)=\begin{cases} at-t^2 & si\ \ 0\le t\le 6 \\ 2t & si\ \ 6<t\le 10 \end{cases}$, siendo t el tiempo transcurrido en años.

a) Calcular el valor del parámetro a para que la función de beneficios sea continua.

b) Para $a=8$ represente su gráfica y diga en qué intervalo de tiempo la función crece o decrece.

c) Para $a=8$ indique en qué momento, de los 6 primeros años, se obtiene el máximo beneficio y cuál es su valor.

Solución:

a) La función $B(t)$ es continua en R, excepto para $t=6$, cuya continuidad es dudosa y se va a determinar el valor real de a para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ t=6 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{t\to 6^-} B(t)=\lim\limits_{t\to 6}(at-t^2)=6a-36=B(6) \\ \lim\limits_{t\to 6^+} B(t)=\lim\limits_{t\to 6}(2t)=12 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 6^-} B(t)=\lim_{t\to 6^+} B(t)=B(6) \Rightarrow 6a-36=12;\ \ a-6=2 \Rightarrow \underline{a=8}.$$

La función de beneficios es continua si $\boldsymbol{a=8}$

b,c) La función resulta $B(t)=\begin{cases} 8t-t^2 & si\ \ 0\le t\le 6 \\ 2t & si\ \ 6<t\le 10 \end{cases}$.

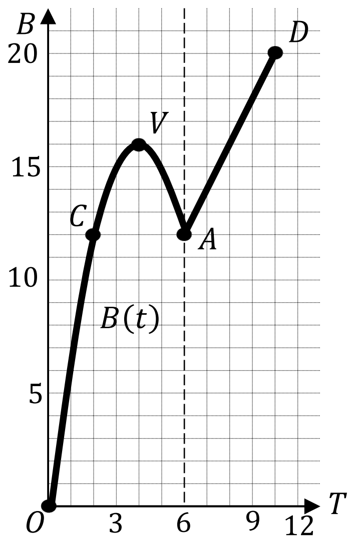
En el intervalo $[0,6]$ la función es la parábola de ecuación $g(t)=8t-t^2$, que es cóncava ($\cap$) por ser negativo el coeficiente de t^2, y cuyo vértice es el siguiente:

$$g'(t)=8-2t=0;\ \ 4-t=0 \Rightarrow t=4.$$

$$g(4)=8\cdot 4-4^2=32-16=16 \Rightarrow V(4,16).$$

Por ser $g(0)=0$, la parábola contiene al origen de coordenadas; otros puntos de la parábola son $A(6,12)\ y\ C(2,12)$.

En el intervalo $(6,10]$ la función es la recta $h(t)=2t$, cuyos puntos extremos son $A(6,12)\ y\ D(10,20)$.



La representación gráfica, aproximada, se pude observar en la figura adjunta.

De la observación de la gráfica se observan los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función, que son los siguientes:

$$Crecimiento: t\in(0,4)\cup(6,10);\ Decrecimiento: t\in(4,6)$$

$$En\ los\ 6\ primeros\ años\ el\ máximo\ beneficio\ se\ produce\ para$$

$$\boldsymbol{t=4}\ siendo\ el\ valor\ máximo\ de\ \boldsymbol{16}\ unidades.$$

Cuestión 4:

4º) Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

$a)\ f(x) = (x^2 - 2) \cdot Lx.$

$b)\ f(x) = e^{4x^3+2}.$

Solución:

$a)\ f'(x) = 2x \cdot Lx + (x^2 - 2) \cdot \frac{1}{x}.$

$$\underline{f(x) = (x^2 - 2) \cdot Lx \ \Rightarrow\ f'(x) = \frac{2x^2 \cdot Lx + x^2 - 2}{x}}.$$

$b)\ f(x) = e^{4x^3+2} \Rightarrow L[f(x)] = Le^{4x^3+2} = (4x^2 + 2) \cdot Le = 4x^2 + 2.$

$\frac{f'(x)}{f(x)} = 8x \Rightarrow f'(x) = 8x \cdot f(x).$

$$\underline{f(x) = e^{4x^3+2} \ \Rightarrow\ f'(x) = 8x \cdot e^{4x^3+2}}.$$

Cuestión 5:

5º) Representar gráficamente el recinto del plano limitado por la parábola de ecuación $f(x) = 4 - x^2$ y la recta $g(x) = 2 + x$. Calcular su área.

