Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II
Selectividad 2020
Comunidad autónoma de CASTILLA LA MANCHA

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Luis Carlos Vidal Del Campo

UCLM CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2019–2020** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE **JUNIO**

El examen está compuesto de 3 secciones de dos bloques cada una. A su vez cada bloque tiene dos ejercicios. El alumno deberá elegir un bloque de cada una de las tres secciones. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.

SECCIÓN 1 (3 puntos)

Bloque 1:

1. *Se considera la función* $f(x) = \begin{cases} (x+4)^2 - 4 & si\ x \leq -2 \\ t & si\ -2 < x < 2 \\ (x-4)^2 - 4 & si\ x \geq 2 \end{cases}$

a) Halla el valor de t para que f sea continua en x = -2. (0.5 ptos)

b) Para t = 3, representa gráficamente la función f. (1 pto)

2. *La función* $f(x) = ax^3 + bx^2 + 16x + c$ *tiene un punto de inflexión en* $(1, 10)$ *y la pendiente de la recta tangente en ese mismo punto es 7. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a, b y c. (1.5 ptos)*

Bloque 2:

1. *Un artesano hace botines, botas de media caña y botas de caña alta, vendiendo cada par, respectivamente, a 150, 200 y 250 euros. La diferencia entre los botines y las botas de caña alta vendidas equivalen al número de caña media vendidas. El número de caña alta vendidas es la tercera parte de los botines. Por el total de las ventas obtiene 5500 euros.*

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántas botas de cada tipo se vendieron. (1 ptos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

2. *En el siguiente problema de programación lineal optimiza la función* $f(x,y) = 6x - 2y$ *sujeta a las siguientes restricciones:*

$$x + y \geq 2; x - y \leq 2; y \leq 1; x \geq 0$$

a) Dibuja la región factible. (1 punto)

b) Determina los vértices de la región factible. (0.25 ptos)

c) Indica el máximo y el mínimo y sus respectivos valores. (0.25 ptos)

SECCIÓN 2 (3,5 puntos)

Bloque 1:

3. *En un instituto el 15 % de los alumnos ven la tele todos los días, el 25 % juegan todos los días a la consola y el 26 % ven la tele todos los días o juegan todos los días a la consola o ambos.*

a) Se elige un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que vea la tele todos los días y juegue a la consola todos los días? (0.75 ptos)

b) Si elegimos un alumno al azar y juega todos los días a la consola, ¿cuál es la probabilidad de que vea todos los días la televisión? (0.75 ptos)

4. *Para hacer un estudio de las horas de duración de la batería de un juguete, se tomó una muestra aleatoria de 10 de estas baterías, siendo el número de horas de duración obtenida de: 4.2, 4.6, 5, 5.7, 5.8, 5.9, 6.1, 6.2, 6.5 y 7.3 respectivamente. Sabiendo que la variable "número de horas de duración de la batería" sigue una distribución normal de desviación típica 2.1 horas, se pide:*

a) Halla el intervalo de confianza para el número medio de horas de duración de la batería con un nivel de confianza del 97 %. (1 pto)

b) Explica razonadamente cómo podríamos disminuir la amplitud del intervalo de confianza. (0.5 ptos)

c) ¿Crees que la media poblacional μ *del número de horas es de 4 horas con una probabilidad del 90 %? Razona tu respuesta. (0.5 ptos)*

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

Bloque 2:

3. *Se considera la función* $f(x) = \begin{cases} x+t & si\ x \leq -1 \\ x^3 - 2x^2 + 4 & si\ x > -1 \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en x=-1? (0.75 ptos)

b) Calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(-1, +\infty)$. (0.5 ptos)

c) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(-1, +\infty)$. (0.5 ptos)

4. *Las botellas de agua vendidas por un hipermercado (que abre de 10 de la mañana a 4 de la tarde) durante una ola de calor viene dado por la función $C(t) = 2t^3 - 27t^2 + 120t$, con $1 \leq t \leq 6$ siendo $t = 1$ la primera hora desde la apertura y $t = 6$ la última hora hasta el cierre y $C(t)$ en cientos de botellas.*

a) ¿En que intervalos de tiempo las ventas aumentan? ¿Y en cuáles disminuye? (0.5 ptos)

b) ¿Cuándo se produce la máxima venta? ¿Y la mínima? (0.75 ptos)

c) ¿Cuántas botellas se venden en esos dos casos? (0.5 ptos)

SECCIÓN 3 (3,5 puntos)

Bloque 1:

5. *Una marca ofrece paquetes de tortitas de arroz de tres tipos: con espelta, con amapola y con chía. Se venden el triple de paquetes de las de amapola que de las de espelta. Se venden 40 paquetes más de las de amapola que de las de chía. Los precios de los paquetes para espelta, amapola y chía son respectivamente 2.50, 3.50 y 3 euros obteniendo por la venta de todas las tortitas 1640 euros.*

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántos paquetes de cada tipo se vendieron. (1.5 ptos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

6. *Dadas las matrices* $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ *y* $C = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -4 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) Calcula $M = A{\cdot}C - (B - I)^T$ siendo I la matriz identidad de orden 2. (0.75 ptos)

b) Calcula, si es posible, la matriz X tal que $X{\cdot}B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}$. (0.75 ptos)

Bloque 2:

5. *En una ciudad el 1 % de los habitantes ha ido a jugar alguna vez a una casa de apuestas. De las personas que han ido a jugar alguna vez a una casa de apuestas, el 70 % tiene problemas financieros. De los habitantes que no han ido a jugar alguna vez a una casa de apuestas, se sabe que un 5 % tiene problemas financieros.*

a) Calcula la probabilidad de que elegido un habitante al azar tenga problemas financieros. (0.75 ptos)

b) Sabiendo que una persona tiene problemas financieros, ¿cuál es la probabilidad de que haya ido a jugar alguna vez a una casa de apuestas? (0.75 ptos)

6. *El tiempo medio de espera en una línea de atención al cliente sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 2$ minutos. Se hace un estudio de los tiempos de espera de 10 clientes al azar, siendo estos tiempos: 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 15 y 16 minutos respectivamente.*

a) Halla un intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo de espera, con un nivel de confianza del 95 %. (1.25 ptos)

b) ¿Cuál deberá ser el tamaño mínimo de la muestra elegida para que, con el mismo nivel de confianza, el error máximo admisible sea menor que 1 minuto? (0.75 ptos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

RESPUESTAS

SECCIÓN 1

Bloque 1:

1. *Se considera la función* $f(x) = \begin{cases} (x+4)^2 - 4 & si\ x \leq -2 \\ t & si\ -2 < x < 2 \\ (x-4)^2 - 4 & si\ x \geq 2 \end{cases}$

a) Halla el valor de t para que f sea continua en x = -2. (0.5 ptos)

b) Para t = 3, representa gráficamente la función f. (1 pto)

RESPUESTA

a) Para que *f* sea continua en *x* = –2, como *f*(–2) = 0 el límite de *f*(*x*) cuando *x* tiende a –2 ha de ser 0 y para ello los límites laterales han de ser iguales e igual a 0, los calculamos,

