Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2020

Comunidad autónoma de

LA RIOJA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano Corbacho

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2019 – 2020
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSS II

El examen está distribuido en tres bloques que contienen tres ejercicios cada uno de ellos. De cada uno de los bloques, el alumno podrá contestar como máximo a dos ejercicios. En total deberá contestar a 4 ejercicios. Es decir, podrá contestar a dos ejercicios de un bloque y uno de cada uno de los otros dos, o bien elegir dos bloques y contestar a dos ejercicios de cada uno. **Es necesario justificar las respuestas.**

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calulen integrales. **Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.**

Tiempo: Una hora y media.

Bloque 1. Álgebra y Programación Lineal.
Responde, como máximo, a dos de las tres preguntas que se plantean a continuación.

1.1.– De los bebés que se han inscrito en el mes de mayo en el registro civil de Logroño, 63 tienen de nombre Alba, Lucía, Pedro o Mateo. 48 de ellos tienen tienen los nombres de Alba, Pedro o Mateo. Sabemos que el número de bebés inscritos con el nombre de Pedro es igual a la suma de los inscritos con los nombres de Alba y Mateo; además se han inscrito tantos bebés con el nombre de Alba como la suma de la mitad de los inscritos con el nombre de Pedro más los inscritos con el nombre de Mateo.

(I) ¿Cuántos de estos bebés se llaman Alba?, ¿cuántos Pedro?, ¿cuántos Mateo? **(2 puntos)**

(II) ¿Cuántos bebés se llaman Lucía? **(0,5 puntos)**

1.2.– Si $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

(I) Calcula A^2 y A^3. **(0,5 puntos)**

(II) Teniendo en cuenta los resultados del apartado anterior, calcula A^{15} y A^{30}. **(1 punto)**

(III) Resuelve la ecuación matricial $AX = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. **(1 punto)**

1.3.– Julián dispone de 10 hectáreas de terreno para cultivar dos variedades de uva: tempranillo y viura. El beneficio que le produce una hectárea de tempranillo es de 2 mil euros y la de viura 3 mil euros. Dispone de 180 kg de productos fitosanitarios; una hectárea de tempranillo precisa de 10 kg de estos productos y una hectárea de viura 20. Vendimiar una hectárea de tempranillo le cuesta 20 horas y una de viura 10 horas; dispone de un total de 160 horas de trabajo de vendimiadores.

(I) ¿Cómo puede distribuir Julián el cultivo de sus 10 hectáreas respetando sus restricciones? Dibuja en el plano la región factible que represente los posibles repartos. **(1,25 puntos)**

(II) Escribe la función que representa el beneficio que obtiene Julián. ¿Con qué distribución obtiene el máximo beneficio? Calcula dicho máximo. **(1,25 puntos)**

Bloque 2. Análisis.
Responde, como máximo, a dos de las tres preguntas que se plantean a continuación.

2.1.– Sea la función

$$f(t)=\begin{cases} 2t^2, & 0\le t<1 \\ 3t-1, & 1\le t<2 \\ -5t+15, & 2\le t\le 3 \end{cases}$$

(I) Estudia razonadamente su continuidad. **(0,75 puntos)**

(II) Haz una representación gráfica de la función f. **(1 punto)**

(III) Si la función f representa la asistencia (en miles de personas) a un festival de música en función del tiempo t (medido en horas), ¿en qué momento la asistencia fue máxima? (Para qué valor de t). ¿Cuántas personas había en el festival en ese momento? **(0,75 puntos)**

2.2.– Sea la función $f(x)=ax^2+bx+c$.

(I) Determina a, b y c sabiendo que el punto $(-2,1)$ pertenece a la gráfica de la función f y que, además, el punto $(-1,0)$ es un extremo relativo de f. **(1,25 puntos)**

(II) Determina el área que encierra la gráfica de f y el eje OX en el intervalo $[0,3]$. **(1,25 puntos)**

NOTA: si no has conseguido determinar a, b y c en el apartado anterior, toma $a=1$, $b=2$ y $c=1$ en este segundo apartado.

2.3.– La producción de un invernadero depende de la temperatura a la que esté regulado. La cantidad de toneladas de verduras que produce viene dada por la siguiente función, en la que x indica la temperatura en grados Celsius:

$$f(x) = (x+3)^2(36-x) \qquad (0 \leq x \leq 36)$$

(I) ¿Para qué valor de x se obtiene la máxima producción? **(1,5 puntos)**

(II) ¿Cuántas toneladas se obtienen a esa temperatura? **(0,5 puntos)**

(III) ¿Para qué valores de x el invernadero no produce nada? **(0,5 puntos)**

Bloque 3. Estadística y Probabilidad.
Responde, como máximo, a dos de las tres preguntas que se plantean a continuación.

3.1.– En una residencia canina hay en total 120 perros; de ellos 40 son pastores alemanes (35 negros y 5 blancos), 30 pekineses (18 negros y 12 blancos) y 50 mastines (42 negros y 8 blancos).

(I) Hemos elegido un perro al azar, ¿cuál es la probabilidad de que NO sea pekinés? **(0,75 puntos)**

(II) Elegido al azar un perro, ¿cuál es la probabilidad de que sea de color blanco? **(0,75 puntos)**

(III) Se ha elegido al azar un perro que ha resultado ser blanco, ¿cuál es la probabilidad de que sea un mastín? **(1 punto)**

3.2.– La vida media de un modelo de grapadoras sigue una distribución normal con una desviación típica de 60 días.

(I) Si la media fuese de 950 días, ¿cuál sería la probabilidad de que la duración media de una muestra de 100 grapadoras superase los 959 días? **(1,25 puntos)**

(II) Si una muestra de 64 grapadoras tiene una vida media de 980 días, determina un intervalo de confianza del 90 % para la media de la producción. **(1,25 puntos)**

3.3 – Luis ha hecho una cartulina con cada una de las siete letras de LA RIOJA y las ha introducido en una urna.

(I) Si extrae una cartulina, ¿cuál es probabilidad de que sea la R?, ¿cuál es la probabilidad de que NO sea la A? **(0,5 puntos)**

Autor: Antonio Menguiano Corbacho

(II) Luis extrae una cartulina y, a continuación, sin volver a introducir la primera, saca otra y se las muestra en ese orden a María ¿Cuál es la probabilidad de que María vea LA? **(0,5 puntos)**

(III) Luis repite la operación y le vuelve a mostrar las cartas a María ¿Cuál es la probabilidad de que María pueda formar la palabra LA?, ¿y de que pueda formar la palabra LO? **(0,75 puntos)**

(IV) Luis extrae ahora tres cartulinas sin reemplazar después de cada extracción. ¿Cuál es la probabilidad de que María lea RIO si se las muestra en el orden en el que Luis las ha extraído? ¿Y de que lea RIA? **(0,75 puntos)**

Tabla simplificada de la distribución normal tipificada

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2019 – 2020
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

(1) Se sugiere un tipo de corrección positivo, es decir, partiendo de cero y sumando puntos por los aciertos que el alumno vaya obteniendo.

(2) Como excepción al apartado anterior, los errores muy graves, que muestren un desconocimiento profundo de propiedades y funciones básicas (errores repetidos en la manipulación de igualdades y desigualdades o en operaciones con fracciones, errores graves al desarrollar cuadrados o en la resolución de ecuaciones de segundo grado, etc.), penalizarán especialmente y pueden suponer un cero en el apartado en el que se hayan cometido.

(3) Se deberá valorar la exposición lógica y la coherencia de las respuestas, tanto en cuestiones teóricas como prácticas. Algunos ejemplos:

(a) Si al resolver un sistema de ecuaciones, el alumno comete un error **numérico**, y el desarrollo posterior es coherente con dicho error, no se prestará especial atención siempre y cuando el problema no haya quedado reducido a uno trivial.