Solución:

La función $f(x) = 4 - x^2$ es una parábola cóncava ($\cap$) que corta al eje de abscisa en los puntos $A(-2, 0)$ y $B(2, 0)$.

El vértice de la parábola es el siguiente:

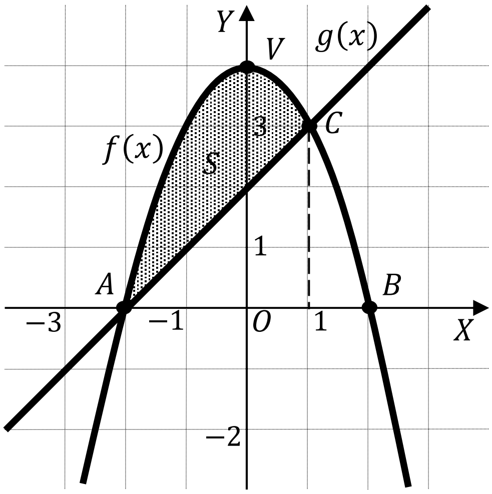
$f'(x) = -2x = 0 \rightarrow x = 0 \Rightarrow V(0, 4)$.

Los puntos de corte de la parábola y la recta tienen por abscisas las raíces de la ecuación que se obtienen de la igualación de sus expresiones:

$4 - x^2 = 2 + x;\ x^2 + x - 2 = 0;$

$$x = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{9}}{2} = \frac{-1\pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \rightarrow A(-2, 0) \\ x_2 = 1 \rightarrow C(1, 3) \end{cases}.$$

La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la que se indica en la figura adjunta.



$$S = \int_{-2}^{1}[f(x) - g(x)] \cdot dx = \int_{-2}^{1}[4 - x^2 - (2 + x)] \cdot dx =$$

$$= \int_{-2}^{1}(4 - x^2 - 2 - x) \cdot dx = \int_{-2}^{1}(-x^2 - x + 2) \cdot dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{1} =$$

$$= \left(-\frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} + 2 \cdot 1\right) - \left[-\frac{(-2)^3}{3} - \frac{(-2)^2}{2} + 2 \cdot (-2)\right] = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{8}{3} + 2 + 4 =$$

$$= -\frac{9}{3} - \frac{1}{2} + 8 = 5 - \frac{1}{2} = \underline{\frac{9}{2}\ u^2 = 4.5\ u^2}.$$

$$\acute{A}rea = \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{2}}\ \boldsymbol{u^2} = \mathbf{4.5}\ \boldsymbol{u^2}$$

Cuestión 6:

6º) Calcular el área del recinto limitado por la parábola $f(x) = -x^2 + 6x$ y el eje OX. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.

Solución:

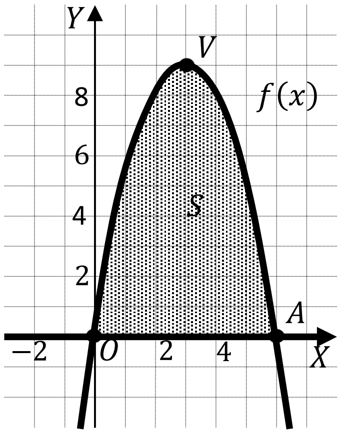
Los puntos de corte de la parábola $f(x) = -x^2 + 6x$ con el eje OX son los siguientes:

$$-x^2 + 2x + 8 = 0; -x(x-6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \rightarrow O(0,0) \\ x_2 = 6 \rightarrow B(6,0) \end{cases}.$$

El vértice de la parábola es el siguiente:

$$f'(x) = -2x + 6 = 0 \rightarrow x = 3 \rightarrow V(3,9).$$

De la observación de la figura se deduce el área a calcular, que es la siguiente:



$$S = \int_0^6 (-x^2 + 6x) \cdot dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{6x^2}{2}\right]_0^6 =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 3x^2\right]_0^6 = \left(-\frac{6^3}{3} + 3 \cdot 6^2\right) - 0 = -72 + 108 = \underline{36\, u^2}.$$

$$Área = \mathbf{36}\, u^2$$

Cuestión 7:

