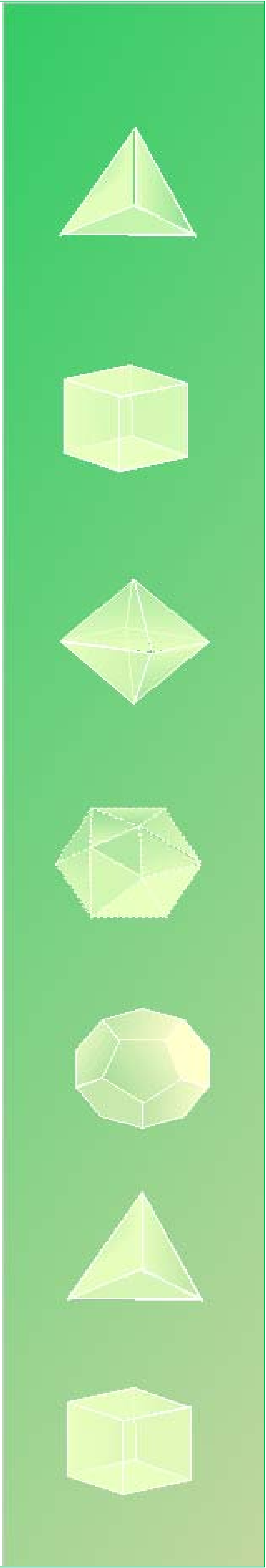


Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2020

Comunidad autónoma de

EXTREMADURA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano Corbacho

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU)

Universidad de Extremadura

Curso 2019-2020

Materia: Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II — Tiempo máximo de la prueba: 1h 30 min

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN

El examen consta de **10 problemas**, cuyo valor es de **2 puntos cada uno**. El estudiante ha de elegir 5 problemas.

En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen sólo se tendrán en cuenta los cinco primeros problemas resueltos. Si se desea que alguno de ellos no sea tenido en cuenta, el estudiante ha de tacharlo y dejarlo claramente indicado. En ese caso, además de los cuatro primeros problemas sin tachar, se corregirá el que ocupe el siguiente lugar.

PROBLEMA 1 (2 puntos)

Una factoría de automóviles tiene pedidos de 180 turismos y 140 furgonetas para la próxima temporada. Dispone para ello de dos fábricas A y B. La fábrica A produce diariamente 6 turismos y 2 furgonetas con un coste diario de 30000 euros y la fábrica B 2 turismos y 2 furgonetas con un coste de 20000 euros cada día. ¿Cuántos días debe abrir cada fábrica para producir el pedido de la temporada con el mínimo coste? ¿Cuál es el valor de dicho coste mínimo? Justificar las respuestas.

PROBLEMA 2 (2 puntos)

Un apicultor hurdano tiene 900 botes de miel y 500 botes de polen con los que elabora dos lotes A y B que pone a la venta. Cada lote A contiene 2 botes de miel y 2 botes de polen con un beneficio de 15 euros y cada lote B 3 botes de miel y 1 bote de polen con un beneficio de 12 euros. ¿Cuántos lotes de cada tipo debe organizar para que el beneficio sea máximo? Halla el valor de dicho beneficio máximo. Justificar las respuestas.

PROBLEMA 3 (2 puntos)

Sea A y B las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Hallar, justificando la respuesta, las matrices X e Y que sean solución del sistema de ecuaciones matriciales siguiente:

$$\left.\begin{aligned} -2X + Y &= A + B \\ 5X + Y &= A - 2B \end{aligned}\right\}$$

PROBLEMA 4 (2 puntos)

Sea A la matriz siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix}$$

Hallar, justificando la respuesta, el valor de x para el que se verifica $A^t = A^{-1}$, donde A^t es la matriz traspuesta de A y A^{-1} la matriz inversa de A.

PROBLEMA 5 (2 puntos)

El gasto G (en euros) por el consumo de energía eléctrica en un taller durante las 8 horas de funcionamiento varía de acuerdo con la función:

$$G(t) = 2t^3 - 27t^2 + 84t + 60 \quad (0 \leq t \leq 8)$$

donde t es el tiempo transcurrido en horas. Se pide, justificando las respuestas, determinar a qué horas se producen los gastos máximo y mínimo y los valores de dichos gastos máximo y mínimo.

PROBLEMA 6 (2 puntos)
En una piscina natural, el aumento de temperatura (en grados centígrados), x, ocasiona un aumento en la cantidad de algas en superficie (en kg), $F(x)$. La relación entre ambas cantidades viene dada por la función:

$$F(x) = \begin{cases} 2Bx + 2A & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ x^2 - 3Ax + 8B & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Se sabe que para un aumento de 4 grados centígrados, se han recogido 12 kg de algas y que la función es continua. Determinar las constantes A y B. Justificar la respuesta.

PROBLEMA 7 (2 puntos)
Se pide, justificando las respuestas:

(a) Hallar el área encerrada por la función $f(x) = x^2 + x - 2$ y el eje OX entre $x = 4$ y $x = 6$. **(1 punto)**

(b) Calcular las asíntotas de la función $g(x) = \dfrac{-2x^2 - 1}{3(x^2 + x - 2)}$ **(1 punto)**

PROBLEMA 8 (2 puntos)
Una biblioteca cuenta con 1000 socios, de los cuales 350 son jóvenes, 400 adultos y 250 mayores. Encuestados sobre la puesta en marcha de un nuevo servicio, se muestran favorables 210 jóvenes, 300 adultos y 125 mayores. Se pide, justificando las respuestas:

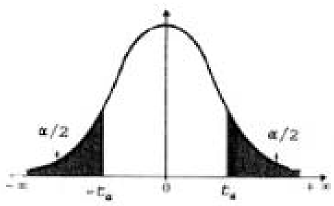
(a) Calcular la probabilidad de que un adulto sea contrario a la puesta en marcha del servicio. **(1 punto)**

(b) Calcular la probabilidad de que un socio elegido al azar sea favorable a la puesta en marcha del servicio. **(1 punto)**

PROBLEMA 9 (2 puntos)
El peso de los libros de texto es una variable que sigue una distribución normal con una desviación típica de 72 gramos. Se toma una muestra de 36 libros, siendo su peso medio de 800 gramos. Calcular, justificando la respuesta, el intervalo de confianza al 95 % para el peso medio de los libros de texto.

