

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II Selectividad 2020

Comunidad autónoma de:

MADRID



www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Javier Rodrigo Hitos





UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS
UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO

Curso 2019-2020

CONVOCATORIA
EXTRAORDINARIA
DE
SEPTIEMBRE

MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INSTRUCCIONES Y CRITERIOS GENERALES DE CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a cinco preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.

TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada pregunta se calificará sobre 2 puntos.

A.1. (2 puntos)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a :

$$\left. \begin{aligned} x + ay &= 0 \\ x + 2z &= 0 \\ x + ay + (a+1)z &= a \end{aligned} \right\}$$

- Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a .
- Resuelva el sistema para $a = 0$.

A.2. (2 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{4x - x^3}{3x + x^2} + 4$$

- Calcule el dominio de la función y obtenga el valor que hay que asignar a $f(x)$ en $x = 0$ para que la función anterior sea continua en este punto.
- Obtenga las asíntotas de esta función en caso de que existan.

A.3. (2 puntos)

Se considera la función real de variable real

$$f(x) = -x^4 + x^3 + 2x^2$$

- Determine la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = -1$.
- Obtenga el área del recinto acotado delimitado por la función $f(x)$ y el eje de abscisas para valores de $x > 0$.

A.4. (2 puntos)

Una asociación de senderismo ha programado tres excursiones para el mismo fin de semana. El 40 % de los socios irá al nacimiento del río Cuervo, el 35 % a las Hoces del río Duratón y el resto al Cañón del río Lobos. La probabilidad de lluvia en cada una de estas zonas se estima en 0,5, 0,6 y 0,45, respectivamente. Elegido un socio al azar:

- Calcule la probabilidad de que en su excursión no llueva.
- Si en la excursión realizada por este socio ha llovido, ¿cuál es la probabilidad de que este socio haya ido al nacimiento del río Cuervo?

A.5. (2 puntos)

La publicidad de una marca de bolígrafos afirma que escriben 2 km. Para realizar un control de calidad, se considera que la longitud de escritura de estos bolígrafos puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media μ km y desviación típica 0,5 km.

- Obtenga el número mínimo de bolígrafos que deberían seleccionarse en una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral, sea como mucho 0,05 km con un nivel de confianza del 95,44 %.
- Si la longitud media de escritura, μ , es la anunciada en la publicidad, calcule la probabilidad de que, con una muestra de 16 bolígrafos elegidos al azar, se puedan escribir más de 30 km.

B.1. (2 puntos)

Se considera la matriz A dada por

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- a) Calcule el valor del parámetro real m para que $A^2 - 5A = -4I$, siendo I la matriz identidad.
 b) Para $m = 1$, indique si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.

B.2. (2 puntos)

La región del plano S está definida por las siguientes expresiones:

$$x \geq 3, \quad 0 \leq y \leq 15, \quad y - 5 + \frac{x}{2} \geq 0, \quad y - x \leq 10, \quad y + 20 \geq 2x$$

- a) Determine las coordenadas de sus vértices y represente en el plano la región S .
 b) Obtenga el valor máximo y el valor mínimo de la función $f(x, y) = x + y$ en esta región, indicando los puntos en los cuales se alcanzan estos valores.

B.3. (2 puntos)

Se considera la función real de variable real dada por la siguiente expresión:

$$f(x) = 3(x + k)e^{\frac{-x}{2}}$$

- a) Indique el dominio de la función y obtenga razonadamente el valor del parámetro real k para que la tangente a la función en el punto de abscisa $x = 1$ sea horizontal. Determine también la ecuación de la recta tangente a la función en dicho punto.
 b) Para $k = 1$, señale los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

B.4. (2 puntos)

Un estudio sobre la obsolescencia programada en una marca de electrodomésticos reveló que la probabilidad de que un microondas se estropee durante el período de garantía es 0,02. Esta probabilidad se eleva a 0,05 para sus hornos eléctricos y se sabe que estos sucesos son independientes. Cuando el microondas se ha estropeado en el período de garantía, la marca amplía esta por dos años más. El 40 % de los clientes con garantía ampliada no conserva la factura de compra durante los dos años de ampliación.

- a) Un cliente compra un horno y un microondas de esta marca. Obtenga la probabilidad de que se estropee al menos uno de ellos durante el período de garantía.
 b) Un cliente ha comprado un microondas. Calcule la probabilidad de que se le estropee durante el período de garantía y conserve la factura durante los dos años de ampliación.

B.5. (2 puntos)

Determinado modelo de lavadora tiene un programa de lavado con un consumo de agua que puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal cuya desviación típica es de 7 litros.

- a) En una muestra aleatoria simple de 10 lavadoras los consumos de agua en un lavado con este programa fueron los siguientes:

40 45 38 44 41 40 35 50 40 37

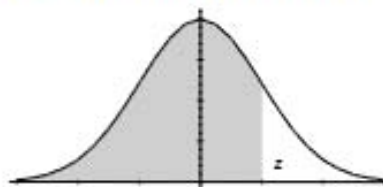
Construya el intervalo de confianza al 90 % para estimar el consumo medio de agua de este modelo de lavadoras con dicho programa de lavado.

- b) A partir de una muestra de 64 lavadoras elegidas al azar, se obtuvo un intervalo de confianza para la media con una longitud de 5 litros. Obtenga el nivel de confianza utilizado para construir el intervalo.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR

Los valores en la tabla representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo de z .



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

ATENCIÓN: La calificación debe hacerse en múltiplos de 0,25 puntos

OPCIÓN A**Ejercicio 1.** (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Cálculo correcto de los valores críticos 0,50 puntos.

Discusión correcta 0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Solución correcta del sistema 1,00 punto.

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Determinación correcta del dominio 0,25 puntos.

Planteamiento correcto de la condición de continuidad 0,25 puntos.

Cálculo correcto del límite 0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto

Obtención correcta de la asíntota vertical 0,50 puntos.

Obtención correcta de la asíntota oblicua 0,50 puntos.

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Expresión correcta de la ecuación de la recta tangente 0,25 puntos.

Cálculo correcto de la pendiente de la tangente 0,50 puntos.

Ecuación correcta de la recta tangente 0,25 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Planteamiento correcto de la integral y los límites de integración 0,25 puntos.

Cálculo correcto de la integral indefinida 0,50 puntos.

Cálculo correcto de la integral definida 0,25 puntos.

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Planteamiento correcto de la probabilidad 0,50 puntos.

Cálculo correcto de la probabilidad 0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Planteamiento correcto de la probabilidad 0,50 puntos.

Cálculo correcto de la probabilidad 0,50 puntos.

Ejercicio 5. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Cálculo correcto de $z_{\alpha/2}$ 0,25 puntos.

Expresión correcta de la fórmula del error 0,25 puntos.

Determinación correcta del tamaño de la muestra 0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Expresión de la distribución de la media muestral 0,25 puntos.

Tipificación correcta de la variable 0,25 puntos.

Obtención correcta de la probabilidad 0,50 puntos.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Cálculo correcto de los términos de la ecuación0,50 puntos.

Obtención correcta del parámetro.....0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Planteamiento correcto de la inversa0,25 puntos.

Cálculo correcto de la inversa0,75 puntos

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Representación correcta de la región factible0,50 puntos.

Obtención correcta de los vértices0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Encontrar el punto de valor máximo (abscisa y ordenada).....0,25 puntos

Determinar máximo de la función0,25 puntos.

Encontrar el punto de valor mínimo (abscisa y ordenada)0,25 puntos

Determinar mínimo de la función.....0,25 puntos.

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto

Obtención correcta del dominio0,25 puntos.

Obtención correcta de la derivada0,25 puntos.

Obtención correcta del parámetro.....0,25 puntos.

Obtención correcta de la recta tangente.....0,25 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Planteamiento correcto0,25 puntos

Determinación correcta de los intervalos0,75 puntos.