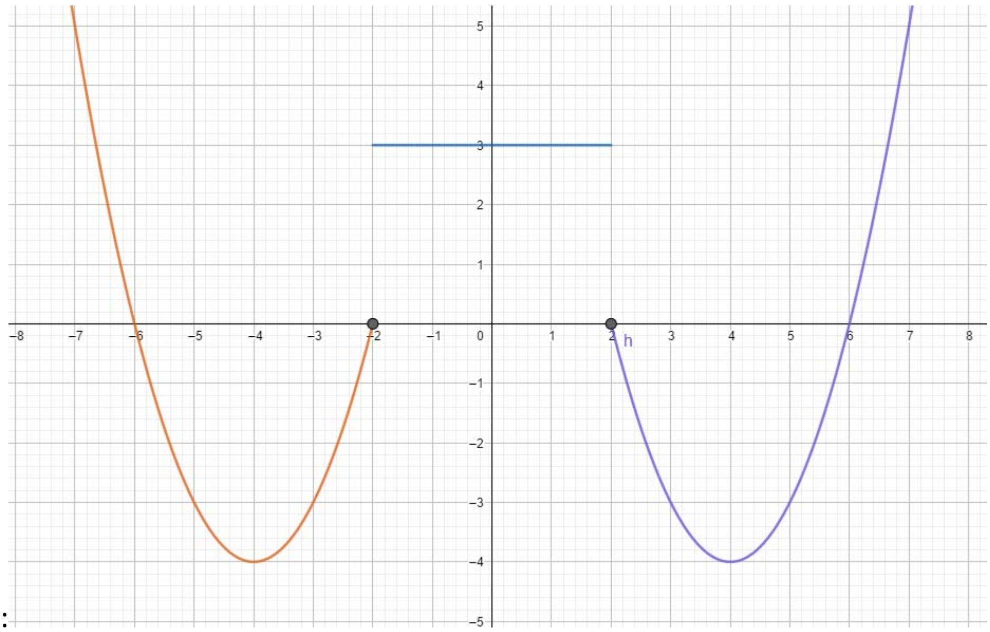
$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} [(x+4)^2 - 4] = 0$$

$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} t = t$, luego t debe valer 0.

La función es continua en $x = -2$ si $t = 0$.

b) Para *t* = 3, la función queda: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 8x + 12 & si\ x \leq -2 \\ 3 & si - 2 < x < 2 \\ x^2 - 8x + 12 & si\ x \geq 2 \end{cases}$

y su gráfica es:



Autor: Luis Carlos Vidal Del Campo
www.apuntesmareaverde.org.es

2. *La función $f(x) = ax^3 + bx^2 + 16x + c$ tiene un punto de inflexión en $(1, 10)$ y la pendiente de la recta tangente en ese mismo punto es 7. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a, b y c. (1.5 ptos)*

RESPUESTA

Si f tiene un punto de inflexión en (1, 10), $f(1) = 10$ y además $f''(1) = 0$

Si la pendiente de la recta tangente en el punto (1, 10) es 7 entonces $f'(1) = 7$

Calculamos las derivadas

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + 16$ de donde $3 \cdot a \cdot 1 + 2 \cdot b \cdot 1 + 16 = 7$

$f''(x) = 6ax + 2b$ de donde $6 \cdot a \cdot 1 + 2b = 0$

y $f(1) = 10$ de donde $a \cdot 1 + b \cdot 1 + 16 \cdot 1 + c = 10$, tenemos el sistema

$\begin{cases} a+b+c=-6 \\ 6a+2b=0 \\ 3a+2b=-9 \end{cases}$ Calculamos $E'_2 = -6E_1 + E_2$ y $E'_3 = -3E_1 + E_3$ obtenemos

$\begin{cases} a+b+c=-6 \\ -4b-6c=36 \\ -b-3c=9 \end{cases}$ Calculamos $E''_3 = E'_2 - 4E'_3$ obtenemos

$\begin{cases} a+b+c=-6 \\ -4b-6c=36 \\ 6c=0 \end{cases}$ de donde, $c = 0$, $b = -9$ y $a = 3$

$a = 3$, $b = -9$, $c = 0$; $f(x) = 3x^3 - 9x^2 + 16x$

Bloque 2:

1. *Un artesano hace botines, botas de media caña y botas de caña alta, vendiendo cada par, respectivamente, a 150, 200 y 250 euros. La diferencia entre los botines y las botas de caña alta vendidas equivalen al número de caña media vendidas. El número de caña alta vendidas es la tercera parte de los botines. Por el total de las ventas obtiene 5500 euros.*

   a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántas botas de cada tipo se vendieron. (1 ptos)

   b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

RESPUESTA

Sea x el número de botines, y el número de botas de media caña, z el número de botas de caña alta.

a)

Escribimos el sistema $\begin{cases} 150x + 200y + 250z = 5500 \\ x - z = y \\ z = \frac{1}{3}x \end{cases}$ simplificando la primera ecuación, dividiendo entre 50 y ordenando todas

b)

$\begin{cases} x \quad - 3z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ 3x + 4y + 5z = 110 \end{cases}$ Calculamos E'$_2$ = –E$_1$ + E$_2$ y E'$_3$ = –3E$_1$ + E$_3$ obtenemos

$\begin{cases} x \quad - 3z \quad = 0 \\ -y + 2z \quad = 0 \\ 4y + 14z = 110 \end{cases}$ Calculamos E''$_3$ = 4E'$_2$ + E'$_3$ obtenemos

$\begin{cases} x \quad - 3z \quad = 0 \\ -y + 2z \quad = 0 \\ 22z = 110 \end{cases}$ de donde $z = 5$, $y = 10$, $x = 15$

Vende 15 pares de botines, 10 de botas de media caña y 5 de botas de caña alta

Autor: Luis Carlos Vidal Del Campo
www.apuntesmareaverde.org.es

2. *En el siguiente problema de programación lineal optimiza la función $f(x, y) = 6x - 2y$ sujeta a las siguientes restricciones:*

$$x + y \geq 2; x - y \leq 2; y \leq 1; x \geq 0$$

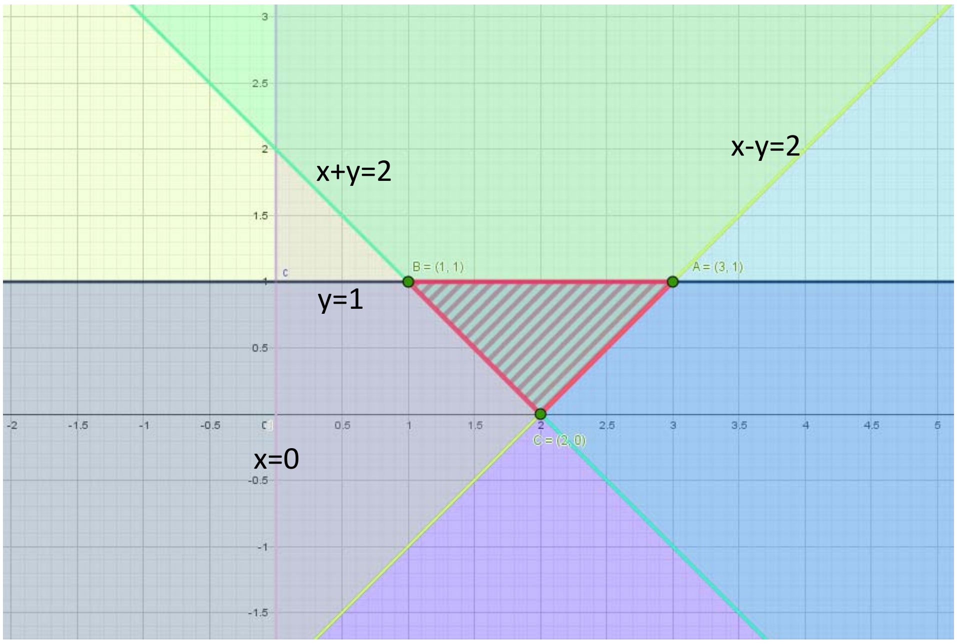
a) Dibuja la región factible. (1 punto)

b) Determina los vértices de la región factible. (0.25 ptos)

c) Indica el máximo y el mínimo y sus respectivos valores. (0.25 ptos)

