Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2020

Comunidad autónoma de

GALICIA

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Dolores Vázquez Torrón

CiUG	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2019–2020** MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSS II	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN El examen consta de 6 preguntas, todas con la misma puntuación (3.33), de las que se puede responder un MÁXIMO DE 3, combinadas como quiera. Si responde a más preguntas de las permitidas, sólo se corregirán las 3 primeras respondidas.

Problema A.1: Álgebra. Consideramos las matrices: $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & a & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b & -b & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcule las matrices A + B y 3C - B.

b) Exprese en forma matricial el sistema de ecuaciones que se obtiene al plantear A + B = 3C – B y resuélvalo.

Problema A.2: Álgebra. Un fabricante de sistemas de iluminación quiere producir focos de tecnología led en dos modelos distintos: A y B. Para diseñar la estrategia de producción diaria tendrá en cuenta que se producirán al menos 50 focos del modelo A, que el número de focos del modelo B no superará las 300 unidades y que se producirán al menos tantos focos del modelo B como del modelo A. Además, la producción total no superará las 500 unidades diarias.

a) Formule el sistema de inecuaciones asociado al problema.

b) Representa la región factible y calcule sus vértices.

c) Si el beneficio obtenido por cada foco del modelo A es de 60 euros y por cada foco del modelo B es de 40 euros, ¿cuántos focos de cada modelo debe producir diariamente para maximizar el beneficio? ¿A cuánto asciende el beneficio máximo?

Problema A.3: Análisis. El número de personas (en miles) que visitan cada año un parque temático viene dado por la función:

$\boldsymbol{P(t)=\frac{180t}{t^2+9}}$, $\boldsymbol{t\geq 0}$ donde t es el tiempo transcurrido en años desde su apertura en el año 2010 (t = 0).

a) Determine los periodos de crecimiento y decrecimiento del número de visitantes.

b) ¿En qué año recibió el mayor número de visitantes? ¿A cuánto ascienden? Razone las respuestas.

c) ¿A partir de qué año el número de visitantes será inferior a 18 000 personas? ¿Qué ocurrirá con el número de visitantes con el paso del tiempo? Razone las respuestas.

Problema A.4: Análisis. Dada la función $f(x) = -4x^2 + 12x - 5$.

a) Realice su representación gráfica estudiando sus puntos de corte con los ejes, monotonía y extremo relativo. **b)** Calcule el área del recinto limitado por la gráfica de la función f(x), el eje OX y las rectas x=1, x=2.

Problema A.5: Estadística y probabilidad.

Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que P(A) = 0.4 , $\boldsymbol{P(\overline{B})=0.7}$ y $\boldsymbol{P(\overline{B}/A)=0.75}$. Calcule las siguientes probabilidades:

a) $\boldsymbol{P(A\cap\overline{B})}$ b) $\boldsymbol{P(A\cup B)}$ c) $\boldsymbol{P(A\cap B)}$. **d)** ¿Son A y B sucesos independientes? Justifique la respuesta.

Problema A.6: Estadística y probabilidad.

La producción diaria de leche, medida en litros, de una granja se puede aproximar por una variable normal de media $\boldsymbol{\mu}$ desconocida y desviación típica $\boldsymbol{\sigma=50}$ litros.

a) Determine el tamaño mínimo de muestra para que el correspondiente intervalo de confianza para $\boldsymbol{\mu}$ al 95 % tenga una amplitud a lo sumo de 8 litros.

b) Se toman los datos de producción de 25 días, calcule la probabilidad de que la media de las producciones obtenidas sea menor o igual a 930 litros si sabemos que $\boldsymbol{\mu}$ = 950 litros.

SOLUCIONES

Problema A.1: Álgebra. Consideramos las matrices: $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{a} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b} & \boldsymbol{-b} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{3} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$

a) Calcule las matrices A + B y 3C - B.

b) Exprese en forma matricial el sistema de ecuaciones que se obtiene al plantear A + B = 3C – B y resuélvalo.

Solución:

$$a)\quad A = \begin{pmatrix} a & a & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b & -b & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} c & -3 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a+b & a-b & 2 \\ a+3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3C - B = \begin{pmatrix} 3c & -9 & 3 \\ 3c & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b & -b & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3c-b & -9+b & 2 \\ 3c-3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Se expresa en forma matricial el sistema de ecuaciones que se obtiene al plantear A + B = 3C – B y se resuelve.

$$A + B = 3C - B \Rightarrow \begin{cases} a + b = 3c - b \\ a - b = -9 + b \\ a + 3 = 3c - 3 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} a + 2b - 3c = 0 \\ a - 2b \quad = -9 \\ a - 3c = -6 \end{cases}$$

Su expresión matricial es: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ -6 \end{pmatrix}$

