

Matemáticas

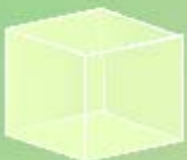
Aplicadas a las

Ciencias Sociales II

Selectividad 2020

Comunidad autónoma de

BALEARES



www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano Corbacho





Universitat
de les Illes Balears

Proves d'accés
a la Universitat

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II

Model 2

Contestan de manera clara i raonada quatre qüestions qualssevol, escollides d'entre totes les proposades en les opcions A i B conjuntament. Es disposa de 90 minuts.

Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4. Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Poden utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gràfica o programable, però no s'autoritzarà l'ús de les que portin informació emmagatzemada o puguin transmetre-la.

OPCIÓ A

1 Donat el sistema següent:

$$x + (a + 1)y = 1$$

$$ax + 2y = -2$$

- a) Discutiu el sistema en funció del paràmetre a . (6 punts)
- b) Resoleu-lo per a $a = -2$. (4 punts)

2 En una empresa es poden produir fins a 500 taules cada mes. La funció de costos en relació amb el nombre q de taules produïdes és

$$C(q) = q^3/50 + 8q + 40$$

Si q és el nombre de taules produïdes, el cost mitjà de cada taula s'expressa mitjançant la funció

$$Q(q) = C(q)/q$$

- a) Calculeu el cost mitjà de cada taula, si l'empresa en produeix 5. I si en produeix 20? (3 punts)
- b) Determineu quantes taules cal produir perquè el cost mitjà sigui mínim. Justifiqueu que es tracta efectivament d'un mínim i calculeu aquest cost mitjà. (7 punts)

3 Donades les funcions $f(x) = -x^2 + 5$ i $g(x) = x^2 - a$, on $a \in \mathbb{R}$.

- a) Trobau tots els possibles valors de a perquè $f(x)$ i $g(x)$ s'intersequin. (3 punts)
- b) Per a $a = 3$, dibuixau el recinte tancat entre els gràfics de $f(x)$ i $g(x)$, identificant els punts d'intersecció. (3 punts)
- c) Per a $a = 3$, calculeu l'àrea d'aquest recinte interior. (4 punts)

4 En una mostra aleatòria de 256 individus s'ha obtingut una edat mitjana de 17.4 anys. Se sap que la desviació típica de la població normal de la qual procedeix aquesta mostra és de 2 anys.

- a) Obteniu un interval de confiança al 95 % per a l'edat mitjana de la població. (5 punts)
- b) Quina ha de ser la mida mínima de la mostra que s'ha de prendre perquè en estimar l'edat mitjana amb un nivell de confiança del 99%, l'error comès sigui inferior a 0.5 anys? (5 punts)





Universitat
de les Illes Balears

Proves d'accés
a la Universitat

**Matemàtiques Aplicades a les Ciències
Socials II**

Model 2

OPCIÓ B

1 Un trajecte de 600 km s'ha de fer combinant taxi, ferrocarril i autobús. El cost del taxi és de 0.5 euros/km; el del ferrocarril, de 0.2 euros/km, i el de l'autobús, de 0.1 euros/km. El recorregut ens ha costat 150 euros, i se sap que s'han fet el doble de quilòmetres amb ferrocarril que amb taxi i autobús junts. Determinau les distàncies que s'han recorregut amb cada mitjà de transport. (10 punts)

2 Un pastisser disposa de 150 kg de farina, 22 kg de sucre i 26 kg de mantega per fer dos tipus de pastissos, A i B. Per fer una fornada de pastissos del tipus A es necessiten 3 kg de farina, 1 kg de sucre i 1 kg de mantega, mentre que per fer una fornada de pastissos del tipus B es necessiten 6 kg de farina, 0.5 kg de sucre i 1 kg de mantega. Se sap que el benefici que s'obté en vendre una fornada del tipus A és de 20 euros i, de 30 euros en vendre una fornada del tipus B.

a) Plantejan la maximització del benefici del pastisser com un problema de programació lineal. (4 punts)

b) Dibuixau la regió factible per a la solució, indicant les rectes i vèrtexs que la delimiten. (4 punts)

c) Determinau quantes fornades de cada tipus ha de fer i vendre el pastisser per maximitzar els seus beneficis. Determinau també aquest benefici màxim. (2 punts)

3 Considerem una funció $f(x)$ tal que la seva primera derivada és $f'(x) = x^3 + bx + 4$, en què b és un paràmetre real.