RESPUESTA

a)



b) Resolvemos los sistemas formados por las ecuaciones de las rectas

$\begin{cases} x - y = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ obtenemos $A(3, 1)$ $\quad$ $\begin{cases} x + y = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ obtenemos $B(1, 1)$ $\quad$ $\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 2 \end{cases}$ obtenemos $C(2, 0)$

Los vértices son A(3, 1), B(1, 1) y C(2, 0)

c) Sustituimos los vértices en la función $f(x, y) = 6x - 2y$

A, $f(3, 1) = 6 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = 16$ $\quad$ B, $f(1, 1) = 6 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 4$ $\quad$ C, $f(2, 0) = 6 \cdot 2 - 2 \cdot 0 = 12$

Máximo en A con valor 16. Mínimo en B con valor 4

SECCIÓN 2

Bloque 1:

3. *En un instituto el 15 % de los alumnos ven la tele todos los días, el 25 % juegan todos los días a la consola y el 26 % ven la tele todos los días o juegan todos los días a la consola o ambos.*

a) Se elige un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que vea la tele todos los días y juegue a la consola todos los días? (0.75 ptos)

b) Si elegimos un alumno al azar y juega todos los días a la consola, ¿cuál es la probabilidad de que vea todos los días la televisión? (0.75 ptos)

RESPUESTA

Sea **T** el suceso ver la tele todos los días y **C** jugar todos los días a la consola

Según el enunciado $P(\text{T}) = 0.15$ $P(\text{C}) = 0.25$ y $P(\text{T} \cup \text{C}) = 0.26$

a) Se pide $P(\text{T} \cap \text{C})$, como $P(\text{T} \cup \text{C}) = \text{P(T)} + \text{P(C)} - \text{P}(\text{T} \cap \text{C})$ sustituyendo

$0.26 = 0.15 + 0.25 - P(\text{T} \cap \text{C})$ de donde $P(\text{T} \cap \text{C}) = 0.14$

La probabilidad de que un alumno vea la tele y juegue a la consola todos los días es de 0.14

b) Se pide $P(T/C) = \frac{P(T\cap C)}{P(C)} = \frac{0.14}{0.25} = 0.56$

Si elegimos un alumno al azar y juega todos los días a la consola, la probabilidad de que vea todos los días la televisión es $\boldsymbol{P(T/C) = 0.56}$

4. *Para hacer un estudio de las horas de duración de la batería de un juguete, se tomó una muestra aleatoria de 10 de estas baterías, siendo el número de horas de duración obtenida de: 4.2, 4.6, 5, 5.7, 5.8, 5.9, 6.1, 6.2, 6.5 y 7.3 respectivamente. Sabiendo que la variable "número de horas de duración de la batería" sigue una distribución normal de desviación típica 2.1 horas, se pide:*

a) Halla el intervalo de confianza para el número medio de horas de duración de la batería con un nivel de confianza del 97%. (1 pto)

b) Explica razonadamente cómo podríamos disminuir la amplitud del intervalo de confianza. (0.5 ptos)

c) ¿Crees que la media poblacional μ del número de horas es de 4 horas con una probabilidad del 90%? Razona tu respuesta. (0.5 ptos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

RESPUESTA

a) El intervalo de confianza para la media muestral viene dado por la expresión:

$$\left(\overline{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,,\ \overline{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right),$$

donde X es la variable "número de horas de duración de la batería", X sigue una $N(\mu, 2.1)$

Nos dan los siguientes datos: $\boldsymbol{\sigma = 2.1}$ $\quad \boldsymbol{1-\alpha = 0.97}$, $\quad n = 10$.

Calculamos la media muestral:

$$\overline{x} = \frac{4.2+4.6+5+5.7+5.8+5.9+6.1+6.2+6.5+7.3}{10} = 5.73.$$

$\boldsymbol{1-\alpha = 0.97}$, $\boldsymbol{\alpha = 0.03}$, $\frac{\alpha}{2} = \boldsymbol{0.015}$, $1-\frac{\alpha}{2} = \boldsymbol{0.985}$, buscamos en la tabla: $Z_{0.985} = \boldsymbol{2.17}$.

Y sustituimos en la expresión del intervalo de confianza:

$$\left(5.73 - 2.17\frac{2.1}{\sqrt{10}},\quad 5.73 + 2.17\frac{2.1}{\sqrt{10}}\right) = (4.29,\ \ 7.17)$$

Intervalo de confianza: $(4.29,\ \ 7.17)$

b) Si se quiere que el intervalo de confianza tenga menor amplitud se debe aumentar el tamaño de la muestra o disminuir el nivel de confianza.

Aumentar el tamaño de la muestra o disminuir nivel de confianza.

c) Si el nivel de confianza fuese del 90 %, 97 % > 90 %, el intervalo de confianza tendría menor amplitud, como 4 ya no se encuentra en el intervalo anterior, al ser menor el nivel de confianza, la amplitud del intervalo va a ser menor y por tanto el valor 4 no va a estar en el intervalo, por tanto, se puede decir que la media poblacional no va a ser de 4.

No se puede afirmar que la media poblacional sea 4 con una probabilidad del 90 %.

Bloque 2:

3. *Se considera la función* $f(x) = \begin{cases} x+t & si\ x \leq -1 \\ x^3-2x^2+4 & si\ x > -1 \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en x=-1? (0.75 ptos)

b) Calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(-1,+\infty)$. (0.5 ptos)

c) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(-1,+\infty)$. (0.5 ptos)

RESPUESTA

a) $f(x) = \begin{cases} x+\mathrm{t} & si\ x\ \leq -1 \\ x^3-2x^2+4 & si\ x\ > -1 \end{cases}$ para que *f* sea continua en *x* = –1 los límites laterales en *x* = –1 han de coincidir y su valor ser igual a *f*(–1)

$$\boldsymbol{\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-}(x+t) = -1+t}$$

$\boldsymbol{\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+}(x^3-2x^2+4) = 1}$, igualamos, –1 + *t* = 1, luego *t* = 2.

***f* es continua en *x* = –1 cuando *t* = 2**

b) En el intervalo dado la función es $\boldsymbol{f(x) = x^3-2x^2+4}$, calculamos su derivada,

$\boldsymbol{f'(x) = 3x^2-4x}$, $\boldsymbol{3x^2-4x=0}$, obtenemos, $\boldsymbol{x=0\ \ y\ \ x=\frac{4}{3}}$, hacemos la segunda derivada,

$\boldsymbol{f''(x) = 6x-4}$, sustituimos los valores obtenidos,

$\boldsymbol{f''(0) = -4 < 0}$, máximo relativo, $\boldsymbol{f''\left(\frac{4}{3}\right) = 4 > 0}$, mínimo relativo

En *x* = 0 hay un máximo relativo: (0, 4); y en *x* = $\frac{4}{3}$ *hay un mínimo relativo:* $(\frac{4}{3},\frac{76}{27})$.

c) Considerando los valores del apartado b) tenemos los intervalos:

(–1, 0), (0, $\frac{4}{3}$) y ($\frac{4}{3}$, +∞), tomamos valores que estén dentro de cada intervalo y sustituimos en la primera derivada, $x=-\frac{1}{2}$, $f'\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{4}>0$, luego en el intervalo (–1, 0) *f* es creciente,

$x=\frac{1}{3}$, $f'\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{3}<0$, luego en el intervalo (0, $\frac{4}{3}$) *f* es decreciente,

$x=10$, $f'(10)=280>0$, luego en el intervalo ($\frac{4}{3}$, +∞) *f* es creciente.