Resolución por Cramer $\quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 6 - 6 + 6 = 6 \neq 0.$

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -9 & -2 & 0 \\ -6 & 0 & -3 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{36-54}{6} = \frac{-18}{6} = -3$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & -9 & 0 \\ 1 & -6 & -3 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{27+18-27}{6} = 3$$

$$c = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -9 \\ 1 & 0 & -6 \end{vmatrix}}{1A1} = \frac{12-18+12}{6} = 1$$

Resolución por Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -9 \\ 1 & 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -4 & +3 & -9 \\ 0 & -2 & 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 2F_3 - F_2 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -4 & +3 & -9 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$3c = 3 \quad \Rightarrow c = 1$$
$$4b - 3c = 9 \Rightarrow b = 3$$
$$a + 2b - 3c = 0 \Rightarrow a = -3$$

a = -3, b = 3, c = 1

Problema A.2: Álgebra. Un fabricante de sistemas de iluminación quiere producir focos de tecnología led en dos modelos distintos: A y B. Para diseñar la estrategia de producción diaria tendrá en cuenta que se producirán al menos 50 focos del modelo A, que el número de focos del modelo B no superará las 300 unidades y que se producirán al menos tantos focos del modelo B como del modelo A. Además, la producción total no superará las 500 unidades diarias.

a) Formule el sistema de inecuaciones asociado al problema.

b) Representa la región factible y calcule sus vértices.

c) Si el beneficio obtenido por cada foco del modelo A es de 60 euros y por cada foco del modelo B es de 40 euros, ¿cuántos focos de cada modelo debe producir diariamente para maximizar el beneficio? ¿A cuánto asciende el beneficio máximo?

Solución:

a) Formule el sistema de inecuaciones asociado al problema.

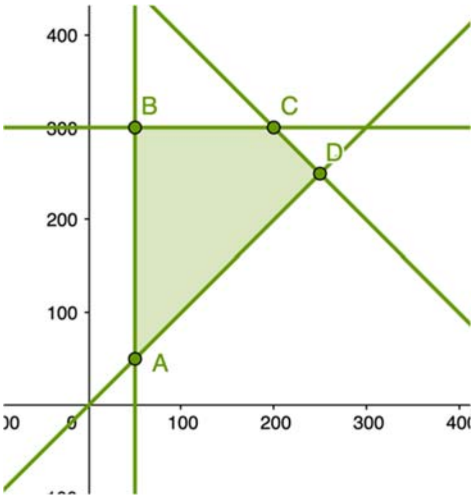
x: nº de focos tipo A que se producen diariamente

y: nº de focos tipo B que se producen diariamente

$$\begin{cases} x \geq 50 \\ y \leq 300 \\ y \geq x \\ x + y \leq 500 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

*Podemos prescindir de las restricciones $x \geq 0$, $y \geq 0$ al quedar incluidas en las restricciones $\times \geq 50, y \geq x$

b) Representa la región factible y calcule sus vértices.



$$\begin{aligned} &A: (x = 50) \cap (x = y) &&\Rightarrow A = (50,50) \\ &B: (x = 50) \cap (y = 300) &&\Rightarrow B = (50,300) \\ &C: (y = 300) \cap (x + y = 500) &&\Rightarrow C = (200,300) \\ &D: (y = x) \cap (x + y = 500) &&\Rightarrow D = (250,250) \end{aligned}$$

c) Si el beneficio obtenido por cada foco del modelo A es de 60 euros y por cada foco del modelo B es de 40 euros, ¿cuántos focos de cada modelo debe producir diariamente para maximizar el beneficio? ¿A cuánto asciende el beneficio máximo?

Maximizar z=f(x,y)=60x+40y

A: f(50,50)=60·50+40·50=5 000€

B: f(50,300)=60·50+40·300=15 000€

C: f(200,300)=60·200+40·300=24 000€

D: f(250,250)=60·250+40·250=25 000€ → máximo

Deben producirse 250 unidades diarias de cada modelo para obtener un beneficio máximo de 25 000 €

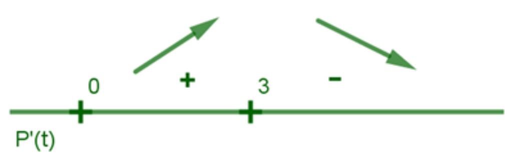
Problema A.3: Análisis. El número de personas (en miles) que visitan cada año un parque temático viene dado por la función: $P(t) = \frac{180t}{t^2+9}$, $t \geq 0$ donde t es el tiempo transcurrido en años desde su apertura en el año 2010 (t = 0). **a)** Determine los periodos de crecimiento y decrecimiento del número de visitantes.
b) ¿En qué año recibió el mayor número de visitantes? ¿A cuánto ascienden? Razone las respuestas.
c) ¿A partir de qué año el número de visitantes será inferior a 18 000 personas? ¿Qué ocurrirá con el número de visitantes con el paso del tiempo? Razone las respuestas.