(b) En la representación gráfica de funciones, se valorará la coherencia del dibujo con los datos obtenidos previamente por el alumno. (Vale aquí la misma excepción que en el párrafo anterior.)

(4) La puntuación máxima de cada pregunta figurará en su enunciado. En los casos en los que la pregunta contenga apartados, lo que aparecerá es el valor de cada uno de ellos.

(5) Si un alumno da una respuesta acertada a un problema escribiendo solo los resultados, sin aportar el desarrollo que le ha permitido obtener dicha solución, la puntuación en este apartado no podrá ser superior al 50 % de la nota máxima prevista. Como excepción, se será flexible en las respuestas a cuestiones de estadística y probabilidad.

SOLUCIONES CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO 2020

Bloque 1. Álgebra y Programación lineal

Problema 1.1:

1º) De los bebés que se han inscrito en el mes de mayo en el registro civil de Logroño, 63 tienen nombre Alba, Lucía, Pedro o Mateo. 48 de ellos tienen los nombres de Alba, Pedro o Mateo. Sabemos que el número de bebés inscritos con el nombre de Pedro es igual a la suma de los inscritos con los nombres de Alba y Mateo; además se han inscrito tantos bebés con el nombre de Alba como la suma de la mitad de los inscritos con el nombre de Pedro más los inscritos con el nombre de Mateo.

a) ¿Cuántos de estos bebés se llaman Alba? ¿Cuántos Pedro? ¿Cuántos Mateo?

b) ¿Cuántos bebés se llaman Lucía?

Solución:

a, b)

Sean x, y, z, t los bebés registrados en Logroño con los nombres de Alba, Lucía, Pedro y Mateo, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z+t=63 \\ x+z+t=48 \\ z=x+t \\ x=\frac{z}{2}+t \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y+z+t=63 \\ x+z+t=48 \\ x-z+t=0 \\ 2x-z-2t=0 \end{array}\right\}.$$

Restando a la primera ecuación la segunda: $y = 63 - 48 = 15$.

$$\underline{Se\ llaman\ Lucía\ 15\ de\ los\ bebés\ registrados}.$$

El sistema resulta: $\left.\begin{array}{r} x+z+t=48 \\ x-z+t=0 \\ 2x-z-2t=0 \end{array}\right\}.$

Restando a la primera ecuación la segunda: $2z = 48;\ \ z = 24$.

$$\underline{Se\ llaman\ Pedro\ 24\ de\ los\ bebés\ registrados}.$$

El sistema resulta: $\left.\begin{array}{r} x+24+t=48 \\ 2x-24-2t=0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+t=24 \\ 2x-2t=24 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+t=24 \\ x-t=12 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x = 36;\ \ x = 18. 18 + t = 24;\ \ t = 24 - 18 \Rightarrow t = 6.$

$$\underline{Se\ llaman\ Alba\ 18\ de\ los\ bebés\ registrados\ y\ 6\ se\ llaman\ Mateo}.$$

$$Se\ llaman\ Lucía\ \mathbf{15}\ de\ los\ bebés\ registrados;\ \ Pedro, \mathbf{24};\ \ Alba, \mathbf{18}\ y\ Mateo, \mathbf{6}.$$

Problema 1.2:

2º) Si $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$:

$a)$ Calcula $A^2\ y\ A^3$.

$b)$ Teniendo en cuenta los resultados del apartado anterior, calcula $A^{15}\ y\ A^{30}$.

$c)$ Resuelve la ecuación matricial $AX = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Solución:

$a)$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I}.$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = I \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = A}.$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I;\ A^3 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = A$$

$b)$

$$A^{15} = A^{14} \cdot A = (A^2)^7 \cdot A = I^7 \cdot A = I \cdot A = \underline{\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = A}.$$

$$A^{30} = A^{15} \cdot A^{15} = A \cdot A = \underline{A^2 = I}.$$

$$A^{15} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = A;\ A^{30} = A^2 = I.$$

$c)$

Teniendo en cuenta que $A^2 = I$, del apartado $a)$:

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};\ \ A \cdot A \cdot X = A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};\ \ A^2 \cdot X = A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$I \cdot X = A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{X = A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}.$$

$$X = A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

Problema 1.3:

3º) Julián dispone de 10 hectáreas de terreno para cultivar dos variedades de uva: tempranillo y viura. El beneficio que le produce una hectárea de tempranillo es de 2 000 euros y la de viura, 3 000 euros. Dispone de 180 kg de productos fitosanitarios; una hectárea de tempranillo precisa de 10 kg de estos productos y una hectárea de viura 20. Vendimiar una hectárea de tempranillo le cuesta 20 horas y una de viura 10 horas; dispone de un total de 160 horas de trabajo de vendimiadores.

a) ¿Cómo puede distribuir Julián el cultivo de sus 10 hectáreas respetando sus restricciones? Dibuja en el plano la región factible que represente los posibles repartos.

b) Escribe la función que representa el beneficio que obtiene Julián. ¿Con qué distribución obtiene el máximo beneficio? Calcula dicho máximo.

Solución:

a, b)

Sean x e y el número de hectáreas plantadas con las variedades tempranillo y viura, respectivamente.

La función de objetivos es $f(x, y) = 2\,000x + 3\,000y$.

Las restricciones son las siguientes: $\left.\begin{array}{r} x + y \leq 10 \\ 10x + 20y \leq 180 \\ 20x + 10y \leq 160 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{r} x + y \leq 10 \\ x + 2y \leq 18 \\ 2x + y \leq 16 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{array}\right\}$.

(1) $\Rightarrow x + y \leq 10 \Rightarrow y \leq 10 - x \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	0	10
y	10	0

(2) $\Rightarrow x + 2y \leq 18 \Rightarrow y \leq \frac{18-2x}{2} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	0	18
y	9	0

(3) $\Rightarrow 2x + y \leq 16 \Rightarrow y \leq 16 - 2x \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	0	8
y	16	0

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

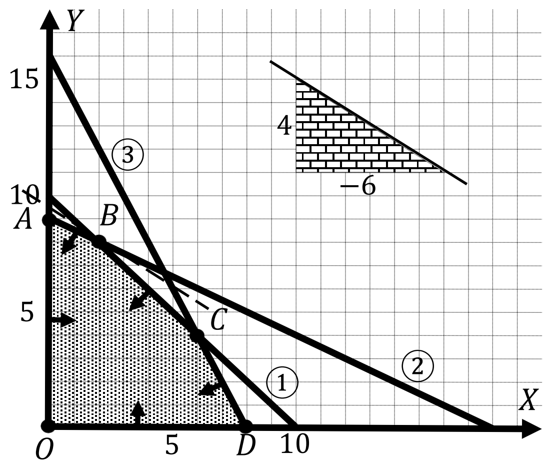
Los vértices de la sección factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 0 \\ x + 2y = 18 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0, 9).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y = 10 \\ x + 2y = 18 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -x - y = -10 \\ x + 2y = 18 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 8;\ \ x = 2 \Rightarrow B(2, 8).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 0 \\ 2x + y = 18 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 9 \Rightarrow C(9, 0).$



Autor: Antonio Menguiano Corbacho
www.apuntesmareaverde.org.es

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0, 9) = 2\,000 \cdot 0 + 3\,000 \cdot 9 = 0 + 27\,000 = 27\,000.$

$B \Rightarrow f(2, 8) = 2\,000 \cdot 2 + 3\,000 \cdot 8 = 4\,000 + 24\,000 = 28\,000.$

$C \Rightarrow f(9, 0) = 2\,000 \cdot 9 + 3\,000 \cdot 0 = 18\,000 + 0 = 18.000.$

