Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2020

Comunidad autónoma de CANARIAS

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Lidia Esther Fumero Acosta

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

ULL Universidad de La Laguna	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2019–2020** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Instrucciones: Se debe resolver hasta un máximo de 4 preguntas del siguiente modo:
- De las preguntas A1-A2-B1-B2 se pueden elegir 3 como máximo.
- De las preguntas A3-A4-B3-B4 se pueden elegir 3 como máximo.
- Cada pregunta puntúa un máximo de 2.5 puntos

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Problema A.1:

Una multinacional dedicada a la fabricación de vehículos fabrica el 40 % de sus vehículos en España, el 35 % en Francia y el resto en Italia. Los vehículos fabricados son de tres modelos (Ancer, Beam y Celestial). En España se fabrican los tres modelos a partes iguales. En Francia dos terceras partes de los vehículos que se fabrican son del modelo Ancer y el resto son Beam. En Italia se fabrican los modelos Beam y Celestial a partes iguales.

a) Construye el diagrama de árbol de probabilidades.

b) Se elige un vehículo al azar de entre todos los producidos por la multinacional, ¿cuál es la probabilidad de que sea del modelo Beam?

c) Si poseyéramos un vehículo modelo Ancer, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricado en España?

Problema A.2:

En una determinada provincia, se seleccionó una muestra al azar de 400 personas cuya media de ingresos mensuales resultó igual a 1250 € con una desviación típica de 210 €.

a) Calcular un intervalo de confianza al 90% para los ingresos medios mensuales.

b) ¿De qué tamaño debe ser la muestra si se desea estimar los ingresos medios mensuales con un error menor de 15 € y con una confianza del 95%?

Problema A.3:

Una empresa que ofrece servicios en internet tiene, en el día de más actividad del año, una demanda de datos que viene dada por la función:

$$D(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{10}t^2-\dfrac{6}{5}t+4 & 0\le t\le 8\\ \dfrac{-36}{t}+6 & 8<t\le 24\end{cases}$$

donde t es la hora del día (de 0 a 24) y $D(t)$ es la demanda de datos a esa hora expresada en cientos de Gigabits por segundo.

a) Representa gráficamente la función. ¿Hubo una demanda continua de datos a lo largo del día? En caso negativo, ¿a qué hora hubo un salto instantáneo de la demanda y cuál fue la magnitud del salto?

b) Calcula los valores de las demandas mínima y máxima absolutas y cuando se alcanzaron.

Problema A.4:

En un puesto del mercado se preparan dos tipos de cajas de frutas y verduras para repartir a domicilio. Cada caja del tipo A (caja pequeña) lleva 3 kg de fruta y 3 kg de verdura. Cada caja del tipo B (caja grande) lleva 5 kg de fruta y 8 kg de verdura. Cada día hay que cubrir una demanda fija de al menos 20 cajas de tipo A. Las cajas tipo A se venden a 10 € cada una y las cajas tipo B a 18 € cada una. El puesto tiene 195 kg de fruta y 240 kg de verduras disponibles diariamente todas las mañanas. Se desea determinar el número de cajas de cada tipo que se han de preparar diariamente para maximizar los ingresos.

a) Plantear el problema y representar la región factible.

b) ¿Cuántas cajas de cada tipo deben prepararse cada día para maximizar los ingresos? ¿Cuáles son los ingresos máximos?

Distrito Universitario de Canarias	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2019–2020** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	**CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Instrucciones: Se debe resolver hasta un máximo de 4 preguntas del siguiente modo:
- De las preguntas A1-A2-B1-B2 se pueden elegir 3 como máximo.
- De las preguntas A3-A4-B3-B4 se pueden elegir 3 como máximo.
- Cada pregunta puntúa un máximo de 2.5 puntos

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN B

Problema B.1:

En un Instituto de Enseñanza Secundaria se ha seleccionado una muestra aleatoria de 48 estudiantes a quienes se les preguntó si utilizaban la cafetería del instituto. Contestaron negativamente un total de 12 estudiantes.

a) Estima, con una confianza del 94 %, en qué intervalo se encuentra la proporción de alumnos que utilizan la cafetería del instituto.

b) ¿Qué tamaño muestral hubiese sido necesario tomar para estimar dicha proporción con un error menor del 4 % y una confianza del 90 %?

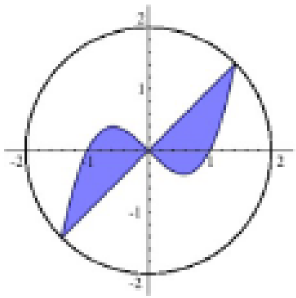
Problema B.2:

El peso de las piñas de plátanos de una cooperativa de una determinada zona, se distribuye normalmente con una desviación típica de 8 kg.

a) Determina el tamaño de la muestra si se desea que el intervalo de confianza al 92% para el peso medio de las piñas de plátanos tenga una amplitud de 4 kg.

b) Si el peso medio de las piñas de plátanos fuera de 40 kg. ¿Cuál sería la probabilidad de que el peso medio de una muestra de 81 piñas estuviese entre 38 y 41 kg?

Problema B.3:



La empresa XYPERIA ha encargado la construcción de su logotipo corporativo en madera y cobre, tomando como modelo la figura adjunta, que diseñó una empresa contratada para ello. El círculo, que será de madera, está centrado en el punto (0,0) y tiene 2 metros de radio. Las funciones que delimitan el área sombreada son: $f(x) = x^3 - x \quad g(x) = x$

a) La zona sombreada se va a recubrir de cobre ¿Qué superficie tiene esta zona?

b) Teniendo en cuenta que el m^2 de plancha de cobre se cobra a 60 € y no se desperdicia nada, que el coste de mano de obra es el 30 % de lo que cuesta el cobre, y que el círculo de madera, el transporte y el montaje in situ tienen un coste fijo de 270 €, ¿cuánto deberá pagar XYPERIA por la construcción e instalación de su logotipo corporativo?

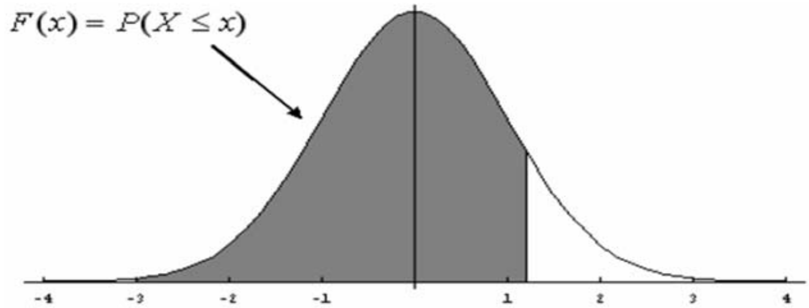
Problema B.4:

Una tienda de informática vende pendrives de 32Gb, 64 Gb y 128 Gb, siendo sus precios 5€, 15€ y 20€, respectivamente. Un cliente ha comprado un total de 15 pendrives que le han costado 160 €. Sabiendo que el número de pendrives de 128 Gb que compró era la cuarta parte del resto,

a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.

b) Calcular cuántos pendrives de cada clase compró el cliente.

TABLA DE LA VARIABLE $N(0.1)$



	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

RESPUESTAS OPCIÓN A DE LA CONVOCATORIA ORDINARIA

Problema A.1:

Una multinacional dedicada a la fabricación de vehículos fabrica el 40 % de sus vehículos en España, el 35 % en Francia y el resto en Italia. Los vehículos fabricados son de tres modelos (Ancer, Beam y Celestial). En España se fabrican los tres modelos a partes iguales. En Francia dos terceras partes de los vehículos que se fabrican son del modelo Ancer y el resto son Beam. En Italia se fabrican los modelos Beam y Celestial a partes iguales.

a) Construye el diagrama de árbol de probabilidades.

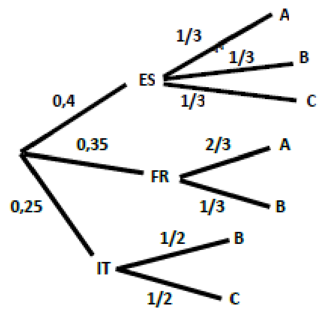
b) Se elige un vehículo al azar de entre todos los producidos por la multinacional, ¿cuál es la probabilidad de que sea del modelo Beam?

c) Si poseyéramos un vehículo modelo Ancer, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricado en España?