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Planteamiento correcto de la probabilidad0,50 puntos.

Cálculo correcto de la probabilidad.....0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Planteamiento correcto de la probabilidad0,50 puntos.

Cálculo correcto de la probabilidad.....0,50 puntos.

Ejercicio 5. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Cálculo correcto de $\bar{x}$ 0,25 puntos.Cálculo correcto de $z_{\alpha/2}$ 0,25 puntos.

Expresión correcta de la fórmula del intervalo de confianza.....0,25 puntos.

Determinación correcta del intervalo0,25 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Expresión correcta de la fórmula del error0,25 puntos.

Cálculo correcto de $z_{\alpha/2}$ 0,25 puntos

Obtención correcta del nivel de confianza.....0,50 puntos.

SOLUCIONES DE LA CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

REPERTORIO 5. OPCIÓN A

Problema A.1:

Se considera el sistema de ecuaciones lineales
$$\left. \begin{array}{l} x + ay = 0 \\ x + 2z = 0 \\ x + ay + (a+1)z = a \end{array} \right\},$$
 dependiente del parámetro real a :

- a) Discute el sistema en función de los valores del parámetro a .
b) Resuelva el sistema para $a = 0$.

Solución:

a) Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & a & a+1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & a & a+1 & a \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & a & a+1 \end{vmatrix} = 2a - 2a - a(a+1) = 0 \Rightarrow a_1 = 0, a_2 = -1.$$

Si $a \neq 0$ y $a \neq -1$ el rango de la matriz de los coeficientes es 3, igual al rango de la matriz ampliada e igual a número de incógnitas, por lo que el sistema es compatible y determinado.

Si $a = 0 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ El rango de la matriz M es 2, igual al rango de M' y menor al número de incógnitas, por lo que el sistema es compatible indeterminado.

Si $a = -1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow$ El rango de la matriz ampliada es 3, distinto al de la matriz de los coeficientes que es 2, luego el sistema es incompatible.

Si $a \neq 0$ o $a \neq -1$ el sistema es compatible y determinado. Si $a = 0$ el sistema es compatible indeterminado. Si $a = -1$ el sistema es incompatible.

b) Para $a = 0$ el sistema resulta: $\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ x + 2z = 0 \\ x + z = 0 \end{array} \right\}$, que es compatible indeterminado. Sustituimos $x = 0$ en la tercera ecuación, con lo que queda $x = z = 0$. La solución es:

$$x = 0; \quad y = \lambda; \quad z = 0, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Problema A.2:

Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = \frac{4x-x^3}{3x+x^2} + 4$.

a) Calcule el dominio de la función y obtenga el valor que hay que asignar a $f(x)$ en $x = 0$ para que la función anterior sea continua en este punto.

b) Obtenga las asíntotas de esta función en caso de que existan.

Solución:

a) La función es racional. Su denominador se anula en:

$$x^2 + 3x = 0; \quad x(x+3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -3$$

$$D(f) \Rightarrow \mathbb{R} - \{-3, 0\}$$

Estudiamos la continuidad en $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x-x^3}{3x+x^2} + 4 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^3+4x^2-16x}{3x+x^2} =$$

que es indeterminado, pues se anula el numerador y el denominador. Dividimos por x numerador y denominador.

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x(x^2-4x+16)}{x(x+3)} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-4x+16}{x+3} = -\frac{16}{3}.$$

La función no está definida en $x = 0$. Si asignamos a $f(0)$ el valor $-\frac{16}{3}$ la función anterior será continua en este punto. Para que la función sea continua para $x = 0$ debe redefinirse así:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4x-x^3}{3x+x^2} + 4 & \text{si } x \neq 0 \\ -\frac{16}{3} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

b) Hemos visto que $x = 0$ no es una asíntota vertical.

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{-(-3)^3+4 \cdot (-3)^2-16 \cdot (-3)}{3 \cdot (-3)+(-3)^2} = \frac{27+36+48}{-9+9} = \infty. \text{ Luego:}$$

$x = -3$ es una asíntota vertical.

Asíntotas horizontales:

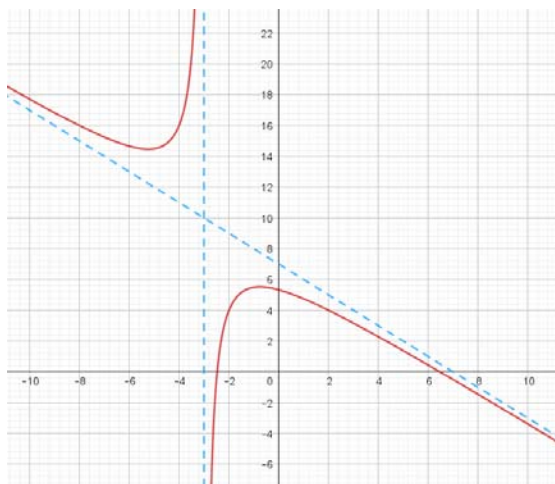
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^3+4x^2-16x}{3x+x^2} = -\infty. \text{ No hay asíntota horizontal}$$

Las asíntotas oblicuas son de la forma $y = mx + n$, siendo: $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ y $n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx]$, con m finito y $m \neq 0$.

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{-x^3+4x^2-16x}{3x+x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^3+4x^2-16x}{3x^2+x^3} = -1.$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-x^3+4x^2-16x}{3x+x^2} + x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^3+4x^2-16x+3x^2+x^3}{3x+x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2-16x}{3x+x^2} = 7.$$

Asíntota oblicua: $y = -x + 7$



Problema A.3:

Se considera la función real de variable real $f(x) = -x^4 + x^3 + 2x^2$.

- a) Determine la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = -1$.
 b) Obtenga el área del recinto acotado delimitado por la función $f(x)$ y el eje de abscisas para valores de $x > 0$.

Solución:

- a) El punto de tangencia es el siguiente:

$$f(-1) = -(-1)^4 + (-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 = -1 - 1 + 2 = 0 \Rightarrow P(-1, 0).$$

La pendiente de la tangente de una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto:

$$f'(x) = -4x^3 + 3x^2 + 4x \rightarrow m = f'(-1) = -4 \cdot (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) = 4 + 3 - 4 = 3.$$

La ecuación de la recta punto-pendiente es $y - y_0 = m(x - x_0)$:

$$y - 0 = 3 \cdot (x + 1) = 3x + 3.$$

La recta tangente es: $y = 3x + 3$

- b) Los puntos de corte de $f(x)$ en $[0, +\infty]$ son los siguientes:

$$f(x) = 0 \Rightarrow -x^4 + x^3 + 2x^2 = 0; -x^2(x^2 - x - 2) = 0; x_1 = x_2 = 0.$$

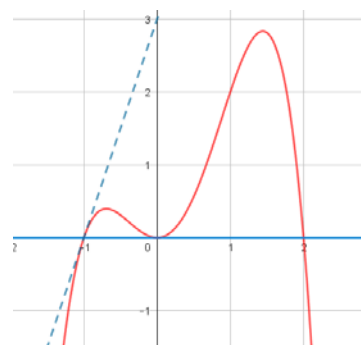
$$x^2 - x - 2 = 0; x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow x_3 = -1, x_4 = 2 \Rightarrow$$

Como nos dicen que $x > 0$ los puntos son: $O(0, 0), A(2, 0)$.