En (–1, 0) *f* es creciente, en (0, $\frac{4}{3}$) *f* es decreciente y en ($\frac{4}{3}$, +∞) *f* es creciente

4. *Las botellas de agua vendidas por un hipermercado (que abre de 10 de la mañana a 4 de la tarde) durante una ola de calor viene dado por la función $C(t) = 2t^3 - 27t^2 + 120t$, con $1 \leq t \leq 6$ siendo $t = 1$ la primera hora desde la apertura y $t = 6$ la última hora hasta el cierre y $C(t)$ en cientos de botellas.*

a) ¿En que intervalos de tiempo las ventas aumentan? ¿Y en cuáles disminuye? (0.5 ptos)

b) ¿Cuándo se produce la máxima venta? ¿Y la mínima? (0.75 ptos)

c) ¿Cuántas botellas se venden en esos dos casos? (0.5 ptos)

RESPUESTA

a) *Calculamos la derivada,* $\boldsymbol{C'(t) = 6t^2 - 54t + 120}$ resolvemos $\boldsymbol{6t^2 - 54t + 120 = 0}$

Obtenemos t = 4 y t = 5, tenemos los intervalos (1, 4) (4, 5) y (5, 6) tomamos valores dentro de cada uno de los intervalos y sustituimos en la función derivada

$\mathrm{C}'(2) = 6 \cdot 2^2 - 54 \cdot 2 + 120 = 36 > 0$ Creciente en (1, 4)

$\mathrm{C}'(4.5) = 6 \cdot 4.5^2 - 54 \cdot 4.5 + 120 = -1.5 < 0$ Decreciente en (4, 5)

$\mathrm{C}'(5.5) = 6 \cdot 5.5^2 - 54 \cdot 5.5 + 120 = 4.5 > 0$ Creciente en (5, 6)

En (1, 4) C es creciente, en (4, 5) C es decreciente y en (5, 6) C es creciente

b) La máxima venta puede ser a las 4 horas o a las 6 horas

$C(4)$ = $C(4) = 2 \cdot 4^3 - 27 \cdot 4^2 + 120 \cdot 4 = 176$

$C(6) = 2 \cdot 6^3 - 27 \cdot 6^2 + 120 \cdot 6 = 180$

La máxima venta se produce a las 6 de la tarde, aunque a las 4 hay un máximo relativo.

La mínima venta puede ser a la 1 hora o a las 5 horas

$C(1) = 2 \cdot 1^3 - 27 \cdot 1^2 + 120 \cdot 1 = 95$

$C(5) = 2 \cdot 5^3 - 27 \cdot 5^2 + 120 \cdot 5 = 175$

La mínima venta se produce a las 11 de la mañana, aunque a las 5 hay un mínimo relativo.

Máxima venta a las 6 de la tarde, mínima venta a la 1 de la mañana

c) A las 6 de la tarde se venden 18 000 botellas

A la 1 de la mañana se venden 9 500 botellas

A las 6 de la tarde se venden 18 000 botellas, a la 1 de la mañana se venden 9 500 botellas

SECCIÓN 3

Bloque 1:

5. *Una marca ofrece paquetes de tortitas de arroz de tres tipos: con espelta, con amapola y con chía. Se venden el triple de paquetes de las de amapola que de las de espelta. Se venden 40 paquetes más de las de amapola que de las de chía. Los precios de los paquetes para espelta, amapola y chía son respectivamente 2.50, 3.50 y 3 euros obteniendo por la venta de todas las tortitas 1640 euros.*

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántos paquetes de cada tipo se vendieron. (1.5 ptos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

RESPUESTA

Sea x el número de paquetes con espelta, y con amapola, **z** con chía.

a)

Escribimos el sistema $\begin{cases} 2.5x + 3.5y + 3z = 1640 \\ y = 3x \\ y = z + 40 \end{cases}$

b)

Como $y = 3x$ además $y = z + 40$, $3x = z + 40$, $z = 3x - 40$

sustituimos en la primera ecuación

$2.5x + 3.5 \cdot 3x + 3 \cdot (3x - 40) = 1640$

$22x = 1440$, $x = 80$, sustituyendo

$y = 3 \cdot 80 = 240$,

$z = 3 \cdot 80 - 40 = 200$

Se venden 80 paquetes con espelta, 240 con amapola y 200 con chía

6. *Dadas las matrices* $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ *y* $C = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -4 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) Calcula $M = A{\cdot}C - (B - I)^T$ *siendo* I *la matriz identidad de orden 2. (0.75 ptos)*

b) Calcula, si es posible, la matriz X *tal que* $X{\cdot}B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}$. *(0.75 ptos)*

RESPUESTA

a) $A \cdot C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -4 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 26 & 1 \end{pmatrix}$

$B - I = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(B - I)^t = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$A \cdot C - (B - I)^t = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 26 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 24 & 0 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{A \cdot C - (B - I)^t = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 24 & 0 \end{pmatrix}}$$

b) Sea $X = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$; $X \cdot B = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -2x & 2x + 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}$;

$\begin{cases} -2x = 2 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$ $\quad x = -1, \quad y = 3$

Luego la matriz X sería $\quad X = \begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix}}$$

Bloque 2:

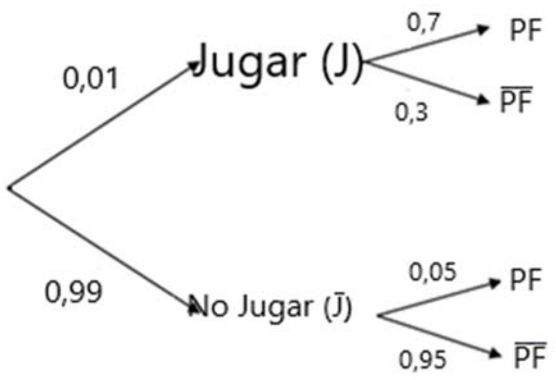
5. *En una ciudad el 1 % de los habitantes ha ido a jugar alguna vez a una casa de apuestas. De las personas que han ido a jugar alguna vez a una casa de apuestas, el 70 % tiene problemas financieros. De los habitantes que no han ido a jugar alguna vez a una casa de apuestas, se sabe que un 5 % tiene problemas financieros.*

a) Calcula la probabilidad de que elegido un habitante al azar tenga problemas financieros. (0.75 ptos)

b) Sabiendo que una persona tiene problemas financieros, ¿cuál es la probabilidad de que haya ido a jugar alguna vez a una casa de apuestas? (0.75 ptos)

RESPUESTA

Construimos el diagrama de árbol



a) Por el teorema de la probabilidad total

$P(PF) = P(J \cap PF) + P(\bar{J} \cap PF) = 0.01 \cdot 0.7 + 0.99 \cdot 0.05 = 0.0565$

$$\boldsymbol{P(\text{Problemas Financieros}) = 0.0565}$$

b) $P(J/PF) = \frac{P(J \cap PF)}{P(PF)} = \frac{P(J) \cdot P(PF/J)}{P(PF)} = \frac{0.01 \cdot 0.7}{0.0565} = \frac{0.007}{0.0565} = 0.1239$

$$\boldsymbol{P(\text{Jugar cuando tiene Problemas Financieros}) = 0.1239}$$

6. *El tiempo medio de espera en una línea de atención al cliente sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 2$ minutos. Se hace un estudio de los tiempos de espera de 10 clientes al azar, siendo estos tiempos: 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 15 y 16 minutos respectivamente.*

a) Halla un intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo de espera, con un nivel de confianza del 95 %. (1.25 ptos)

b) ¿Cuál deberá ser el tamaño mínimo de la muestra elegida para que, con el mismo nivel de confianza, el error máximo admisible sea menor que 1 minuto? (0.75 ptos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