Solución:

a) Se definen los sucesos: ES = "el vehículo se fabrica en España", FR = "el vehículo se fabrica en Francia", IT = "el vehículo se fabrica en Italia", A = "el vehículo es del modelo Ancer", B = "el vehículo es del modelo Beam" y C = "el vehículo es del modelo Celestial".

El árbol de probabilidades es:



b) Por el Teorema de la probabilidad total:

$$P(B)=P(ES)\cdot P(B/ES)+P(FR)\cdot P(B/FR)+P(IT)\cdot P(B/IT)=0.4\cdot\frac{1}{3}+0.35\cdot\frac{1}{3}+0.25\cdot\frac{1}{2}=0.375$$

La probabilidad de que el vehículo sea del modelo Beam es **0.375**.

c) Se pide la probabilidad de que el vehículo se haya fabricado en España, sabiendo que es del modelo Ancer.

Aplicando el Teorema de Bayes:

$$P(ES/A)=\frac{P(ES\cap A)}{P(A)}=\frac{P(ES)\cdot P(A/ES)}{P(ES)\cdot P(A/ES)+P(FR)\cdot P(A/FR)+P(IT)\cdot P(A/IT)}=$$

$$=\frac{0.4\cdot\frac{1}{3}}{0.4\cdot\frac{1}{3}+0.35\cdot\frac{2}{3}+0.25\cdot 0}=0.3636$$

La probabilidad de que el vehículo se haya fabricado en España, sabiendo que es del modelo Ancer, es **0.3636.**

Problema A.2:

En una determinada provincia, se seleccionó una muestra al azar de 400 personas cuya media de ingresos mensuales resultó igual a 1 250 € con una desviación típica de 210 €.
a) Calcular un intervalo de confianza al 90 % para los ingresos medios mensuales.
b) ¿De qué tamaño debe ser la muestra si se desea estimar los ingresos medios mensuales con un error menor de 15 € y con una confianza del 95 %?
Solución:

a) X = ingresos mensuales

$$1-\alpha = 0.9 \qquad P\left(Z \le z_{\alpha/2}\right) = 1-\frac{\alpha}{2} = 1-\frac{0.1}{2} = 0.95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1.645$$

$$n = 400$$

$$\overline{X} = 1250 €$$

$$s = 210 €$$

$$I.C. = \left[\overline{X} - z_{\alpha/2}\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}\right] = \left[1250 - 1.645\cdot\frac{210}{\sqrt{400}}, 1250 + 1.645\cdot\frac{210}{\sqrt{400}}\right] =$$
$$= [1232.73, 1267.27]$$

Los ingresos medios mensuales en esa provincia están entre **1232.73 € y 1267.27 €,** con un nivel de confianza del 90 %.

b)

$$1-\alpha = 0.95 \qquad P\left(Z \le z_{\alpha/2}\right) = 1-\frac{\alpha}{2} = 1-\frac{0.05}{2} = 0.975 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$\overline{X} = 1250 € \qquad s = 210 €$$

$$E < 15 € \rightarrow n = ?$$

$$E = z_{\alpha/2}\cdot\frac{s}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{z_{\alpha/2}\cdot s}{E} \Rightarrow n = \left(\frac{z_{\alpha/2}\cdot s}{E}\right)^2$$

$$n > \left(\frac{1.96\cdot 210}{15}\right)^2 \Rightarrow n > 752.95$$

La muestra debe ser de al menos **753** personas, si se desea estimar los ingresos medios mensuales con un error menor de 15 € y con una confianza del 95%.

Problema A.3:

Una empresa que ofrece servicios en internet tiene, en el día de más actividad del año, una demanda de datos que viene dada por la función:

$$D(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{10}t^2-\dfrac{6}{5}t+4 & 0\le t\le 8\\ \dfrac{-36}{t}+6 & 8<t\le 24\end{cases}$$

donde *t* es la hora del día (de 0 a 24) y $D(t)$ es la demanda de datos a esa hora expresada en cientos de Gigabits por segundo.

a) Representa gráficamente la función. ¿Hubo una demanda continua de datos a lo largo del día? En caso negativo, ¿a qué hora hubo un salto instantáneo de la demanda y cuál fue la magnitud del salto?

b) Calcula los valores de las demandas mínima y máxima absolutas y cuando se alcanzaron.

Solución:

a) Se estudia la continuidad de la función: en el intervalo [0, 8) es continua por ser polinómica y en (8, 24] es continua porque es una función racional con denominador no nulo. (En *t* = 0 es continua por la derecha y en *t* = 24 es continua por la izquierda).

Se estudia la continuidad en *t* = 8:

$$t=8\to D(8)=\frac{1}{10}\cdot 8^2-\frac{6}{5}\cdot 8+4=\frac{64-96+40}{10}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}=0.8$$

$$\lim_{x\to 8^-}\left(\frac{1}{10}t^2-\frac{6}{5}t+4\right)=\frac{1}{10}\cdot 8^2-\frac{6}{5}\cdot 8+4=\frac{4}{5}=0.8$$

$$\lim_{x\to 8^+}\left(\frac{-36}{t}+6\right)=\frac{-36}{8}+6=\frac{-36+48}{8}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}=1.5$$

$$1.5-0.8=0.7$$

La función tiene una discontinuidad de salto finito en *t* = 8, por lo que a las 8 horas hubo un salto en la demanda de 0.7 · 100 = 70 Gigabits por segundo.

Para representar la gráfica hallamos algunos puntos y calculamos el vértice de la parábola del primer tramo de la función, mediante su derivada:

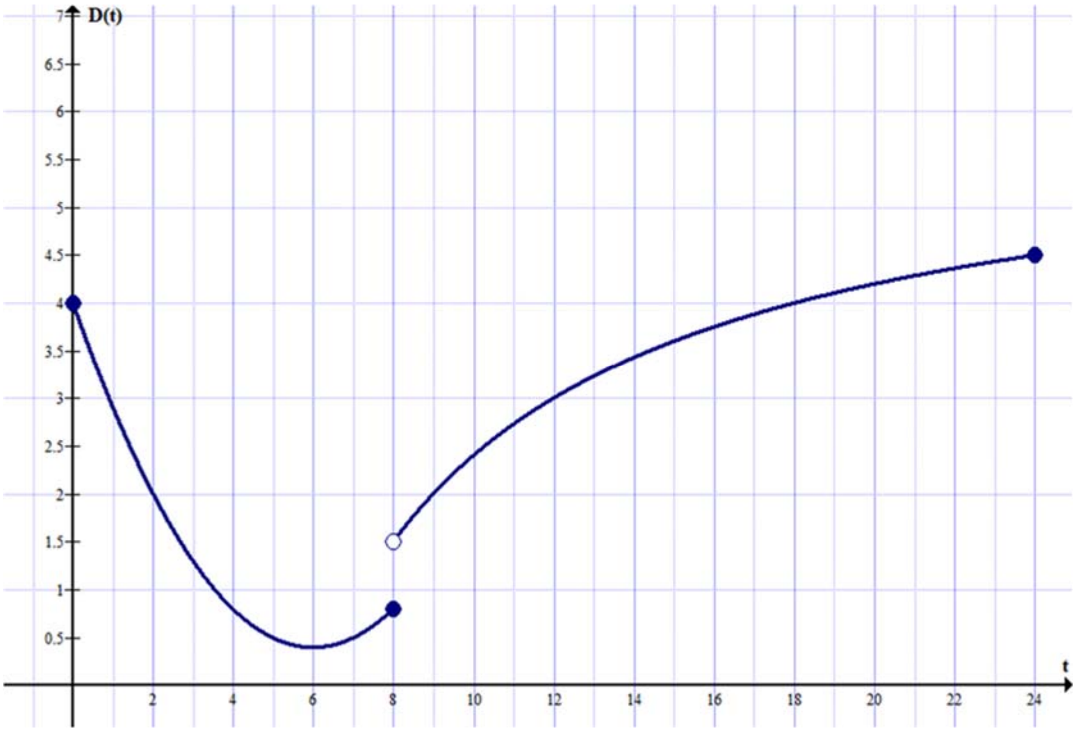
$$D(0)=\frac{1}{10}\cdot 0^2-\frac{6}{5}\cdot 0+4=4$$

$$D(24)=\frac{-36}{24}+6=\frac{-3}{2}+6=\frac{9}{2}=4.5$$

$$D'(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{10}\cdot 2t-\dfrac{6}{5}, & 0<t<8\\ \dfrac{0\cdot t-(-36)\cdot 1}{t^2}, & 8<t<24\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{t-6}{5}, & 0<t<8\\ \dfrac{36}{t^2}, & 8<t<24\end{cases}$$

$$\frac{t-6}{5}=0\Rightarrow t=6\to D(6)=\frac{1}{10}\cdot 6^2-\frac{6}{5}\cdot 6+4=\frac{36-72+40}{10}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}=0.4$$

La gráfica de la función es:



b) El máximo absoluto de la función es el punto (24, 4.5) y el mínimo absoluto es el punto (6, 0.4). Por lo tanto, la demanda máxima absoluta se alcanzó a las 24 horas y fue de 450 Gigabits por segundo, mientras que la demanda mínima absoluta fue de 40 Gigabits por segundo y se alcanzó a las 6 horas.