Solución:

El número de personas (en miles) que visitan cada año un parque temático viene dado por la función: $P(t) = \frac{180t}{t^2+9}$, $t \geq 0$ donde t es el tiempo transcurrido en años desde su apertura en el año 2010 (t = 0).
a) Determine los periodos de crecimiento y decrecimiento del número de visitantes.

Estudiamos el signo de la derivada 1ª en el dominio de la función (t≥ 0)

$P'(t) = \frac{180(t^2+9)-360t^2}{(t^2+9)^2} = \frac{-180t^2+1620}{(t^2+9)^2}$; $P'(t) = 0 \Rightarrow t^2 = 9 \Rightarrow t = \pm 3$ (t = 3 punto crítico)



La función es creciente en $(0, 3)$ y decreciente en $(3, \infty)$

El nº de visitantes fue creciendo desde el año 2010, año de la apertura del parque hasta 2013. A partir de ese momento el nº de visitantes desciende

b) ¿En qué año recibió el mayor número de visitantes? ¿A cuánto ascienden? Razone las respuestas.
P(0) = 0 por lo tanto x = 3 es un máximo absoluto de la función (continua en el punto x = 3 y pasa de crecimiento a decrecimiento). P(3) = 30

El mayor número de visitantes se registra en el año 2013 y es de 30 000 personas

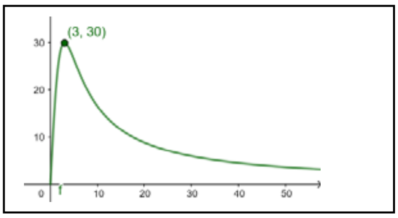
c) $P(t) < 18$. Resolvemos la inecuación:

$$\frac{180t}{t^2+9} < 18 \Rightarrow 180t < 18(t^2+9) \Rightarrow 0 < 18t^2 - 180t + 162$$

$$\Rightarrow t^2 - 10t + 9 > 0; t^2 - 10t + 9 = 0 \Rightarrow t = \frac{10 \pm 8}{2} \Rightarrow t = 1, t = 9$$

La función toma valores inferiores a 18 en los intervalos $(0, 1) \cup (9, \infty)$ por lo tanto:

A partir de 2019 (t = 9) el nº de visitantes desciende de los 18 000.



¿Qué ocurrirá con el número de visitantes con el paso del tiempo?

Calculamos el límite observando grado del numerador y denominador

$$\lim_{t \to \infty} \frac{180t}{t^2+9} = 0$$

Con el paso del tiempo el número de visitantes al parque descenderá tendiendo a cero personas.

Problema A.4:

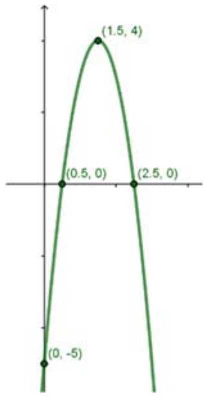
Dada la función $\boldsymbol{f(x) = -4x^2 + 12x - 5}$.

a) Realice su representación gráfica estudiando sus puntos de corte con los ejes, monotonía y extremo relativo.

b) Calcule el área del recinto limitado por la gráfica de la función f(x), el eje OX y las rectas x = 1, x = 2.

Solución:

a) $\mathrm{f(x) = -4x^2 + 12x - 5}$



Puntos de corte con eje $\overline{\boldsymbol{OY}}$: $\boldsymbol{y = 0 \Rightarrow -4x^2 + 12x - 5 = 0 \Rightarrow}$

$$\boldsymbol{x = -\frac{12 \pm 8}{-8} = \begin{cases} \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, 0\right) \\ \frac{5}{2} \Rightarrow \left(\frac{5}{2}, 0\right) \end{cases}}$$

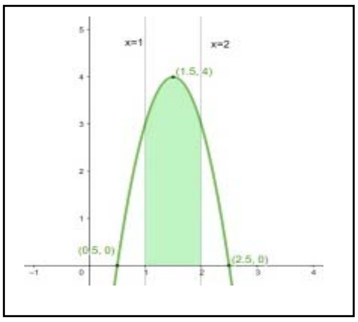
Puntos de corte con eje $\overline{\boldsymbol{OX}}$: $\boldsymbol{x = 0 \Rightarrow y = -5 \Rightarrow (0, -5)}$

Extremos: $\boldsymbol{f'(x) = -8x + 12}$

$\boldsymbol{f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}}$ punto crítico

$\boldsymbol{f''(x) = -8 \Rightarrow f''\left(\frac{3}{2}\right) > 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}, y = 4}$ máximo relativo de *f(x)* $\Rightarrow \boldsymbol{(\frac{3}{2}, 4)}$