El área es:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^2 f(x) \cdot dx = \int_0^2 (-x^4 + x^3 + 2x^2) \cdot dx = \left[-\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} \right]_0^2 = \left(-\frac{2^5}{5} + \frac{2^4}{4} + \frac{2 \cdot 2^3}{3} \right) - 0 = \\ &= -\frac{32}{5} + 4 + \frac{16}{3} = \frac{-96+60+80}{15} = \frac{44}{15}. \end{aligned}$$

$$\text{Área} = \frac{44}{15} u^2 \cong 2.93 u^2$$



Problema A.4:

Una asociación de senderismo ha programado tres excursiones para el mismo fin de semana. El 40 % de los socios irá al nacimiento del río Cuervo, el 35 % a las Hoces del río Duratón y el resto al Cañón del río Lobos. La probabilidad de lluvia en cada una de estas zonas se estima en 0.5, 0.6 y 0.45, respectivamente. Elegido un socio al azar:

a) Calcule la probabilidad de que en su excursión no llueva.

b) Si en la excursión realizada por este socio ha llovido, ¿cuál es la probabilidad de que este socio haya ido al nacimiento del río Cuervo?

Solución:

a) Llamamos Ll al suceso que llueva, y C , H y L a los sucesos ir al nacimiento del río Cuervo, ir a las Hoces del río Duratón, y L ir al cañón del río Lobo.

Representamos los datos en una tabla:

	C	H	L	
Ll	$0.40 \cdot 0.50 = 0.2$	$0.35 \cdot 0.40 = 0.21$	$0.25 \cdot 0.55 = 0.1125$	0.5225
$\overline{Ll}$	0.2	0.14	0.1375	0.4775
	0.4	0.35	0.25	1

$$P(\overline{Ll}) = P(C \cap \overline{Ll}) + P(H \cap \overline{Ll}) + P(L \cap \overline{Ll}) = P(C) \cdot P(\overline{Ll}/C) + P(H) \cdot P(\overline{Ll}/H) + P(L) \cdot P(\overline{Ll}/L) = 0.2 + 0.14 + 0.1375 = 0.4775$$

La probabilidad de que no llueva es **0.4777**.

b) Nos piden ahora una probabilidad condicionada:

$$P = P(C/Ll) = \frac{P(C \cap Ll)}{P(Ll)} = \frac{0.40 \cdot 0.50}{0.5225} = \frac{0.2000}{0.5225} = 0.3828.$$

Ha llovido, la probabilidad de que este socio haya ido al nacimiento del río Cuervo, es **0.3828**.

Problema A.5:

La publicidad de una marca de bolígrafos afirma que escriben 2 km. Para realizar un control de calidad, se considera que la longitud de escritura de estos bolígrafos puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media μ km y desviación típica de 0.5 km.

a) Obtenga el número mínimo de bolígrafos que deberían seleccionarse en una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral, sea como mucho 0.05 km con un nivel de confianza del 95.44 %.

b) Si la longitud media de escritura, μ , es la anunciada en la publicidad, calcule la probabilidad de que, con una muestra de 16 bolígrafos elegidos al azar, se pueda escribir más de 30 km.

Solución:

a) Para un nivel de confianza del 95.44 % es:

$$1 - \alpha = 0.9544 \rightarrow \alpha = 1 - 0.9544 = 0.0456 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.0228} = 2. \quad (1 - 0.0228 = 0.9772 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2).$$

$$\text{Sabemos que: } \sigma = 0.5; \quad z_{\frac{\alpha}{2}} = 2; \quad E = 0.05.$$

$$\text{Ya que } E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \right)^2 = \left(2 \cdot \frac{0.5}{0.05} \right)^2 = (2 \cdot 10)^2 = 20^2 = 400.$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser de **400** bolígrafos.

b) Si con 16 bolígrafos se escriben 30 km, con uno se escribirán: $\frac{30}{16} = 1.875 \text{ km}$.

Ahora sabemos: $\mu = 2$; $n = 16$; $\sigma = 0.5$.

La suma de lo que escriben 16 bolígrafos es una normal:

$$X \rightarrow N\left(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(2; \frac{0.5}{\sqrt{16}}\right) = N\left(2; \frac{0.5}{4}\right) = N(2; 0.125).$$

$$\text{Tipificando la variable: } Z = \frac{X-2}{0.125}.$$

$$P = P(X > 1.875) = P\left(Z > \frac{1.875-2}{0.125}\right) = P\left(Z > \frac{-0.125}{0.125}\right) = P(Z > -1) = P(Z \leq 1) = 0.8413.$$

La probabilidad de que con esa muestra se puedan escribir más de 16 km es **0.8413**.

SOLUCIONES DE LA CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

REPERTORIO 5. OPCIÓN B

Problema B.1:

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calcule el valor del parámetro real m para que $A^2 - 5A = -4I$, siendo I la matriz identidad.

b) Para $m = 1$, indique si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.

Solución:

$$a) A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & m+1 & 10 \\ 0 & m^2 & 0 \\ 5 & -m-1 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$-5A = -5 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & -5 & -10 \\ 0 & -5m & 0 \\ -5 & 5 & -10 \end{pmatrix}.$$

$$A^2 - 5A = -4I \Rightarrow \begin{pmatrix} 11 & m+1 & 10 \\ 0 & m^2 & 0 \\ 5 & -m-1 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -15 & -5 & -10 \\ 0 & -5m & 0 \\ -5 & 5 & -10 \end{pmatrix} = -4I \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -4 & m-4 & 0 \\ 0 & m^2-5m & 0 \\ 0 & -m+4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{matrix} m-4=0 \\ m^2-5m=-4 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$m = 4$$

b) Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$\text{Para } m = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \quad |A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 2 = 4 \neq 0 \Rightarrow$$

Por lo tanto, la matriz es invertible.

Podemos obtener la inversa por distintos procedimientos, como por el método de Gauss-Jordan.

$$\begin{aligned} (A|I) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\{F_3 \leftrightarrow F_1\}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\{F_3 \rightarrow F_3 - 3F_1\}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 1 & 0 & -3 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{\left\{ \begin{matrix} F_1 \rightarrow F_1 + F_2 \\ F_3 \rightarrow F_3 - 4F_2 \end{matrix} \right\}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & -4 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{\{F_3 \rightarrow \frac{1}{4}F_3\}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -1 & \frac{3}{4} \end{array} \right) \xrightarrow{\{F_1 \rightarrow F_1 - 2F_3\}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -1 & \frac{3}{4} \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/4 & 1 & 3/4 \end{pmatrix}$$

Problema B.2:

La región del plano S está definida por las siguientes expresiones:

$$x \geq 3; \quad 0 \leq y \leq 15; \quad y - 5 + \frac{x}{2} \geq 0; \quad y - x \leq 10; \quad y + 20 \geq 2x.$$

a) Determine las coordenadas de sus vértices y represente en el plano la región S .

b) Obtenga el valor máximo y el valor mínimo de la función $f(x) = x + y$ en esta región, indicando los puntos en los cuales se alcanzan estos valores.

Solución:

a) Vamos calculando los puntos de intersección de todas las rectas y obtenemos los vértices.

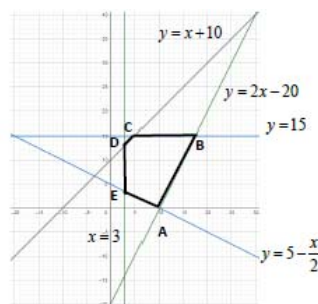
$$A \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 10 \\ 2x - y = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 10 \\ 4x - 2y = 40 \end{cases} \Rightarrow 5x = 50; \\ x = 10; \quad y = 0 \Rightarrow A(10, 0).$$

$$B \Rightarrow \begin{cases} y = 15 \\ 2x - y = 20 \end{cases} \Rightarrow 2x = 35 \Rightarrow B\left(\frac{35}{2}, 15\right).$$

$$C \Rightarrow \begin{cases} y = 15 \\ x - y = -10 \end{cases} \Rightarrow x = 5 \Rightarrow C(5, 15).$$

$$D \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x - y = -10 \end{cases} \Rightarrow y = 13 \Rightarrow D(3, 13).$$

$$E \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x + 2y = 10 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{7}{2} \Rightarrow E\left(3, \frac{7}{2}\right).$$



$$\begin{cases} y = 5 - \frac{x}{2} \\ y = 2x - 20 \end{cases} \Rightarrow A(10, 0)$$

$$\begin{cases} y = 15 \\ y = 2x - 20 \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{35}{2}, 15\right)$$

$$\begin{cases} y = 15 \\ y = x + 10 \end{cases} \Rightarrow C(5, 15)$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = x + 10 \end{cases} \Rightarrow D(3, 13)$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 5 - \frac{x}{2} \end{cases} \Rightarrow E\left(3, \frac{7}{2}\right)$$