La demanda máxima absoluta se alcanzó a las 24 horas y fue de 450 Gigabits por segundo, mientras que la demanda mínima absoluta fue de 40 Gigabits por segundo y se alcanzó a las 6 horas.

Problema A.4:

En un puesto del mercado se preparan dos tipos de cajas de frutas y verduras para repartir a domicilio. Cada caja del tipo A (caja pequeña) lleva 3 kg de fruta y 3 kg de verdura. Cada caja del tipo B (caja grande) lleva 5 kg de fruta y 8 kg de verdura. Cada día hay que cubrir una demanda fija de al menos 20 cajas de tipo A. Las cajas tipo A se venden a 10 € cada una y las cajas tipo B a 18 € cada una. El puesto tiene 195 kg de fruta y 240 kg de verduras disponibles diariamente todas las mañanas. Se desea determinar el número de cajas de cada tipo que se han de preparar diariamente para maximizar los ingresos.

a) Plantear el problema y representar la región factible.

b) ¿Cuántas cajas de cada tipo deben prepararse cada día para maximizar los ingresos? ¿Cuáles son los ingresos máximos?

Solución:

a)

Caja	Fruta	Verdura	Demanda mínima diaria	Precio/caja
A (pequeña)	3 kg	3 kg	20 cajas	10 €
B (grande)	5 kg	8 kg		18 €
Totales disponibles	195 kg	240 kg		

El planteamiento del problema es:

$$\max \quad z = 10x + 8y$$

$$s.a: \left.\begin{array}{l} 3x + 5y \le 195 \\ 3x + 8y \le 240 \\ x \ge 20 \\ y \ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y \le \dfrac{195 - 3x}{5} \\ y \le \dfrac{240 - 3x}{8} \\ x \ge 20 \\ y \ge 0 \end{array}\right\}$$

Para representar la región factible hallamos los puntos de corte de las rectas entre sí y con el eje X:

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{195 - 3x}{5} \\ y = \dfrac{240 - 3x}{8} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{195 - 3x}{5} = \frac{240 - 3x}{8} \Rightarrow 1560 - 24x = 1200 - 15x \Rightarrow x = 40$$

$$y = \frac{195 - 3 \cdot 40}{5} = 15 \qquad \qquad Punto \quad (40, 15)$$

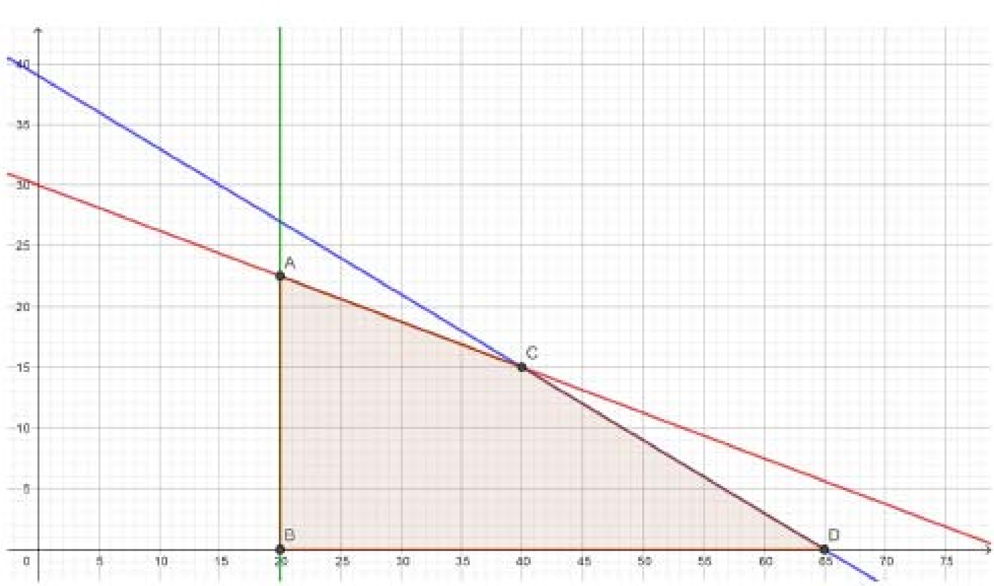
$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{195 - 3x}{5} \\ x = 20 \end{array}\right\} \Rightarrow y = \dfrac{195 - 3\cdot 20}{5} = 27 \qquad Punto\ \ (20, 27)$$

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{195 - 3x}{5} \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 195 - 3x = 0 \Rightarrow x = 65 \qquad Punto\ \ (65, 0)$$

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{240 - 3x}{8} \\ x = 20 \end{array}\right\} \Rightarrow y = \dfrac{240 - 3\cdot 20}{8} = 22.5 \qquad Punto\ \ (20, 22.5)$$

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{240 - 3x}{8} \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 240 - 3x = 0 \Rightarrow x = 60 \qquad Punto\ \ (80, 0)$$

La región factible se muestra en la gráfica y viene determinada por los puntos $A(20, 22.5)$; $B(20, 0)$; $C(40, 15)$ y $D(65, 0)$



b) Se evalúa la función objetivo en los cuatro vértices de la región factible y se obtiene la solución:

$z(A) = 10 \cdot 20 + 18 \cdot 22.5 = 605$ $\qquad$ $z(B) = 10 \cdot 20 + 18 \cdot 0 = 200$

$z(C) = 10 \cdot 40 + 18 \cdot 15 = 670$ $\qquad$ $z(D) = 10 \cdot 65 + 18 \cdot 0 = 650$

Los ingresos son máximos si se preparan **40** cajas de tipo A y **15** de tipo B.

El ingreso máximo es de **670** euros.

RESPUESTAS OPCIÓN B DE LA CONVOCATORIA ORDINARIA

Problema B.1:

En un Instituto de Enseñanza Secundaria se ha seleccionado una muestra aleatoria de 48 estudiantes a quienes se les preguntó si utilizaban la cafetería del instituto. Contestaron negativamente un total de 12 estudiantes.

a) Estima, con una confianza del 94 %, en qué intervalo se encuentra la proporción de alumnos que utilizan la cafetería del instituto.

b) ¿Qué tamaño muestral hubiese sido necesario tomar para estimar dicha proporción con un error menor del 4 % y una confianza del 90 %?

Solución:

a) p = proporción de estudiantes que utilizan la cafetería

$$n = 48$$

$$\hat{p} = \text{proporción muestral de estudiantes que utilizan la cafetería} = \frac{36}{48} = 0.75$$

$$\hat{q} = 1 - \hat{p} = 0.25$$

$$1 - \alpha = 0.94 \qquad P\left(Z \le z_{\alpha/2}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0.06}{2} = 0.97 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1.88$$

El intervalo de confianza para la proporción de estudiantes que utilizan la cafetería viene dado por la siguiente expresión:

$$I.C. = \left[\hat{p} - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1 - \hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1 - \hat{p})}{n}}\right] =$$

$$= \left[0.75 - 1.88 \cdot \sqrt{\frac{0.75 \cdot 0.25}{48}}, 0.75 + 1.88 \cdot \sqrt{\frac{0.75 \cdot 0.25}{48}}\right] =$$

$$= [0.6325, 0.8675]$$

La proporción de estudiantes que utilizan la cafetería está entre **0.6325** y **0.8675**, con un nivel de confianza del 94 %.

b)

$$1 - \alpha = 0.9 \qquad P\left(Z \le z_{\alpha/2}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0.1}{2} = 0.95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1.645$$

$$\hat{p} = 0.75$$

$$E < 0.04 \rightarrow n = ?$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1 - \hat{p})}{n}} \Rightarrow \sqrt{n} \cdot E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\hat{p} \cdot (1 - \hat{p})} \Rightarrow n = \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\hat{p} \cdot (1 - \hat{p})}}{E}\right)^2$$

$$E < 0.04 \Rightarrow n > \left(\frac{1.96 \cdot \sqrt{0.75 \cdot 0.25}}{0.04}\right)^2 \Rightarrow n > 317.11$$

El tamaño de la muestra debe ser de **318** personas, como mínimo, para estimar la proporción de estudiantes que utilizan la cafetería con un error inferior al 4 % y con un nivel de confianza del 90 %.