a) Determinau el valor de b perquè $f(x)$ tingui un extrem relatiu a $x = -1$ i raonau si es tracta d'un màxim o d'un mínim. (4 punts)

b) Suposant que $b = 1$, trobau una primitiva de $f'(x)$, i.e., $\int f'(x) dx$. (3 punts)

c) Utilitzau la primitiva anterior per trobar $f(x)$ per $b = 1$ sabent que $f(2) = -1$. (3 punts)

4 Una tafona rep caixes d'olives de dues productores, A i B, que conreen dues varietats, picual i arbequina. El 40% de les olives prové de la productora A, d'aquestes el 60 % és de la varietat picual. De les que provenen de la productora B, el 30 % és de la varietat arbequina. Es tria una caixa d'olives a l'atzar.

a) Interpretau les dades proporcionades en termes de successos, probabilitats i probabilitats condicionades. (2 punts)

b) Quina és la probabilitat que sigui de la varietat picual? (4 punts)

c) Si se sap que és de la varietat picual, quina és la probabilitat que provingui de la productora A? (4 punts)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $N(0, 1)$.

SOLUCIONES CONVOCATORIA ORDINARIA DE 2020

Modelo 2. OPCIÓN A. Problema 1:

1º) Dado el sistema $\begin{cases} x + (a+1)y = 1 \\ ax + 2y = -2 \end{cases}$.

a) Discute el sistema en función del parámetro a .

b) Resuélvalo para $a = -2$.

Solución:

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a+1 \\ a & 2 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & 1 \\ a & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & a+1 \\ a & 2 \end{vmatrix} = 2 - a(a+1) = 2 - a^2 - a = 0; \quad a^2 + a - 2 = 0;$$

$$a = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow a_1 = -2, a_2 = 1.$$

$$\text{Para } \begin{cases} a \neq -2 \\ a \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \text{Rang } M = \text{Rang } M' = 2 = n^{\circ} \text{ incóg.} \Rightarrow \text{S.C.D.}$$

$$\text{Para } a = -2 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1 = C_3\} \Rightarrow \text{Rang } M' = 2.$$

$$\text{Para } a = -2 \Rightarrow \text{Rang } M = \text{Rang } M' = 1 < n^{\circ} \text{ incóg.} \Rightarrow \text{S.C.I.}$$

$$\text{Para } a = 1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{Rang } M' = 2.$$

$$\text{Para } a = 1 \Rightarrow \text{Rang } M = 1; \text{ Rang } M' = 2 \Rightarrow \text{Sistema incompatible.}$$

b)

Se resuelve para $a = -2$. El sistema resulta: $\begin{cases} x - y = 1 \\ -2x + 2y = -2 \end{cases}$, equivalente a la ecuación $x - y = 1$.

$$\text{Solución: } x = 1 + \lambda, y = \lambda, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Modelo 2. OPCIÓN A. Problema 2:

2º) En una empresa puede producir hasta 500 mesas cada mes. La función de costes en relación al número q de mesas producidas es $C(q) = \frac{1}{50}q^3 + 8q + 40$. Si q es el número de mesas producidas, el coste medio de cada mesa se expresa mediante la función $Q(q) = \frac{C(q)}{q}$.

a) Calcula el coste medio de cada mesa, si la empresa produce 5. ¿Y si produce 20?

b) Determina cuántas mesas debe producir para que el coste medio sea mínimo. Justifica que se trata efectivamente de un mínimo y calcula este coste mínimo.

Solución:

a)

$$Q(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{\frac{1}{50}q^3 + 8q + 40}{q} = \frac{1}{50}q^2 + 8 + \frac{40}{q}.$$

$$Q(5) = \frac{1}{50} \cdot 5^2 + 8 + \frac{40}{5} = \frac{25}{50} + 8 + 8 = 16 + \frac{1}{2} = 16,5.$$

El precio medio unitario si se producen 5 mesas es 16,5 euros.

$$Q(20) = \frac{1}{50} \cdot 20^2 + 8 + \frac{40}{20} = \frac{400}{50} + 8 + 2 = 8 + 10 = 18.$$

El precio medio unitario si se producen 20 mesas es 18 euros.

b)

La condición necesaria para que una función tenga un máximo o un mínimo relativo es que se anule su primera derivada.

$$Q'(q) = \frac{q}{25} + 0 - \frac{40}{q^2} \Rightarrow \frac{q}{25} = \frac{40}{q^2}; \quad q^3 = 25 \cdot 40 = 1.000 = 10^3 \Rightarrow q = 10.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es negativa para los valores que anulan la primera derivada se trata de un máximo y, si es positiva, de un mínimo.