Los vértices son: $A(10, 0)$; $B\left(\frac{35}{2}, 15\right)$; $C(5, 15)$; $D(3, 13)$; $E\left(3, \frac{7}{2}\right)$.

b) La función de objetivos es la siguiente: $f(x, y) = x + y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son:

$$A \Rightarrow f(10, 0) = 10 + 0 = 10.$$

$$E \Rightarrow f\left(3, \frac{7}{2}\right) = 3 + \frac{7}{2} = \frac{13}{2} = 6.5.$$

$$D \Rightarrow f(3, 13) = 3 + 13 = 16.$$

$$C \Rightarrow f(5, 15) = 5 + 15 = 20.$$

$$B \Rightarrow f\left(\frac{35}{2}, 15\right) = \frac{35}{2} + 15 = \frac{65}{2} = 32.5.$$

El máximo valor, **32.5**, se obtiene en el punto $\left(\frac{35}{2}, 15\right)$, y el mínimo valor, **6.5**, se obtiene en el punto $\left(3, \frac{7}{2}\right)$.

Problema B.3:

Se considera la función real de variable real $f(x) = 3 \cdot (x + k) \cdot e^{-\frac{x}{2}}$.

a) Indique el dominio de la función y obtenga razonadamente el valor del parámetro real k para que la tangente a la función en el punto de abscisa $x = 1$ sea horizontal. Determine también la ecuación de la recta tangente a la función en dicho punto.

b) Para $k = 1$, señale los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

Solución:

a) La función es producto de una función polinómica y una función exponencial, ambas continuas y están definidas en toda la recta real.

$$D(f) = \mathbb{R}$$

La pendiente de la tangente de una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto.

$$f'(x) = 3 \left[e^{-\frac{x}{2}} - (x + k) \cdot \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} \right] = 3e^{-\frac{x}{2}} \left(1 - \frac{x+k}{2} \right) = \frac{3}{2} e^{-\frac{x}{2}} \cdot (2 - x - k).$$

$$m = f'(1) = \frac{3}{2} e^{-\frac{1}{2}} \cdot (2 - 1 - k) = -\frac{3e(1-k)}{2\sqrt{e}}.$$

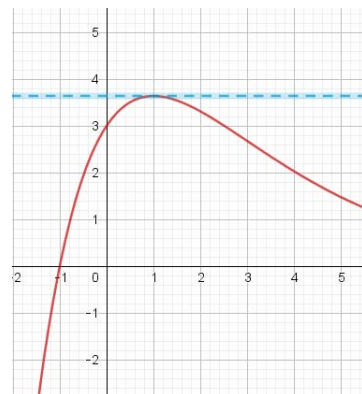
Para que la recta sea horizontal, su pendiente debe ser cero:

$$m = 0 \Rightarrow -\frac{3e(1-k)}{2\sqrt{e}} = 0; \quad 1 - k = 0 \Rightarrow k = 1.$$

$$k = 1$$

El punto de tangencia, para $x = 1$ y $k = 1$, el siguiente:

$$f(1) = 3(1 + 1) \cdot e^{-\frac{1}{2}} = \frac{6}{\sqrt{e}} = \frac{6\sqrt{e}}{e} \Rightarrow P \left(1, \frac{6\sqrt{e}}{e} \right).$$



$$\text{La recta tangente es: } y = \frac{6\sqrt{e}}{e}$$

b) Para $k = 1$ la función es $f(x) = 3 \cdot (x + 1) \cdot e^{-\frac{x}{2}}$.

Una función es creciente en los puntos en los que su primera derivada es positiva y decreciente si es negativa.

$$f'(x) = \frac{3}{2} e^{-\frac{x}{2}} \cdot (2 - x - 1) = \frac{3}{2} e^{-\frac{x}{2}} \cdot (1 - x).$$

La función exponencial es siempre positiva, luego el signo de la derivada nos lo da el factor $(1 - x)$. Si $x < 1 \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f$ creciente. Si $x > 1 \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f$ decreciente.

En $(-\infty, 1)$ es creciente y en $(1, +\infty)$, decreciente.

Problema B.4:

Un estudio sobre la obsolescencia programada en una marca de electrodomésticos reveló que la probabilidad de que un microondas se estropee durante el período de garantía es 0.02. Esta probabilidad se eleva a 0.05 para sus hornos eléctricos y se sabe que estos sucesos son independientes. Cuando el microondas se ha estropeado en el período de garantía, la marca amplía ésta por dos años más. El 40 % de los clientes con garantía ampliada no conserva la factura de compra durante los dos años de ampliación.

a) Un cliente compra un horno y un microondas de esta marca. Obtenga la probabilidad de que se estropee al menos uno de ellos durante el período de garantía.

b) Un cliente ha comprado un microondas. Calcule la probabilidad de que se le estropee durante el período de garantía y conserve la factura durante los dos años de ampliación.

Solución:

a) Llamamos M al suceso en que el microondas se estropea en el periodo garantía. Llamamos P al suceso en que el horno se estropea en el periodo garantía. Y llamamos F al suceso que el cliente conserve la factura.

Todos los sucesos son independientes.

Sabemos que la probabilidad de que se estropee el microondas es $P(M) = 0.02$. Y la probabilidad de que se estropee el horno es $P(H) = 0.05$.

Utilizamos el suceso contrario. El suceso contrario a “que se estropee al menos uno de ellos” es “que no se estropee ninguno”, por lo cual, la probabilidad pedida es la siguiente:

$$P = 1 - P(\overline{M}) \cdot P(\overline{H}) = 1 - (1 - 0.02) \cdot (1 - 0.05) = 1 - 0.98 \cdot 0.95 = 1 - 0.931 = 0.069$$

Otra forma:

$$P(M \cap F) = P(M) + P(H) - P(M \cap H) = 0.02 + 0.05 - 0.02 \cdot 0.05 = 0.07 - 0.001 = 0.069$$

La probabilidad de que se estropee al menos uno ellos en el periodo de garantía es **0.069**

b) La probabilidad de conservar la factura es $P(F) = 1 - 0.4 = 0.6$.

Son sucesos independientes

La probabilidad pedida es $P(M \cap F) = 0.02 \cdot 0.6 = 0.012$

La probabilidad de que se le estropee durante el período de garantía y conserve la factura es **0.012**

Problema B.5:

Determinado modelo de lavadora tiene un programa de lavado con un consumo de agua que puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal cuya desviación típica es de 7 litros.

a) En una muestra aleatoria simple de 10 lavadoras los consumos de agua en un lavado con este programa fueron los siguientes: 40, 45, 38, 44, 41, 40, 35, 50, 40 y 37. Construya el intervalo de confianza al 90 % para estimar el consumo medio de agua del modelo de lavadoras con dicho programa de lavado.

b) A partir de una muestra de 64 lavadoras elegidas al azar, se obtuvo un intervalo de confianza para la media con una longitud de 5 litros. Obtenga el nivel de confianza utilizado para construir el intervalo.

Solución:

a) La variable X indica el consumo de agua en dicho programa. Nos dicen que $\sigma = 7$. Calculamos la media de la muestra:

$$\bar{x} = \frac{40+45+38+44+41+40+35+50+40+37}{10} = \frac{410}{10} = 41.$$

Para un nivel de confianza del 90 % es:

$$1 - \alpha = 0.90 \rightarrow \alpha = 1 - 0.90 = 0.10 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.05} = 1.645. (1 - 0.05 = 0.9500 \rightarrow z = 1.645).$$

Por tanto, sabemos que: $n = 10$; $\bar{x} = 41$; $\sigma = 7$; $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.645$.