Problema B.2:

El peso de las piñas de plátanos de una cooperativa de una determinada zona, se distribuye normalmente con una desviación típica de 8 kg.

a) Determina el tamaño de la muestra si se desea que el intervalo de confianza al 92 % para el peso medio de las piñas de plátanos tenga una amplitud de 4 kg.

b) Si el peso medio de las piñas de plátanos fuera de 40 kg. ¿Cuál sería la probabilidad de que el peso medio de una muestra de 81 piñas estuviese entre 38 y 41 kg?

Solución:

a) X = peso de las piñas de plátanos $\quad X \sim N(\mu, 8)$

Si la amplitud del intervalo de confianza para el peso medio de las piñas de plátanos debe ser 4 kg, el error será igual a 2 kg.

$$1-\alpha = 0.92 \qquad P\left(Z \le z_{\alpha/2}\right) = 1-\frac{\alpha}{2} = 1-\frac{0.08}{2} = 0.96 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1.75$$

$$\sigma = 8$$

$$E = 2kg \rightarrow n = ?$$

$$E = z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2 \Rightarrow 1.75\cdot\frac{8}{\sqrt{n}} = 2 \Rightarrow 1.96\cdot 8 = 2\sqrt{n} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{1.75\cdot 8}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \left(\frac{1.75\cdot 8}{2}\right)^2 \Rightarrow n = 49$$

El intervalo de confianza tendrá una amplitud de 4 kg si la muestra es de **49** piñas de plátanos.

b) El peso medio muestral sigue una distribución normal:

$$\mu = 40\,\text{kg} \qquad \overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow \overline{X} \sim N\left(40, \frac{8}{9}\right)$$

$$n = 81$$

$$P\left(38 \le \overline{X} \le 41\right) = P\left(\frac{38-40}{8/9} \le Z \le \frac{41-40}{8/9}\right) = P(-2.25 \le Z \le 1.125) =$$

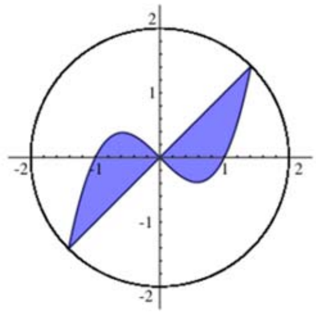
$$= P(Z \le 1.125) - P(Z \le -2.25) = P(Z \le 1.125) - P(Z \ge 2.25) =$$

$$= P(Z \le 1.125) - [1 - P(Z \le 2.25)] = 0.8708 - [1 - 0.9878] = 0.8586$$

La probabilidad de que el peso medio de una muestra de 81 piñas esté entre 38 y 41 kg es **0.8586**.

Problema B.3:

La empresa XYPERIA ha encargado la construcción de su logotipo corporativo en madera y cobre, tomando como modelo la figura adjunta, que diseñó una empresa contratada para ello. El círculo, que será de madera, está centrado en el punto (0,0) y tiene 2 metros de radio. Las funciones que delimitan el área sombreada son: $f(x) = x^3 - x \quad g(x) = x$



a) La zona sombreada se va a recubrir de cobre ¿Qué superficie tiene esta zona?

b) Teniendo en cuenta que el m^2 de plancha de cobre se cobra a 60 € y no se desperdicia nada, que el coste de mano de obra es el 30 % de lo que cuesta el cobre, y que el círculo de madera, el transporte y el montaje in situ tienen un coste fijo de 270 €, ¿cuánto deberá pagar XYPERIA por la construcción e instalación de su logotipo corporativo?

Solución:

a) Hallamos los puntos de corte de ambas gráficas:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^3 - x \\ y = x \end{array}\right\} \Rightarrow x^3 - x = x \Rightarrow x^3 - 2x = 0 \Rightarrow x\left(x^2 - 2\right) = 0 \Rightarrow x = 0; x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

Ambas funciones son simétricas respecto al origen de coordenadas, por lo que el área de la zona sombreada es el doble de la superficie que delimitan las funciones en el intervalo $\left(0, +\sqrt{2}\right)$.

$$A = 2\int_0^{\sqrt{2}} \left[x - \left(x^3 - x\right)\right]dx = 2\int_0^{\sqrt{2}} \left(2x - x^3\right)dx = 2\left[x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_0^{\sqrt{2}} = 2\left(\left(\sqrt{2}\right)^2 - \frac{\left(\sqrt{2}\right)^4}{4} - 0\right) = 2$$

La superficie de la zona sombreada es **2** m².

b) Precio del m² de cobre: 60 €

Mano de obra: 30 % del coste del cobre

Coste fijo: 270 €

$$60 \cdot 2 + 0.3 \cdot \left(60 \cdot 2\right) + 270 = 120 + 36 + 270 = 426$$

La empresa XYPERIA debe pagar **426 €** por la construcción e instalación de su logotipo corporativo.

Problema B.4:

Una tienda de informática vende pendrives de 32Gb, 64 Gb y 128 Gb, siendo sus precios 5€, 15€ y 20€, respectivamente. Un cliente ha comprado un total de 15 pendrives que le han costado 160 €. Sabiendo que el número de pendrives de 128 Gb que compró era la cuarta parte del resto,

a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.

b) Calcular cuántos pendrives de cada clase compró el cliente.

Solución:

a) x = número de pendrives de 32 Gb (precio: 5 € cada uno)

y = número de pendrives de 64 Gb (precio: 15 € cada uno)

z = número de pendrives de 128 Gb (precio: 20 € cada uno)

El cliente ha comprado 15 pendrives

Precio total: 160 €

Número de pendrives de 128 Gb = cuarta parte del resto

El sistema de ecuaciones es:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=15 \\ 5x+15y+20z=160 \\ z=\dfrac{x+y}{4} \end{array}\right\}$$

b) Resolvemos el sistema por el método de Gauss:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=15 \\ 5x+15y+20z=160 \\ z=\dfrac{x+y}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=15 \\ x+3y+4z=32 \\ x+y-4z=0 \end{array}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 15 \\ 1 & 3 & 4 & 32 \\ 1 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 - F_1]{F_2 \to F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 15 \\ 0 & 2 & 3 & 17 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \end{pmatrix} \to \left.\begin{array}{l} x+y+z=15 \\ 2y+3z=17 \\ -5z=-15 \end{array}\right\} \Rightarrow z=\frac{-15}{-5}=3$$

$$2y+3z=17 \Rightarrow 2y+3\cdot 3=17 \Rightarrow y=\frac{8}{2}=4$$

$$x+y+z=15 \Rightarrow x+4+3=15 \Rightarrow x=8$$

El cliente ha comprado **8** pendrives de 32 Gb, **4** de 64 Gb y **3** de 128 Gb.

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2019–2020** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA DE SEPTIEMBRE

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Instrucciones: Se debe resolver hasta un máximo de 4 preguntas del siguiente modo:
- De las preguntas A1-A2-B1-B2 se pueden elegir 3 como máximo.
- De las preguntas A3-A4-B3-B4 se pueden elegir 3 como máximo.
- Cada pregunta puntúa un máximo de 2.5 puntos

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Problema A.1:

Un medicamento cura una determinada enfermedad en el 80 % de los casos.

a) Si se administra a 10 pacientes, ¿cuál es la probabilidad de que, a lo sumo, 9 no se curen?

b) Si se administra a 100 pacientes, ¿cuál es la probabilidad de que el número de curados esté entre 76 y 88?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que, en una muestra de 64 pacientes a los que se ha administrado el medicamento, la proporción de no curados sea menor o igual que 0,15?