$$Q''(q) = \frac{1}{25} - \frac{-40 \cdot 2q}{q^4} = \frac{1}{25} + \frac{80}{q^3}.$$

$$Q''(10) = \frac{1}{25} + \frac{80}{10^3} > 0 \Rightarrow \text{Mínimo relativo para } q = 10.$$

$$Q(10) = \frac{1}{50} \cdot 10^2 + 8 + \frac{40}{10} = \frac{100}{50} + 8 + 4 = 2 + 12 = 14.$$

El coste mínimo de fabricación de una mesa es de 14 euros.

Modelo 2. OPCIÓN A. Problema 3:

3º) Dadas las funciones $f(x) = -x^2 + 5$ y $g(x) = x^2 - a$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

a) Hallar los puntos de corte de $f(x)$ y $g(x)$.

b) Para $a = 3$, dibuja el recinto formado por las funciones $f(x)$ y $g(x)$, identificando sus puntos de intersección.

c) Para $a = 3$, calcula el área del recinto anterior.

Solución:

a)

Los puntos de corte de dos funciones tienen por abscisas las raíces de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow -x^2 + 5 = x^2 - a; 2x^2 = a + 5; x^2 = \frac{a+5}{2} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{a+5}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = -\sqrt{\frac{a+5}{2}}, x_2 = \sqrt{\frac{a+5}{2}}.$$

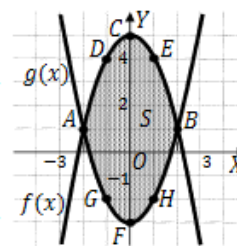
b)

Para $a = 3$ es $g(x) = x^2 - 3$ y los puntos de corte son los siguientes:

$$x_1 = -\sqrt{\frac{3+5}{2}} = -\sqrt{4} = -2 \Rightarrow A(-2, 1). \quad x_2 = \sqrt{\frac{3+5}{2}} = \sqrt{4} = 2 \Rightarrow B(2, 1).$$

La función $f(x) = -x^2 + 5$ es una parábola cóncava ($\cap$), por ser negativo el coeficiente de x^2 , cuyo vértice es el punto $C(0, 5)$. Otros puntos de la parábola son $D(-1, 4)$ y $E(1, 4)$.

La función $g(x) = x^2 - 3$ es una parábola convexa ($\cup$), por ser positivo el coeficiente de x^2 , cuyo vértice es el punto $F(0, -3)$. Otros puntos de la parábola son $G(-1, -2)$ y $H(1, -2)$.



La representación gráfica, aproximada, de la situación se expresa en la figura adjunta.

c)

Para el cálculo del área pedida se tiene en cuenta que en el intervalo correspondiente a la superficie a calcular, $(-2, 2)$, todas las ordenadas de $f(x)$ son mayores que las correspondientes ordenadas de $g(x)$; por otra parte, las dos funciones son pares, es decir, simétricas con respecto al eje de ordenadas, por lo cual, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S = 2 \cdot \int_0^2 [f(x) - g(x)] \cdot dx = 2 \cdot \int_0^2 [(5 - x^2) - (x^2 - 3)] \cdot dx =$$

$$= 2 \cdot \int_0^2 (5 - x^2 - x^2 + 3) \cdot dx = 2 \cdot \int_0^2 (-2x^2 + 8) \cdot dx = 2 \cdot \left[-\frac{2x^3}{3} + 8x \right]_0^2 =$$

$$= 2 \cdot \left[\left(-\frac{2 \cdot 2^3}{3} + 8 \cdot 2 \right) - 0 \right] = 2 \cdot \left(-\frac{16}{3} + 16 \right) = 32 \cdot \left(1 - \frac{1}{3} \right) = 32 \cdot \frac{2}{3} = \frac{64}{3}.$$

$$\underline{S = \frac{64}{3} \text{ u}^2 = 21,33 \text{ u}^2.}$$

Modelo 2. OPCIÓN A. Problema 4:

4º) En una muestra aleatoria de 256 individuos se ha obtenido una edad media de 17,4 años. Se sabe que la desviación típica de la población normal de la cual procede la muestra es de 2 años.

a) Obtener un intervalo de confianza al 95 % para la edad media de la población.

b) ¿Cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra que se debe tomar para estimar la edad media con un nivel de confianza del 99 %, si el error cometido debe ser inferior a 0,5 años?