7º) Entre los alumnos ERASMUS que han llegado este curso a la Universidad de Murcia el 75 % hablan inglés, el 50 % hablan francés y un 5 % no hablan ninguno de estos idiomas. Elegido un alumno al azar:

a) Calcular la probabilidad de que hable inglés o francés.

b) Calcule la probabilidad de que hable inglés y francés.

c) Calcule la probabilidad de que, hablando inglés, no hable francés.

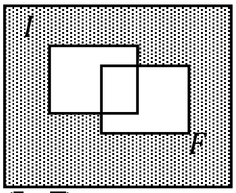
Solución:

$Datos: P(I) = 0.75;\ \ P(F) = 0.50;\ \ P(\overline{I} \cap \overline{F}) = 0.05.$

$a) \qquad P(\overline{I} \cap \overline{F}) = 1 - P(I \cup F) \Rightarrow$

$\Rightarrow P(I \cup F) = 1 - P(\overline{I} \cap \overline{F}) = 1 - 0.05 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{P(I \cup F) = 0.95}.$



$P(\overline{I} \cap \overline{F}) = 1 - P(I \cup F)$

La probabilidad de que hable inglés o francés es $\mathbf{0.95}$

$b)\ P(I \cup F) = P(I) + P(F) - P(I \cap F) \Rightarrow$

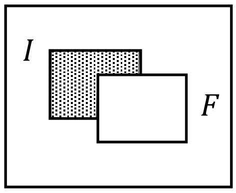
$\Rightarrow P(I \cap F) = P(I) + P(F) - P(I \cup F) = 0.75 + 0.50 - 0.95 = 1.25 - 0.95 = 0.30.$

$\underline{P(I \cap F) = 0.30}.$

La probabilidad de que hable inglés y francés es $\mathbf{0.30}$

$c)$

$$P = P(\overline{F}/I) = \frac{P(I \cap \overline{F})}{\mathrm{P(I)}} = \frac{P(I) - P(I \cap F)}{\mathrm{P(I)}} = \frac{0.75 - 0.30}{0.75} = \frac{0.45}{0.75} = \underline{0.6}.$$



$P(I \cap \overline{F}) = P(I) - P(I \cap F)$

La probabilidad de que, hablando inglés, no hable francés es de $\mathbf{0.6}$

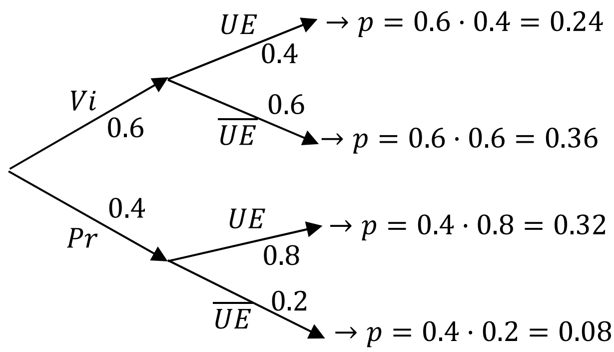
Cuestión 8:

8º) En una empresa multinacional el 60 % de las reuniones se realizan a través de videoconferencias. El 40 % de los empleados que asisten a esas videoconferencias son de países de la Unión Europea, mientras que en las reuniones presenciales solo el 20 % son trabajadores que no pertenecen a la Unión Europea. Si elegimos un trabajador al azar:

a) Calcule la probabilidad de que pertenezca a la Unión Europea.

b) Sabiendo que el trabajador es de la Unión Europea, ¿cuál es la probabilidad de que haya asistido a la reunión por videoconferencia?

Solución:



$a)\qquad P = P(UE) = P(Vi \cap UE) + P(Pr \cap UE) =$

$= P(Vi) \cdot P(UE/Vi) + P(Pr) \cdot P(UE/Pr) = 0.6 \cdot 0.4 + 0.4 \cdot 0.8 =$

$= 0.24 + 0.32 = \underline{0.56}.$

La probabilidad de que pertenezca a la Unión Europea es de **0.56**.