El extremo también se puede calcular, teniendo en cuenta que la función de partida es una parábola cóncava (∩), calculando las coordenadas del vértice:



$\boldsymbol{x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2} \quad y_v = 4}$

b) A = $\boldsymbol{\int_1^2 (f(x) - g(x))dx = \int_1^2 (-4x^2 + 12x - 5)dx =}$

$$\boldsymbol{\left[-\frac{4x^3}{3} + 6x^2 - 5x\right]_1^2 = \frac{-32}{3} + 24 - 10 - \left(-\frac{4}{3} + 6 - 5\right) = \frac{11}{3}u^2}$$

$$\mathrm{A = \frac{11}{3}u^2}$$

Problema A.5:

Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que P(A) = 0.4, $\boldsymbol{P(\overline{B}) = 0.7}$ y $\boldsymbol{P(\overline{B}/A) = 0.75}$. Calcule las siguientes probabilidades:

a) $\boldsymbol{P(A \cap \overline{B})}$ b) $\boldsymbol{P(A \cup B)}$ c) $\boldsymbol{P(A \cap B)}$. d) ¿Son A y B sucesos independientes? Justifique la respuesta.

Solución:

Teniendo en cuenta la propiedad $\boldsymbol{P(A) + P(\overline{A}) = 1}$

$$\boldsymbol{P(A) = 0.4 \Rightarrow P(\overline{A}) = 0.6}$$
$$\boldsymbol{P(\overline{B}) = 0.7 \Rightarrow P(B) = 0.3}$$
$$\boldsymbol{P(\overline{B}/A) = 0.75 \Rightarrow P(B/A) = 0.25}$$

a) Como $\boldsymbol{P(\overline{B}/A) = \frac{P(A\cap\overline{B})}{P(A)}}$

$$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) \cdot \mathrm{P}(\overline{\mathrm{B}}/\mathrm{A}) = 0.4 \cdot 0.75 = 0.3$$

b) $P(A \cap B) = P(A) - P\left(\frac{B}{A}\right) = 0.4 \cdot 0.25 = 0.1$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.4 + 0.3 - 0.1 = 0.6$$

c) Calculada en el apartado anterior:

$$P(A \cap B) = 0.1$$

d) Para que dos sucesos A y B sean independientes debe cumplirse alguna de las siguientes condiciones:

$\boldsymbol{P(A) = P(A/B)}$ ***o*** $\boldsymbol{P(B) = P(B/A)}$ ***o*** $\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$

En este caso $\boldsymbol{P(A \cap B) = 0.1}$

$\boldsymbol{P(A) \cdot P(B) = 0.4 \cdot 0.3 = 0.12}$,

Por lo tanto, los sucesos **no** son independientes

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2019–2020** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA DE JULIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El examen consta de 6 preguntas, todas con la misma puntuación (3,33), de las que se puede responder un MÁXIMO DE 3, combinadas como quiera. Si responde a más preguntas de las permitidas, sólo se corregirán las 3 primeras respondidas.

Problema 1: Álgebra. Disponemos de tres granjas A, B y C para la cría ecológica de pollos. La granja A tiene capacidad para criar un 20% más de pollos que la granja B, y la granja B tiene capacidad para criar el doble de pollos que la granja C. Se sabe además que entre las tres granjas se pueden criar un total de 405 pollos.

a) Formule el sistema de ecuaciones asociado a este problema.

b) Resuelva el sistema de ecuaciones anterior. ¿Cuántos pollos se pueden criar en cada una de las tres granjas?

Problema 2: Álgebra. El Comité Organizador de un Congreso cuenta con dos tipos de habitaciones, A y B, para ofrecer como alojamiento a sus participantes. Para realizar la contratación, han decidido que el número de habitaciones de tipo B no debe ser mayor que el número de habitaciones de tipo A, y que el número de habitaciones de tipo A no debe ser mayor que 160. Además, se sabe que en total serán necesarias como máximo 200 habitaciones.

a) Plantee el sistema de inecuaciones asociado a este problema.

b) Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices.

c) Si los costes son de 80 € por cada habitación de tipo A y de 50 € por cada habitación de tipo B, ¿cuál es el coste máximo de alojamiento que afrontaría el Comité Organizador? ¿Cuántas habitaciones de cada tipo habría que contratar para que se diese esa situación?