Solución:

a)

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = 1,96.$$

$$(1 - 0,025 = 0,9750 \rightarrow z = 1,96).$$

$$\text{Datos: } n = 256; \bar{x} = 17,4; \sigma = 2; z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96.$$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\bar{x}$, σ y n , es la siguiente: $(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$.

$$\left(17,4 - 1,96 \cdot \frac{2}{\sqrt{256}}; 17,4 + 1,96 \cdot \frac{2}{\sqrt{256}}\right);$$

$$(17,4 - 1,96 \cdot 0,125; 17,4 + 1,96 \cdot 0,125); (17,4 - 0,245; 17,4 + 0,245).$$

$$\underline{I.C._{99\%} = (17,155; 17,645)}.$$

b)

Para un nivel de confianza del 99 % es:

$$1 - \alpha = 0,99 \rightarrow \alpha = 1 - 0,99 = 0,01 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,005} = 2,575.$$

$$(1 - 0,005 = 0,9950 \rightarrow z = 2,575).$$

$$\text{Datos: } \sigma = 2; z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,575; E = 0,5.$$

$$\text{Siendo } E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(2,575 \cdot \frac{2}{0,5}\right)^2 =$$

$$= (2,575 \cdot 4)^2 = 10,3^2 = 106,09.$$

El tamaño mínimo de la muestra tiene que ser de 107 individuos.

Modelo 2. OPCIÓN B. Problema 1:

1º) Un trayecto de 600 km se ha de hacer combinando taxi, ferrocarril y autobús. El coste del taxi es de 0,5 euros/km; el del ferrocarril, de 0,2 euros/km, y el del autobús, es 0,1 euros/km. El recorrido cuesta 150 euros, y se sabe que se hace el doble de kilómetros en ferrocarril que en taxi y autobús juntos. Determina las distancias que se han de recorrer con cada tipo de transporte.

Solución:

Sean x, y, z los kilómetros que se recorren en taxi, ferrocarril y autobús, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 600 \\ 0,5x + 0,2y + 0,1z = 150 \\ y = 2 \cdot (x + z) \end{array} \right\} \begin{array}{l} x + y + z = 600 \\ 5x + 2y + z = 1.500 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{array}$$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 600 & 1 & 1 \\ 1.500 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{2.400 - 1.500 + 600 - 3.000}{4 - 5 + 2 - 4 + 1 - 10} = \frac{-1.500}{-12} = 125.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 600 & 1 \\ 5 & 1.500 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{-12} = \frac{3.000 + 1.200 - 3.000 - 6.000}{-12} = \frac{1.200 - 6.000}{-12} = \frac{-4.800}{-12} = 400.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 600 \\ 5 & 2 & 1.500 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{-12} = \frac{-3.000 + 3.000 - 2.400 + 1500}{-12} = \frac{1.500 - 2.400}{-12} = \frac{-900}{-12} = 75.$$

Se recorrieron 125 km en taxi, 400 en ferrocarril y 75 en autobús.

Modelo 2. OPCIÓN B. Problema 2:

2º) Un pastelero dispone de 150 kg de harina, 22 kg de azúcar y 26 kg de manteca para hacer dos tipos de pasteles, A y B. Para hacer una hornada de pasteles del tipo A se necesitan cada día 3 kg de harina, 1 kg de azúcar y 1 kg de manteca y para hacer una hornada de tipo B se necesitan 6 kg de harina, 0,5 kg de azúcar y 1 kg de manteca. Se sabe que el beneficio que se obtiene cada día es de 20 euros con los pasteles de tipo A y 30 euros con los de tipo B.

a) Plantea la maximización del beneficio del pastelero como un problema de programación lineal.

b) Dibuja la región factible para la resolución, indicando las rectas y vértices que la determinan.

c) Determina cuantas hornadas de cada tipo ha de hacer y vender el pastelero para maximizar sus beneficios. Determina también cuál es este beneficio.

Solución:

a)

Sean x e y el número hornadas diarias que realiza el pastelero, respectivamente.