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\bar{x}$, σ y n , es la siguiente:

$$\left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right).$$

$$\left(41 - 1.645 \cdot \frac{7}{\sqrt{10}}, 41 + 1.645 \cdot \frac{7}{\sqrt{10}} \right) \rightarrow (41 - 1.645 \cdot 2.2136, 41 + 1.645 \cdot 2.2136) \rightarrow$$

$$(41 - 3.6414, 41 + 3.6414) \rightarrow (37.3586, 44.6414)$$

El intervalo de confianza pedido es: **(37.3586, 44.6414)**

b) El error máximo es la mitad del intervalo de confianza: $E = \frac{5}{2} = 2.5$.

Ahora los datos son: $n = 64$; $\sigma = 7$; $E = 2.5$.

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{E \cdot \sqrt{n}}{\sigma} = \frac{2.5 \cdot \sqrt{64}}{7} = \frac{2.5 \cdot 8}{7} = 2.86.$$

Buscando en la tabla $N(0, 1)$, al valor 2.86 le corresponde 0.9979, por lo tanto:

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 0.9979; \frac{\alpha}{2} = 1 - 0.9979 = 0.0021 \Rightarrow \alpha = 0.0042; 1 - \alpha = 1 - 0.0042 = 0.9958.$$

Se ha utilizado un nivel de confianza del **99.58 %** para construir el intervalo

	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso 2019-2020 MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE SEPTIEMBRE
INSTRUCCIONES Y CRITERIOS GENERALES DE CALIFICACIÓN Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a <u>cinco</u> preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen. TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada pregunta se calificará sobre 2 puntos.		

A.1. (2 puntos)

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 5a \\ a & 3 \end{pmatrix}$ con $a \in \mathbb{R}$.

- a) Determine los valores del parámetro a para los que se verifica la igualdad $A^2 - 5A = -I$, donde I es la matriz identidad.
 b) Calcule A^{-1} para $a = -1$.

A.2. (2 puntos)

Un vivero elabora dos tipos de sustratos. Para elaborar 1 m^3 del tipo A necesita 60 kg de tierra vegetal y 30 horas de trabajo. Para elaborar 1 m^3 del tipo B necesita 50 kg de tierra vegetal y 50 horas de trabajo. El vivero dispone como máximo de 21000 kg de tierra vegetal y 15000 horas de trabajo. Además, la cantidad de metros cúbicos que elabora de tipo A debe ser como mucho cinco veces la cantidad de tipo B. Por la venta de cada metro cúbico de tipo A obtiene un beneficio de 50 € y 60 € por cada metro cúbico de tipo B.

- a) Represente la región del plano determinada por las restricciones anteriores y determine las coordenadas de sus vértices.
 b) Determine cuántos metros cúbicos de cada tipo deben elaborarse para, respetando las restricciones anteriores, maximizar el beneficio. Obtenga el valor del beneficio máximo.

A.3. (2 puntos)

Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} \frac{6x}{2x^2 + 1} & \text{si } x < 1 \\ 2m + \ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- a) Estudie los valores del parámetro $m \in \mathbb{R}$ para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$ y calcule la derivada de la función para $x < 1$.
 b) Halle el área de la región del plano limitada por la curva $y = f(x)$, las rectas $x = -1$ y $x = 0$ y el eje OX .

A.4. (2 puntos)

Sean A y B sucesos de un experimento aleatorio tales que: $P(A|B) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{6}$ y $P(A) = \frac{2}{3}$. Calcule:

- a) $P(A \cup \overline{B})$.
 b) $P((\overline{A} \cap B) \cup (\overline{B} \cap A))$.

Nota: $\overline{S}$ denota el suceso complementario del suceso S .

A.5. (2 puntos)

El peso de una patata, en gramos (g), de una remesa que llega a un mercado se puede aproximar por una variable aleatoria X con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 60$ g.

- a) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor que 20 g, con un nivel de confianza del 95 %.
 b) Suponiendo que se selecciona una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 100$, calcule el valor de la media μ para que $P(\overline{X} \leq 220) = 0,9940$.

B.1. (2 puntos)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left. \begin{aligned} x - ay &= 1 \\ ax - 4y - z &= 2 \\ 2x + ay - z &= a - 4 \end{aligned} \right\}$$

- a) Discuta el sistema para los diferentes valores de a .
b) Resuelva el sistema para $a = 3$.

B.2. (2 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{ax^2 - 3}{x^2 - 5}$$

- a) Calcule el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que $f(x)$ tenga una asíntota horizontal en $y = -1$.
b) Para $a = 1$, halle los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y los extremos relativos, si existen.

B.3. (2 puntos)

Dada la función real de variable real

$$f(x) = e^{2x} + x$$

- a) Determine la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 0$.
b) Calcule

$$\int_0^1 f(x) dx$$

B.4. (2 puntos)

En un instituto se decide que los alumnos y alumnas solo pueden utilizar un único color (azul o negro) al realizar los exámenes. Dos de cada tres exámenes están escritos en azul. La probabilidad de que un examen escrito en azul sea de una alumna es de 0,7. La probabilidad de que un examen esté escrito en negro y sea de un alumno es 0,2. Se elige un examen al azar. Determine la probabilidad de que

- a) Sea el examen de un alumno.
b) Sabiendo que está escrito en negro, sea de un alumno.

B.5. (2 puntos)

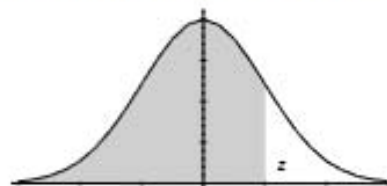
Una persona se ha propuesto salir a caminar todos los días realizando el mismo recorrido y cronometrando el tiempo que tarda en completarlo. El tiempo que está caminando por este recorrido puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal cuya desviación típica es 10 minutos.

- a) Utilizando la información de una muestra aleatoria simple, se ha obtenido el intervalo de confianza (26,9, 37,1), expresado en minutos, para estimar el tiempo medio que tarda en realizar el recorrido, μ , con un nivel de confianza del 98,92 %. Obtenga el tamaño de la muestra elegida y el valor de la media muestral.
b) Si el tiempo medio para completar el recorrido es $\mu = 30$ minutos, calcule la probabilidad de que, en una muestra de 16 días elegidos al azar, esta persona tarde entre 25 y 35 minutos de media para completar el recorrido.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR

Los valores en la tabla representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo de z .



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II
CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

ATENCIÓN: La calificación debe hacerse en múltiplos de 0,25 puntos

Ejercicio A.1. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

- Cálculo correcto de los términos de la ecuación 0,50 puntos.
- Obtención correcta del parámetro 0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

- Planteamiento correcto de la inversa 0,25 puntos.
- Cálculo correcto de la inversa 0,75 puntos

Ejercicio A.2. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

- Expresión correcta de las restricciones 0,25 puntos.
- Representación correcta de la región factible 0,50 puntos.
- Obtención correcta de los vértices 0,25 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

- Expresión correcta de la función objetivo 0,25 puntos.
- Encontrar el punto de valor máximo (abscisa y ordenada) 0,50 puntos.
- Determinación correcta del máximo de la función 0,25 puntos.

Ejercicio A.3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

- Planteamiento correcto de la condición de continuidad 0,25 puntos.
- Obtención correcta del parámetro 0,25 puntos.
- Cálculo correcto de la derivada 0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

- Planteamiento correcto de la integral y los límites de integración 0,25 puntos.
- Cálculo correcto de la integral indefinida 0,50 puntos.
- Cálculo correcto de la integral definida 0,25 puntos

Ejercicio A.4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

- Planteamiento correcto de la probabilidad 0,50 puntos.
- Cálculo correcto de la probabilidad 0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

- Planteamiento correcto de la probabilidad 0,50 puntos.
- Cálculo correcto de la probabilidad 0,50 puntos.