Problema 3: Análisis. Los gastos financieros de una organización, en cientos de miles de euros, siguen la función:

$$G(t) = \begin{cases} 4 - \frac{t}{3} & si \;\; 0 \le t \le 3 \\ \frac{5t-3}{t+1} & si \;\; t > 3 \end{cases}$$ siendo t el tiempo en años transcurridos.

a) ¿En qué momento los gastos son iguales a 400 000 euros? Razona la respuesta.

b) ¿Cuándo crece G(t)? ¿Cuándo decrece G(t)? ¿Cuándo los gastos alcanzan su valor mínimo y cuánto valen?

c) ¿Qué ocurre con los gastos cuando el número de años crece indefinidamente?

Problema 4: Análisis. Una pequeña empresa comercializa paraguas a 60 euros la unidad. El coste de producción diario de "x" paraguas viene dado por la función $C(x)= x^2-10x$, estando limitada su capacidad de producción a un máximo de 70 paraguas al día ($0 \le x < 70$).

a) Obtenga las expresiones de las funciones que determinan los ingresos y los beneficios diarios obtenidos por la empresa en función del número de paraguas producidos "x".

b) Determine el número de paraguas que debe producir diariamente para obtener el máximo beneficio. ¿A cuánto ascienden los ingresos, los costes y los beneficios diarios en este caso? Razone la respuesta.

Problema 5: Estadística y Probabilidad. Una empresa de transporte decide renovar su flota de vehículos. Para ello encarga 240 vehículos al distribuidor A, 600 al distribuidor B y 360 al distribuidor C. Se sabe que el 10% de los vehículos suministrados por el distribuidor A tienen algún defecto, siendo estas proporciones del 20% y 15% para los distribuidores B y C respectivamente.

Para aceptar o rechazar el pedido la empresa revisa un vehículo elegido al azar del total de vehículos, rechazando todo el pedido si el vehículo tiene algún defecto.

a) Determine el porcentaje de pedidos rechazados.

b) Si el vehículo revisado resulta ser NO defectuoso, calcule la probabilidad de que provenga del distribuidor A.

Problema 6: Estadística y probabilidad.

Una empresa editorial desea conocer el impacto que tendrá la publicación de una nueva obra de un reconocido novelista. Tras revisar a 100 personas aficionadas a la lectura, 80 de ellas reconocen que adquirirán esa nueva obra.

a) ¿Con qué nivel de confianza se puede afirmar que la proporción de aficionados a la lectura que adquirirán la obra está entre el 69.7% y el 90.3%? **b)** Si se sabe que 8 de cada 10 personas aficionadas a la lectura adquirirán la obra y elegimos una muestra de n=144 de esas personas, calcule la probabilidad de que la proporción de aficionados a la lectura que adquirirán la obra sea superior al 75%.

SOLUCIONES

Problema A.1:

Disponemos de tres granjas A, B y C para la cría ecológica de pollos. La granja A tiene capacidad para criar un 20 % más de pollos que la granja B, y la granja B tiene capacidad para criar el doble de pollos que la granja C. Se sabe además que entre las tres granjas se pueden criar un total de 405 pollos.

a) Formule el sistema de ecuaciones asociado a este problema.

b) Resuelva el sistema de ecuaciones anterior. ¿Cuántos pollos se pueden criar en cada una de las tres granjas?

Solución:

Definimos las variables

a) *x* = nº de pollos que puede criar la granja *A*

y = nº de pollos que puede criar la granja *B*

z = nº de pollos que puede criar la granja *C*

Planteamos las ecuaciones:

La granja *A* tiene capacidad para criar un 20 % más de pollos que la granja *B* $\Longrightarrow$ *x* = 1.20*y*

la granja *B* tiene capacidad para criar el doble de pollos que la granja *C* $\Longrightarrow$ *y* = 2*z*

entre las tres granjas se pueden criar un total de 405 pollos. $\Longrightarrow$ *x + y + z* = 405

Por lo tanto, el sistema asociado:

$$\left.\begin{array}{r} x = 1.20y \\ y = 2z \\ x + y + z = 405 \end{array}\right\}$$

b) $\left.\begin{array}{r} \mathrm{x = 1.20y} \\ \mathrm{y = 2z} \\ \mathrm{x + y + z = 405} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{r} \mathrm{x - 1.20y = 0} \\ \mathrm{y - 2z = 0} \\ \mathrm{x + y + z = 405} \end{array}\right\}$

Resolvemos

$$x = 1.20y \quad \Rightarrow 1.20y + y + z = 405 \quad \Rightarrow 2.20y + z = 405 \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{r} z = 405 - 2.20y \\ z = \frac{y}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$405 - 2{,}20y = \frac{y}{2} \Rightarrow \; 810 - 4{,}40y = y \quad \Rightarrow y = \frac{810}{5{,}40} \Rightarrow \; y = 150, \quad z = 75, \quad x = 180$$

Puede criar 180 pollos en la granja A, 150 en la granja B y 75 en la granja C.