Las condiciones del ejercicio se establecen en el sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 6y \leq 150 \\ x + 0,5y \leq 22 \\ x + y \leq 26 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 50 \\ 2x + y \leq 44 \\ x + y \leq 26 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

b)

$$\textcircled{1} \Rightarrow x + 2y \leq 50 \Rightarrow y \leq \frac{50-x}{2} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$$

x	0	50
y	25	0

$$\textcircled{2} \Rightarrow 2x + y \leq 44 \Rightarrow y \leq 44 - 2x \rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$$

x	0	22
y	44	0

$$\textcircled{3} \Rightarrow x + y \leq 26 \Rightarrow y \leq 26 - x \rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$$

x	0	26
y	26	0

Los vértices de la zona factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:

$$A \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 0 \\ x + 2y = 50 \end{array} \right\} \Rightarrow A(0,25).$$

$$B \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y = 50 \\ x + y = 26 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x + 2y = 50 \\ -x - y = -26 \end{array} \Rightarrow y = 24 \Rightarrow x + 24 = 26; x = 2 \Rightarrow B(2,24).$$

$$C \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + y = 44 \\ x + y = 26 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2x + y = 44 \\ -x - y = -26 \end{array} \Rightarrow x = 18; 18 + y = 26; y = 8 \Rightarrow C(18,8).$$

$$D \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 2x + y = 44 \end{cases} \Rightarrow 2x = 44; x = 22 \Rightarrow D(22; 0).$$

La región factible es la zona que aparece sombreada de la figura adjunta.

c)

La función de objetivos es la siguiente: $f(x, y) = 20x + 30y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$$A \Rightarrow f(0, 25) =$$

$$= 20 \cdot 0 + 30 \cdot 25 = 0 + 750 = 750.$$

$$B \Rightarrow f(2, 24) = 20 \cdot 2 + 30 \cdot 24 = 40 + 720 = 760.$$

$$C \Rightarrow f(18, 8) = 20 \cdot 18 + 30 \cdot 8 = 360 + 240 = 600.$$

$$D \Rightarrow f(22; 0) = 20 \cdot 22 + 30 \cdot 0 = 440 + 0 = 440.$$

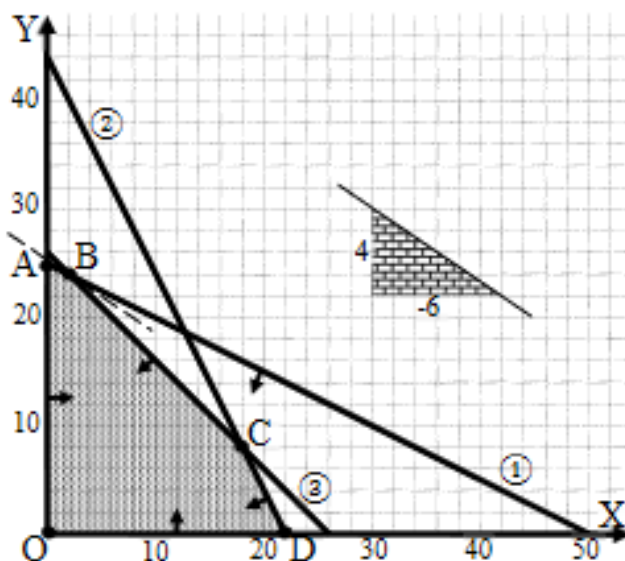
El máximo se produce en el punto $B(2, 24)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x, y) = 20x + 30y = 0 \Rightarrow y = -\frac{20}{30}x = -\frac{4}{6}x \Rightarrow m = -\frac{4}{6}.$$

El beneficio máximo se obtiene fabricando 2 hornadas de A y 24 de B.

La recaudación máxima es de 760 euros.



Modelo 2. OPCIÓN B. Problema 3:

3º) Considera la función $f(x)$ tal que su primera derivada es $f'(x) = x^3 + bx + 4$, donde b es un parámetro real.

a) Determina el valor de b para que $f(x)$ tenga un extremo relativo en $x = -1$ y razona si se trata de un máximo o de un mínimo.

b) En el supuesto de que $b = 1$, hallar una primitiva de $f'(x)$.

c) Utiliza la primitiva anterior para hallar $f(x)$ para $b = 1$ tal que $f(2) = -1$.

Solución:

a)

Por tener un extremo relativo para $x = -1 \Rightarrow f'(-1) = 0$.

$$f'(-1) = 0 \Rightarrow (-1)^3 + b \cdot (-1) + 4 = 0; -1 - b + 4 = 0 \Rightarrow \underline{b = 3}.$$

$$\text{Para } b = 3 \Rightarrow f'(x) = x^3 + 3x + 4.$$

$$f''(x) = 3x^2 + 3. \quad f''(-1) = 3 \cdot (-1)^2 + 3 = 3 + 3 > 0 \Rightarrow \text{Mín.}$$

La función $f(x)$ tiene un mínimo relativo para $x = -1$.