El valor máximo se produce en el punto $B(2, 8)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x, y) = 2\,000x + 3\,000y = 0 \Rightarrow y = -\frac{2\,000}{3\,000}x = -\frac{2}{3}x \Rightarrow m = -\frac{4}{6}.$$

$\underline{Obtiene\ el\ máximo\ beneficio\ cultivando\ \mathbf{2}\ ha\ de\ tempranillo\ y\ \mathbf{8}\ ha\ de\ viura.}$

$\underline{El\ máximo\ beneficio\ es\ de\ \mathbf{28\,000}\ euros.}$

Bloque 2. Análisis

Problema 2.1:

4º) Sea la función $f(t)=\begin{cases} 2t^2, & 0\le t<1 \\ 3t-1, & 1\le t<2 \\ -5t+15, & 2\le t\le 3 \end{cases}$.

a) Estudia razonadamente su continuidad.

b) Haz una representación gráfica de la función f.

c) Si la función f representa la asistencia (en miles de personas) a un festival de música en función del tiempo t (medido en horas). ¿En qué momento la asistencia fue máxima? (Para qué valor de t). ¿Cuántas personas había en el festival en ese momento?

Solución:

a) La función $f(t)$ es continua en R, excepto para $t=1$ y $t=2$, cuya continuidad es dudosa y se estudia a continuación.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ t=1 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{t\to 1^-} f(t)=\lim\limits_{t\to 1}(2t^2)=2 \\ \lim\limits_{t\to 1^+} f(t)=\lim\limits_{t\to 1}(3t-1)=2=f(1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 1^-} f(t)=\lim_{t\to 1^+} f(t)=f(1) \Rightarrow \underline{La\ función\ f(t)\ es\ continua\ para\ t=1}.$$

$$Para\ t=2 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{t\to 2^-} f(t)=\lim\limits_{t\to 2}(3t-1)=5 \\ \lim\limits_{t\to 2^+} f(t)=\lim\limits_{t\to 2}(-5t+15)=5=f(2) \end{cases} \Rightarrow$$

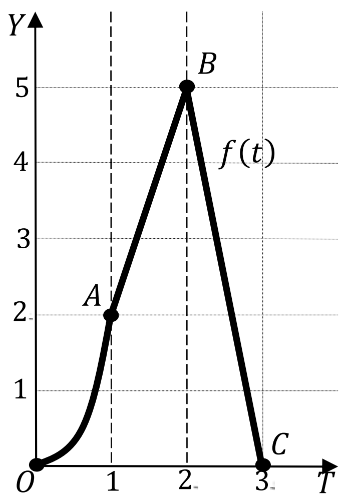
$$\Rightarrow \lim_{t\to 2^-} f(t)=\lim_{t\to 2^+} f(t)=f(2) \Rightarrow \underline{La\ función\ f(t)\ es\ continua\ para\ t=2}.$$

La función es continua en toda la recta real.

b) En el intervalo $[0,1)$ la función es la parábola de ecuación $f(t)=2t^2$, que es convexa $(\cup)$ por ser positivo el coeficiente de t^2 y cuyo vértice (mínimo) es el origen.

En el intervalo $[1,2)$ la función es la recta de ecuación $f(t)=3t-1$, que tiene como extremos a los puntos $A(1,2)$ y $B(2,5)$.

En el intervalo $[2,3]$ la función es la recta de ecuación $f(t)=-5t+15$, que tiene como extremos a los puntos $B(2,5)$ y $C(3,0)$.



c) Si la función f representa la asistencia (en miles de personas) a un festival de música en función del tiempo t (medido en horas). ¿En qué momento la asistencia fue máxima? (Para qué valor de t). ¿Cuántas personas había en el festival en ese momento?

De la observación de la gráfica de la función se deduce que:

$$\underline{La\ asistencia\ fue\ máxima\ para\ t=\mathbf{2}}.$$

$$\underline{La\ asistencia\ máxima\ al\ festival\ fue\ de\ \mathbf{5\,000}\ personas}.$$

Problema 2.2:

5º) Sea la función $f(x) = ax^2 + bx + c$:

a) Determina a, b y c sabiendo que el punto $P(-2, 1)$ pertenece a la gráfica de la función f y que, además, el punto $Q(-1, 0)$ es un extremo relativo de f.

b) Determina el área que encierra la gráfica de f y el eje OX en el intervalo $[0, 3]$.

Nota: Si no has conseguido determinar a, b y c, en el apartado anterior, toma los valores $a = 1, b = 2$ y $c = 1$ en este apartado.

Solución:

a)

Por contener al punto $P(-2, 1) \Rightarrow f(-2) = 1$:

$f(-2) = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c = 1;\ \ 4a - 2b + c = 1.$ (1)

Por contener al punto $Q(-1, 0) \Rightarrow f(-1) = 0$:

$f(-1) = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 0;\ \ a - b + c = 0.$ (2)

Por tener un extremo relativo en $Q(-1, 0) \Rightarrow f'(-1) = 0$:

$f'(x) = 2ax + b.$

$f'(-1) = 2a \cdot (-1) + b = 0;\ -2a + b = 0.$ (3)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1), (2) y (3):

$\left.\begin{array}{r} 4a - 2b + c = 1 \\ a - b + c = 0 \\ -2a + b = 0 \end{array}\right\}$. Restando a la primera ecuación la segunda:

$\left.\begin{array}{r} 3a - b = 1 \\ -2a + b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{a = 1}.$ $\qquad -2 + b = 0 \Rightarrow \underline{b = 2}.$

$a - b + c = 0 \Rightarrow 1 - 2 + c = 0 \Rightarrow \underline{c = 1}.$

$$\boldsymbol{a = 1;\ b = 2;\ c = 1.}$$

b)

La función resulta ser $f(x) = x^2 + 2x + 1$, que tiene todas sus ordenadas positivas en el intervalo $[0, 3]$, por lo cual la superficie pedida es la siguiente:

$$S = \int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 (x^2 + 2x + 1)dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + x\right]_0^3 = \left[\frac{x^3}{3} + x^2 + x\right]_0^3 =$$

$$= \left(\frac{3^3}{3} + 3^2 + 3\right) - 0 = 9 + 9 + 3 = \underline{21\ u^2}.$$

$$\boldsymbol{Área = \ 21\ u^2}$$

Problema 2.3:

6º) La producción de un invernadero depende de la temperatura a la que esté regulado. La cantidad de toneladas de verduras que produce viene dada por la siguiente función, en que x indica la temperatura en grados Celsius: $f(x) = (x+3)^2(36-x)$, con $(0 \leq x \leq 36)$.

a) ¿Para qué valor de x se obtiene la máxima producción?

b) ¿Cuántas toneladas se obtienen a esa temperatura?

c) ¿Para qué valores de x el invernadero no produce nada?

Solución:

a)

Los valores de la función en los extremos del intervalo de su dominio son los siguientes:

$f(0) = (0+3)^2 \cdot (36-0) = 9 \cdot 36 = 324.$

$f(36) = (36+3)^2 \cdot (36-36) = 0.$

Una función tiene un máximo relativo cuando se anula su primera derivada y es negativa la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$f'(x) = [2 \cdot (x+3) \cdot 1] \cdot (36-x) + (x+3)^2 \cdot (-1) =$

$= (x+3) \cdot [2 \cdot (36-x) - (x+3)] = (x+3) \cdot (72-2x-x-3) =$

$= (x+3) \cdot (69-3x) = 3 \cdot (x+3) \cdot (23-x).$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3 \cdot (x+3) \cdot (23-x) = 0 \Rightarrow x_1 = -3, x_2 = 23.$

La solución $x_1 = -3$ no pertenece al dominio de la función.