RESPUESTA

a) El intervalo de confianza para la media muestral viene dado por la expresión:

$$\left(\overline{x} - Z_{1-\frac{\propto}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + Z_{1-\frac{\propto}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Nos dan los siguientes datos:

$\sigma = 2,\quad 1 - \alpha = 0.95,\quad \alpha = 0.05,\ \frac{\alpha}{2} = 0.025,\ 1 - \frac{\propto}{2} = 0.975 \qquad n = 10.$

Calculamos la media muestral:

$$\overline{x} = \frac{5+6+7+8+9+11+12+14+15+16}{10} = 10.3.$$

Buscamos en la tabla: $Z_{1-\frac{\propto}{2}} = Z_{0.975} = 1.96.$

Y sustituimos en la expresión del intervalo de confianza:

$$\left(\overline{x} - Z_{1-\frac{\propto}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + Z_{\frac{\propto}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(10.3 - 1.96\frac{2}{\sqrt{10}}, \quad 10.3 + 1.96\frac{2}{\sqrt{10}}\right) =$$

=(9.06, 11.54)

Intervalo de confianza: (9.06, 11.54)

b) El error máximo admisible viene dado por: $E = Z_{1-\frac{\propto}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Por tanto, para E = 1, $\quad 1 = Z_{1-\frac{\propto}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}}$

luego, $\sqrt{n} = Z_{1-\frac{\propto}{2}} \cdot \sigma = 1.96 \cdot 2,$ y n = 15.3664.

El tamaño de la muestra debe ser mayor que 16 clientes.

UCLM CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL
CURSO: **2019–2020**
MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA DE **SEPTIEMBRE**

El examen está compuesto de 3 secciones de dos bloques cada una. A su vez cada bloque tiene dos ejercicios. El alumno deberá elegir un bloque de cada una de las tres secciones. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.

SECCIÓN 1 (3 puntos)

Bloque 1:

1. *Una empresa telefónica ofrece tres modelos de teléfonos: de precio reducido, medio y superior. El precio del teléfono de gama superior es el mismo que el de los otros dos juntos. Vendiendo 50 teléfonos de precio medio se obtiene el mismo dinero que con 30 del superior y por la venta de 5 teléfonos de precio reducido, 5 de medio y 10 de precio superior se obtienen 7500 euros.*

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuánto cuesta cada modelo. (1 pto)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

2. *En una pastelería se elaboran dos tipos de tarta de chocolate (A y B). La primera lleva 100 gr de chocolate con leche y 200 gr de chocolate negro y la segunda 200 gr de chocolate con leche y 100 gr de chocolate negro. Dispone de 9 kg de cada tipo de chocolate. Por cada tarta A obtiene un beneficio de 5 euros y por cada tarta B de 4 euros.*

a) Expresa la función objetivo para obtener un beneficio máximo. (0.25 ptos)

b) Escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. (1 punto).

c) Determina el número de tartas de cada tipo que puede vender para obtener beneficio máximo. (0.25 ptos)

Bloque 2:

1. *Se considera la función* $f(x) = \begin{cases} -4x+4 & si\ x \le c \\ x^2-4x & si\ x > c \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de c la función $f(x)$ es continua en $x = c$? (0.5 ptos)

b) Para $c = 2$, representa gráficamente la función f. (1 pto)

2. *Una función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tiene un máximo en $x = -1$ y un punto de inflexión en el punto $(1, -9)$. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a, b y c. (1.5 ptos)*

SECCIÓN 2 (3,5 puntos)

Bloque 1:

3. *El 10 % de los adultos padece sobrepeso. Se sabe por estudios previos que el riesgo de padecer hipertensión arterial es dos veces mayor en las personas con sobrepeso que las que no tienen sobrepeso y también que la probabilidad de que un adulto sin sobrepeso padezca hipertensión arterial es del 14.8 %.*

a) ¿Qué porcentaje de adultos tienen sobrepeso e hipertensión arterial? (0.75 ptos)

b) Si se escoge un adulto al azar y tiene hipertensión arterial, ¿cuál es la probabilidad de que tenga sobrepeso? (0.75 ptos)

4. *El tiempo medio diario de consumo de televisión en Castilla-La Mancha sigue una distribución normal con desviación típica $\sigma = 30$ minutos. Se hizo un estudio con 50 personas y se observó que la media de consumo diario de ellas era de 220 minutos. Se pide:*

a) Calcula el intervalo de confianza del 95 % para el consumo medio de televisión en Castilla-La Mancha. (1 pto)

b) Razona cómo podríamos disminuir la amplitud del intervalo de confianza. (0.5 ptos)

c) ¿Crees que la media poblacional μ de consumo diario de televisión en Castilla-La Mancha es de 230 minutos con una probabilidad del 90 %? Razona tu respuesta. (0.5 ptos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Bloque 2:

3. *Se considera la función* $f(x) = \begin{cases} x - t & si\ x \leq 0 \\ (x-t)^2 - 5(x+t) + 4 & si\ x > 0 \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ *es continua en* $x = 0$*? (0.75 ptos)*

b) Para $t = 0$*, calcula los extremos relativos de la función* $f(x)$ *en el intervalo* $(0, +\infty)$*. (0.75 ptos)*

c) Para $t = 0$*, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función* $f(x)$ *en* $(0, +\infty)$*. (0.5 ptos)*

4. *En un taller para automóviles el número de clientes a los que cambiaron las ruedas de su coche durante 5 días de esta semana se ajusta a la función* $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 75,\quad 1 \leq x \leq 5$ *, siendo* $x = 1$ *el lunes y* $x = 5$ *el viernes.*

a) ¿Qué día acuden menos clientes a cambiar las ruedas de su coche? ¿Cuántos clientes son? (0.75 ptos)

b) ¿Cuál es el día que van más clientes a que les cambien las ruedas y cuántos son esos clientes? (0.75 ptos)

SECCIÓN 3 (3,5 puntos)

Bloque 1:

5. *La elección de una película ganadora de un festival de cine negro se realiza mediante una votación pública por internet entre las seleccionadas (A, B y C) para la final. El número de votantes es de 1200 personas. El número de votos de A es el doble de los conseguidos por B y C juntas. B consigue el 50 % de votos más que C.*

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántos votos obtuvo cada película. (1.5 ptos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

6. *Dadas las matrices* $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$

a) Calcula $(A - B)^2$*. (0.75 ptos)*

b) ¿Se podría calcular la matriz inversa de $(A - B)^2$*? (0.25 ptos)*

c) ¿Qué propiedad tienen que cumplir dos matrices A y B cualesquiera para que se cumpla $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$*? (0.5 ptos)*

Bloque 2:

5. *En un municipio el 5 % de los habitantes son deportistas aficionados. El 0.5 % de estos deportistas aficionados no han superado un test respiratorio. Mientras que de los habitantes no deportistas aficionados el 15 % no han superado el mismo test respiratorio.*

a) *Elegido un habitante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no haya superado el test respiratorio? (0.75 ptos)*

b) *Sabiendo que un habitante elegido al azar no ha superado el test respiratorio, ¿cuál es la probabilidad de que sea deportista aficionado? (0.75 ptos)*

6. *Se ha tomado una muestra aleatoria de 10 frascos de Berenjenas de Almagro de 1 kilogramo para medir el contenido de fibra en gramos y ha resultado ser: 60, 80, 120, 95, 65, 70, 75, 85, 100 y 90. Suponiendo que el contenido de fibra en cada frasco se distribuye según una ley normal de desviación típica* $\sigma = 10$ *gramos, se pide:*

a) Halla el intervalo de confianza del 97 % para la media poblacional del contenido en fibra de un frasco de Berenjenas de Almagro. (1 pto)

b) Razona y explica qué se podría hacer para que el intervalo de confianza tuviera menor amplitud con el mismo nivel de confianza. (0.5 ptos)

c) ¿Crees que la media poblacional μ *del contenido en gramos de fibra de un frasco de Berenjenas de Almagro es de 85 gramos con una probabilidad del 98.5 %? Razona tu respuesta. (0.5 ptos)*