PROBLEMA 10 (2 puntos)
Se pretende realizar un estudio sobre la renta mensual de las familias. Dicha variable sigue una distribución normal con una desviación típica 400 euros. Si deseamos obtener un intervalo de confianza al 95 % para la media de dicha variable, ¿cuántas familias tenemos que seleccionar (tamaño muestral) para que el intervalo tenga una longitud de 160 euros? Justificar la respuesta.

Tabla para los Problemas 9 y 10



α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	∞	2.576	2.326	2.170	2.054	1.960	1.881	1.812	1.751	1.695
0.1	1.645	1.598	1.555	1.514	1.476	1.440	1.405	1.372	1.341	1.311
0.2	1.282	1.254	1.227	1.200	1.175	1.150	1.126	1.103	1.080	1.058
0.3	1.036	1.015	0.994	0.974	0.954	0.935	0.915	0.896	0.878	0.860
0.4	0.842	0.824	0.806	0.789	0.772	0.755	0.739	0.722	0.706	0.690

SOLUCIONES CONVOCATORIA ORDINARIA DE 2020

Problema 1:

PROBLEMA 1 (2 puntos)

Una factoría de automóviles tiene pedidos de 180 turismos y 140 furgonetas para la próxima temporada. Dispone para ello de dos fábricas A y B. La fábrica A produce diariamente 6 turismos y 2 furgonetas con un coste diario de 30000 euros y la fábrica B 2 turismos y 2 furgonetas con un coste de 20000 euros cada día. ¿Cuántos días debe abrir cada fábrica para producir el pedido de la temporada con el mínimo coste? ¿Cuál es el valor de dicho coste mínimo? Justificar las respuestas.

Solución:

Sean x e y los días que trabajan las fábricas A y B, respectivamente.

Las condiciones del ejercicio son: $\left.\begin{array}{r}6x+2y\geq 180\\ 2x+2y\geq 140\\ x\geq 0;\ y\geq 0\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r}3x+y\geq 90\\ x+y\geq 70\\ x\geq 0;\ y\geq 0\end{array}\right\}.$

① $\Rightarrow 3x+y\geq 90 \Rightarrow y\geq 90-3x \Rightarrow O(0,0)\rightarrow No.$

x	0	30
y	90	0

② $\Rightarrow x+y\geq 70 \Rightarrow y\geq 70-x \Rightarrow O(0,0)\rightarrow No.$

x	0	70
y	70	0

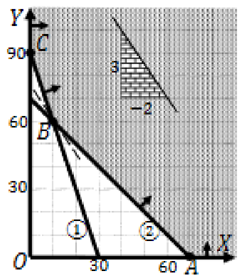
La región factible es la zona que aparece sombreada en la figura adjunta.

Los vértices de la sección factible son los siguientes:

$$A\Rightarrow \left.\begin{array}{r}x=70\\ y=0\end{array}\right\}\Rightarrow A(70,0).$$

$$B\Rightarrow \left.\begin{array}{r}3x+y=90\\ x+y=70\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r}3x+y=90\\ -x-y=-70\end{array}\right\}\Rightarrow 2x=20;\ \ x=10\Rightarrow B(10,60).$$

$$C\Rightarrow \left.\begin{array}{r}x=0\\ 3x+y=90\end{array}\right\}\Rightarrow C(0,90).$$



La función de objetivos es la siguiente:

$f(x,y)=30.000x+20.000y.$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A\Rightarrow f(70,0)=30.000\cdot 70+20.000\cdot 0=2.100.000.$

$B\Rightarrow f(10,60)=30.000\cdot 10+20.000\cdot 60=300.000+1.200.000=$

$=1.500.000.$

$C\Rightarrow f(0,90)=30.000\cdot 0+20.000\cdot 90=1.800.000.$

El valor mínimo se produce en el punto $B(10,60)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x,y)=30.000x+20.000y=0\Rightarrow y=-\frac{30.000}{20.000}x=-\frac{3}{2}x\Rightarrow m=-\frac{3}{2}.$$

$\underline{El\ coste\ es\ mínimo\ si\ la\ fábrica\ A\ trabaja\ 10\ días\ y\ la\ B,60\ días}.$

$\underline{El\ coste\ mínimo\ es\ de\ 1.500.000\ euros}.$

Problema 2:

PROBLEMA 2 (2 puntos)

Un apicultor hurdano tiene 900 botes de miel y 500 botes de polen con los que elabora dos lotes A y B que pone a la venta. Cada lote A contiene 2 botes de miel y 2 botes de polen con un beneficio de 15 euros y cada lote B 3 botes de miel y 1 bote de polen con un beneficio de 12 euros. ¿Cuántos lotes de cada tipo debe organizar para que el beneficio sea máximo? Halla el valor de dicho beneficio máximo. Justificar las respuestas.

Solución:

Sean x e y los lotes de los tipos A y B que elabora el apicultor, respectivamente.

Las condiciones del ejercicio son: $\left.\begin{array}{r} 2x+3y \le 900 \\ 2x+y \le 500 \\ x \ge 0;\ y \ge 0 \end{array}\right\}$.

① $\Rightarrow 2x+3y \le 900 \Rightarrow y \le \frac{900-2x}{3} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

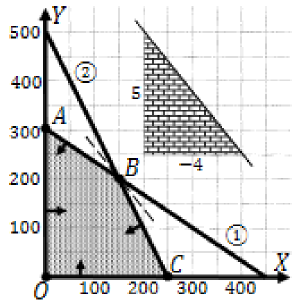
x	0	450
y	300	0

② $\Rightarrow 2x+y \le 500 \Rightarrow y \le 500-2x \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	0	250
y	500	0

La región factible es la zona que aparece sombreada en la figura adjunta.

Los vértices de la sección factible, además del origen, son los siguientes:



$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ y=300 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,300).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+3y=900 \\ 2x+y=500 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 2x+3y=900 \\ -2x-y=-500 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2y=400;\ \ y=200;\ \ 2x+200=500;$

$2x=300;\ \ x=150 \Rightarrow B(150,200).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=0 \\ 2x+y=500 \end{array}\right\} \Rightarrow C(250,0).$

La función de objetivos es la siguiente: $f(x,y)=15x+12y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,300)=15\cdot 0+12\cdot 300=0+3.600=3.600.$

$B \Rightarrow f(150,200)=15\cdot 150+12\cdot 200=2.250+2.400=4.650.$

$C \Rightarrow f(250,0)=15\cdot 250+12\cdot 0=3.750+0=3.750.$

El valor máximo se produce en el punto $B(150,200)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,y)=15x+12y=0 \Rightarrow y=-\frac{15}{12}x=-\frac{5}{4}x \Rightarrow m=-\frac{5}{4}.$