$b)\qquad P(Vi/UE) = \frac{P(Vi \cap UE)}{P(UE)} = \frac{P(Vi) \cdot P(UE/Vi)}{P(UE)} = \frac{0.6 \cdot 0.4}{0.56} = \frac{0.24}{0.56} = \underline{0.4286}.$

Sabiendo que el trabajador es de la Unión Europea, la probabilidad de que haya asistido a la reunión por videoconferencia es de **0.43**.

Problema 9:

9º) El precio medio de los aspiradores de una gran superficie se distribuye según una distribución normal de desviación típica 100 euros. Se toma una muestra aleatoria de 9 trabajadores de distintas marcas obteniendo un precio medio de 178.89 euros. Determine un intervalo de confianza al 99 % para el precio medio. Hallar el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que, con un nivel de confianza del 99 % el error cometido de estimación del precio no supere los 50 euros.

Cuestión:

Para un nivel de confianza del 99 % es:

$1-\alpha=0.99 \rightarrow \alpha=1-0.99=0.01 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0.005}=2.575.$

$(1-0.005=0.9950 \rightarrow z=2.575).$

Datos: $n=9;\ \ \overline{x}=178.89;\ \ \sigma=100;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}}=2.575.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente:

$$\left(\overline{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

$\left(178.89-2.575\cdot\frac{100}{\sqrt{9}};\ 178.89+2.575\cdot\frac{100}{\sqrt{9}}\right);$

$(178.89-2.575\cdot 33.3333;\ 178.89+2.575\cdot 33.3333);$

$(178.89-85.8333;\ 178.89+85.8333)$

$$\underline{I.C._{99\,\%}=(93.0567;\ 246.7233)}.$$

El intervalo de confianza para el precio medio es $(\mathbf{93.0567};\ \mathbf{246.7233})$

Datos: $\sigma=100;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}}=2.575;\ \ E=50.$

Siendo $E=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ \Rightarrow\ \sqrt{n}=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E}\Rightarrow n=\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E}\right)^2=\left(2.575\cdot\frac{100}{50}\right)^2=$

$=(2.575\cdot 2)^2=5.15^2=26.5225.$

$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ \mathbf{27}\ aspiradores.}$

Cuestión 10:

10º) Se sabe que el peso de los tarros de cacao de un supermercado es una variable aleatoria que sigue una distribución normal con desviación típica de 1.8 gramos. Se toma una muestra aleatoria de 9 tarros y se obtiene un peso medio de 89 gramos. Obtenga un intervalo de confianza al 95 % para la media de la población. ¿Cuál será el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el error cometido de estimación del peso no supere 1 gramo, a un nivel de confianza del 95 %?

Solución:

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1-\alpha=0.95 \ \rightarrow \ \alpha=1-0.95=0.05 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0.025}=1.96.$

$(1-0.025=0.9750 \ \rightarrow z=1.96).$

Datos: $n=9;\ \ \overline{x}=89;\ \ \sigma=1.8;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}}=1.96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x}-z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x}+z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$

$\left(89-1.96 \cdot \frac{1.8}{\sqrt{9}};\ 89+1.96 \cdot \frac{1.8}{\sqrt{9}}\right);\ \ (89-1.96 \cdot 0.6;\ 89+1.96 \cdot 0.6);$

$(89-1.176;\ 89+1.176).$

$$\underline{I.C._{95\,\%}=(87.824;\ 90.176).}$$

El intervalo de confianza para la media de la población es de $\mathbf{(87.824;\ 90.176)}$

Datos: $\sigma=1.8;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}}=1.96;\ \ E=1.$

Siendo $E=z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ \Rightarrow\ \sqrt{n}=z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\ \Rightarrow n=\left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2=\left(1.96 \cdot \frac{1.8}{1}\right)^2=$

$=(1.96 \cdot 1.8)^2=3.528^2=12.447.$

$$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ \mathbf{13}\ tarros.}$$