Podemos resolverlo por Gauss utilizando cálculo con matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & -1.20 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 405 \end{pmatrix} \mathrm{F_3 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & -1.20 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2.20 & 1 & 405 \end{pmatrix} \mathrm{F_3 - 2.12F_2} \begin{pmatrix} 1 & -1.20 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5.4 & 405 \end{pmatrix} \Rightarrow ?$$

$$\mathrm{5.4z = 405 \Rightarrow z = \frac{405}{5.4} \Rightarrow z = 75 \text{ pollos que puede criar la graja C}}$$

$$\mathrm{y - 2z = 0 \Rightarrow y = 150 \text{ pollos que puede criar la graja B}}$$

$$\mathrm{x - 1120y = 0 \Rightarrow x = 180 \text{ pollos que puede criar la graja A}}$$

*Se facilitarían mucho los cálculos si hubiésemos simplificado la primera ecuación $\mathrm{x - 1.20y = 0} \Longrightarrow$ $\mathrm{100x - 120y = 0} \;\Longrightarrow \mathrm{5x - 6y = 0}$

Problema A.2:

El Comité Organizador de un Congreso cuenta con dos tipos de habitaciones, A y B, para ofrecer como alojamiento a sus participantes. Para realizar la contratación, han decidido que el número de habitaciones de tipo B no debe ser mayor que el número de habitaciones de tipo A, y que el número de habitaciones de tipo A no debe ser mayor que 160. Además, se sabe que en total serán necesarias como máximo 200 habitaciones.

a) Plantee el sistema de inecuaciones asociado a este problema.

b) Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices.

c) Si los costes son de 80 € por cada habitación de tipo A y de 50 € por cada habitación de tipo B, ¿cuál es el coste máximo de alojamiento que afrontaría el Comité Organizador? ¿Cuántas habitaciones de cada tipo habría que contratar para que se diese esa situación?

Solución:

a) Consideramos las variables:

x habitaciones tipo A

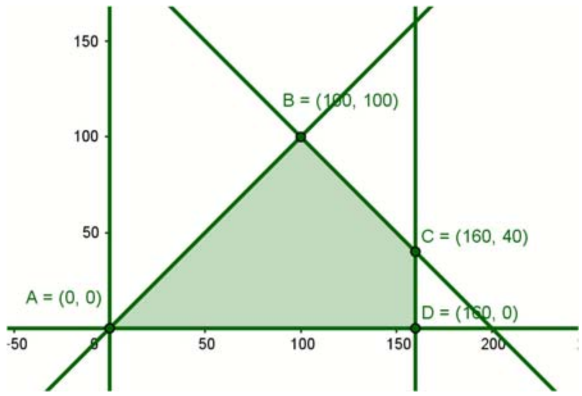
y habitaciones tipo B

$$\begin{cases} y \le x \\ x \le 160 \\ x + y \le 200 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

Podemos prescindir de la restricción x ≥ 0 por estar ya considerada en las restricciones $y \le x$, $y \ge 0$

b)

$$\begin{cases} r_1: & x - y = 0 \\ r_2: & x = 160 \\ r_3: & x + y = 200 \\ r_4: & x = 0 \\ r_5: & y = 0 \end{cases}$$



Calculamos los vértices de la región factible

A(0, 0)

B: $r_1 \cap r_3 \quad \left.\begin{array}{r} x = y \\ x + y = 200 \end{array}\right\} \Rightarrow B(100,100)$

$C: r_3 \cap r_2 \quad \left.\begin{array}{r} x + y = 200 \\ x = 160 \end{array}\right\} \Rightarrow C(160,40)$

$D:\ r_2 \cap r_5 \quad \left.\begin{array}{r} x = 160 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow D(160,0)$

c) la función objetivo a maximizar *z = f(x, y) = 80x + 50y*; A(0, 0) f(0, 0) = 0

B(100, 100) f(100, 100) = 80 · 100 + 50 · 100 = 13 000 €

C(160, 40) f(160, 40) = 80 · 160 + 50 · 40 = 14 800 €

D(160, 0) f(160, 0) = 80 · 160 = 12 800 €

El Comité Organizador afrontará un coste máximo de 14 800 € si contrata 160 habitaciones tipo A y 40 tipo B.

Problema A.3:

Los gastos financieros de una organización, en cientos de miles de euros, siguen la función:

$$\boldsymbol{G(t)=\begin{cases}4-\frac{t}{3} & si\ \ 0\le t\le 3\\ \frac{5t-3}{t+1} & si\ \ t>3\end{cases}}$$ siendo t el tiempo en años transcurridos.

a) ¿En qué momento los gastos son iguales a 400 000 euros? Razona la respuesta.
b) ¿Cuándo crece G(t)? ¿Cuándo decrece G(t)? ¿Cuándo los gastos alcanzan su valor mínimo y cuánto valen?
c) ¿Qué ocurre con los gastos cuando el número de años crece indefinidamente?