$\underline{El\ beneficio\ es\ máximo\ elaborando\ 150\ lotes\ A\ y\ 200\ lotes\ B.}$

$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 4.650\ euros.}$

Problema 3:

PROBLEMA 3 (2 puntos)
Sea A y B las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Hallar, justificando la respuesta, las matrices X e Y que sean solución del sistema de ecuaciones matriciales siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} -2X + Y = A + B \\ 5X + Y = A - 2B \end{array}\right\}$$

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} -2X + Y = A + B \\ 5X + Y = A - 2B \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 2X - Y = -A - B \\ 5X + Y = A - 2B \end{array}\right\} \Rightarrow 7X = -3B;\ X = -\frac{3}{7}B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{X = -\frac{3}{7}B = -\frac{3}{7}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{3}{7} \\ 0 & \frac{3}{7} \end{pmatrix}}.$$

$$\left.\begin{array}{l} -2X + Y = A + B \\ 5X + Y = A - 2B \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} -10X + 5Y = 5A + 5B \\ 10X + 2Y = 2A - 4B \end{array}\right\} \Rightarrow 7Y = 7A + B;\ Y = A + \frac{1}{7}B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} + \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & -\frac{1}{7} \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{Y = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} & \frac{36}{7} \\ 0 & -\frac{22}{7} \end{pmatrix}}.$$

****

Problema 4:

PROBLEMA 4 (2 puntos)
Sea A la matriz siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix}$$

Hallar, justificando la respuesta, el valor de x para el que se verifica $A^t = A^{-1}$, donde A^t es la matriz traspuesta de A y A^{-1} la matriz inversa de A.

Solución:

$$A^t = \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix}; \quad |A| = \begin{vmatrix} x & 1 \\ -1 & x \end{vmatrix} = x^2 + 1; \quad Adj \; de \; A^t = \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{Adj \; de \; A^t}{|A|} = \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+1} & \frac{-1}{x^2+1} \\ \frac{1}{x^2+1} & \frac{x}{x^2+1} \end{pmatrix}.$$

$$A^t = A^{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+1} & \frac{-1}{x^2+1} \\ \frac{1}{x^2+1} & \frac{x}{x^2+1} \end{pmatrix} \Rightarrow x^2 + 1 = 1 \Rightarrow \underline{\underline{x = 0}}.$$

De otra forma:

Cumpliéndose que $A^t = A^{-1}$, se tiene que cumplir que: $A \cdot A^t = A \cdot A^{-1} = I$.

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+1 & 0 \\ 0 & x^2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 1 = 1 \Rightarrow \underline{\underline{x = 0}}.$$

****

Problema 5:

PROBLEMA 5 (2 puntos)

El gasto G (en euros) por el consumo de energía eléctrica en un taller durante las 8 horas de funcionamiento varía de acuerdo con la función:

$$G(t) = 2t^3 - 27t^2 + 84t + 60 \quad (0 \leq t \leq 8)$$

donde t es el tiempo transcurrido en horas. Se pide, justificando las respuestas, determinar a qué horas se producen los gastos máximo y mínimo y los valores de dichos gastos máximo y mínimo.

Solución:

$$G(0) = 60.$$

$$G(8) = 2 \cdot 8^3 - 27 \cdot 8^2 + 84 \cdot 8 + 60 = 2 \cdot 512 - 27 \cdot 64 + 672 + 60 =$$

$$= 1.024 - 1.728 + 672 + 60 = 1.756 - 1.728 = 28.$$

$$G'(t) = 6t^2 - 54t + 84. \qquad G''(t) = 12t - 54.$$

$$G'(t) = 0 \Rightarrow 6t^2 - 54t + 84 = 0;\ \ t^2 - 9t + 14 = 0;\ \ t = \frac{9 \pm \sqrt{81-56}}{2} =$$

$$= \frac{9 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{9 \pm 5}{2} \Rightarrow t_1 = 2;\ \ t_2 = 7.$$

$$G''(2) = 12 \cdot 2 - 54 = 24 - 54 = -30 < 0 \Rightarrow \textit{Máximo para } t = 2.$$

$$G(2) = 2 \cdot 2^3 - 27 \cdot 2^2 + 84 \cdot 2 + 60 = 16 - 108 + 168 + 60 =$$

$$= 244 - 108 = 136.$$

$\underline{\textit{El gasto máximo se produce a las } 2 \textit{ horas y es de } 136 \textit{ euros}}.$

$$G''(7) = 12 \cdot 7 - 54 = 84 - 54 = 30 > 0 \Rightarrow \textit{Mínimo para } t = 7.$$

$$G(7) = 2 \cdot 7^3 - 27 \cdot 7^2 + 84 \cdot 7 + 60 = 2 \cdot 343 - 27 \cdot 49 + 588 + 60 =$$

$$= 686 - 1.323 + 648 = 1.334 - 1.323 = 11.$$

$\underline{\textit{El gasto mínimo se produce a las } 7 \textit{ horas y es de } 11 \textit{ euros}}.$

****

Problema 6:

PROBLEMA 6 (2 puntos)

En una piscina natural, el aumento de temperatura (en grados centígrados), x, ocasiona un aumento en la cantidad de algas en superficie (en kg), $F(x)$. La relación entre ambas cantidades viene dada por la función:

$$F(x) = \begin{cases} 2Bx + 2A & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ x^2 - 3Ax + 8B & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Se sabe que para un aumento de 4 grados centígrados, se han recogido 12 kg de algas y que la función es continua. Determinar las constantes A y B. Justificar la respuesta.

Solución:

Por ser continua la función se cumple que $\lim_{x\to 3^-} F(x) = \lim_{x\to 3^+} F(x) = F(3)$.

$F(4) = 12;\ 4^2 - 3A\cdot 4 + 8B = 16 - 12A + 8B = 12;\ 12A - 8B = 4;$

$3A - 2B = 1.\quad (1)$

$$\lim_{x\to 3^-} F(x) = \lim_{x\to 3}(2Bx + 2A) = 2B\cdot 3 + 2A = 2A + 6B.$$

$$\lim_{x\to 3^+} F(x) = \lim_{x\to 3}(x^2 - 3Ax + 8B) = 3^2 - 3A\cdot 3 + 8B = -9A + 8B + 9.$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 3^-} F(x) = \lim_{x\to 3}(2Bx + 2A) = 2B\cdot 3 + 2A = 2A + 6B \\ \lim_{x\to 3^+} F(x) = \lim_{x\to 3}(x^2 - 3Ax + 8B) = 3^2 - 3A\cdot 3 + 8B = -9A + 8B + 9 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 2A + 6B = -9A + 8B + 9;\ 11A - 2B = 9.\quad (2)$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{r} 3A - 2B = 1 \\ 11A - 2B = 9 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} -3A + 2B = -1 \\ 11A - 2B = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow 8A = 8;\ \underline{A = 1}.$$

$3\cdot 1 - 2B = 1;\ 2B = 3 - 2;\ 2B = 2;\ \underline{B = 1}.$

****

Problema 7:

PROBLEMA 7 (2 puntos)

Se pide, justificando las respuestas:

(a) Hallar el área encerrada por la función $f(x) = x^2 + x - 2$ y el eje OX entre $x = 4$ y $x = 6$.