b)

$$\text{Para } b = 1 \Rightarrow f'(x) = x^3 + x + 4.$$

$$f(x) = \int f'(x) \cdot dx = \int (x^3 + x + 4) \cdot dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 4x + C.$$

$$\underline{\text{Todas las primitivas de } f'(x) \text{ son } f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 4x + C, C \in \mathbb{R}.$$

c)

$$f(2) = -1 \Rightarrow \frac{2^4}{4} + \frac{2^2}{2} + 4 \cdot 2 + C = -1; 4 + 2 + 8 + C = -1 \Rightarrow C = -15.$$

$$\underline{f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 4x - 15.}$$

Modelo 2. OPCIÓN B. Problema 4:

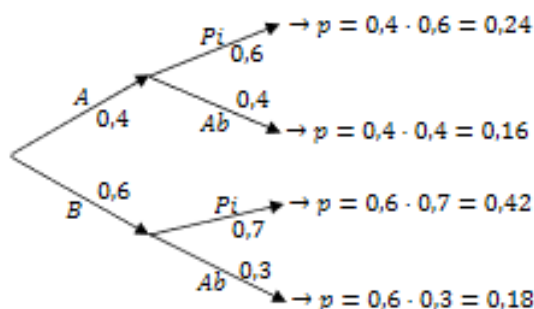
4º) Una almazara recibe cajas de aceitunas de dos productoras A y B, que cultivan dos variedades, picual y arbequina. El 40 % de las aceitunas las provee la productora A, de las cuales el 60 % son de la variedad picual. De las que proceden de la productora B, el 30 % son de la variedad arbequina. Se coge una caja de aceitunas al azar:

a) Interpretar los datos proporcionados en términos de sucesos, probabilidades y probabilidades condicionadas.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea de la variedad picual?

c) Si se sabe que es de la variedad picual, ¿cuál es la probabilidad de que provenga de la productora A?

Solución:



$$\begin{aligned}
 a) \quad P &= P(Pi) = P(A \cap Pi) + P(B \cap Pi) = P(A) \cdot P(Pi/A) + P(B) \cdot P(Pi/B) = \\
 &= 0,4 \cdot 0,6 + 0,6 \cdot 0,7 = 0,24 + 0,42 = \underline{0,66}.
 \end{aligned}$$

$$b) \quad P = P(A/Pi) = \frac{P(A \cap Pi)}{P(Pi)} = \frac{P(A) \cdot P(Pi/A)}{P(Pi)} = \frac{0,4 \cdot 0,6}{0,66} = \frac{0,24}{0,66} = \underline{0,3636}.$$



Universitat
de les Illes Balears

Proves d'accés
a la Universitat

Matemàtiques Aplicades a les Ciències
Socials II

Model 3

Contestan de manera clara i raonada quatre qüestions qualssevol, escollides d'entre totes les proposades en les opcions A i B conjuntament. Es disposa de 90 minuts.

Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4. Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Poden utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gràfica o programable, però no s'autoritzarà l'ús de les que portin informació emmagatzemada o puguin transmetre-la.

OPCIÓ A

1 En Bernat va quedar ahir amb uns amics en un bar i van prendre 4 cerveses, 3 panets i 5 cafès amb llet. Tot plegat els va costar 19,50 euros. Dies enrere, havia anat al mateix bar amb el seu cosí Martí, i per 2 cerveses, 1 panet i 2 cafès amb llet havien pagat 8,10 euros. En aquest bar totes les cerveses valen el mateix i tots els panets tenen el mateix preu.

a) Identifiqueu les variables i interpreteu l'enunciat com un conjunt d'equacions lineals. (2 punts)

b) Avui en Bernat hi ha tornat amb uns altres amics i han pres 2 cerveses, 2 panets i 3 cafès amb llet. Combineu les equacions de l'apartat a) per deduir quant han pagat en total. (3 punts)

c) Si 1 cervesa, 1 panet i 1 cafè amb llet costen 5,10 euros, quant valen la cervesa, el panet i el cafè amb llet separatament? (5 punts)

2 D'una funció $y = f(x)$ sabem que la seva derivada és $f'(x) = 2x^3 - 18x$.

a) Determineu els intervals de creixement i de decreixement de la funció $y = f(x)$. (5 punts)

b) Determineu les abscisses dels seus extrems relatius i classifiqueu-los. (5 punts)

3 Siguin A i B dos successos tals que $p(A \cup B) = 0.8$, $p(A^c) = 0.5$, on A^c denota el succés complementari del succés A , i $P(A \cap B) = 0.3$.