$f''(x) = 3 \cdot [1 \cdot (23-x) + (x+3) \cdot (-1)] = 3 \cdot (23-x-x-3) =$

$= 3 \cdot (20-2x) = 6 \cdot (10-x)$

$f''(23) = 6 \cdot (10-23) = 6 \cdot (-13) < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = 23.$

$f(23) = (23+3)^2 \cdot (36-23) = 26^2 \cdot 13 = 676 \cdot 13 = 8\,788.$

$\underline{El\ máximo\ rendimiento\ del\ invernadero\ se\ produce\ para\ x = \mathbf{23°\ C}}.$

b)

$\underline{El\ máximo\ rendimiento\ que\ produce\ a\ 23°\ C\ es\ de\ \mathbf{8\,788}\ toneladas}.$

c)

Como quiera que no se prevé una temperatura de $-3°\ C$ (que también se anularía la producción):

$\underline{La\ producción\ del\ invernadero\ es\ nula\ a\ partir\ de\ 36°\ C}.$

Autor: Antonio Menguiano Corbacho

Bloque 3. Estadística y Probabilidad

Problema 3.1:

7º) En una residencia canina hay en total 120 perros; de ellos 40 son pastores alemanes (35 negros y 5 blancos), 30 pekineses (18 negros y 12 blancos) y 50 mastines (42 negros y 8 blancos).

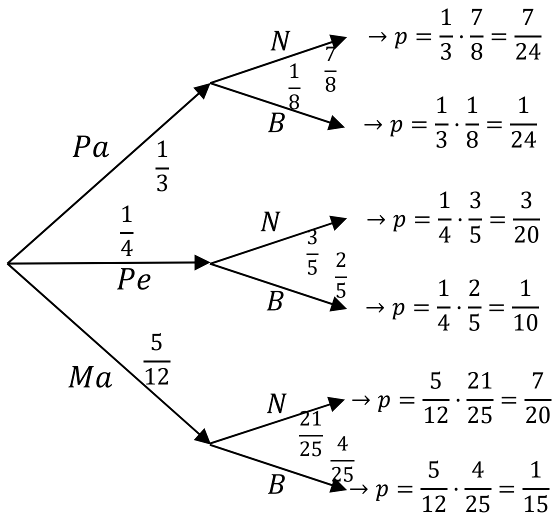
a) Hemos elegido un perro al azar, ¿cuál es la probabilidad de que NO sea pekinés?

b) Elegido al azar un perro, ¿cuál es la probabilidad de que sea de color blanco?

c) Se ha elegido al azar un perro que ha resultado ser blanco, ¿cuál es la probabilidad de que sea un mastín?

Solución:

$$Datos: \begin{cases} P(Pa) = \frac{40}{120} = \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} P(n) = \frac{35}{40} = \frac{7}{8} \\ P(b) = \frac{5}{40} = \frac{1}{8} \end{cases} \\ P(Pe) = \frac{30}{120} = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} P(n) = \frac{18}{30} = \frac{3}{5} \\ P(b) = \frac{12}{30} = \frac{2}{5} \end{cases} \\ P(Ma) = \frac{50}{120} = \frac{5}{12} \Rightarrow \begin{cases} P(n) = \frac{42}{50} = \frac{21}{25} \\ P(b) = \frac{8}{50} = \frac{4}{25} \end{cases} \end{cases}.$$



a)

$$P = P(\overline{Pe}) = 1 - P(Pe) = 1 - \frac{30}{120} = 1 - \frac{1}{4} = \underline{\frac{3}{4} = 0.75.}$$

La probabilidad de que NO sea pekinés es de **0.75**.

$b)$

$$P = P(B) = P(Pa \cap B) + P(Pe \cap B) + P(Ma \cap B) =$$
$$= P(Pa) \cdot P(B/Pa) + P(Pe) \cdot P(B/Pe) + P(Ma) \cdot P(B/Ma) =$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} + \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{25} = \frac{1}{24} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{5+12+8}{120} = \frac{25}{120} = \underline{\frac{5}{24} = 0.2083}.$$

También puede hacerse este apartado por la regla de Laplace:

$$P = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles} = \frac{nº\ de\ perros\ blancos}{nº\ de\ perros} = \frac{5+12+8}{120} = \frac{25}{120} = \underline{\frac{5}{24} = 0.2083}.$$

La probabilidad de que sea de color blanco es de **0.21**.

$c)$

$$P = P(Ma/B) = \frac{P(Ma \cap B)}{P(B)} = \frac{P(Ma) \cdot P(B/Ma)}{P(B)} = \frac{\frac{5}{12} \cdot \frac{4}{25}}{\frac{5}{24}} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{5}{24}} = \frac{24}{75} = \underline{\frac{8}{25} = 0.32}.$$

Un perro que ha resultado ser blanco, la probabilidad de que sea un mastín es de **0.32**.

Problema 3.2:

8º) La vida media de un modelo de grapadoras sigue una distribución normal con una desviación típica de 60 días.

a) Si la media fuese de 950 días, ¿cuál sería la probabilidad de que la duración media de una muestra de 100 grapadoras superase los 959 días?

b) Si una muestra de 64 grapadoras tiene una vida media de 980 días, determina un intervalo de confianza del 90 % para la media de la producción.

Solución:

a)

$Datos$: $\mu = 950$; $n = 100$; $\sigma = 60$.

$X \to N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(950, \frac{60}{\sqrt{100}}\right) = N\left(950, \frac{60}{10}\right) = N(950, 6)$.

Tipificando la variable: $Z = \frac{X-950}{6}$.

$P = P(X > 959) = P\left(Z > \frac{959-950}{6}\right) = P\left(Z > \frac{9}{6}\right) = P(Z > 1.5) =$

$= 1 - P(Z \leq 1.5) = 1 - 0.9332 = \underline{0.0668}$.

La probabilidad de que superase los 959 días es de **0.0668**.

b)

Para un nivel de confianza del 90 % es:

$1 - \alpha = 0.90 \ \to \ \alpha = 1 - 0.90 = 0.10 \ \to \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.05} = 1.645$.

$(1 - 0.05 = 0.9500 \ \to z = 1.645)$.

Datos: $n = 64$; $\overline{x} = 980$; $\sigma = 60$; $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.645$.

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma$ y n, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$\left(980 - 1.645 \cdot \frac{60}{\sqrt{64}}; \ 980 + 1.645 \cdot \frac{60}{\sqrt{64}}\right)$;

$(980 - 1.645 \cdot 7.5; \ 980 + 1.645 \cdot 7.5)$; $(980 - 12.3375; \ 980 + 12.3375)$.

$$\underline{I.C._{90\,\%} = (967.6625; \ 992.3375)}.$$

El intervalo de confianza para la media de la producción al 90 % es de $\mathbf{(967.6625; \ 992.3375)}$

Autor: Antonio Menguiano Corbacho
www.apuntesmareaverde.org.es

Problema 3.3:

9º) Luis ha hecho una cartulina con cada una de las siete letras de LA RIOJA y las ha introducido en una urna.

a) Si extrae una cartulina, ¿cuál es la probabilidad de que sea la R?, ¿cuál es la probabilidad de que NO sea la A?

b) Luis extrae una cartulina y, a continuación, sin volver a introducir la primera, saca otra y se las muestra en ese orden a María, ¿cuál es la probabilidad de que María vea LA?

c) Luis repite la operación y le vuelve a mostrar las cartas a María. ¿Cuál es la probabilidad de que María pueda formar la palabra LA?, ¿y de que pueda formar la palabra LO?

d) Luis extrae ahora tres cartulinas sin reemplazar después de cada extracción. ¿Cuál es la probabilidad de que María lea RIO si se las muestra en el orden en el que Luis las ha extraído? ¿Y de que lea RIA?