Ejercicio A.5. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto

- Cálculo correcto de $z_{\alpha/2}$ 0,25 puntos.
- Expresión correcta de la fórmula del tamaño 0,25 puntos.
- Cálculo correcto del tamaño de la muestra 0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

- Expresión de la distribución de la media muestral 0,25 puntos.
- Tipificación correcta de la variable 0,25 puntos.
- Obtención correcta de la media 0,50 puntos.

Ejercicio B.1. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Cálculo correcto de los valores críticos.....	0,50 puntos.
Discusión correcta.....	0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Solución correcta del sistema.....	1,00 punto.
------------------------------------	-------------

Ejercicio B.2. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Planteamiento correcto del límite.....	0,25 puntos.
Resolución correcta del límite.....	0,50 puntos.
Obtención correcta del parámetro.....	0,25 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Cálculo correcto de la derivada.....	0,25 puntos.
Obtención de los intervalos de crecimiento y decrecimiento.....	0,50 puntos.
Obtención de los extremos relativos.....	0,25 puntos.

Ejercicio B.3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Expresión correcta de la ecuación de la recta tangente.....	0,25 puntos.
Cálculo correcto de la pendiente de la tangente.....	0,50 puntos.
Ecuación correcta de la recta tangente.....	0,25 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Cálculo correcto de la integral indefinida.....	0,50 puntos.
Cálculo correcto de la integral definida.....	0,50 puntos.

Ejercicio B.4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Planteamiento correcto de la probabilidad.....	0,50 puntos.
Cálculo correcto de la probabilidad.....	0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Planteamiento correcto de la probabilidad.....	0,50 puntos.
Cálculo correcto de la probabilidad.....	0,50 puntos.

Ejercicio B.5. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto

Cálculo correcto de $z_{\alpha/2}$	0,25 puntos.
Expresión correcta de la fórmula del tamaño.....	0,25 puntos.
Cálculo correcto del tamaño de la muestra.....	0,25 puntos.
Cálculo correcto de la media muestral.....	0,25 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Expresión de la distribución de la media muestral.....	0,25 puntos.
Tipificación correcta de la variable.....	0,25 puntos.
Obtención correcta de la probabilidad.....	0,50 puntos.

SOLUCIONES DE LA CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE SEPTIEMBRE

REPERTORIO 5. OPCIÓN A

Problema A.1:

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 5a \\ a & 3 \end{pmatrix}$, con $a \in \mathbb{R}$.

a) Determine los valores del parámetro a para los que se verifica la siguiente igualdad: $A^2 - 5A = -I$.

b) Calcule A^{-1} para $a = -1$.

Solución:

$$a) A^2 - 5A = -I \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 5a \\ a & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5a \\ a & 3 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5a \\ a & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 4 + 5a^2 & 25a \\ 5a & 9 + 5a^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 & -25a \\ -5a & -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 5a^2 - 6 & 0 \\ 0 & 5a^2 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow 5a^2 - 6 = -1; \quad 5a^2 = 5$$

Se verifica la igualdad para $a = +1$ y para $a = -1$.

$$b) \text{ Para } a = -1 \text{ es } A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}. |A| = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 5 = 1. \quad A^{-1} = \frac{\text{Adj.de } A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}{1}.$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Problema A.2:

Un vivero elabora dos tipos de sustratos. Para elaborar 1 m³ del tipo A necesita 60 kg de tierra vegetal y 30 horas de trabajo. Para elaborar 1 m³ del tipo B necesita 50 kg de tierra vegetal y 50 horas de trabajo. El vivero dispone como máximo de 21 000 kg de tierra vegetal y 15 000 horas de trabajo. Además, la cantidad de metros cúbicos que elabora del tipo A debe ser como mucho cinco veces la cantidad de tipo B. Por la venta de cada metro cúbico de tipo A obtiene un beneficio de 50 euros y 60 euros por cada metro cúbico de tipo B.

a) Represente la región del plano determinado por las restricciones anteriores y determine las coordenadas de sus vértices.

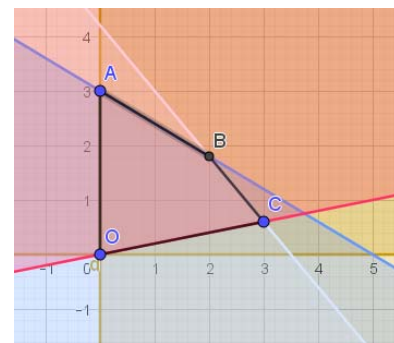
b) Determine cuántos metros cúbicos de cada tipo deben elaborarse para, respetando las restricciones anteriores, maximizar el beneficio. Obtenga el valor del beneficio máximo.

Solución:

a) Sean x e y los metros cúbicos que elabora el vivero de los tipos A y B, respectivamente.

Las restricciones son:

$$\left. \begin{array}{l} 60x + 50y \leq 21000 \\ 30x + 50y \leq 15000 \\ x \leq 5y \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 6x + 5y \leq 2.100 \\ 3x + 5y \leq 1.500 \\ x - 5y \leq 0 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$



Los vértices de la región factible son: **O(0,0); A(0,300); B(200,180); C(300,60).**

$$A \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 0 \\ 3x + 5y = 1.500 \end{array} \right\} \Rightarrow A(0, 300).$$

$$B \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 6x + 5y = 2.100 \\ 3x + 5y = 1.500 \end{array} \right\} \Rightarrow B(200, 180);$$

$$C \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 6x + 5y = 2.100 \\ x - 5y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow C(300, 60).$$

La función objetivo es la siguiente: $f(x, y) = 50x + 60y$.

b) Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$$A \Rightarrow f(0, 300) = 50 \cdot 0 + 60 \cdot 300 = 0 + 18000 = 18\,000.$$

$$B \Rightarrow f(200, 180) = 50 \cdot 200 + 60 \cdot 180 = 10000 + 10800 = 20\,800.$$

$$C \Rightarrow f(300, 60) = 50 \cdot 300 + 60 \cdot 60 = 15000 + 3600 = 18\,600.$$

El máximo se produce en el punto B(200, 180).

Deben elaborarse **200 m³** de A y **180 m³** de B para que el beneficio sea máximo, de **20 800 euros**

Problema A.3:

Se considera la función real de variable real $f(x) = \begin{cases} \frac{6x}{2x^2+1} & \text{si } x < 1 \\ 2m + Lx & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$.

a) Estudie los valores del parámetro $m \in \mathbb{R}$ para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$ y calcule la derivada de la función para $x < 1$.

b) Halle el área de la región del plano limitada por la curva $y = f(x)$, las rectas $x = -1$ y $x = 0$ y el eje OX.

Solución:

a) La función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, excepto para $x = 1$, cuya continuidad es dudosa y se va a determinar el valor real de m para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$\text{Para } x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x}{2x^2+1} = \frac{6}{3} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (2m + Lx) = 2m + 0 = 2m = f(1) \end{cases} \Rightarrow$$

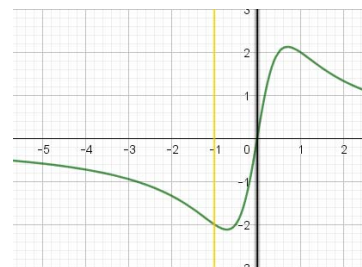
$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow 2 = 2m.$$

Para $m = 1$ la función es continua en toda la recta real.