Solución:

a) La función de gastos viene dada en cientos de miles por lo que debemos determinar en que momento *G(t)* = 4

$$4-\frac{t}{3}=4\Rightarrow\frac{t}{3}=0\Rightarrow t=0$$

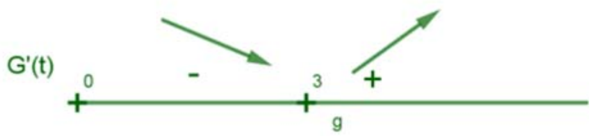
$$\frac{5t-3}{t+1}=4\Rightarrow 5t-3=4t+4\Rightarrow t=7$$

Los gastos ascienden a 400 000 € en el año que la empresa empieza a funcionar (t = 0) y en el séptimo año (t = 7)

b) Para estudiar el crecimiento estudiamos el signo de la primera derivada

$$G'(t)=\begin{cases}-\dfrac{1}{3} & 0\le t\le 3\\ \dfrac{5(t+1)-5t+3}{(t+1)^2} & t\ge 3\end{cases}\quad\Rightarrow\quad G'(t)=\begin{cases}-\dfrac{1}{3} & 0\le t\le 3\\ \dfrac{8}{(t+1)^2} & t\ge 3\end{cases}$$

$G'(t)\neq 0 \quad \forall t\in[0,\infty)$ por lo tanto, la función no tiene puntos críticos, para calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento tendremos en cuenta los puntos en los que la función cambia de expresión (t=3):



Los gastos disminuyen en los tres primeros años y aumentan a partir del tercero.

El mínimo debe alcanzarse el tercer año $G(3)=\frac{5\cdot 3-3}{3+1}=3$

El gasto mínimo se alcanza el tercer año y asciende a 300 000 €

c)

$$\lim_{t\to\infty}\frac{5t-3}{t+1}=5\Rightarrow$$

Con el paso del tiempo los gastos tienden a estabilizarse en torno a los 500 000 €.

Problema A.4:

Una pequeña empresa comercializa paraguas a 60 euros la unidad. El coste de producción diario de "x" paraguas viene dado por la función $C(x) = x^2 - 10x$, estando limitada su capacidad de producción a un máximo de 70 paraguas al día ($\mathbf{0 \leq x < 70}$) .

a) Obtenga las expresiones de las funciones que determinan los ingresos y los beneficios diarios obtenidos por la empresa en función del número de paraguas producidos "x".

b) Determine el número de paraguas que debe producir diariamente para obtener el máximo beneficio. ¿A cuánto ascienden los ingresos, los costes y los beneficios diarios en este caso? Razone la respuesta.

Solución:

$$C(x) = x^2 - 10x \qquad 0 \leq x < 70$$

a) Ingresos: $I(x) = 60x$

Beneficios: $B(x) = I(x) - C(x) = 60\text{x} - (\text{x}^2 - 10\text{x}) = -\text{x}^2 + 70\text{x} \qquad 0 \leq \text{x} < 70$

b) Función de beneficios es una parábola cóncava (∩) por lo que para determinar su máximo podemos calcular su vértice o hacer un estudio de las derivadas

$B'(x) = -2x + 70$

$B'(x) = 0 \;\Rightarrow\; \text{x} = \frac{70}{2} \;\Rightarrow \text{x} = 35$ punto crítico

$B''(x) = -2 < 0 \quad \forall x$ entonces $x = 35$, $y = 1\,225$ máximo relativo de la función $B(x)$.

Ingresos I(35) = 2 100

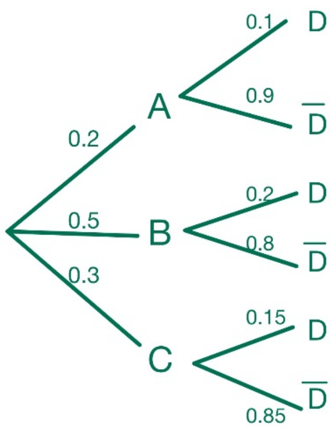
Costes C(35) = 875

Produciendo **35** paraguas diarios se obtiene un **beneficio** máximo de **1 225 €** consiguiéndose unos **ingresos de 2 100 €** y unos **costes de producción de 875 €.**

Problema A.5:

Una empresa de transporte decide renovar su flota de vehículos. Para ello encarga 240 vehículos al distribuidor A, 600 al distribuidor B y 360 al distribuidor C. Se sabe que el 10 % de los vehículos suministrados por el distribuidor A tienen algún defecto, siendo estas proporciones del 20 % y 15 % para los distribuidores B y C respectivamente.
Para aceptar o rechazar el pedido la empresa revisa un vehículo elegido al azar del total de vehículos, rechazando todo el pedido si el vehículo tiene algún defecto.
a) Determine el porcentaje de pedidos rechazados.
b) Si el vehículo revisado resulta ser NO defectuoso, calcule la probabilidad de que provenga del distribuidor A.
Solución:

Definimos los sucesos:
A vehículos encargados al distribuidor A ⟹ P(A) = 240/1200 = 0.2
B vehículos encargados al distribuidor B ⟹ P(B) = 600/1200 = 0.5
C vehículos encargados al distribuidor C ⟹ P(C) = 360/1200 = 0.3
D Vehículo defectuoso
P(D/A) = 0.1 (10 %)
P(D/B) = 0.2 (20 %)
P(D/C) = 0.15 (15%)
Podemos utilizar un diagrama de árbol



P(rechazado) = P(D) = P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) + P(C)P(D/C) = 0.2 · 0.1 + 0.5 · 0.2 + 0.3 · 0.15 = 0.165

El porcentaje de pedidos rechazados, por contener algún vehículo defectuoso es del 16.5 %.

b) $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{D}}) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{D}) = 1 - 0.165 = 0.835$ luego

$$P(A/\overline{\mathrm{D}}) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{D}})}{\mathrm{P}(\overline{\mathrm{D}})} = \frac{0.2 \cdot 0.9}{0.835} = 0.216$$

La probabilidad de que un vehículo revisado venga del proveedor A, sabiendo que no es defectuoso, es $P(A/\overline{\mathrm{D}}) = 0.216$

Problema A.6:

Una empresa editorial desea conocer el impacto que tendrá la publicación de una nueva obra de un reconocido novelista. Tras revisar a 100 personas aficionadas a la lectura, 80 de ellas reconocen que adquirirán esa nueva obra.

a) ¿Con qué nivel de confianza se puede afirmar que la proporción de aficionados a la lectura que adquirirán la obra está entre el 69.7 % y el 90.3 %?

b) Si se sabe que 8 de cada 10 personas aficionadas a la lectura adquirirán la obra y elegimos una muestra de n = 144 de esas personas, calcule la probabilidad de que la proporción de aficionados a la lectura que adquirirán la obra sea superior al 75 %.

Solución:

p = proporción de aficionados a la lectura que adquirirán una obra de un reconocido novelista

Sea $\hat{p}$ el estadístico proporción (proporción muestral) de aficionados a la lectura que adquirirán una obra de un reconocido novelista:

$\hat{p} = \frac{80}{100} = 0.8$

$\hat{q} = 1 - \hat{p} = 0.2$

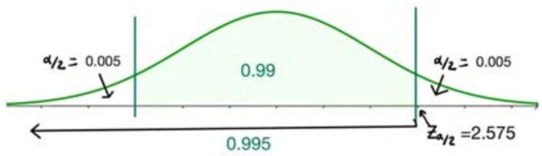
El intervalo de confianza para la proporción poblacional con un nivel de confianza $1 - \alpha$ será

$\left(\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}, \hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right)$ donde $z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$ es el radio del intervalo

En nuestro caso el intervalo es (0.697, 0.903) cuyo radio es

$$z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = \frac{0.903-0.697}{2} = 0.103 \Rightarrow$$

$$z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{0.8 \cdot 0.2}{100}} = 0.103 \quad \Rightarrow \quad z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.575$$



Buscamos en la tabla de la distribución N(0, 1) y obtenemos $\frac{\alpha}{2} = 1 - 0.9950$ (valor intermedio entre (0.9949 y 0.9951)

El nivel de significación será $\alpha = 0.005$ por lo tanto el nivel de confianza $1 - \alpha$ = 0.995

Podemos afirmar con un nivel de confianza del 99.5 % que la proporción de aficionados a la lectura que adquirirán la obra está entre el 69.7 % y el 90.3 %

b) Conocemos la proporción de la población que adquirirá la obra: $p = \frac{8}{10} = 0.8$; q = 1 – p = 0.2

Sea $\hat{p}$ la proporción de aficionados a la lectura que, de una muestra de 144, personas adquirirá la obra.

$$\hat{p} \sim N\left(p, \sqrt{\frac{pq}{n}}\right) = N\left(0.8, \sqrt{\frac{0.8 \cdot 0.2}{144}}\right) = N(0.8, 0.03) \Rightarrow Z = \frac{\hat{p}-0.8}{0.03} \sim N(0,1)$$

$P(\hat{p} > 0.75) = P(Z > \frac{0.75-0.8}{0.03})$ = P(Z > -1.67) = P(Z < 1.67) = 0.9525

La probabilidad de que la proporción de personas aficionadas a la lectura, de una muestra de 144 personas, adquieran la obra sea superior al 75 % es de 0.9525.