Solución:

a)

$$P = P(R) = \frac{1}{7} = \underline{0.1429}. \qquad P = P(No\ A) = \frac{5}{7} = \underline{0.7143}.$$

La probabilidad de que sea la R es **0.1429**. La probabilidad de que NO sea la A es **0.7143**.

b) $$P = P(LA) = \frac{1}{7} \cdot \frac{2}{6} = \underline{\frac{1}{21} = 0.0476}.$$

La probabilidad de que María vea LA es de **0.0476**.

c) Para que María pueda formar la palabra LA, tendría que sacar LA o AL:

$$P = P(LA) + P(AL) = \frac{1}{7} \cdot \frac{2}{6} + \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{21} + \frac{1}{21} = \underline{\frac{2}{21} = 0.0952}.$$

Para que pueda formar la palabra LO, tendría que sacar LO o OL:

$$P = P(LO) + P(OL) = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{42} + \frac{1}{42} = \underline{\frac{1}{21} = 0.04761}.$$

La probabilidad de que pueda formar la palabra LA es de $\mathbf{\frac{2}{21} = 0.0952}$, y la palabra LO es **de** $\mathbf{\frac{1}{21} = 0.04761}$

d) $$P = P(RIO) = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} = \underline{\frac{1}{210} = 0.0048}.$$

$$P = P(RIA) = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5} = \underline{\frac{1}{105} = 0.0095}.$$

La probabilidad de que lea RIO es de $\mathbf{\frac{1}{210} = 0.0048}$, y de que lea RIA es de $\mathbf{\frac{1}{105} = 0.0095}$.

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2019 – 2020
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSS II

El examen está distribuido en tres bloques que contienen tres ejercicios cada uno de ellos. De cada uno de los bloques, el alumno podrá contestar como máximo a dos ejercicios. En total deberá contestar a 4 ejercicios. Es decir, podrá contestar a dos ejercicios de un bloque y uno de cada uno de los otros dos, o bien elegir dos bloques y contestar a dos ejercicios de cada uno. **Es necesario justificar las respuestas.**

Se perrmite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calulen integrales. **Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.**

Tiempo: Una hora y media.

Bloque 1. Álgebra y Programación Lineal.
Responde, como máximo, a dos de las tres preguntas que se plantean a continuación.

1.1.– Consideramos el sistema de ecuaciones lineales donde a es un número real

$$\begin{aligned} ay + az &= 0 \\ y + z &= 0 \\ 4x - 2y + az &= a \end{aligned}$$

(I) ¿Existe algún valor de a para el que el sistema es compatible y determinado? **(0,75 puntos)**

(II) ¿Existe algún valor de a para el que el sistema no tenga soluciones? **(0,5 puntos)**

(III) Resuelve el sistema si $a = 0$. **(1,25 puntos)**

1.2.– Dada una matriz cuadrada A

(I) ¿Puede saberse si tiene inversa sin calcularla explícitamente? ¿Cómo? **(0,5 puntos)**

(II) Sea ahora A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Halla, si existe, la inversa de A. **(0,75 puntos)**

(III) Si A es la matriz del apartado anterior, determina las matrices X e Y de orden 2 tales que:

$$\begin{aligned} 3X + 2Y &= A \\ X + Y &= 2A \end{aligned}$$

(1,25 puntos)

1.3.– Los beneficios de una empresa vienen dados por la función $f(x, y) = x+y+1$ pero está sujeta a las siguientes restricciones:

$$4x + y \geq 8; \quad 3x - 2y \leq 12; \quad x + 5y \leq 21; \quad x \geq 0; \quad y \geq 0.$$

(I) Dibuja en el plano la región factible que representa estas restricciones. **(1,25 puntos)**

(II) Para qué valores de x e y obtiene la empresa el beneficio máximo. **(1,25 puntos)**

Bloque 2. Análisis.
Responde, como máximo, a dos de las tres preguntas que se plantean a continuación.

2.1.– Consideramos la función $f(x) = x^4 - ax^2 + b$

(I) ¿Qué valores deben tomar a y b para que la función tenga un mínimo en el punto $(1, 0)$? **(1 punto)**

(II) Con los valores de a y b del apartado (I), calcula los puntos donde $f(x)$ tiene tangente paralela a la recta $y = 1$. **(1 punto)**

(III) Calcula la recta tangente a la función en el punto $x = 1$. **(0,5 puntos)**

NOTA: si no has conseguido determinar a y b en el apartado anterior, toma $a = 2$ y $b = 1$ en los apartados (II) e (III).

2.2.– Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x < 1 \\ ax - 2, & 1 \leq x \end{cases}$$

(II) Sea ahora A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Halla, si existe, la inversa de A. **(0,75 puntos)**

(III) Si A es la matriz del apartado anterior, determina las matrices X e Y de orden 2 tales que:

$$\begin{aligned} 3X + 2Y &= A \\ X + Y &= 2A \end{aligned}$$

(1,25 puntos)

1.3.– Los beneficios de una empresa vienen dados por la función $f(x, y) = x + y + 1$ pero está sujeta a las siguientes restricciones:

$$4x + y \geq 8; \qquad 3x - 2y \leq 12; \qquad x + 5y \leq 21; \qquad x \geq 0; \qquad y \geq 0.$$

(I) Dibuja en el plano la región factible que representa estas restricciones. **(1,25 puntos)**

(II) Para qué valores de x e y obtiene la empresa el beneficio máximo. **(1,25 puntos)**

Bloque 2. Análisis.
Responde, como máximo, a dos de las tres preguntas que se plantean a continuación.

2.1.– Consideramos la función $f(x) = x^4 - ax^2 + b$

(I) ¿Qué valores deben tomar a y b para que la función tenga un mínimo en el punto $(1, 0)$? **(1 punto)**

(II) Con los valores de a y b del apartado (I), calcula los puntos donde $f(x)$ tiene tangente paralela a la recta $y = 1$. **(1 punto)**

(III) Calcula la recta tangente a la función en el punto $x = 1$. **(0,5 puntos)**

NOTA: si no has conseguido determinar a y b en el apartado anterior, toma $a = 2$ y $b = 1$ en los apartados (II) e (III).

2.2.– Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x < 1 \\ ax - 2, & 1 \leq x \end{cases}$$

3.3.– Un hospital está especializado en el tratamiento de 3 enfermedades A, B, C. El 40 % de los pacientes ingresan con la enfermedad A, el 35 % con la enfermedad B y el 25 % con la enfermedad C. La probabilidad de curación de la enfermedad A es el 80 %, de la B el 60 % y de la C el 90 %.

(I) José ingresa en el hospital (no sabemos cual de las tres enfermedades padece). ¿Cuál es la probabilidad de que se cure? **(1 punto)**

(II) Miguel ingresó en el hospital y se ha restablecido completamente. ¿Cuál es la probabilidad de que ingresara padeciendo la enfermedad B? **(1 punto)**

(III) Rosa ingresó en el hospital y se ha restablecido completamente. ¿Cuál es la probabilidad de que NO padeciera la enfermedad B? **(0,5 puntos)**

Tabla simplificada de la distribución normal tipificada

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2019 – 2020
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

(1) Se sugiere un tipo de corrección positivo, es decir, partiendo de cero y sumando puntos por los aciertos que el alumno vaya obteniendo.

(2) Como excepción al apartado anterior, los errores muy graves, que muestren un desconocimiento profundo de propiedades y funciones básicas (errores repetidos en la manipulación de igualdades y desigualdades o en operaciones con fracciones, errores graves al desarrollar cuadrados o en la resolución de ecuaciones de segundo grado, etc.), penalizarán especialmente y pueden suponer un cero en el apartado en el que se hayan cometido.