a) Calculeu les probabilitats $p(B)$ i $p(A/B)$. (5 punts)

b) Calculeu les probabilitats $p(A \cap B^c)$ i $p(A^c \cup B^c)$. (4 punts)

c) Són A i B successos independents? Justifiqueu la vostra resposta. (1 punt)

4 En una població una variable aleatòria segueix una llei normal amb desviació típica 8. S'ha elegit, a l'atzar, una mostra de mida 100 i la seva mitjana ha estat 67.

a) Calculeu l'interval de confiança del 93 %, per a la mitjana de la població. (5 punts)

b) Quina ha de ser la mida mínima de la mostra que s'ha de prendre per estimar, amb un nivell de confiança del 99%, la mitjana de la població amb un error no superior a 2? (5 punts)





Universitat
de les Illes Balears

Proves d'accés
a la Universitat

**Matemàtiques Aplicades a les Ciències
Socials II**

Model 3

OPCIÓ B

1 Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

- Calculau A^2 , A^3 . (2 punts)
- Proposau una fórmula per a A^n i utilitzau-la per calcular A^{14} . (4 punts)
- Resolau l'equació matricial $A \cdot X + \frac{1}{5}B^t \cdot B = 2A$, on B^t denota la matriu transposada de B. (4 punts)

2 Un taller de joieria disposa de 150 grams de plata i de 180 hores de feina per produir dos models d'anells. Per fer un anell del model A calen 6 grams de plata i 3 hores de feina, mentre que per fer-ne un del model B calen 2 grams de plata i 6 hores de feina. Els anells dels models A i B proporcionen, respectivament, 35 i 55 euros de benefici per unitat.

- Plantejau la maximització del benefici de la joieria com un problema de programació lineal. (4 punts)
- Dibuixau la regió factible per a la solució, indicant les rectes i vèrtexs que la delimiten. (4 punts)
- Sabent que es vendrà tota la producció, determinau quants anells de cada model cal produir per obtenir el màxim benefici i indiqueu quin és aquest benefici. (2 punts)

3 Els beneficis setmanals d'una empresa expressats en euros, quan fabrica i ven x objectes, s'ajusten a la funció

$$B(x) = -0,75x^2 + 75x - 1200, \text{ en que } 20 \leq x \leq 80.$$

- Calcular el benefici que obté en fabricar i vendre 20 objectes. (2 punts)
- Cercau el nombre d'objectes que ha de fabricar i vendre per obtenir el benefici màxim, així com aquest benefici màxim. (4 punts)
- El benefici mitjà per x objectes és $M(x) = B(x)/x$. Digau quants objectes ha de fabricar i vendre perquè el benefici mitjà sigui màxim, i quin és aquest benefici. (4 punts)

4 En una població, el tant per cent de persones que miren un cert programa de televisió és del 40%. Se sap que el 60% de les persones que el miren tenen estudis superiors i que el 30% de les persones que no el miren no tenen estudis superiors.

- Interpreta les dades proporcionades en termes de successos, probabilitats i probabilitats condicionades. (2 punts)
- Quina és la probabilitat que una persona tingui estudis superiors? (4 punts)
- Cercau la probabilitat que una persona que tingui estudis superiors, miri el citat programa. (4 punts)



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $N(0, 1)$.

SOLUCIONES CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE 2020

Modelo 3. OPCIÓN A. Problema 1:

1º) En Bernat quedé ayer en un bar con unos amigos que tomamos 4 cervezas, 3 panecillos y 5 cafés con leche. En total pagamos 19,50 euros. Días atrás había ido al mismo bar con mi primo Martí, y por 2 cervezas, un panecillo y dos cafés con leche nos cobraron 8,10 euros. En este bar todas las cervezas tienen el mismo precio y todos los panecillos tienen el mismo precio.

a) Identifica las variables e interpreta el enunciado con un conjunto de ecuaciones lineales.

b) Hoy ha vuelto con otros amigos al mismo bar y han consumido 2 cervezas, 2 panecillos y 3 cafés con leche. Con las ecuaciones del apartado anterior, calcula cuanto han pagado en total.

c) Si una cerveza, un panecillo y un café con leche cuestan 5,10 euros, ¿cuánto vale la cerveza, el panecillo y el café con leche separadamente?