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

RESPUESTAS

SECCIÓN 1

Bloque 1:

1. *Una empresa telefónica ofrece tres modelos de teléfonos: de precio reducido, medio y superior. El precio del teléfono de gama superior es el mismo que el de los otros dos juntos. Vendiendo 50 teléfonos de precio medio se obtiene el mismo dinero que con 30 del superior y por la venta de 5 teléfonos de precio reducido, 5 de medio y 10 de precio superior se obtienen 7500 euros.*

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuánto cuesta cada modelo. (1 pto)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

RESPUESTA

Sea x el precio reducido, y el precio medio, z el precio superior.

a)

Escribimos el sistema $\begin{cases} 5x+5y+10z=7500 \\ x+y=z \\ 50y=30z \end{cases}$ simplificando la primera ecuación, dividiendo entre 5, la tercera entre 10 y ordenando todas

b)

$\begin{cases} x+y-z=0 \\ 5y-3z=0 \\ x+y+2z=1500 \end{cases}$ Calculamos $E'_3 = -E_1 + E_3$ obtenemos

$\begin{cases} x+y-z=0 \\ 5y-3z=0 \\ 3z=1500 \end{cases}$ de donde $z = 500$, $y = 300$, $x = 200$

Precio reducido 200 €, precio medio 300 € y precio superior 500 €

2. *En una pastelería se elaboran dos tipos de tarta de chocolate (A y B). La primera lleva 100 gr de chocolate con leche y 200 gr de chocolate negro y la segunda 200 gr de chocolate con leche y 100 gr de chocolate negro. Dispone de 9 kg de cada tipo de chocolate. Por cada tarta A obtiene un beneficio de 5 euros y por cada tarta B de 4 euros.*

a) Expresa la función objetivo para obtener un beneficio máximo. (0.25 ptos)

b) Escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. (1 punto).

c) Determina el número de tartas de cada tipo que puede vender para obtener beneficio máximo. (0.25 ptos)

RESPUESTA

	Chocolate con leche (gr)	Chocolate negro (gr)	Beneficio
Nº tartas A	100	200	5 €
Nº tartas B	200	100	4 €
Total	9000	9000	

a) *f(x, y) = 5x + 4y*

f(x, y) = 5x + 4y

b)

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{x \geq 0 \quad y \geq 0} \\ \mathbf{100x + 200y \leq 9000} \\ \mathbf{200x + 100y \leq 9000} \end{array}\right\}$$

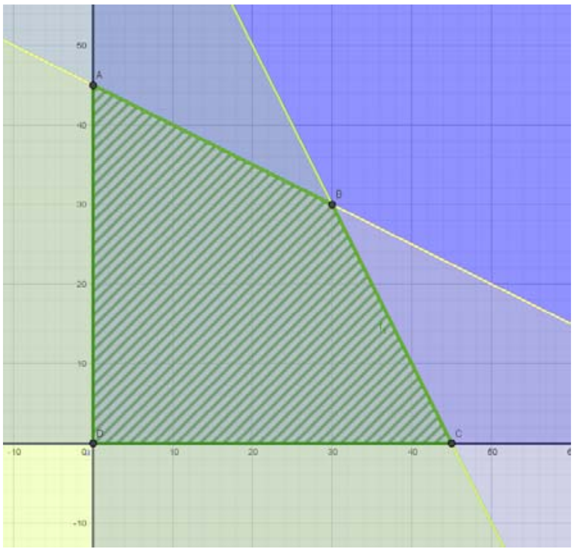
Los vértices son:

$A(0, 45)$

$B(30, 30)$

$C(45, 0)$

$D(0, 0)$



c) $f(0, 45) = 5 \cdot 0 + 4 \cdot 45 = 180$

$f(30, 30) = 5 \cdot 30 + 4 \cdot 30 = 270$

$f(45, 0) = 5 \cdot 45 + 4 \cdot 0 = 225$

$f(0, 0) = 0$

Puede vender 30 tartas de cada tipo para obtener el máximo beneficio que sería de 270 €

Bloque 2:

1. *Se considera la función* $f(x) = \begin{cases} -4x+4 & si\ x \leq c \\ x^2-4x & si\ x > c \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de c la función $f(x)$ es continua en $x = c$? (0.5 ptos)

b) Para $c = 2$, representa gráficamente la función f. (1 pto)

RESPUESTA

a) $f(x) = \begin{cases} -4x+4 & si\ x\ \leq c \\ x^2-4x & si\ x\ > c \end{cases}$ para que *f* sea continua en x=c**,** los límites laterales en x=c han de coincidir y su valor ser igual a *f*(c)

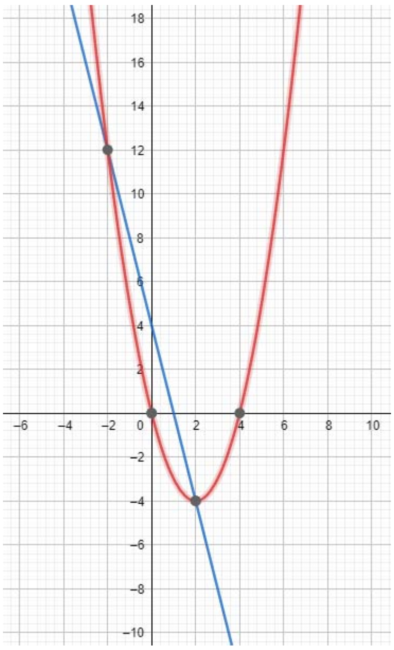
$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^-} (-4x+4) = -4c+4$$

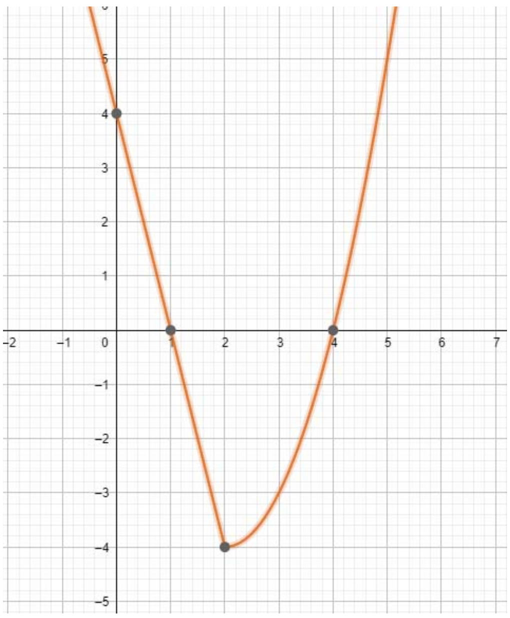
$$\lim_{x \to c^+} f(x) = \lim_{x \to c^+} (x^2-4x) = c^2-4c, \text{ igualamos, } c^2-4c = -4c+4$$

luego c=2 o c=-2

***f* es continua en *x* = *c* cuando *c* = 2 o *c* = –2**

b)





2. *Una función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tiene un máximo en $x = -1$ y un punto de inflexión en el punto $(1, -9)$. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a, b y c. (1.5 ptos)*

RESPUESTA

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

Máximo en $x = -1$, entonces $f'(-1) = 0$

Punto inflexión en $(1, -9)$ entonces $f(1) = -9$ y $f''(1) = 0$

Calculamos $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ y $f''(x) = 6x + 2a$