(3) Se deberá valorar la exposición lógica y la coherencia de las respuestas, tanto en cuestiones teóricas como prácticas. Algunos ejemplos:

(a) Si al resolver un sistema de ecuaciones, el alumno comete un error **numérico**, y el desarrollo posterior es coherente con dicho error, no se prestará especial atención siempre y cuando el problema no haya quedado reducido a uno trivial.

(b) En la representación gráfica de funciones, se valorará la coherencia del dibujo con los datos obtenidos previamente por el alumno. (Vale aquí la misma excepción que en el párrafo anterior.)

(4) La puntuación máxima de cada pregunta figurará en su enunciado. En los casos en los que la pregunta contenga apartados, lo que aparecerá es el valor de cada uno de ellos.

(5) Si un alumno da una respuesta acertada a un problema escribiendo solo los resultados, sin aportar el desarrollo que le ha permitido obtener dicha solución, la puntuación en este apartado no podrá ser superior al 50 % de la nota máxima prevista. Como excepción, se será flexible en las respuestas a cuestiones de estadística y probabilidad.

SOLUCIONES CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE SEPTIEMBRE 2020

Bloque 1. Álgebra y Programación lineal

Problema 1.1:

Consideramos el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} ay+az=0 \\ y+z=0 \\ 4x-2y+az=a \end{cases}$, donde a es un parámetro real.

$a)$ ¿Existe algún valor de a para el que el sistema es compatible determinado?

$b)$ ¿Existe algún valor de a para el que el sistema no tenga soluciones?

$c)$ Resuelve el sistema para $a=0$.

Solución:

$a)$ $b)$ Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & a \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 0 & a & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & a & a \end{pmatrix}.$$

Los rangos de las matrices, en función del parámetro a, se obtienen por el procedimiento de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 0 & a & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & a & a \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_3\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -2 & a & a \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & a & a & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_1 \to F_1 + 2F_2 \\ F_3 \to F_3 - aF_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & a+2 & a \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2, \forall a \in R.$$

$$\underline{Para\ a \in R \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < n^{\underline{o}}\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

No existe ningún valor de $a \in R$ para el que el sistema es compatible determinado, y tampoco existe ninguno para el que no tiene solución.

$c)$ Para $a=0$ el sistema resulta: $\begin{cases} 0+0=0 \\ y+z=0 \\ 4x-2y=0 \end{cases}$, equivalente a $\begin{cases} y+z=0 \\ 2x-y=0 \end{cases}$, cuya solución es la siguiente:

$$\underline{Solución: \boldsymbol{x=\lambda, y=2\lambda, z=-2\lambda}, \forall \lambda \in R.}$$

Problema 1.2:

Dada una matriz cuadrada A:

$a)$ ¿Puede saberse si tiene inversa sin calcularla explícitamente? ¿Cómo?

$b)$ Sea ahora la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Halla, si existe, la inversa de A.

$c)$ Si A es la matriz del apartado anterior, determina las matrices X e Y de orden 2 tales que: $\left.\begin{matrix} 3X + 2Y = A \\ X + Y = 2A \end{matrix}\right\}$.

Solución:

$a)$ Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero, por lo tanto, para saber si tiene inversa se calcula su determinante.

$b)$ $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0 \Rightarrow \underline{La\ matriz\ A\ es\ invertible}$.

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.\ Adj.\ de\ A^t = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}{1} \Rightarrow \underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}.$$

$$\boldsymbol{A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

$c)$

$$\left.\begin{matrix} 3X + 2Y = A \\ X + Y = 2A \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} 3X + 2Y = A \\ -2X - 2Y = -4A \end{matrix}\right\} \Rightarrow X = -3A \Rightarrow \underline{X = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ -3 & -9 \end{pmatrix}}.$$

$$\left.\begin{matrix} 3X + 2Y = A \\ X + Y = 2A \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} -3X - 2Y = -A \\ 3X + 3Y = 6A \end{matrix}\right\} \Rightarrow Y = 5A \Rightarrow \underline{Y = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 5 & 15 \end{pmatrix}}.$$

$$\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ -3 & -9 \end{pmatrix};\ Y = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 5 & 15 \end{pmatrix}}$$

Problema 1.3:

Los beneficios de una empresa vienen dados por la función $f(x, y) = x + y + 1$ pero está sujeta a las siguientes restricciones:

$$4x + y \geq 8; \;\; 3x - 2y \leq 12; \;\; x + 5y \leq 21; \;\; x \geq 0; \;\; y \geq 0.$$

$a)$ Dibuja en el plano la región factible que representa estas restricciones.

$b)$ Para qué valores de x e y obtiene la empresa el beneficio máximo.

Solución:

$a)$

$$① \Rightarrow 4x + y \geq 8 \Rightarrow y \geq 8 - 4x \Rightarrow O(0,0) \rightarrow No.$$

x	1	2
y	4	0

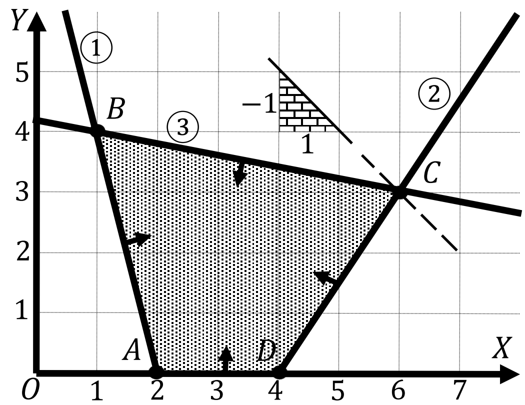
$$② \Rightarrow 3x - 2y \leq 12 \Rightarrow y \geq \frac{3x-12}{2} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$$

x	4	6
y	0	3

$$③ \Rightarrow x + 5y \leq 21 \Rightarrow y \leq \frac{21-x}{5} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$$

x	1	6
y	4	3

La región factible es la zona que aparece sombreada en la figura adjunta.



Los vértices de la sección factible son los siguientes:

$$A \Rightarrow \left.\begin{matrix} y = 0 \\ 4x + y = 8 \end{matrix}\right\} \Rightarrow A(2,0).$$

$$B \Rightarrow \left.\begin{matrix} 4x + y = 8 \\ x + 5y = 21 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} -4x - y = -8 \\ 4x + 20y = 84 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 19y = 76; \;\; y = \frac{76}{19} = 4; \;\; 4x + 4 = 8; \;\; 4x = 4; \;\; x = 1 \Rightarrow B(1,4).$$

$$C \Rightarrow \left.\begin{matrix} 3x - 2y = 12 \\ x + 5y = 21 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} -3x + 2y = -12 \\ 3x + 15y = 63 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 17y = 51; \;\; y = \frac{51}{17} = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + 15 = 21; \;\; x = 6 \Rightarrow C(6,3).$$

$$D \Rightarrow \left.\begin{matrix} y = 0 \\ 3x - 2y = 12 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3x = 12; \;\; x = 4 \Rightarrow D(4,0).$$

$b)$ La función de objetivos es $f(x, y) = x + y + 1$.

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(2, 0) = 2 + 0 + 1 = 2$. $B \Rightarrow f(1, 4) = 1 + 4 + 1 = 6$.

$C \Rightarrow f(6, 3) = 6 + 3 + 1 = 10$. $D \Rightarrow f(4, 0) = 4 + 0 + 1 = 5$.

El valor mínimo se produce en el punto $C(6, 3)$.

También se hubiera obtenido el punto C por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x, y) = x + y + 1 = 0 \Rightarrow y = -x - 1 \Rightarrow m = -\frac{1}{1}$.

$\underline{El\ beneficio\ de\ la\ empresa\ es\ máximo\ para\ x = 6\ e\ y = 3}.$

Bloque 2. Análisis

Problema 2.1:

Consideramos la función $f(x) = x^4 - ax^2 + b$.