Problema A.2:

Un distribuidor reparte verduras procedentes de tres fincas: A (dos séptimas partes), B (dos quintas partes) y C (el resto). Durante el periodo de reparto, el porcentaje de verduras que presentan deterioros es el 4 %, el 6 % y el 5 %, respectivamente.

a) Dibujar el correspondiente diagrama de árbol.

b) En un determinado envío se han repartido 4000 kilogramos de verduras ¿Cuál es la cantidad esperada que no presenta deterioros?

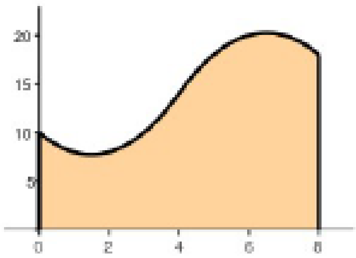
c) Si se elige una verdura al azar y se observa que está deteriorada, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la finca C?

Problema A.3:

Para hacer los decorados de una película se necesita construir y pintar una pared de cartón piedra como la de la figura adjunta. La curva superior de la pared puede representarse mediante la función:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-3x+10 & x\in[0,4] \\ -x^2+13x-22 & x\in(4,8] \end{cases}$$

Las unidades se miden en metros.



a) Calcular cuánto mide la superficie de la pared.

b) Si el cartón piedra cuesta 4 €/m^2, la pintura 0.5 €/m^2 y el coste la mano de obra es igual al 70 % del coste de los materiales (cartón y pintura) ¿cuánto costará la elaboración de esta pared?

Problema A.4:

Un comerciante quiere comprar a un mayorista de moda gabardinas de dos tipos: de paño a 180 € y de piel a 300 € la unidad, respectivamente. El comerciante dispone de 5400 € y no precisa más de 20 unidades.

a) Representar la región factible y los vértices.

b) Si en la venta posterior obtiene un beneficio de 99€ por la venta de cada gabardina de paño y 156€ por la venta de cada gabardina de piel, calcular el número de gabardinas que ha de adquirir de cada tipo para obtener el beneficio máximo.

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2019–2020** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA DE SEPTIEMBRE

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el estudiante deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.

Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN B

Problema B.1:

Un estudio reciente, realizado sobre 400 internautas de una región, de edades comprendidas entre 16 y 65 años, indica que 344 usan redes sociales.

a) Con una confianza del 97%, construir un intervalo de confianza para la proporción de internautas de la región que no usan redes sociales.

b) Si, para estimar la proporción de internautas que usan redes sociales, se obtiene el intervalo [0,826,0,894]. ¿Cuál es el nivel de confianza utilizado?

c) Si la población de la región, con edades entre 16 y 65 años, es de 400000 personas, usando el nivel de confianza del apartado b), ¿entre qué límites está el número de los que no usan redes sociales?

Problema B.2:

Se toma una muestra de 400 estudiantes al azar y se les pregunta por su gasto anual en libros y material escolar, obteniéndose una cantidad media de 132 €. Se sabe, además, que la desviación típica de este gasto en la población estudiantil es de 24 €.

a) Calcular un intervalo de confianza al 90% para la media poblacional de este gasto.

b) Calcular el tamaño muestral necesario para que el correspondiente intervalo de confianza del apartado anterior fuese [128,71,135,29].

Problema B.3:

Durante los últimos 10 años el déficit en las cuentas de una institución, en millones de euros, viene dado por la función:

$$D(t)=\begin{cases} -\dfrac{(t-2)^2}{4}+5, & t\in[0,4] \\ \dfrac{(t-7)^2}{9}+3, & t\in\,]4,10] \end{cases}$$

siendo t el tiempo en años. Justificando la respuesta:

a) ¿Es continua D(t)? Representarla gráficamente.

b) ¿Es D(t) derivable?

c) ¿Entre qué valores varía D(t)? ¿Cuáles son sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento? ¿Cuándo alcanza los valores máximos y mínimos absolutos?

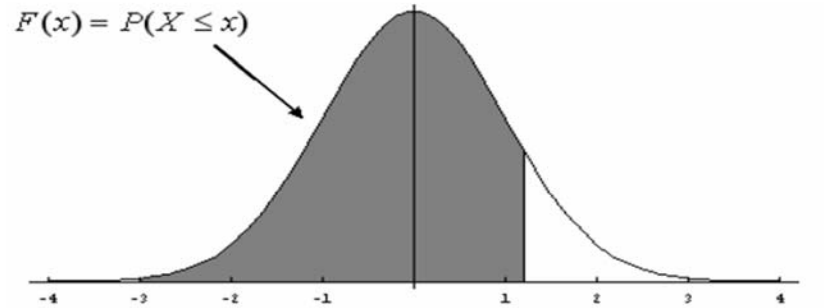
Problema B.4:

En un hotel hay 400 turistas de españoles, alemanes e ingleses. El número de alemanes es el 120% del número de ingleses y estos últimos, sumados a los españoles, superan en 40 al número de alemanes.

a) Plantear el correspondiente sistema.

b) ¿Cuántos españoles, alemanes e ingleses hay en el hotel?

TABLA DE LA VARIABLE $N(0,1)$



	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

RESPUESTAS OPCIÓN A DE LA CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema A.1:

Un medicamento cura una determinada enfermedad en el 80 % de los casos.

a) Si se administra a 10 pacientes, ¿cuál es la probabilidad de que, a lo sumo, 9 no se curen?

b) Si se administra a 100 pacientes, ¿cuál es la probabilidad de que el número de curados esté entre 76 y 88?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que, en una muestra de 64 pacientes a los que se ha administrado el medicamento, la proporción de no curados sea menor o igual que 0.15?

Solución:

a) X = "número de pacientes que se curan con el medicamento"

la variable X sigue una distribución binomial. $X \sim B(10, 0.8)$

$n = 10$ (número de pacientes)

Éxito: el paciente se cura con el medicamento $p = 0.8$ $q = 1 - p = 0.2$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} = \binom{10}{k} \cdot 0.8^k \cdot 0.2^{10-k}$$

Si no se curan 9 pacientes, a lo sumo, significa que no se curan 9, 8, 7, 6, … o 0. Por tanto, se curan 1, 2, 3, 4, ...o 10.

$$P(X \geq 1) = 1 - [P(X = 0)] = 1 - \left[\binom{10}{0} \cdot 0.8^0 \cdot 0.2^{10}\right] =$$

$$= 1 - \left[\frac{10!}{0! \cdot 10!} \cdot 0.2^{10}\right] = 1 - 0.2^{10} = 1 - 0.0000001 = 0.9999999$$

La probabilidad de que, a lo sumo, 9 no se curen, es prácticamente 1, prácticamente el suceso seguro.

b) $n = 100$ $X \sim B(100, 0.8)$

Como n es un número elevado, se aproxima a una distribución normal.

$$\left.\begin{array}{l} n \cdot p = 100 \cdot 0.8 = 80 > 5 \\ n \cdot q = 100 \cdot 0.2 = 20 > 5 \end{array}\right\} \rightarrow X' \sim N\left(n \cdot p, \sqrt{n \cdot p \cdot q}\right) \Rightarrow X' \sim N(80,4)$$

$$P(76 \leq X' \leq 88) = P\left(\frac{76-80}{4} \leq \frac{X'-80}{4} \leq \frac{88-80}{4}\right) = P(-1 \leq Z \leq 2) =$$

$$= P(Z \leq 2) - P(Z \leq -1) = P(Z \leq 2) - P(Z \geq 1) = P(Z \leq 2) - [1 - P(Z \leq 1)] =$$

$$= 0.9772 - [1 - 0.8413] = 0.8185$$

Sin utilizar la corrección de Yates, la probabilidad de que el número de curados esté entre 76 y 88 es 0.8185.