Para $x < 1$ la función es $f(x) = \frac{6x}{2x^2+1}$; su derivada es la siguiente:

$$f'(x) = \frac{6 \cdot (2x^2+1) - 6x \cdot 4x}{(2x^2+1)^2} = \frac{12x^2+6-24x^2}{(2x^2+1)^2} = \frac{6-12x^2}{(2x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{6 \cdot (1 - 2x^2)}{(2x^2 + 1)^2}$$



b) En el intervalo $(-1, 0)$ la función es $f(x) = \frac{6x}{2x^2+1}$, que tiene todos sus valores negativos en este intervalo, por lo cual, la superficie pedida es la siguiente:

$$\text{Área} = \int_0^{-1} f(x) \cdot dx = \int_0^{-1} \frac{6x}{2x^2+1} \cdot dx \Rightarrow$$

Es una integral inmediata de Logaritmo. Hacemos un cambio de variable:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x^2 + 1 = t \\ 4x \cdot dx = dt \\ 6x \cdot dx = \frac{3}{2} \cdot dt \end{array} \right| \begin{array}{l} x = -1 \rightarrow t = 3 \\ x = 0 \rightarrow t = 1 \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Área} = \frac{3}{2} \cdot \int_1^3 \frac{1}{t} \cdot dt = \frac{3}{2} \cdot [Lt]_1^3 = \frac{3}{2} \cdot (L3 - L1) = \frac{3}{2} \cdot (L3 - 0) = \frac{3}{2} \cdot L3.$$

$$\text{Área} = \frac{3}{2} \cdot L3 u^2 \cong 1.65 u^2$$

Problema A.4:

Sean A y B sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(A/B) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{6}$ y $P(A) = \frac{2}{3}$. Calcule:

a) $P(A \cup \bar{B})$.

b) $P[(\bar{A} \cup B) \cup (\bar{B} \cup A)]$.

Nota: $\bar{S}$ denota el suceso complementario de S .

Solución:

a) Nos dicen que: $P(A/B) = \frac{1}{4}$, por tanto $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{1/6} = \frac{1}{4}$, luego

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$$

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

$$P(A \cap \bar{B}) = \frac{15}{24}$$

$$\begin{aligned} P(A \cup \bar{B}) &= P(A) + P(\bar{B}) - P(A \cap \bar{B}) = \frac{2}{3} + \left(1 - P(B)\right) - P(A \cap \bar{B}) = \frac{2}{3} + \frac{5}{6} - \frac{15}{24} = \frac{16 + 20 - 15}{24} \\ &= \frac{21}{24} = 0.875 \end{aligned}$$

$$P(A \cup \bar{B}) = \frac{21}{24}$$

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{24} = \frac{16 + 4 - 1}{24} = \frac{19}{24}$.

$$P[(\bar{A} \cup B) \cup (\bar{B} \cup A)] = P(A \cup B) - P(A \cap B) = \frac{19}{24} - \frac{1}{24} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$$

$$P[(\bar{A} \cup B) \cup (\bar{B} \cup A)] = \frac{3}{4}$$

Problema A.5:

El peso de una patata, en gramos (g), de una remesa que llega a un mercado se puede aproximar por una variable X con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 60$ g.

a) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor que 20 g, con un nivel de confianza del 95 %.

b) Suponiendo que se selecciona una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 100$, calcule el valor de la media μ para que $P(\bar{X} \leq 220) = 0.9940$.

Solución:

a) Para un nivel de confianza del 95 % es: $1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 1 - 0.95 = 0.05 \rightarrow$

$$z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.025} = 1.96. (1 - 0.025 = 0.9750 \rightarrow z = 1.96).$$

Datos: $\sigma = 60$; $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$; *Error máximo* < 20 .

$$\text{Siendo } E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 20 = 1.96 \cdot \frac{60}{\sqrt{n}} \rightarrow \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow$$

$$n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \right)^2 = \left(1.96 \cdot \frac{60}{20} \right)^2 = (1.96 \cdot 3)^2 = 5.88^2 = 34.5744.$$

El tamaño mínimo debe ser de 35 patatas

b) Datos: $\sigma = 60$; $n = 100$; $P(\bar{X} \leq 220) = 0.9940$.

$$\bar{X} = N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(\mu, \frac{60}{\sqrt{100}}\right) = N(\mu, 6). \text{ Tipificando } \rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \Rightarrow \frac{X-\mu}{6}.$$

$$P(\bar{X} \leq 220) = 0.9940 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{220-\mu}{6}\right) = 0.9940.$$

Buscando en la tabla $N(0, 1)$ a la inversa, a 0,940 le corresponde 2.51:

$$\frac{220-\mu}{6} = 2.51; 220 - \mu = 15.06; \mu = 220 - 15.06 = 204.94.$$

El peso medio de las patatas de la muestra es de 204.94 gramos

RESPUESTAS OPCIÓN B

Problema B.1:

Se considera el sistema
$$\begin{cases} x - ay = 1 \\ ax - 4y - z = 2 \\ 2x + ay - z = a - 4 \end{cases}$$
 dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

a) Discute el sistema para los diferentes valores de a .

b) Resuelva el sistema para $a = 3$.

Solución:

a) Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 \\ a & -4 & -1 \\ 2 & a & -1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 1 \\ a & -4 & -1 & 2 \\ 2 & a & -1 & a-4 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & -a & 0 \\ a & -4 & -1 \\ 2 & a & -1 \end{vmatrix} = 4 + 2a + a - a^2 = 0; \quad a^2 - 3a - 4 = 0; \quad a = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} \Rightarrow$$

$a_1 = -1, a_2 = 4$. Por tanto, para $a \neq -1$ y $a \neq 4$ el rango de matriz de los coeficientes es 3, igual al rango de la matriz ampliada, e igual al número de incógnitas. Por lo que el sistema es compatible y determinado.

Para $a \neq -1$ y $a \neq 4$ el sistema es compatible y determinado.

$$\text{Si } a = -1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang } M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 20 + 1 + 4 + 8 + 2 - 10 = 25 \neq 0 \Rightarrow \text{Rang } M' = 3$. El rango de la matriz ampliada es 3, y el rango de la matriz de los coeficientes es 2, por lo que el sistema es incompatible.

Si $a = -1$ el sistema es incompatible

$$\text{Si } a = 4 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang } M' \Rightarrow \{\text{Gauss}\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \begin{cases} F_2 \rightarrow F_2 - 4F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - 2F_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 12 & -1 & -2 \\ 0 & 12 & -1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_2 = F_3\} \Rightarrow \text{Rang } M' = 2$. El rango de la matriz ampliada es 2, y el rango de la matriz de los coeficientes es 2, menor que el número de incógnitas, por lo que el sistema es compatible pero indeterminado.

Si $a = 4$ el sistema es compatible pero indeterminado.

b) Para $a = 3$ el sistema resulta $\begin{cases} x - 3y = 1 \\ 3x - 4y - z = 2 \\ 2x + 3y - z = -1 \end{cases}$, que es compatible determinado.

Lo resolvemos por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 3 & -4 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{4 + 0 - 3 - (0 - 3 + 6)}{4 + 0 + 6 - (0 - 3 + 9)} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 3 & -4 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$

$$x = -\frac{1}{2}; \quad y = -\frac{1}{2}; \quad z = -\frac{3}{2}$$

Problema B.2:

Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = \frac{ax^2-3}{x^2-5}$.

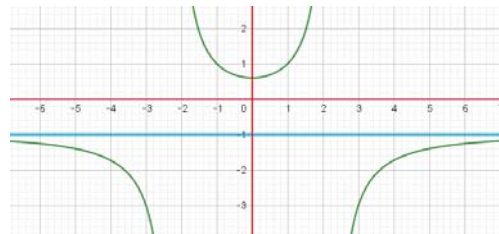
a) Calcule el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que $f(x)$ tenga una asíntota horizontal en $x = -1$.

b) Para $a = 1$, halle los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y los extremos relativos, si existen.