Aplicamos a los datos dados

f(1) = -9 $\quad (1)^3 + a(1)^2 + b(1) + c = -9 \quad$ $1 + a + b + c = -9$

f'(-1) = 0 $\quad 3(-1)^2 + 2a(-1) + b = 0 \quad$ $3 - 2a + b = 0$

f''(1) = 0 $\quad 6(1) + 2a = 0 \quad$ $6 + 2a = 0$

Resolviendo el sistema:

$a = -3 \qquad b = -9 \qquad c = 2$

$a = -3$, $b = -9$, $c = 2$ y $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + +2$

SECCIÓN 2

Bloque 1:

3. *El 10 % de los adultos padece sobrepeso. Se sabe por estudios previos que el riesgo de padecer hipertensión arterial es dos veces mayor en las personas con sobrepeso que las que no tienen sobrepeso y también que la probabilidad de que un adulto sin sobrepeso padezca hipertensión arterial es del 14.8 %.*

a) ¿Qué porcentaje de adultos tienen sobrepeso e hipertensión arterial? (0.75 ptos)

b) Si se escoge un adulto al azar y tiene hipertensión arterial, ¿cuál es la probabilidad de que tenga sobrepeso? (0.75 ptos)

RESPUESTA

Como la probabilidad de padecer hipertensión con sobrepeso es doble que sin sobrepeso y ésta es de 14.8 % la probabilidad de sobrepeso será 29.6 %.

Denotamos por S, sobrepeso y por HA, hipertensión arterial

Hacemos el diagrama de árbol

a) $P(\text{S}\cap\text{HA}) = P(\text{S}) \cdot P(\text{HA/S}) = 0.1 \cdot 0.296 = 0.0296$

El 2.96% de personas adultas tienen hipertensión y sobrepeso

b) $P(\text{S/HA})$ = por el teorema de Bayes = $\frac{P(S\cap HA)}{P(HA)} = \frac{0.0296}{P(HA)} = (*)$

necesitamos calcular $P(\text{HA})$, utilizamos el teorema de la probabilidad total,

$P(\text{HA}) = P(\text{S}\cap\text{HA}) + P(\bar{s}\cap\text{HA}) = P(\text{S}) \cdot P(\text{HA/S}) + P(\bar{s}) \cdot P(\text{HA}/\bar{s}) =$

$= 0.1 \cdot 0.296 + 0.9 \cdot 0.148 = 0.1628$

$(*) = \frac{0.0296}{0.1628} = \mathbf{0.1818}$

Una persona con hipertensión tiene un 18.18 % de tener sobrepeso

Autor: Luis Carlos Vidal Del Campo
www.apuntesmareaverde.org.es

4. *El tiempo medio diario de consumo de televisión en Castilla-La Mancha sigue una distribución normal con desviación típica $\sigma = 30$ minutos. Se hizo un estudio con 50 personas y se observó que la media de consumo diario de ellas era de 220 minutos. Se pide:*

a) Calcula el intervalo de confianza del 95 % para el consumo medio de televisión en Castilla-La Mancha. (1 pto)

b) Razona cómo podríamos disminuir la amplitud del intervalo de confianza. (0.5 ptos)

c) ¿Crees que la media poblacional μ de consumo diario de televisión en Castilla-La Mancha es de 230 minutos con una probabilidad del 90 %? Razona tu respuesta. (0.5 ptos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

RESPUESTA

a) El intervalo de confianza para la media muestral viene dado por la expresión:

$$\left(\bar{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Nos dan los siguientes datos:

$$\sigma = 30, \quad 1 - \alpha = 0.95, \quad \bar{x} = 220, \quad n = 50$$

X: tiempo medio consumo televisión, X sigue una $N(\mu, 30)$

$$\alpha = 0.05, \ \frac{\alpha}{2} = 0.025, \ 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975$$

Buscamos en la tabla: $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.975} = 1.96$.

Y sustituimos en la expresión del intervalo de confianza:

$$\left(\bar{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(220 - 1.96\frac{30}{\sqrt{50}}, 220 + 1.96\frac{30}{\sqrt{50}}\right) = (221.68, 228.32)$$

Intervalo de confianza: (221.68, 228.32)

b) Si se quiere que el intervalo de confianza tenga menor amplitud se debe aumentar el tamaño de la muestra o disminuir el nivel de confianza.

Aumentar el tamaño de la muestra o disminuir nivel de confianza.

c) Si el nivel de confianza fuese del 90 %, 95 % > 90 %, el intervalo de confianza tendría menor amplitud, como 230 ya no se encuentra en el intervalo anterior, al ser menor el nivel de confianza, la amplitud del intervalo va a ser menor y por tanto el valor 230 no va a estar en el intervalo, luego, se puede decir que la media poblacional no va a ser de 230.

No se puede afirmar que la media poblacional sea 230 con una probabilidad del 90 %

Bloque 2:

3. *Se considera la función* $f(x) = \begin{cases} x - t & si\ x \leq 0 \\ (x-t)^2 - 5(x+t) + 4 & si\ x > 0 \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x = 0$? (0.75 ptos)

b) Para $t = 0$, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(0, +\infty)$. (0.75 ptos)

c) Para $t = 0$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(0, +\infty)$. (0.5 ptos)

RESPUESTA

a) $f(x) = \begin{cases} x - t & si\ x \leq 0 \\ (x-t)^2 - 5(x+t) + 4 & si\ x > 0 \end{cases}$ para que f sea continua en x **= 0,** los límites laterales en x **= 0** han de coincidir y su valor ser igual a $f(0)$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x - t) = -t$$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x-t)^2 - 5(x+t) + 4 = t^2 - 5t + 4$, igualamos, $t^2 - 5t + 4 = -t$

obtenemos $t = 2$

f es continua en x = 0 cuando t = 2

b) En el intervalo dado, $f(x) = x^2 - 5x + 4$, calculamos $f'(x) = 2x - 5$, $2x - 5 = 0$, $x = \frac{5}{2}$

Como $f''(x) = 2 > 0$ en $x = \frac{5}{2}$ hay un mínimo relativo.

En $x = \frac{5}{2}$ hay un mínimo relativo: $(\frac{5}{2}, \frac{-9}{4})$

c) Los posibles intervalos son (0, 5/2) y (5/2, +∞), tomamos valores que pertenezcan a cada uno de los intervalos y sustituimos en la derivada de la función

$f'(1) = 2 \cdot 1 - 5 = -3 < 0$ luego en (0, 5/2) la función es decreciente

$f'(10) = 2 \cdot 10 - 5 = 15 > 0$ luego en (5/2, ∞) la función es creciente

f es decreciente en (0, 5/2) y creciente en (5/2, +∞)

Autor: Luis Carlos Vidal Del Campo
www.apuntesmareaverde.org.es

4. *En un taller para automóviles el número de clientes a los que cambiaron las ruedas de su coche durante 5 días de esta semana se ajusta a la función* $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 75$, $1 \le x \le 5$, *siendo* $x = 1$ *el lunes y* $x = 5$ *el viernes.*

a) ¿Qué día acuden menos clientes a cambiar las ruedas de su coche? ¿Cuántos clientes son? (0.75 ptos)

b) ¿Cuál es el día que van más clientes a que les cambien las ruedas y cuántos son esos clientes? (0.75 ptos)

RESPUESTA

$$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 75$$

a) Calculamos

$\boldsymbol{f'(x) = 6x^2 - 30x + 24}$

Resolvemos

$\boldsymbol{6x^2 - 30x + 24 = 0}$

Obtenemos $x = 1$ y $x = 4$

Calculamos

$\boldsymbol{f''(x) = 12x - 30}$ sustituimos los valores obtenidos

$\boldsymbol{f''(1) = 12 \cdot 1 - 30 = -18 < 0}$ luego en $x = 1$, hay un máximo relativo

$\boldsymbol{f''(4) = 12 \cdot 4 - 30 = 18 > 0}$ luego en $x = 4$ hay un mínimo relativo

$\boldsymbol{f(4) = 2 \cdot 4^3 - 15 \cdot 4^2 + 24 \cdot 4 + 75 = 59}$

El jueves es el día con menos clientes, 59.

b)

$\boldsymbol{f(1) = 2 \cdot 1^3 - 15 \cdot 1^2 + 24 \cdot 1 + 75 = 86}$

El lunes es el día con más clientes, 86.