Si se utiliza la corrección de Yates:

$$P(76 \le X \le 88) = P(75.5 \le X' \le 88.5) = P\left(\frac{75.5-80}{4} \le \frac{X'-80}{4} \le \frac{88.5-80}{4}\right) =$$
$$P(-1.125 \le Z \le 2.125) = P(Z \le 2.125) - P(Z \le -1.125) = P(Z \le 2.125) - P(Z \ge 1.125) =$$
$$= P(Z \le 2.125) - [1 - P(Z \le 1.125)] = 0.9832 - [1 - 0.8697] = 0.8529$$

La probabilidad pedida es mayor de 0.8.

c)

$$\widehat{P} = \text{proporción muestral de pacientes que no se curan}$$

$$\widehat{P} \sim N\left(q, \sqrt{\frac{q\cdot(1-q)}{n}}\right) \Rightarrow \widehat{P} \sim N\left(0.2, \sqrt{\frac{0.2\cdot 0.8}{64}}\right) \Rightarrow \widehat{P} \sim N(0.2, 0.05)$$

$$P(\widehat{P} \le 0.15) = P\left(\frac{\widehat{P}-0.2}{0.05} \le \frac{0.15-0.2}{0.05}\right) = P(Z \le -1) = P(Z \ge 1) = 1 - P(Z \le 1) =$$
$$= 1 - 0.8413 = 0.1587$$

Otra forma:

Si la proporción de pacientes no curados es menor o igual que 0.15 significa que la proporción de curados es mayor o igual que 0.85. El 85 % de 64 es 54,4.

$$\left.\begin{array}{l} n\cdot p = 64\cdot 0.8 => 51.2 > 5 \\ n\cdot q = 64\cdot 0.2 = 12.8 > 5 \end{array}\right\} \to X' \sim N\left(n\cdot p, \sqrt{n\cdot p\cdot q}\right) \Rightarrow X' \sim N(51.2, 3.2)$$
$$0.85\cdot 64 = 54.4$$
$$P(X' \ge 54.4) = P\left(\frac{X'-51.2}{3.2} \ge \frac{54.4-51.2}{3.2}\right) = P(Z \ge 1) = 1 - P(Z \le 1) =$$
$$= 1 - 0.8413 = 0.1587$$

La probabilidad de que la proporción de no curados sea menor o igual que 0.15 es **0.1587**.

Problema A.2:

Un distribuidor reparte verduras procedentes de tres fincas: A (dos séptimas partes), B (dos quintas partes) y C (el resto). Durante el periodo de reparto, el porcentaje de verduras que presentan deterioros es el 4 %, el 6 % y el 5 %, respectivamente.

a) Dibujar el correspondiente diagrama de árbol.

b) En un determinado envío se han repartido 4 000 kilogramos de verduras ¿Cuál es la cantidad esperada que no presenta deterioros?

c) Si se elige una verdura al azar y se observa que está deteriorada, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la finca C?

Solución:

a) Se definen los sucesos:

A = “las verduras proceden de la finca A”

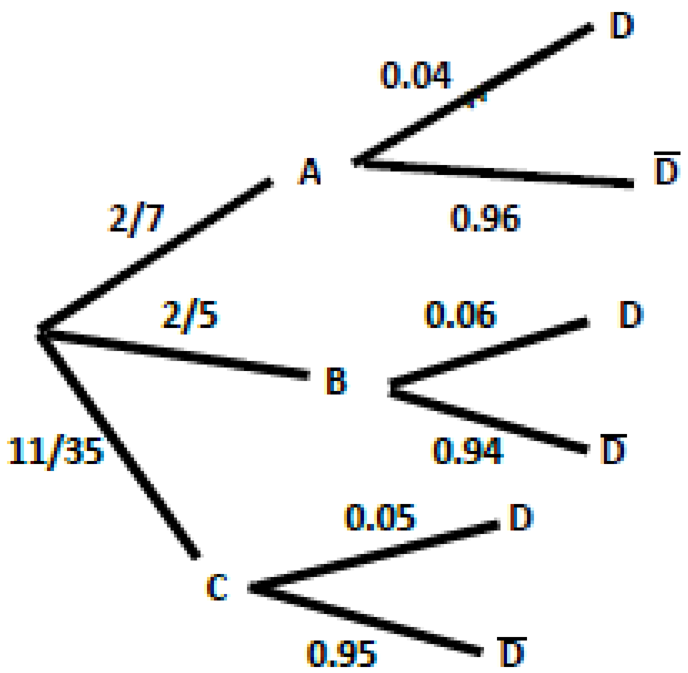
B = “las verduras proceden de la finca B”

C = “las verduras proceden de la finca C”

D = “las verduras presentan deterioro” y su contrario D = “las verduras presentan deterioro”

$$P(C)=1-[P(A)+P(B)]=1-\left[\frac{2}{7}+\frac{2}{5}\right]=1-\frac{10+14}{35}=\frac{11}{35}$$

El árbol de probabilidades es:



b) Calculamos la probabilidad de que la verdura no presente deterioro utilizando el Teorema de la Probabilidad Total:

$$P(\overline{D}) = P(A)\cdot P(\overline{D}/A) + P(B)\cdot P(\overline{D}/B) + P(C)\cdot P(\overline{D}/C) =$$
$$= \frac{2}{7}\cdot 0.96 + \frac{2}{5}\cdot 0.94 + \frac{11}{35}\cdot 0.95 = 0.948857 \cong 0.9489$$

4000 kg · 0.9489 = 3795.6 kg

De los 4 000 kg de verduras que se han repartido, se espera que **3 795.6 kg** no presenten deterioro.

c) Por el Teorema de Bayes:

$$P(C/D) = \frac{P(C\cap D)}{P(D)} = \frac{P(C)\cdot P(D/C)}{1-P(\overline{D})} = \frac{\frac{11}{35}\cdot 0.05}{1-0.9489} = 0.3075$$

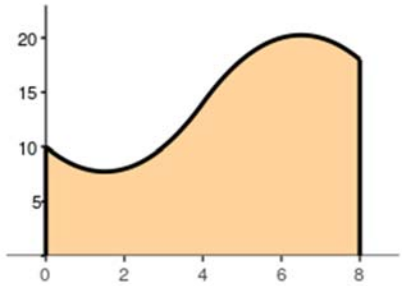
La probabilidad de que la verdura proceda de la finca C, sabiendo que está deteriorada, es **0.3075**.

Problema A.3:

Para hacer los decorados de una película se necesita construir y pintar una pared de cartón piedra como la de la figura adjunta. La curva superior de la pared puede representarse mediante la función:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-3x+10 & x\in[0,4] \\ -x^2+13x-22 & x\in[4,8] \end{cases}$$

Las unidades se miden en metros.



a) Calcular cuánto mide la superficie de la pared.

b) Si el cartón piedra cuesta 4 €/m^2, la pintura 0.5 €/m^2 y el coste la mano de obra es igual al 70 % del coste de los materiales (cartón y pintura) ¿cuánto costará la elaboración de esta pared?

Solución:

a) La superficie de la pared viene dada por la suma de dos integrales definidas:

$$A=\int_0^4\left(x^2-3x+10\right)dx+\int_4^8\left(-x^2+13x-22\right)dx=$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+10x\right]_0^4+\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{13x^2}{2}-22x\right]_4^8=$$

$$=\left(\frac{4^3}{3}-\frac{3\cdot4^2}{2}+10\cdot4\right)-0+\left(-\frac{8^3}{3}+\frac{13\cdot8^2}{2}-22\cdot8\right)-\left(-\frac{4^3}{3}+\frac{13\cdot4^2}{2}-22\cdot4\right)=$$

$$=\frac{64}{3}-24+40-\frac{512}{3}+416-176+\frac{64}{3}-104+88=112$$

La superficie de la pared es **112** metros cuadrados.

b) Precio del cartón piedra: 4 · 112 = 448 €

Precio de la pintura: 0.5 · 112 = 56 €

Coste de la mano de obra: 0.7 · (448 + 56) = 352.8 €

Coste total: 448 + 56 + 352.8 = 856.8 €

La elaboración de la pared costará **856.8 €**

Problema A.4:

Un comerciante quiere comprar a un mayorista de moda gabardinas de dos tipos: de paño a 180 € y de piel a 300 € la unidad, respectivamente. El comerciante dispone de 5 400 € y no precisa más de 20 unidades.

a) Representar la región factible y los vértices.

b) Si en la venta posterior obtiene un beneficio de 99 € por la venta de cada gabardina de paño y 156 € por la venta de cada gabardina de piel, calcular el número de gabardinas que ha de adquirir de cada tipo para obtener el beneficio máximo.

Solución:

a) x = número de gabardinas de paño (180 € cada una)

y = número de gabardinas de piel (300 € cada una)

Dinero disponible: 5 400 €

Total de gabardinas: 20 como máximo.