(b) Calcular las asíntotas de la función $g(x) = \dfrac{-2x^2 - 1}{3(x^2 + x - 2)}$

Solución:

a)

En el intervalo (4, 6) todas las ordenadas de la función $f(x)$ (que es una parábola convexa (∪), por ser positivo el coeficiente de x^2) son positivas, por lo cual, la superficie pedida es la siguiente:

$$S = \int_4^6 f(x) \cdot dx = \int_4^6 (x^2 + x - 2) \cdot dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_4^6 =$$

$$= \left(\frac{6^3}{3} + \frac{6^2}{2} - 2 \cdot 6\right) - \left(\frac{4^3}{3} + \frac{4^2}{2} - 2 \cdot 4\right) = 72 + 18 - 12 - \frac{64}{3} - 8 + 8 =$$

$$= 78 - \frac{64}{3} = \frac{234-64}{3} = \frac{170}{3}.$$

$$\underline{S = \frac{170}{3}\ u^2 \cong 56{,}67\ u^2.}$$

b)

Asíntotas verticales: Son los valores reales que anulan el denominador.

$$3(x^2 + x - 2) = 0;\ \ x^2 + x - 2 = 0;\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} \Rightarrow x_1 = -2;\ \ x_2 = 1.$$

$$\underline{Asíntotas\ verticales: x = -2\ y\ x = 1.}$$

Asíntota horizontal: Es el valor del límite de la función cuando $x \to \pm\infty$.

$$y = \lim_{x \to \pm\infty} g(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-2x^2-1}{3(x^2+x-2)} = -\frac{2}{3}.$$

$$\underline{Asíntota\ horizontal: y = -\frac{2}{3}.}$$

No tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las asíntotas horizontales.

****

Problema 8:

PROBLEMA 8 (2 puntos)
Una biblioteca cuenta con 1000 socios, de los cuales 350 son jóvenes, 400 adultos y 250 mayores. Encuestados sobre la puesta en marcha de un nuevo servicio, se muestran favorables 210 jóvenes, 300 adultos y 125 mayores. Se pide, justificando las respuestas:

(a) Calcular la probabilidad de que un adulto sea contrario a la puesta en marcha del servicio. **(1 punto)**

(b) Calcular la probabilidad de que un socio elegido al azar sea favorable a la puesta en marcha del servicio. **(1 punto)**

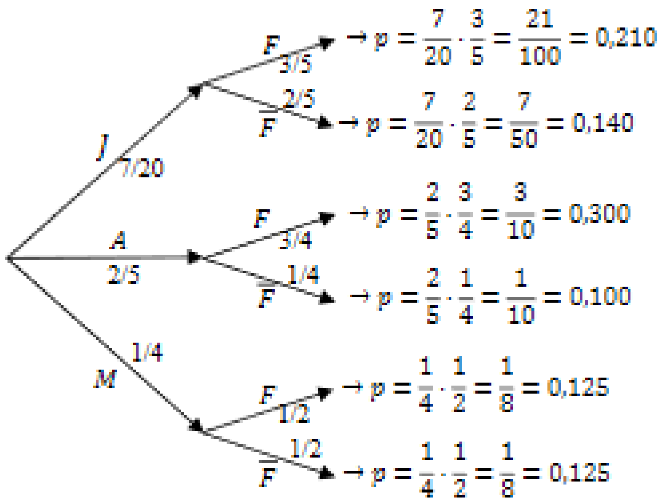
Solución:

----

a)

$$P(J) = \frac{350}{1.000} = \frac{7}{20}. \qquad P(A) = \frac{400}{1.000} = \frac{2}{5}. \qquad P(M) = \frac{250}{1.000} = \frac{1}{4}.$$

$$P(F/J) = \frac{210}{350} = \frac{3}{5}. \qquad P(F/A) = \frac{300}{400} = \frac{3}{4}. \qquad P(F/M) = \frac{125}{250} = \frac{1}{2}.$$



$$P(\overline{F}/A) = \frac{100}{400} = \frac{1}{4} = \underline{0{,}25}.$$

b)

$$P = P(F) = P(J \cap F) + P(A \cap F) + P(M \cap F) =$$

$$= P(J) \cdot P(F/J) + P(A) \cdot P(F/A) + P(M) \cdot P(F/M) =$$

$$= \frac{7}{20} \cdot \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{21}{100} + \frac{3}{10} + \frac{1}{8} = \frac{210+300+125}{1.000} = \frac{635}{1.000} = \underline{0{,}635}.$$

****

Problema 9:

PROBLEMA 9 (2 puntos)
El peso de los libros de texto es una variable que sigue una distribución normal con una desviación típica de 72 gramos. Se toma una muestra de 36 libros, siendo su peso medio de 800 gramos. Calcular, justificando la respuesta, el intervalo de confianza al 95 % para el peso medio de los libros de texto.

Solución:

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1-\alpha=0{,}95 \;\rightarrow\; \alpha=1-0{,}95=0{,}05 \;\rightarrow\; z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}025}=1{,}96.$
$(1-0{,}025=0{,}9750 \;\rightarrow z=1{,}96).$

Datos: $n=36;\;\; \overline{x}=800;\;\; \sigma=72;\;\; z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma$ y n, es la siguiente: $\left(\overline{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\;\overline{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$

$\left(800-1{,}96\cdot\frac{72}{\sqrt{36}};\;800+1{,}96\cdot\frac{72}{\sqrt{36}}\right);\;\;(800-1{,}96\cdot 12;\;800+1{,}96\cdot 12);$

$(800-23{,}52;\;800+23{,}52).$

$$\underline{I.C._{95\,\%}=(776{,}48;\;823{,}52).}$$

****

Problema 10:

PROBLEMA 10 (2 puntos)
Se pretende realizar un estudio sobre la renta mensual de las familias. Dicha variable sigue una distribución normal con una desviación típica 400 euros. Si deseamos obtener un intervalo de confianza al 95 % para la media de dicha variable, ¿cuántas familias tenemos que seleccionar (tamaño muestral) para que el intervalo tenga una longitud de 160 euros? Justificar la respuesta.