SECCIÓN 3

Bloque 1:

5. *La elección de una película ganadora de un festival de cine negro se realiza mediante una votación pública por internet entre las seleccionadas (A, B y C) para la final. El número de votantes es de 1200 personas. El número de votos de A es el doble de los conseguidos por B y C juntas. B consigue el 50 % de votos más que C.*

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántos votos obtuvo cada película. (1.5 ptos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

RESPUESTA

Sea x el número de votos para A, y los de B, z los de C.

a)

Escribimos el sistema $\begin{cases} x+y+z=1200 \\ x=2(y+z) \\ y=z+0.5z \end{cases}$

b) Ordenamos el sistema

$\begin{cases} x+y+z=1200 \\ x-2y-2z=0 \\ y-1.5z=0 \end{cases}$ Calculamos $E'_2 = -E_1 + E_2$ obtenemos

$\begin{cases} x+y+z=1200 \\ -3y-3z=-1200 \\ y-1.5z=0 \end{cases}$ Calculamos $E''_3 = E'_2 + 3E'_3$, obtenemos

$\begin{cases} x+y+z=1200 \\ -3y-3z=-1200 \\ -7.5z=-1200 \end{cases}$ Ya podemos resolver

$z = 160$, $y = 240$, $x = 800$

A obtuvo 800 votos, B, 240 votos y C, 160 votos

Autor: Luis Carlos Vidal Del Campo
www.apuntesmareaverde.org.es

6. *Dadas las matrices* $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$

a) Calcula $(A-B)^2$. *(0.75 ptos)*

b) ¿Se podría calcular la matriz inversa de $(A-B)^2$*? (0.25 ptos)*

c) ¿Qué propiedad tienen que cumplir dos matrices A y B cualesquiera para que se cumpla $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$*? (0.5 ptos)*

RESPUESTA

a) $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^2 = \left[\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}\right]^2 = \left[\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}$

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^2 = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}$$

b) $\begin{vmatrix} 9 & 8 \\ 0 & 25 \end{vmatrix} = \mathbf{225} \neq \mathbf{0}$ por tanto, sí se puede calcular su inversa

Si tiene inversa

c) $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^2 = (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}) \cdot (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}^2$

Para que $-\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A} = -2\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ debe ser:

$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$ es decir, $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ deben **conmutar**.

Bloque 2:

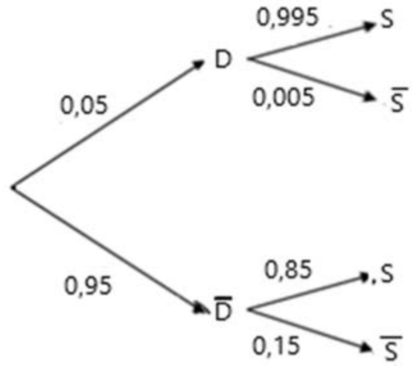
5. *En un municipio el 5 % de los habitantes son deportistas aficionados. El 0.5 % de estos deportistas aficionados no han superado un test respiratorio. Mientras que de los habitantes no deportistas aficionados el 15 % no han superado el mismo test respiratorio.*

a) *Elegido un habitante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no haya superado el test respiratorio? (0.75 ptos)*

b) *Sabiendo que un habitante elegido al azar no ha superado el test respiratorio, ¿cuál es la probabilidad de que sea deportista aficionado? (0.75 ptos)*

RESPUESTA

Denotamos por D al suceso ser deportista y por T al suceso superar el test respiratorio.
Hacemos el diagrama de árbol



a) Por el teorema de la probabilidad total

$P(\bar{S}) = P(D\cap\bar{S}) + P(\bar{D}\cap \bar{S}) = 0.05 \cdot 0.005 + 0.95 \cdot 0.15 = 0.1428$

$$\boldsymbol{P(\text{no haber superado el test}) = 0.1428}$$

b) $P(D/\bar{S}) = \frac{P(D\cap\bar{S})}{P(\bar{S})} = \frac{P(D)\cdot P(\bar{S}/D)}{P(PF)} = \frac{0.05 \cdot 0.005}{0.1428} = 0.00175$

$$\boldsymbol{P(\text{ser deportista aficionado si no ha superado el test}) = 0.00175}$$

Autor: Luis Carlos Vidal Del Campo
www.apuntesmareaverde.org.es

6. *Se ha tomado una muestra aleatoria de 10 frascos de Berenjenas de Almagro de 1 kilogramo para medir el contenido de fibra en gramos y ha resultado ser: 60, 80, 120, 95, 65, 70, 75, 85, 100 y 90. Suponiendo que el contenido de fibra en cada frasco se distribuye según una ley normal de desviación típica $\sigma = 10$ gramos, se pide:*

a) Halla el intervalo de confianza del 97 % para la media poblacional del contenido en fibra de un frasco de Berenjenas de Almagro. (1 pto)

b) Razona y explica qué se podría hacer para que el intervalo de confianza tuviera menor amplitud con el mismo nivel de confianza. (0.5 ptos)

c) ¿Crees que la media poblacional μ del contenido en gramos de fibra de un frasco de Berenjenas de Almagro es de 85 gramos con una probabilidad del 98.5 %? Razona tu respuesta. (0.5 ptos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

RESPUESTA

a) El intervalo de confianza para la media muestral viene dado por la expresión:

$$\left(\overline{x} - Z_{1-\frac{\propto}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\, ,\ \overline{x} + Z_{1-\frac{\propto}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right),$$

donde X es la variable "contenido de fibra de un frasco de 1kg", X sigue una $N(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{10})$

Nos dan los siguientes datos: $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{10}$ $\mathbf{1} - \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0.97}$, n = 10.

Calculamos la media muestral:

$$\overline{x} = \frac{60+80+120+95+65+70+75+85+100}{10} = 75.$$

$1 - \alpha = 0.97$, $\alpha = 0.03$, $\frac{\propto}{2} = 0.015$, $1 - \frac{\propto}{2} = 0.985$, buscamos en la tabla: $Z_{0.985} = 2.17$.

Y sustituimos en la expresión del intervalo de confianza:

$$\left(84 - 2.17\frac{10}{\sqrt{10}},\ \ 84 + 2.17\frac{10}{\sqrt{10}}\right) = (77.14, 90.86)$$

Intervalo de confianza: (77.14, 90.86)

b) Si se quiere que el intervalo de confianza tenga menor amplitud se debe aumentar el tamaño de la muestra, o disminuir el nivel de confianza $\mathbf{1} - \boldsymbol{\alpha}$.

Aumentar el tamaño de la muestra.

c) Si el nivel de confianza fuese del 98.5 %, 98.5 % > 97 %, el intervalo de confianza tendría mayor amplitud, como 85 ya se encuentra en el intervalo anterior, al ser mayor el nivel de confianza, la amplitud del intervalo va a ser mayor y por tanto el valor 85 va a estar en el intervalo, luego, se puede decir que la media poblacional va a ser de 85.

Se puede afirmar que la media poblacional será 85 gr con una probabilidad del 98.5 %