$a)$ ¿Qué valores deben tomar a y b para que la función tenga un mínimo en $P(1,0)$?

$b)$ Con los valores de a y b del apartado anterior, calcula los puntos donde $f(x)$ tiene tangente paralela a la recta $y = 1$.

$c)$ Calcula la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 1$.

Nota: Si no has conseguido determinar a y b en el apartado anterior, toma como valores $a = 2$ y $b = 1$ en los apartados $b)$ y $c)$.

Solución:

$a)$ Por contener al punto $P(1,0)$ es $f(1) = 0$:

$f(1) = 1^4 - a \cdot 1^2 + b = 1 - a + b = 0;\ \ a - b = 1.$ (1)

Por tener un mínimo relativo en $P(1,0)$ es $f'(1) = 0$.

$f'(x) = 4x^3 - 2ax.\ \ f'(1) = 4 \cdot 1^3 - 2a \cdot 1 = 0;\ \ 4 - 2a = 0 \Rightarrow \underline{a = 2}$.

Sustituyendo en (1) el valor obtenido de a: $2 - b = 1 \Rightarrow \underline{b = 1}$.

$$\boldsymbol{a = 2;\, b = 1}$$

$b)$ La función resulta $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$.

La pendiente de la recta $y = 1$ es $m = 0$.

La pendiente de la tangente a la gráfica de una función en un punto es igual que el valor de la primera derivada de la función en ese punto.

$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$.

$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = 1.$

$$\underline{\boldsymbol{Los\ puntos\ pedidos\ son\ A(0,1), B(-1,0)\ y\ P(1,0)}}.$$

$c)$ El punto de tangencia en $P(1,0)$. $m = f'(1) = 0$

$$\underline{\boldsymbol{La\ tangente\ pedida\ es\ t \equiv y = 0\ (eje\ X)}}.$$

Problema 2.2:

Sea la función $f(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ x^2, 0 \leq x < 1 \\ ax - 2, 1 \leq x \end{cases}$:

$a)$ ¿Para qué valor de a la función es continua?

$b)$ Utilizando el valor de a del apartado anterior, esboza una gráfica de la función f.

$c)$ Con el valor de a del apartado $a)$, calcula el área encerrada por la gráfica de la función f, el eje OX y la recta $x = 3$.

Nota: Si no has conseguido determinar a, toma $a = 3$ en los apartados $b)$ y $c)$.

Solución:

$a)$ La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x = 1$, cuya continuidad es dudosa y se va a determinar el valor real de a para que lo sea.

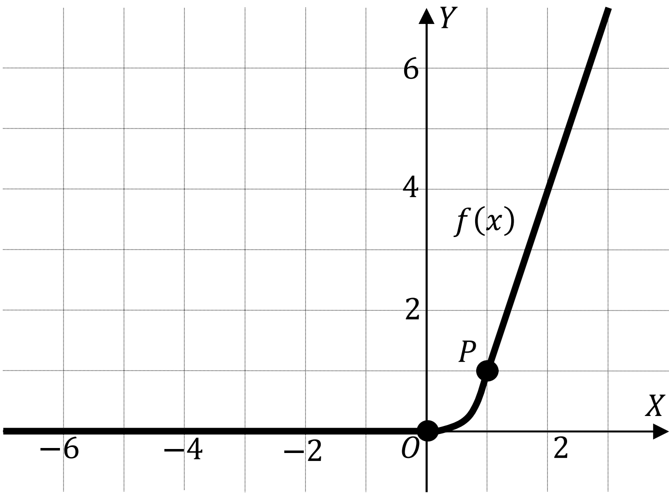
Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} x^2 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}(ax - 2) = a - 2 = f(1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow 1 = a - 2 \Rightarrow \underline{a = 3}.$$

Para $\boldsymbol{a = 3}$ la función es continua.

$b)$ La función resulta ser $f(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ x^2, 0 \leq x < 1 \\ 3x - 2, 1 \leq x \end{cases}$.



La representación gráfica de la función se expresa en la figura adjunta; se ha tenido en cuenta que la función es continua en su dominio, que es R, que en el intervalo $(-\infty, 0)$ la función es una recta horizontal; en el intervalo $[0, 1)$ es una parábola cóncava $(\cup)$ por ser positivo el coeficiente de x^2 y en el intervalo $[1, +\infty)$ es una recta de pendiente tres.

$c)$ Todas las ordenadas de la función en el intervalo de la superficie a calcular, que es $(0,3)$, son positivas, por lo cual, la superficie pedida es la siguiente:

$$S=\int_0^1 x^2\cdot dx+\int_1^3 (3x-2)\cdot dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1+\left[\frac{3x^2}{2}-2x\right]_1^3=$$

$$=\frac{1^3}{3}-0+\left(\frac{3\cdot 3^2}{2}-2\cdot 3\right)-\left(\frac{3\cdot 1^2}{2}-2\cdot 1\right)=\frac{1}{3}+\frac{27}{2}-6-\frac{3}{2}+2=8+\frac{1}{3}=\frac{25}{3}.$$

$$\underline{S=\frac{25}{3}\,u^2\cong 8.33\,u^2.}$$

$$\boldsymbol{S=\frac{25}{3}\,u^2\cong 8.33\,u^2}$$

Problema 2.3:

La parte positiva de la función $f(t) = -2t^2 + 16t$ indica la gravedad de un enfermo desde que contrae una determinada enfermedad hasta que vuelve a estar sano.

a) Haz un esbozo de la gráfica de la función.

b) Si la variable t se mide en días, ¿cuántos días dura la enfermedad?

c) ¿En qué día del proceso está más grave el enfermo?

Solución:

a) La función $f(t) = -2t^2 + 16t$ es una parábola cóncava ($\cap$) por ser negativo el coeficiente de t^2, cuyo vértice (máximo) es el siguiente:

$f'(t) = -4t + 16 = 0 \Rightarrow t = 4.$

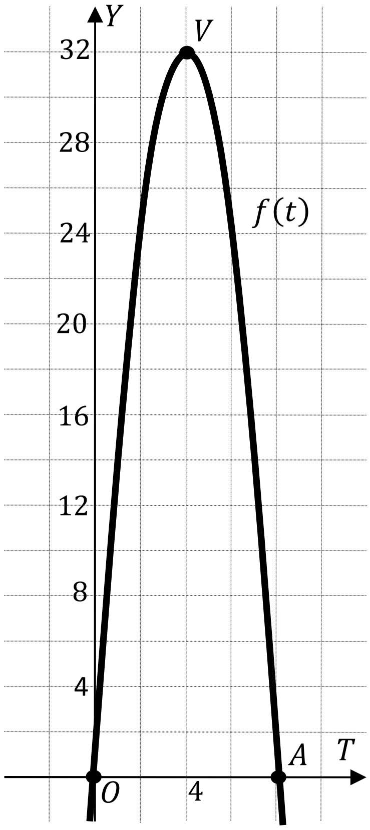
$f(4) = -2 \cdot 4^2 + 16 \cdot 4 = 32 \Rightarrow V(4, 32).$

Los puntos de corte con el eje de abscisas son los siguientes:

$f(t) = 0 \Rightarrow -2t^2 + 16t = 0;\ \ t^2 - 8t = 0;$

$$t(t-8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \rightarrow O(0,0) \\ t_2 = 8 \rightarrow A(8,0) \end{cases}.$$

La representación gráfica de la función $f(t)$ se expresa en la figura adjunta.



b)

$$\underline{La\ enfermedad\ duró\ 8\ días.}$$

c)

$$\underline{El\ enfermo\ está\ más\ grave\ al\ \mathbf{cuarto}\ día\ del\ comienzo\ de\ la\ enfermedad.}$$

Bloque 3. Estadística y Probabilidad

Problema 3.1:

El número de usuarios del transporte metropolitano sigue una distribución normal con desviación típica 108.

a) Si la media de usuarios fuese de 1 700, ¿cuál sería la probabilidad de que la media de usuarios de 36 días fuese más de 1 678?

b) En los 100 primeros días del año, la media diaria de usuarios ha sido de 1 750, determina un intervalo de confianza del 95 % para la media de viajeros.