Solución:

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1-\alpha = 0{,}95 \ \rightarrow \ \alpha = 1-0{,}95 = 0{,}05 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}025} = 1{,}96.$
$(1-0{,}025 = 0{,}9750 \ \rightarrow z = 1{,}96).$

Teniendo en cuenta que el error máximo es la mitad del intervalo de confianza, los datos son los siguientes:

Datos: $\sigma = 400;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96;\ \ E = \frac{160}{2} = 80.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ \Rightarrow \ \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(1{,}96 \cdot \frac{400}{80}\right)^2 =$

$= (1{,}96 \cdot 5)^2 = 9{,}8^2 = 96{,}04.$

El número de familias consultadas tiene que ser de 97.

****

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU)

Universidad de Extremadura

Curso 2019-2020

Materia: Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II — Tiempo máximo de la prueba: 1h 30 min

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN

El examen consta de **10 problemas**, cuyo valor es de **2 puntos cada uno.** El estudiante ha de elegir 5 problemas.

En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen sólo se tendrán en cuenta los cinco primeros problemas resueltos. Si se desea que alguno de ellos no sea tenido en cuenta, el estudiante ha de tacharlo y dejarlo claramente indicado. En ese caso, además de los cuatro primeros problemas sin tachar, se corregirá el que ocupe el siguiente lugar.

PROBLEMA 1 (2 puntos)

Una tienda de productos agrícolas dispone de 300 kg de abono de nitrógeno y de 80 kg de abono de potasio para la fabricación de dos compuestos A y B. Cada envase del compuesto A contiene 3 kg de abono de nitrógeno y 1 kg de abono de potasio y cada envase del compuesto B contiene 6 kg de abono de nitrógeno y 1 kg de abono de potasio. Si el beneficio producido por cada envase del compuesto A es de 100 euros y el del envase del compuesto B de 120 euros, ¿cuántos envases de cada tipo debe fabricar para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál será dicho beneficio máximo? Justificar las respuestas.

PROBLEMA 2 (2 puntos)

Una tienda de artesanía de calzado fabrica zapatos y botas. Cada par de zapatos requiere 1 hora de trabajo y 0.5 m^2 de piel y cada par de botas 1 hora de trabajo y 1 m^2 de piel , siendo el beneficio obtenido de 70 euros por cada par de zapatos y de 80 euros por cada par de botas. Si solo dispone de 50 horas de trabajo y de 35 m^2 de piel, ¿cuántos pares de zapatos y de botas hay que fabricar para obtener los máximos beneficios?. ¿Cuáles serán dichos beneficios máximos? Justificar las respuestas.

PROBLEMA 3 (2 puntos)

Sean A, B e I la matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallar, justificando la respuesta, la matriz X que sea solución de la ecuación matricial:

$$A \cdot B \cdot X = A \cdot B + I$$

PROBLEMA 4 (2 puntos)

Sean X, I y O las matrices siguientes

$$X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hallar, justificando la respuesta, los valores del parámetro a para los que se verifica

$$X^2 - 4X + 3I = O$$

PROBLEMA 5 (2 puntos)

Durante el estudio de medida del ruido R, expresado en decibelios, en un punto de una determinada ciudad se ha comprobado que varía con el tiempo, t, expresado en horas de acuerdo con la función:

$$R(t) = t^3 - 12t^2 + 36t + 60 \quad (1 \leq t \leq 7)$$

Determinar, justificando las respuestas, en qué momentos se producen los valores máximo y mínimo de ruido. Calcular dichos valores máximo y mínimo.

PROBLEMA 6 (2 puntos)
Cierta levadura es utilizada en la masa del pan en una cantidad, x, entre 1 y 5 gramos. El crecimiento de la masa en el horno, $F(x)$ (en cm) viene determinado por la cantidad de levadura de acuerdo a la función:

$$F(x) = \begin{cases} Bx + 2A & \text{si } 1 \le x < 3 \\ x^2 + Ax - B & \text{si } 3 \le x \le 5 \end{cases}$$

Se sabe que con 2 gramos de levadura la masa experimenta un crecimiento de 2 cm y que la función es continua. Determinar las constantes A y B. Justificar la respuesta.

PROBLEMA 7 (2 puntos)
Se pide, justificando las respuestas:

(a) Hallar el área encerrada por la función $f(x) = x^2 + 3x + 2$ y el eje OX entre $x = 1$ y $x = 3$. **(1 punto)**

(b) Calcular las asíntotas de la función $g(x) = \dfrac{-2x^2 + 3}{2(x^2 + 3x + 2)}$ **(1 punto)**

PROBLEMA 8 (2 puntos)
En Portugal, el 40 % del café consumido es de marca Delta, el 50 % de marca Sical y el 10 % restante se lo reparten otras marcas. Delta utiliza la variedad arábica para el 70 % de sus envases y la variedad robusta para el 30 % restante. Sical utiliza la variedad arábica en el 40 % de sus envases y la robusta en el 60 %. Las otras marcas de café utilizan ambas variedades en el 50 % de sus envases. Se pide, justificando las respuestas:

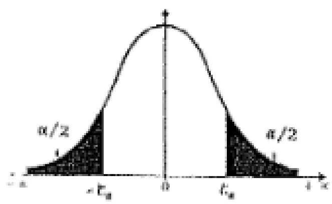
(a) Calcular la probabilidad de que un envase de café comprado en Portugal sea Sical y de variedad arábica. **(1 punto)**

(b) Calcular la probabilidad de que en un envase de café portugués se haya utilizado la variedad robusta. **(1 punto)**

PROBLEMA 9 (2 puntos)
Una marca de dulces realiza un control de calidad de sus productos, considerando el diámetro (en cm) de las galletas que produce. Dicha variable sigue una distribución normal con una desviación típica 2 cm. Se eligen al azar 100 de las galletas producidas en la fábrica, obteniéndose un diámetro medio de 8 cm. Calcular, justificando la respuesta, el intervalo de confianza al 95 % para el diámetro medio de las galletas producidas por dicha marca.

PROBLEMA 10 (2 puntos)
Se realiza un estudio sobre el precio del pan en distintas tiendas, variable que se supone con distribución normal de desviación típica 20 céntimos. Si deseamos obtener un intervalo de confianza al 95 % para la media de dicha variable, ¿cuántas tiendas tenemos que visitar (tamaño muestral) para que el intervalo tenga una longitud de 10 céntimos? Justificar la respuesta.