Solución:

a) Para determinar la asíntota horizontal $y = -1$ calculamos el límite de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^2-3}{x^2-5} = a = -1 \Rightarrow$$



$$a = -1$$

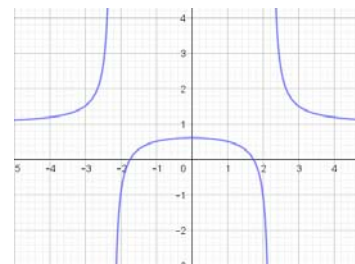
b) Para $a = 1$ la función resulta $f(x) = \frac{x^2-3}{x^2-5}$.

El dominio de la función es $D(f) \Rightarrow \mathbb{R} - \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$.

Estudio del crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x^2-5) - (x^2-3) \cdot 2x}{(x^2-5)^2} = \frac{2x \cdot (x^2-5-x^2+3)}{(x^2-5)^2} = \frac{-4x}{(x^2-5)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-4x}{(x^2-5)^2} = 0; -4x = 0 \Rightarrow x = 0.$$



Es creciente como el denominador es siempre positivo, $f'(x) > 0$, si $x > 0$, y decreciente si $x < 0$.

Se debe tener en cuenta que la función es par, por ser $f(x) = f(-x)$, por lo cual es simétrica con respecto al eje de ordenadas.

La función pasa en $x = 0$ de ser creciente a ser decreciente, luego hay un máximo: $f(0) = \frac{3}{5} \Rightarrow$

$$\text{Máximo: } \left(0, \frac{3}{5}\right)$$

No hay ni máximos ni mínimos absolutos.

Problema B.3:

Dada la función real de variable real $f(x) = e^{2x} + x$.

a) Determine la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 0$.

b) Calcule $I = \int_0^1 f(x) \cdot dx$.

Solución:

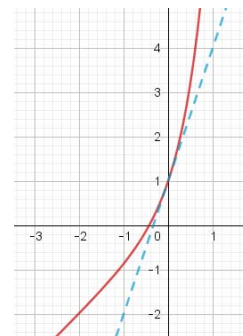
a) La pendiente de la tangente a la gráfica de una función en un punto es igual que el valor de la primera derivada de la función en ese punto.

$$f'(x) = 2 \cdot e^{2x} + 1 \rightarrow m = f'(0) = 2 \cdot e^0 + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3.$$

El punto de tangencia para $x = 0$ es el siguiente: $f(0) = e^0 + 0 = 1 \Rightarrow P(0, 1)$.

La ecuación de la recta que pasa por un punto conocida la pendiente es la siguiente:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \rightarrow y - 1 = 3 \cdot (x - 0) = 3x \Rightarrow 3x - y + 1 = 0$$



$$y = 3x + 1$$

b) $I = \int_0^1 f(x) \cdot dx = \int_0^1 (e^{2x} + x) \cdot dx \Rightarrow$ Integraremos por partes

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x = t; \quad x = \frac{1}{2}t \\ dx = \frac{1}{2} \cdot dt \end{array} \right|_{\substack{x=1 \rightarrow t=2 \\ x=0 \rightarrow t=0}} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \int_0^2 \left(e^t + \frac{1}{2}t \right) \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot \left[e^t + \frac{t^2}{4} \right]_0^2 =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left(e^2 + \frac{2^2}{4} \right) - \frac{1}{2} \cdot \left(e^0 + \frac{0^2}{4} \right) = \frac{1}{2} \cdot (e^2 + 1) - \frac{1}{2} \cdot (1 + 0) = \frac{1}{2} \cdot (e^2 + 1 - 1) = \frac{1}{2} \cdot e^2.$$

$$\int_0^1 f(x) \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot e^2$$

Problema B.4:

En un instituto se decide que los alumnos y las alumnas solo pueden utilizar un único color (azul o negro) al realizar los exámenes. Dos de cada tres exámenes están escritos en azul. La probabilidad de que un examen escrito en azul sea de una alumna es de 0.7.

La probabilidad de que un examen esté escrito en negro y sea de un alumno es 0.2. Se elige un examen al azar. Determina la probabilidad de que:

- a) Sea el examen de un alumno.
b) Sabiendo que está escrito en negro, sea de un alumno.

Solución:

Este ejercicio se puede hacer mediante una tabla de contingencia. Los datos que tenemos son: $P(Azul) = \frac{2}{3} = 0.6667$; $P(Alumna/Azul) = 0.7$; $P(Negro \cap Alumno) = 0.2$.

$$\text{Por lo tanto: } P(Alumna/Azul) = \frac{P(Azul \cap Alumna)}{P(Azul)} = \frac{P(Azul \cap Alumna)}{\frac{2}{3}} = 0.7 \rightarrow$$

$$P(Azul \cap Alumna) = 0.7 \cdot \frac{2}{3} = 0.4667$$

	Negro	Azul	
Alumno	0.2000		
Alumna		0.4667	
		$\frac{2}{3} = 0.6667$	1

Completamos la tabla de contingencia:

	Negro	Azul	
Alumno	0.2000	0.2000	0.4000
Alumna	0.1333	0.4667	0.6000
	0.3333	0.6667	1

- a) Miramos la tabla:

Probabilidad de que sea de un alumno es **0.4**.

- b) En la tabla buscamos la probabilidad de que esté escrito en negro siendo un alumno, y la probabilidad de que sea un alumno:

$$P(Alumno/Negro) = \frac{P(Negro \cap Alumno)}{P(Negro)} = \frac{0.2000}{0.3333} = 0.6.$$

Si está escrito en negro, la probabilidad de que sea de un alumno es **0.6**.

Problema B.5:

Una persona se ha propuesto salir a caminar todos los días realizando el mismo recorrido y cronometrando el tiempo que tarde en completarlo. El tiempo que está caminando por este recorrido puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal cuya desviación típica es 10 minutos.

a) Utilizando la información de una muestra aleatoria simple, se ha obtenido el intervalo de confianza (26.9, 37.1), expresado en minutos, para estimar el tiempo que tarda en realizar el recorrido, μ , con un nivel de confianza del 98.92 %. Obtenga el tamaño de la muestra elegida y el valor de la media muestral.

b) Si el tiempo medio para completar el recorrido es $\mu = 30$ minutos, calcule la probabilidad de que, en una muestra de 16 días elegidos al azar, esta persona tarde entre 25 y 35 minutos de media para completar el recorrido.

Solución:

$$a) E = \frac{37.1 - 26.9}{2} = \frac{10.2}{2} = 5.1.$$

Para un nivel de confianza del 98.92 % es: $1 - \alpha = 0.9892 \rightarrow \alpha = 1 - 0.9892 = 0.0108 \rightarrow$

$$z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.0054} = 2.55. (1 - 0.0054 = 0.9946 \rightarrow z = 2.55).$$

$$\text{Datos: } \sigma = 10; \quad z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.55; \quad E = 5.1$$

$$\text{Siendo } E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow$$

$$n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \right)^2 = \left(2.55 \cdot \frac{10}{5.1} \right)^2 = (2.55 \cdot 1.9608)^2 = 5^2 = 25.$$

El tamaño mínimo debe ser de 25 días.

b) Datos: $\mu = 30$; $n = 16$; $\sigma = 10$.

$$X \rightarrow N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(30, \frac{10}{\sqrt{16}}\right) = N(30, 2.5). \text{ Tipificando la variable: } Z = \frac{X-30}{2.5}.$$

$$\begin{aligned} P &= P(25 \leq X \leq 35) = P\left(\frac{25-30}{2.5} \leq Z \leq \frac{35-30}{2.5}\right) = P\left(\frac{-5}{2.5} \leq Z \leq \frac{5}{2.5}\right) = \\ &= P(-2 \leq Z \leq 2) = P(Z < 2) - [1 - P(Z < 2)] = P(Z < 2) - 1 + P(Z < 2) = \\ &= 2 \cdot P(Z < 2) - 1 = 2 \cdot 0.9772 - 1 = 1.9544 - 1 = 0.9544. \end{aligned}$$

$$P(25 \leq X \leq 35) = \mathbf{0.9544}$$