La región factible viene determinada por las siguientes restricciones:

$$\left.\begin{array}{c} x+y\le 20 \\ 180x+300y\le 5400 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x+y\le 20 \\ 3x+5y\le 90 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} y\le 20-x \\ y\le \dfrac{90-3x}{5} \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{array}\right\}$$

Se calculan los puntos de corte entre ambas rectas y con los ejes de coordenadas:

$$\left.\begin{array}{l} y=\dfrac{90-3x}{5} \\ y=20-x \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{90-3x}{5}=20-x \Rightarrow 90-3x=100-5x \Rightarrow x=5$$

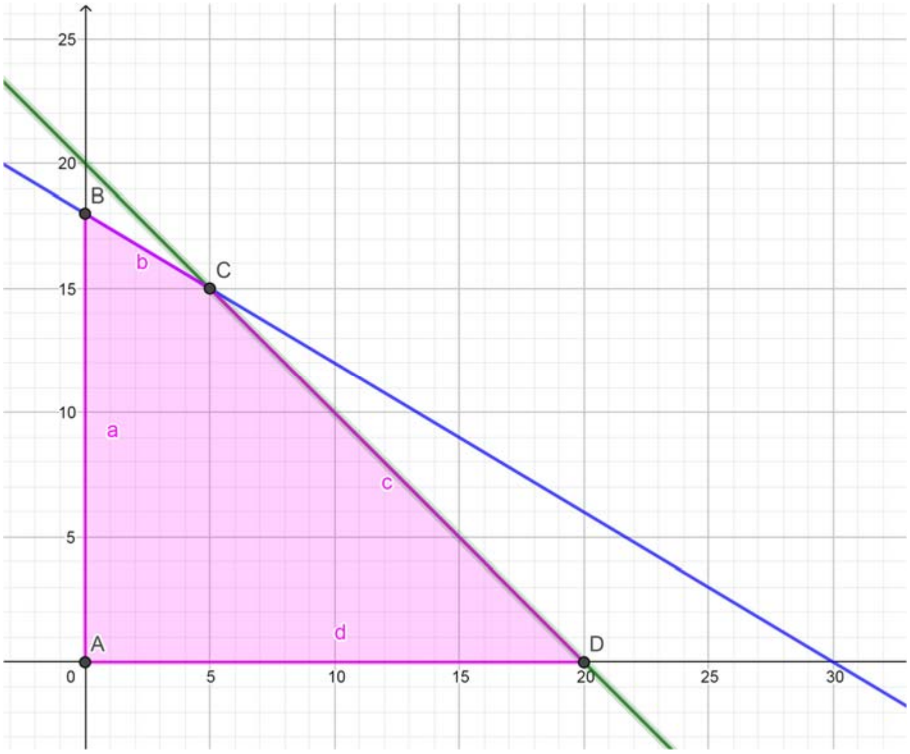
$$y=\frac{90-3\cdot 5}{5}=15 \qquad \text{Punto } (5,15)$$

$$\left.\begin{array}{l} y=\dfrac{90-3x}{5} \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x=30 \quad \text{Punto } (30,0) \qquad \left.\begin{array}{l} y=\dfrac{90-3x}{5} \\ x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow y=18 \quad \text{Punto } (0,18)$$

$$\left.\begin{array}{l} y=20-x \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x=20 \quad \text{Punto } (20,0) \qquad \left.\begin{array}{l} y=20-x \\ x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow y=20 \quad \text{Punto } (0,20)$$

Autora: Lidia Esther Fumero Acosta
www.apuntesmareaverde.org.es

La región factible es la zona sombreada en la siguiente gráfica:



b) Precios de venta de las gabardinas:

Paño: 99 €   Piel: 156 €

La función objetivo es $z = 99x + 156y$

Se evalúa la función objetivo en los vértices de la región factible: A(0, 0), B(0, 18), C(5, 15) y D(20, 0).

$$z(A) = 99 \cdot 0 + 156 \cdot 0 = 0 \qquad z(B) = 99 \cdot 0 + 156 \cdot 18 = 2808$$
$$z(C) = 99 \cdot 5 + 156 \cdot 15 = 2835 \qquad z(D) = 99 \cdot 20 + 156 \cdot 0 = 1980$$

El beneficio es máximo en el punto C(5, 15), por lo tanto debe adquirir **5** gabardinas de paño y **15** de piel. El beneficio máximo es de **2 835** euros.

RESPUESTAS OPCIÓN B DE LA CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema B.1:

Un estudio reciente, realizado sobre 400 internautas de una región, de edades comprendidas entre 16 y 65 años, indica que 344 usan redes sociales.

a) Con una confianza del 97 %, construir un intervalo de confianza para la proporción de internautas de la región que no usan redes sociales.

b) Si, para estimar la proporción de internautas que usan redes sociales, se obtiene el intervalo [0.826, 0.894]. ¿Cuál es el nivel de confianza utilizado?

c) Si la población de la región, con edades entre 16 y 65 años, es de 400 000 personas, usando el nivel de confianza del apartado b), ¿entre qué límites está el número de los que no usan redes sociales?

Solución:

a) p = proporción de internautas que no usan las redes sociales

$$n = 400$$

$$\hat{p} = \text{proporción muestral de internautas que no usan redes sociales} = \frac{56}{400} = 0.14$$

$$\hat{q} = 1 - \hat{p} = 0.86$$

$$1 - \alpha = 0.97 \qquad P\left(Z \leq z\alpha/_2\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0.03}{2} = 0.985 \Rightarrow z\alpha/_2 = 2.17$$

El intervalo de confianza para la proporción de internautas que no usan redes sociales viene dado por la siguiente expresión:

$$I.C. = \left[\hat{p} - z\alpha/_2 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z\alpha/_2 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}}\right] =$$

$$= \left[0.14 - 2.17 \cdot \sqrt{\frac{0.14 \cdot 0.86}{400}}, 0.14 + 2.17 \cdot \sqrt{\frac{0.14 \cdot 0.86}{400}}\right] =$$

$$= [0.1024, 0.1776]$$

La proporción de internautas que no utilizan redes sociales está entre 0.1024 y 0.1776, con un nivel de confianza del 97 %.

b) Sea ahora p = proporción de internautas que usan las redes sociales.

Intervalo de confianza [0.826, 0.894]

La amplitud del intervalo es 0.894 – 0.826= 0.068

El error es la mitad de la amplitud del intervalo, es decir, 0.034.

$$E = z\alpha/_2 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}} = 0.034 \Rightarrow z\alpha/_2 \cdot \sqrt{\frac{0.86\cdot 0.14}{400}} = 0.034 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z\alpha/_2 = 0.034 \cdot \sqrt{\frac{400}{0.86\cdot 0.14}} \Rightarrow z\alpha/_2 = 1.96$$

$$P\left(Z \le z\alpha/_2\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow P(Z \le 1.96) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow 0.975 = 1 - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow$$

$$\alpha = 2\cdot(1-0.975) = 0.05 \Rightarrow 1-\alpha = 0.95$$

El nivel de confianza utilizado es **95 %.**

c) Sea de nuevo p = proporción de internautas que no usan las redes sociales

El intervalo de confianza sería:

$$I.C. = \left[\hat{p} - z\alpha/_2 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z\alpha/_2 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}}\right] =$$

$$= \left[0.14 - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.14\cdot 0.86}{400}}, 0.14 + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.14\cdot 0.86}{400}}\right] =$$

$$= [0.106, 0.174]$$

0.106 · 400000 = 42 400 internautas

0.174 · 400000 = 69 600 internautas

El número de internautas que no usa las redes sociales está entre 42 400 y 69 600, con un nivel de confianza del 95 %.

Otra forma:

El intervalo de confianza para estimar la proporción de internautas que usan redes sociales es [0.826,0.894]. El número de internautas que usan redes sociales estaría entre:

0.826 · 400000 = 330400 y 0.894 · 400000 = 357600

Si restamos estas cantidades a 400000:

400000 – 330400 = 69600 y 400000 – 357600 = 42400

Por lo tanto, el número de internautas que no usan las redes sociales está entre **42 400** y **69 600**, con un nivel de confianza del 95 %.

Problema B.2:

Se toma una muestra de 400 estudiantes al azar y se les pregunta por su gasto anual en libros y material escolar, obteniéndose una cantidad media de 132 €. Se sabe, además, que la desviación típica de este gasto en la población estudiantil es de 24 €.

a) Calcular un intervalo de confianza al 90 % para la media poblacional de este gasto.

b) Calcular el tamaño muestral necesario para que el correspondiente intervalo de confianza del apartado anterior fuese [128,71,135,29].