Solución:

$a)\ Datos\!:\ \mu = 1\,700;\ \ \sigma = 108.$

$$\bar{X} \to N\left(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(1\,700; \frac{108}{\sqrt{36}}\right) = N\left(1\,700; \frac{108}{6}\right) = N(1\,700;\ 18).$$

Tipificando la variable: $Z = \frac{X - 1\,700}{18}$.

$$P = P(X > 1\,678) = P\left(Z > \frac{1\,678 - 1\,700}{18}\right) = P\left(Z > \frac{-22}{18}\right) = P(Z > -1.22) =$$

$= P(Z \leq 1.22) = \underline{0.8888}$.

La probabilidad de que la media de 36 días fuese superior a 1 678 es de $\mathbf{0.8888}$

b) Para un nivel de confianza del 95 % es:

$$1 - \alpha = 0.95\ \to\ \alpha = 1 - 0.95 = 0.05\ \to\ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.025} = 1.96.$$

$$(1 - 0.025 = 0.9750\ \to z = 1.96).$$

Datos: $n = 100;\ \ \bar{x} = 1\,750;\ \ \sigma = 108\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\bar{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(1\,750 - 1.96 \cdot \frac{108}{\sqrt{100}};\ 1\,750 + 1.96 \cdot \frac{108}{\sqrt{100}}\right);$$

$(1\,750 - 1.96 \cdot 10.8;\ 1\,750 + 1.96 \cdot 10.8);\ \ (1\,750 - 21.168;\ 1\,750 + 21.168)$

$$\underline{I.C._{95\,\%} = (1\,728.832;\ 1\,271.168).}$$

Intervalo de confianza para la media de viajeros: $(\mathbf{1\,728.832;\ 1\,271.168})$

Problema 3.2:

En una clase hay 24 estudiantes, 12 de ellos han aprobado inglés, 16 han aprobado matemáticas y 4 han suspendido las dos asignaturas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que al elegir al azar un alumno de esa clase resulte que haya aprobado matemáticas y haya suspendido inglés?

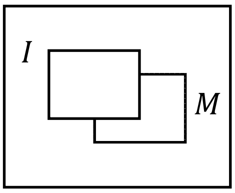
b) ¿Cuál es la probabilidad de que al elegir al azar un alumno de esa clase resulte que haya aprobado las dos asignaturas?

c) ¿Son independientes los sucesos aprobar matemáticas y aprobar inglés?

Solución:

$$Datos: P(I) = \frac{12}{24} = \frac{1}{2};\ \ P(M) = \frac{16}{24} = \frac{2}{3};\ \ P(\overline{I} \cap \overline{M}) = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}.$$

a)



$$\Rightarrow P(\overline{I} \cap \overline{M}) = 1 - P(I \cup M) \Rightarrow$$

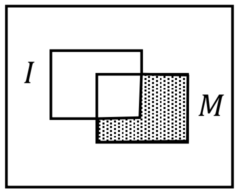
$$\Rightarrow P(I \cup M) = 1 - P(\overline{I} \cap \overline{M}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

$$P(I \cup M) = P(I) + P(M) - P(I \cap M) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(I \cap M) = P(I) + P(M) - P(I \cup M) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{5}{6} =$$

$$= \frac{3+4-5}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

$$P(\overline{I} \cap M) = P(M) - P(I \cap M) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \underline{\frac{1}{3}}.$$



$P(\overline{I} \cap M) = P(M) - P(I \cap M)$

La probabilidad de que haya aprobado Matemáticas y suspendido Inglés, es de **1/3**.

b) De los 24 alumnos han aprobado las dos asignaturas 4. Aplicando la regla de Laplace:

$$P = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles} = \frac{4}{24} = \underline{\frac{1}{6}}.$$

La probabilidad de que haya aprobado las dos asignaturas de **1/6**.

c) Dos sucesos $I\ y\ M$ son independientes cuando $P(I \cap M) = P(I) \cdot P(M)$:

$$P(I) \cdot P(M) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3} = P(I \cap M).$$

$\underline{Por\ lo\ expuesto\ anteriormente\ los\ sucesos\ I\ y\ M\ son\ independientes.}$

Problema 3.3:

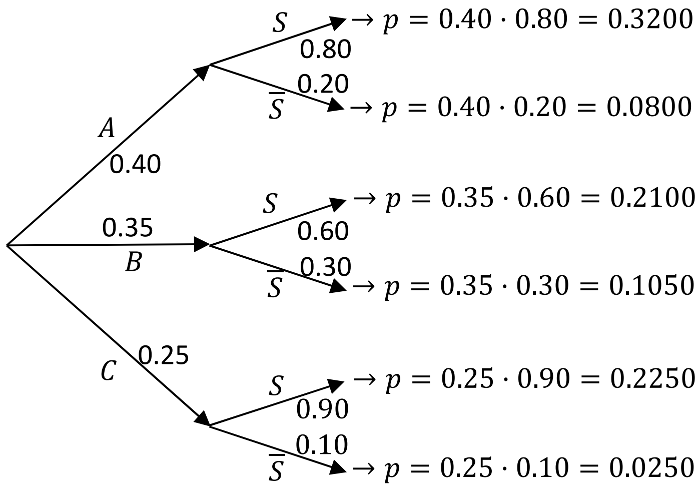
Un hospital está especializado en el tratamiento de tres enfermedades A, B y C. El 40 % de los pacientes ingresan con la enfermedad A, el 35 % con la enfermedad B y el 25 % con la enfermedad C. La probabilidad de curación de la enfermedad A es del 80 %, la de B el 60 % y de la C el 90 %.

a) José ingresa en el hospital (no sabemos cuál de las tres enfermedades padece). ¿Cuál es la probabilidad de que se cure?

b) Miguel ingresó en el hospital y se ha restablecido completamente. ¿Cuál es la probabilidad de que ingresara padeciendo la enfermedad B?

c) Rosa ingresó en el hospital y se ha restablecido completamente. ¿Cuál es la probabilidad de que NO padeciera la enfermedad B?

Solución:



a) $P = P(S) = P(A \cap S) + P(B \cap S) + P(C \cap S) =$

$= P(A) \cdot P(S/A) + P(B) \cdot P(S/B) + P(C) \cdot P(S/C) =$

$= 0.40 \cdot 0.80 + 0.35 \cdot 0.60 + 0.35 \cdot 0.25 = 0.3200 + 0.2100 + 0.2250 = \underline{0.7550}$.

La probabilidad de que se cure José es del $\mathbf{0.7550}$

b) $P = P(B/S) = \frac{P(B \cap S)}{P(S)} = \frac{P(B) \cdot P(S/B)}{P(S)} = \frac{0.35 \cdot 0.60}{0.755} = \frac{0.210}{0.755} = \underline{0.2781}$.

La probabilidad de que Miguel tuviera la enfermedad B es del $\mathbf{0.2781}$.

c) El suceso de Rosa es el contrario del suceso de Miguel, por lo tanto:

$P = P(\overline{B}/S) = 1 - P\left(\frac{B}{S}\right) = 1 - 0.2781 = \underline{0.7219}$.

La probabilidad de que Rosa NO tuviera la enfermedad B es del $\mathbf{0.7219}$