Tabla para los Problemas 9 y 10



α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	∞	2.576	2.326	2.170	2.054	1.960	1.881	1.812	1.751	1.695
0.1	1.645	1.598	1.555	1.514	1.476	1.440	1.405	1.372	1.341	1.311
0.2	1.282	1.254	1.227	1.200	1.175	1.150	1.126	1.103	1.080	1.058
0.3	1.036	1.016	0.994	0.974	0.954	0.935	0.915	0.896	0.878	0.860
0.4	0.842	0.824	0.806	0.789	0.772	0.755	0.739	0.722	0.706	0.690

SOLUCIONES CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE 2020

Problema 1:

PROBLEMA 1 (2 puntos)

Una tienda de productos agrícolas dispone de 300 kg de abono de nitrógeno y de 80 kg de abono de potasio para la fabricación de dos compuestos A y B. Cada envase del compuesto A contiene 3 kg de abono de nitrógeno y 1 kg de abono de potasio y cada envase del compuesto B contiene 6 kg de abono de nitrógeno y 1 kg de abono de potasio. Si el beneficio producido por cada envase del compuesto A es de 100 euros y el del envase del compuesto B de 120 euros, ¿cuántos envases de cada tipo debe fabricar para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál será dicho beneficio máximo? Justificar las respuestas.

Solución:

Sean x e y el número de envases de los compuestos A y B que se fabrican, respectivamente.

Las condiciones del ejercicio se establecen en el sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 3x+6y\le 300 \\ x+y\le 80 \\ x\ge 0;\ y\ge 0\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+2y\le 100 \\ x+y\le 80 \\ x\ge 0;\ y\ge 0\end{array}\right\}.$$

$① \Rightarrow x+2y\le 100 \Rightarrow y \ge \frac{100-x}{2} \Rightarrow O(0,0) \to Si.$

x	0	100
y	50	0

$② \Rightarrow x+y\le 80 \Rightarrow y\le 80-x \to O(0,0)\to Si.$

x	80	0
y	0	80

La región factible es la zona que aparece sombreada de la figura adjunta.

La función de objetivos es $f(x,y)=100x+120y$.

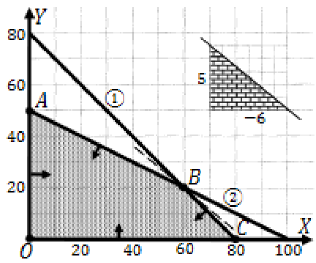
Los vértices de la zona factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ y=50\end{array}\right\} \Rightarrow A(0,50).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y=100 \\ x+y=80\end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x+2y=100 \\ -x-y=-80\end{array}\right\} \Rightarrow$

$y=20;\ x=60 \Rightarrow B(60,20).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=0 \\ x=80\end{array}\right\} \Rightarrow C(80,0).$



Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,50) = 100\cdot 0 + 120\cdot 50 = 0 + 6.000 = 6.000.$

$B \Rightarrow f(60,20) = 100\cdot 60 + 120\cdot 20 = 6.000 + 2.400 = 8.400.$

$C \Rightarrow f(80,0) = 100\cdot 80 + 120\cdot 0 = 8.000 + 0 = 8.000.$

El valor máximo se produce en el punto $B(60,20)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,y) = 100x+120y = 0 \Rightarrow y = -\frac{100}{120}x = -\frac{10}{12}x \Rightarrow m = -\frac{5}{6}.$

$\underline{El\ máximo\ beneficio\ se\ consigue\ fabricando\ 60\ envases\ A\ y\ 20\ envases\ B}.$

$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 8.400\ euros}.$

Problema 2:

PROBLEMA 2 (2 puntos)

Una tienda de artesanía de calzado fabrica zapatos y botas. Cada par de zapatos requiere 1 hora de trabajo y 0.5 m² de piel y cada par de botas 1 hora de trabajo y 1 m² de piel , siendo el beneficio obtenido de 70 euros por cada par de zapatos y de 80 euros por cada par de botas. Si solo dispone de 50 horas de trabajo y de 35 m² de piel, ¿cuántos pares de zapatos y de botas hay que fabricar para obtener los máximos beneficios?. ¿Cuáles serán dichos beneficios máximos? Justificar las respuestas.

Solución:

Sean x e y el número de pares de zapatos y de botas que se fabrican, respectivamente.

Las condiciones del ejercicio se establecen en el sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x+y\le 50 \\ 0{,}5x+y\le 35 \\ x\ge 0;\ \ y\ge 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y\le 50 \\ x+2y\le 70 \\ x\ge 0;\ \ y\ge 0 \end{array}\right\}.$$

① $\Rightarrow x+y\le 50 \Rightarrow y\le 50-x \rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	0	50
y	50	0

② $\Rightarrow x+2y\le 100 \Rightarrow y\ge \frac{100-x}{2} \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

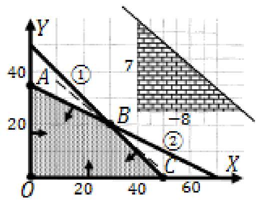
x	80	0
y	0	80

La región factible es la zona que aparece sombreada de la figura adjunta.

La función de objetivos es $f(x,y)=70x+80y$.

Los vértices de la zona factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:

$A\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ y=35 \end{array}\right\}\Rightarrow A(0,35).$



$B\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=50 \\ x+2y=70 \end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r} -x-y=-50 \\ x+2y=70 \end{array}\right\}\Rightarrow$

$y=20;\ \ x=30\Rightarrow B(30,20).$

$C\Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=0 \\ x=50 \end{array}\right\}\Rightarrow C(50,0).$

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A\Rightarrow f(0,35)=70\cdot 0+80\cdot 35=0+2.800=2.800.$

$B\Rightarrow f(30,20)=70\cdot 30+80\cdot 20=2.100+1.600=3.700.$

$C\Rightarrow f(50,0)=70\cdot 50+80\cdot 0=3.500+0=3.500.$

El valor máximo se produce en el punto $B(30,20)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x,y)=70x+80y=0\Rightarrow y=-\frac{70}{80}x=-\frac{7}{8}x\Rightarrow m=-\frac{7}{8}.$$

$\underline{Máximo\ beneficio{:}\ fabricando\ 30\ pares\ de\ zapatos\ 20\ \ pares\ de\ botas.}$

$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 3.700\ euros.}$

Problema 3:

PROBLEMA 3 (2 puntos)

Sean A, B e I la matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallar, justificando la respuesta, la matriz X que sea solución de la ecuación matricial:

$$A \cdot B \cdot X = A \cdot B + I$$

Solución:

$$A \cdot B \cdot X = A \cdot B + I; \;\; (A \cdot B) \cdot X = (A \cdot B) + I;$$

$$(A \cdot B)^{-1} \cdot (A \cdot B) \cdot X = (A \cdot B)^{-1} \cdot [(A \cdot B) + I]; \;\; I \cdot X = (A \cdot B)^{-1} \cdot [(A \cdot B) + I].$$

$$\underline{X = (A \cdot B)^{-1} \cdot [(A \cdot B) + I].}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -8 + 18 = 10. \qquad (A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$Adj.\,de\,(A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow (A \cdot B)^{-1} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$(A \cdot B) + I = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$X = (A \cdot B)^{-1} \cdot [(A \cdot B) + I] = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{X = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -3 & 14 \end{pmatrix}.}$$

****

Problema 4:

PROBLEMA 4 (2 puntos)

Sean X, I y O las matrices siguientes

$$X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hallar, justificando la respuesta, los valores del parámetro a para los que se verifica

$$X^2 - 4X + 3I = O$$

Solución:

$$X^2 = X \cdot X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$4 \cdot X = 4 \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

$$X^2 - 4X + 3I = O \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4a & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} a^2 - 4a + 3 = 0 \\ 9 - 12 + 3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a^2 - 4a + 3 = 0;\ \ a = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = 2 \pm 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 = 1, a_2 = 3.$$

$$\underline{X^2 - 4X + 3I = O \Rightarrow a = 1 \text{ y } a = 3.}$$

****

Problema 5:

PROBLEMA 5 (2 puntos)

Durante el estudio de medida del ruido R, expresado en decibelios, en un punto de una determinada ciudad se ha comprobado que varía con el tiempo, t, expresado en horas de acuerdo con la función:

$$R(t) = t^3 - 12t^2 + 36t + 60 \quad (1 \leq t \leq 7)$$

Determinar, justificando las respuestas, en qué momentos se producen los valores máximo y mínimo de ruido. Calcular dichos valores máximo y mínimo.

Solución:

$$R(1) = 1^3 - 12 \cdot 1^2 + 36 \cdot 1 + 60 = 1 - 12 + 36 + 60 = 85.$$

$$R(7) = 7^3 - 12 \cdot 7^2 + 36 \cdot 7 + 60 = 343 - 12 \cdot 49 + 252 + 60 =$$

$$= 343 - 588 + 252 + 60 = 655 - 588 = 67.$$

$$R'(t) = 3t^2 - 24t + 36. \qquad\qquad R''(t) = 6t - 24.$$

$$R'(t) = 0 \Rightarrow 3t^2 - 24t + 36 = 0;\ \ t^2 - 8t + 12 = 0;\ \ t = \frac{8 \pm \sqrt{64-48}}{2} =$$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{8 \pm 4}{2} = 4 \pm 2 \Rightarrow t_1 = 2;\ \ t_2 = 6.$$

$$R''(2) = 6 \cdot 2 - 24 = 12 - 24 = -12 < 0 \Rightarrow Máximo\ para\ t = 2.$$

$$R(2) = 2^3 - 12 \cdot 2^2 + 36 \cdot 2 + 60 = 8 - 48 + 72 + 60 = 140 - 48 = 92.$$

$\underline{El\ ruido\ máximo\ se\ produce\ a\ las\ 2\ horas\ y\ es\ de\ 92\ decibelios.}$

$$R''(6) = 6 \cdot 6 - 24 = 36 - 24 = 12 > 0 \Rightarrow Mínimo\ para\ t = 6.$$

$$R(6) = 6^3 - 12 \cdot 6^2 + 36 \cdot 6 + 60 = 216 - 12 \cdot 36 + 216 + 60 =$$

$$= 216 - 432 + 216 + 60 = 60.$$

$\underline{El\ ruido\ mínimo\ se\ produce\ a\ las\ 6\ horas\ y\ es\ de\ 60\ decibelios.}$

Problema 6:

PROBLEMA 6 (2 puntos)

Cierta levadura es utilizada en la masa del pan en una cantidad, x, entre 1 y 5 gramos. El crecimiento de la masa en el horno, $F(x)$ (en cm) viene determinado por la cantidad de levadura de acuerdo a la función:

$$F(x) = \begin{cases} Bx + 2A & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ x^2 + Ax - B & \text{si } 3 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

Se sabe que con 2 gramos de levadura la masa experimenta un crecimiento de 2 cm y que la función es continua. Determinar las constantes A y B. Justificar la respuesta.

Solución:

Por ser continua la función se cumple que $\lim_{x\to 3^-} F(x) = \lim_{x\to 3^+} F(x) = F(3)$.

$F(2) = 2;\ \ 2B + 2A = 2;\ \ A + B = 1.\quad (1)$

$\lim_{x\to 3^-} F(x) = \lim_{x\to 3}(Bx + 2A) = B \cdot 3 + 2A = 2A + 3B.$

$\lim_{x\to 3^+} F(x) = \lim_{x\to 3}(x^2 + Ax - B) = 3^2 + A \cdot 3 - B = 3A - B + 9.$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 3^-} F(x) = \lim_{x\to 3}(2Bx + 2A) = 2A + 3B \\ \lim_{x\to 3^+} F(x) = \lim_{x\to 3}(x^2 - 3Ax + 8B) = 3A - B + 9 = F(3) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 2A + 3B = 3A - B + 9;\ \ A - 4B = -9.\quad (2)$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{r} A + B = 1 \\ A - 4B = -9 \end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{r} A + B = 1 \\ -A + 4B = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow 5B = 10;\ \ \underline{\underline{B = 2}}.$$

$A + 2 = 1 \Rightarrow \underline{\underline{A = -1}}.$

****

Problema 7:

PROBLEMA 7 (2 puntos)
Se pide, justificando las respuestas:

(a) Hallar el área encerrada por la función $f(x) = x^2 + 3x + 2$ y el eje OX entre $x = 1$ y $x = 3$.