Solución:

a) X= gasto anual en libros y material escolar.

$$1-\alpha = 0.9 \qquad P\left(Z \le z_{\alpha/2}\right) = 1-\frac{\alpha}{2} = 1-\frac{0.1}{2} = 0.95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1.645$$

$$n = 400$$

$$\overline{X} = 132\text{ €}$$

$$\sigma = 24\text{ €}$$

$$I.C. = \left[\overline{X} - z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = \left[132 - 1.645\cdot\frac{24}{\sqrt{400}}, 132 + 1.645\cdot\frac{24}{\sqrt{400}}\right] =$$

$$= [130.026, 133.974]$$

Los ingresos medios mensuales en esa provincia están entre **130.03 €** y **133.97 €**, con un nivel de confianza del 90 %.

b) El intervalo de confianza es [128.71, 135.29].

La amplitud del intervalo es 135.29 – 128.71 = 6.58.

El error es la mitad de esa amplitud, es decir, 3.29.

$$E = z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{z_{\alpha/2}\cdot\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(\frac{z_{\alpha/2}\cdot\sigma}{E}\right)^2 \Rightarrow n = \left(\frac{1.645\cdot 24}{3.29}\right)^2 \Rightarrow n = 144$$

La muestra debe ser de **144** estudiantes para que el intervalo de confianza sea [128.71,135.29].

Problema B.3:

Durante los últimos 10 años el déficit en las cuentas de una institución, en millones de euros, viene dado por la función:

$$D(t) = \begin{cases} -\dfrac{(t-2)^2}{4} + 5, & t \in [0,4] \\ \dfrac{(t-7)^2}{9} + 3, & t \in]4,10] \end{cases}$$

siendo *t* el tiempo en años. Justificando la respuesta:

a) ¿Es continua $D(t)$? Representarla gráficamente.

b) ¿Es $D(t)$ derivable?

c) ¿Entre qué valores varía D(*t*)? ¿Cuáles son sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento? ¿Cuándo alcanza los valores máximos y mínimos absolutos?

Solución:

a) La función $D(t)$ es continua en los intervalos [0, 4) y (4, 10] por ser polinómica en ambos casos, siendo continua por la derecha en *t* = 0 y continua por la izquierda en *t* = 24.

Se estudia la continuidad en *t* = 4:

$$\left.\begin{aligned} & D(4) = -\frac{(4-2)^2}{4} + 5 = 4 \\ & \lim_{t\to 4^-} D(t) = \lim_{t\to 4^-}\left(-\frac{(t-2)^2}{4} + 5\right) = 4 \\ & \lim_{t\to 4^+} D(t) = \lim_{t\to 4^+}\left(\frac{(t-7)^2}{9} + 3\right) = \frac{(4-7)^2}{9} + 3 = 4 \end{aligned}\right\} \quad \lim_{t\to 4^-} D(t) = \lim_{t\to 4^+} D(t) = D(4)$$

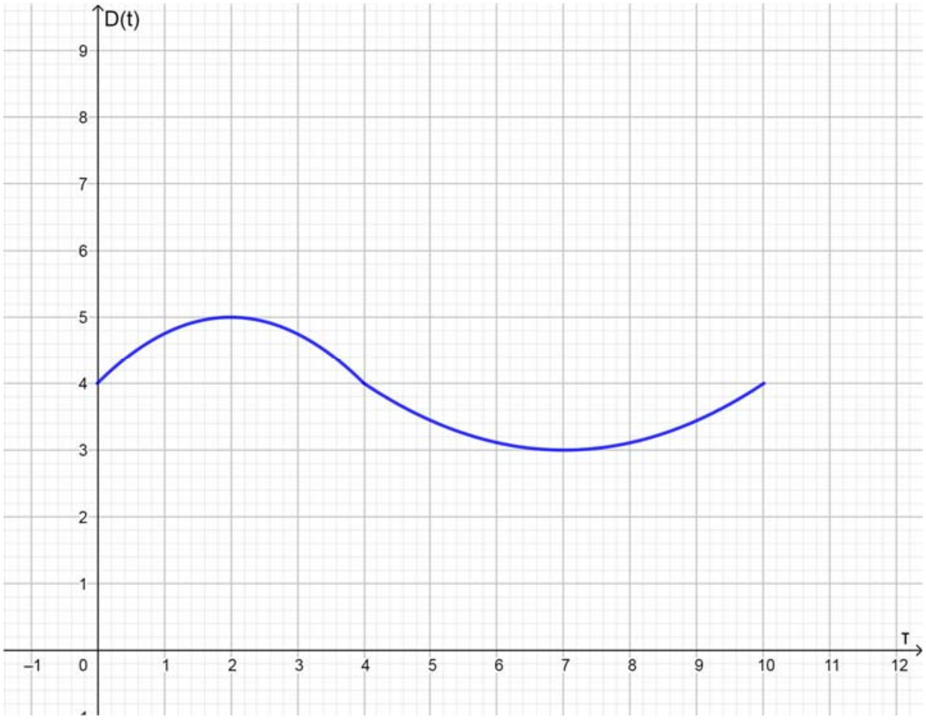
La función es continua también en *t* = 4, por tanto, es continua en su dominio: [0, 10].

Elaboramos una tabla de valores para representar la gráfica:

t	D(*t*)		*t*	D(*t*)
0	4		4	4
2	5		7	3
4	4		10	4

Autora: Lidia Esther Fumero Acosta
www.apuntesmareaverde.org.es

La gráfica de la función es:



b) Se estudia la derivabilidad de $D(t)$:

$$D'(t) = \begin{cases} -\dfrac{2(t-2)}{4}, & 0 < t < 4 \\ \dfrac{2(t-7)}{9}, & 4 < t < 10 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{2-t}{2}, & 0 < t < 4 \\ \dfrac{2t-14}{9}, & 4 < t < 8 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{t\to 4^-} D'(t) = \lim\limits_{t\to 4^-} \dfrac{2-t}{2} = -1 \\ \lim\limits_{t\to 4^+} D'(t) = \lim\limits_{t\to 4^+} \dfrac{2t-14}{9} = -\dfrac{6}{9} = -\dfrac{2}{3} \end{array}\right\} \quad \lim\limits_{t\to 4^-} D'(t) \neq \lim\limits_{t\to 4^+} D'(t)$$

La función **no** es derivable en t = 4.

c) $D(t)$ varía entre 3 y 5, es decir, el déficit oscila entre 3 y 5 millones de euros.

Es creciente en (0, 2) U (7, 10) y decreciente en (2, 7). El déficit crece en los dos primeros años y en los tres últimos años. Decrece entre el segundo año y el séptimo.

El máximo absoluto es el punto (2, 5), es decir, despúes de **2** años el déficit alcanza los **5** millones de euros.

El mínimo absoluto es el punto (7, 3), lo que significa que el séptimo año el déficit fue de **3** millones de euros, el mínimo de los últimos **10** años.

Problema B.4:

En un hotel hay 400 turistas de españoles, alemanes e ingleses. El número de alemanes es el 120 % del número de ingleses y estos últimos, sumados a los españoles, superan en 40 al número de alemanes.

a) Plantear el correspondiente sistema.

b) ¿Cuántos españoles, alemanes e ingleses hay en el hotel?

Solución:

a) x = número de turistas españoles

y = número de turistas alemanes

z = número de turistas ingleses

El sistema de ecuaciones es:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=400 \\ y=\dfrac{120}{100}\cdot z \\ z+x=y+40 \end{array}\right\}$$

b) Resolvemos el sistema por el método de Gauss:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=400 \\ 5y-6z=0 \\ x-y+z=40 \end{array}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 400 \\ 0 & 5 & -6 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 40 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \to F_3 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 400 \\ 0 & 5 & -6 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -360 \end{pmatrix} \to \left.\begin{array}{l} x+y+z=400 \\ 5y-6z=0 \\ -2y=-360 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$y=\frac{-360}{-2}=180$$

$$5y-6z=0 \Rightarrow 5\cdot 180-6z=0 \Rightarrow z=\frac{900}{6}=150$$

$$x+y+z=400 \Rightarrow x+180+150=400 \Rightarrow x=70$$

En el hotel hay **70** turistas españoles, **180** alemanes y **150** ingleses.