(b) Calcular las asíntotas de la función $g(x) = \dfrac{-2x^2+3}{2(x^2+3x+2)}$

Solución:

a)

En el intervalo $(1, 3)$ todas las ordenadas de la función $f(x)$ (que es una parábola convexa $(\cup)$, por ser positivo el coeficiente de x^2) son positivas, por lo cual, la superficie pedida es la siguiente:

$$S = \int_1^3 f(x) \cdot dx = \int_1^3 (x^2+3x+2) \cdot dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_1^3 =$$

$$= \left(\frac{3^3}{3} + \frac{3\cdot3^2}{2} + 2\cdot3\right) - \left(\frac{1^3}{3} + \frac{3\cdot1^2}{2} + 2\cdot1\right) = 9 + \frac{27}{2} + 6 - \frac{1}{3} - \frac{3}{2} - 2 =$$

$$= 13 - \frac{1}{3} + 12 = 25 - \frac{1}{3} = \frac{75-1}{3} = \frac{74}{3}.$$

$$\underline{S = \frac{74}{3}\, u^2 \cong 24{,}67\, u^2.}$$

b)

Asíntotas verticales: Son los valores reales que anulan el denominador.

$$3(x^2+3x+2) = 0;\; x^2+3x+2 = 0;\; x = \frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3\pm1}{2} \Rightarrow x_1 = -2;\; x_2 = -1.$$

$$\underline{Asíntotas\ verticales: x = -2\ y\ x = -1.}$$

Asíntota horizontal: Es el valor del límite de la función cuando $x \to \pm\infty$.

$$y = \lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-2x^2+3}{2(x^2+3x+2)} = -1.$$

$$\underline{Asíntota\ vertical: y = -1.}$$

No tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las asíntotas horizontales.

****

Problema 8:

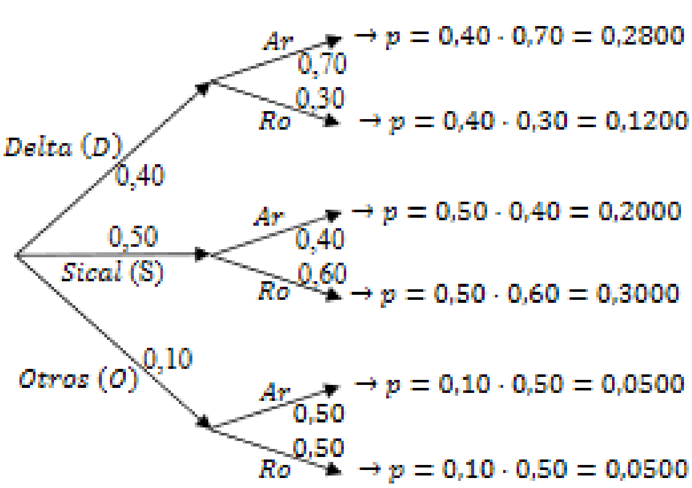
PROBLEMA 8 (2 puntos)

En Portugal, el 40 % del café consumido es de marca Delta, el 50 % de marca Sical y el 10 % restante se lo reparten otras marcas. Delta utiliza la variedad arábica para el 70 % de sus envases y la variedad robusta para el 30 % restante. Sical utiliza la variedad arábica en el 40 % de sus envases y la robusta en el 60 %. Las otras marcas de café utilizan ambas variedades en el 50 % de sus envases. Se pide, justificando las respuestas:

(a) Calcular la probabilidad de que un envase de café comprado en Portugal sea Sical y de variedad arábica.
(1 punto)

(b) Calcular la probabilidad de que en un envase de café portugués se haya utilizado la variedad robusta.
(1 punto)

Solución:



$a)$

$$P = P(S \cap Ar) = P(S) \cdot P(Ar/S) = 0{,}50 \cdot 0{,}40 = \underline{0{,}20}.$$

$b)$

$$P = P(Ro) = P(D \cap Ro) + P(S \cap Ro) + P(O \cap Ro) =$$

$$= P(D) \cdot P(Ro/D) + P(S) \cdot P(Ro/S) + P(O) \cdot P(Ro/O) =$$

$$= 0{,}40 \cdot 0{,}30 + 0{,}50 \cdot 0{,}60 + 0{,}10 \cdot 0{,}50 = 0{,}120 + 0{,}300 + 0{,}050 = \underline{0{,}470}.$$

Problema 9:

PROBLEMA 9 (2 puntos)

Una marca de dulces realiza un control de calidad de sus productos, considerando el diámetro (en cm) de las galletas que produce. Dicha variable sigue una distribución normal con una desviación típica 2 cm. Se eligen al azar 100 de las galletas producidas en la fábrica, obteniéndose un diámetro medio de 8 cm. Calcular, justificando la respuesta, el intervalo de confianza al 95 % para el diámetro medio de las galletas producidas por dicha marca.

Solución:

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1-\alpha=0{,}95 \rightarrow \alpha=1-0{,}95=0{,}05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}025}=1{,}96.$
$(1-0{,}025=0{,}9750 \rightarrow z=1{,}96).$

Datos: $n=100;\ \overline{x}=8;\ \sigma=2;\ z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma$ y n, es la siguiente: $\left(\overline{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$

$\left(8-1{,}96\cdot\frac{2}{\sqrt{100}};\ 8+1{,}96\cdot\frac{2}{\sqrt{100}}\right);\ (8-1{,}96\cdot 0{,}2;\ 8+1{,}96\cdot 0{,}2);$

$(8-0{,}392;\ 8+0{,}392).$

$$\underline{I.C._{95\ \%}=(7{,}608;\ 8{,}392).}$$

****

Problema 10:

PROBLEMA 10 (2 puntos)

Se realiza un estudio sobre el precio del pan en distintas tiendas, variable que se supone con distribución normal de desviación típica 20 céntimos. Si deseamos obtener un intervalo de confianza al 95 % para la media de dicha variable, ¿cuántas tiendas tenemos que visitar (tamaño muestral) para que el intervalo tenga una longitud de 10 céntimos? Justificar la respuesta.

Solución:

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1-\alpha=0{,}95 \rightarrow \alpha=1-0{,}95=0{,}05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}025}=1{,}96.$
$(1-0{,}025=0{,}9750 \rightarrow z=1{,}96).$

Datos: $n=100;\ \overline{x}=8;\ \sigma=2;\ z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma$ y n, es la siguiente: $\left(\overline{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$

$\left(8-1{,}96\cdot\frac{2}{\sqrt{100}};\ 8+1{,}96\cdot\frac{2}{\sqrt{100}}\right);\ (8-1{,}96\cdot 0{,}2;\ 8+1{,}96\cdot 0{,}2);$

$(8-0{,}392;\ 8+0{,}392).$

$$\underline{I.C._{95\,\%}=(7{,}608;\ 8{,}392).}$$

****