Solución:

a)

Sean x, y, z los precios de la cerveza, el panecillo y el café con leche, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\begin{cases} 4x + 3y + 5z = 19,5 \\ 2x + y + 2z = 8,1 \end{cases} \quad \begin{cases} 8x + 6y + 10z = 39 \\ 20x + 10y + 20z = 81 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} 2x + 2y + 3z = m \\ 4x + 3y + 5z = 19,5 \\ 2x + y + 2z = 8,1 \end{cases} \quad \text{Resolviendo por el método de Gauss:}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & m \\ 4 & 3 & 5 & 19,5 \\ 2 & 1 & 2 & 8,1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - F_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & m \\ 0 & -1 & -1 & 19,5 - 2m \\ 0 & -1 & -1 & 8,1 - m \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_3 \rightarrow F_3 - F_2\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & m \\ 0 & -1 & -1 & 19,5 - 2m \\ 0 & 0 & 0 & -11,4 + m \end{pmatrix} \Rightarrow -11,4 + m = 0; \quad m = 11,4.$$

En total han pagado 11,4 euros.

c)

$$\left. \begin{array}{l} 4x + 3y + 5z = 19,5 \\ 2x + y + 2z = 8,1 \\ x + y + z = 5,1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 8x + 6y + 10z = 39 \\ 20x + 10y + 20z = 81 \\ 10x + 10y + 10z = 51 \end{array}$$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 39 & 6 & 10 \\ 81 & 10 & 20 \\ 51 & 10 & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & 6 & 10 \\ 20 & 10 & 20 \\ 10 & 10 & 10 \end{vmatrix}} = \frac{60 \cdot \begin{vmatrix} 13 & 3 & 1 \\ 27 & 5 & 2 \\ 17 & 5 & 1 \end{vmatrix}}{200 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3}{10} \cdot \frac{65+102+135-85-130-81}{4+10+6-5-8-6} = \frac{3}{10} \cdot \frac{302-296}{1} =$$

$$= \frac{3}{10} \cdot 6 = 1,8 = x.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 39 & 10 \\ 20 & 81 & 20 \\ 10 & 51 & 10 \end{vmatrix}}{200} = \frac{60 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 13 & 1 \\ 10 & 27 & 2 \\ 5 & 17 & 1 \end{vmatrix}}{200} = \frac{3}{10} \cdot \frac{108+170+130-135-136-130}{1} =$$

$$= \frac{3}{10} \cdot (408 - 401) = \frac{3}{10} \cdot 7 = 2,1 = y.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 6 & 39 \\ 20 & 10 & 81 \\ 10 & 10 & 51 \end{vmatrix}}{200} = \frac{12 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 & 13 \\ 10 & 5 & 27 \\ 5 & 5 & 17 \end{vmatrix}}{200} = \frac{3}{50} \cdot \frac{340+650+405-325-540-510}{1} =$$

$$= \frac{3}{50} \cdot (1.395 - 1.375) = \frac{3}{50} \cdot 20 = 1,2 = z.$$

Cerveza: 1,8 euros; panecillo: 2,1 euros y el café con leche: 1,2 euros.

Modelo 3. OPCIÓN A. Problema 2:

2º) De una función $f(x)$ sabemos que su derivada es $f'(x) = 2x^3 - 18x$.

a) Determina los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$.

b) Determina las abscisas de sus extremos relativos y calcúlalos.

Solución:

a)

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x^3 - 18x; 2x(x^2 - 9) = 0 \Rightarrow x_1 = -3, x_2 = 0, x_3 = 3.$$

Por ser $f(x)$ polinómica, las raíces de la derivada dividen a la recta real en los intervalos $(-\infty, -3)$, $(-3, 0)$, $(0, 3)$ y $(3, +\infty)$, donde la derivada es, alternativamente, positiva o negativa.

Considerando, por ejemplo, el valor $x = 1 \in (0, 3)$ es:

$$f'(1) = 2 \cdot 1^3 - 18 \cdot 1 = 2 - 18 = -16 < 0 \Rightarrow \text{Decreciente.}$$

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$f'(x) > 0 \Rightarrow \text{Crecimiento: } x \in (-3, 0) \cup (3, +\infty).$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow \text{Decrecimiento: } x \in (-\infty, -3) \cup (0, 3).$$

b)

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -3, x_2 = 0, x_3 = 3.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = 6x^2 - 18.$$

$$f''(-3) = 6 \cdot (-3)^2 - 18 = 36 > 0 \Rightarrow \text{Mínimo relativo para } x = -3.$$

$$f''(0) = -18 < 0 \Rightarrow \text{Máximo relativo para } x = 0.$$

$$f''(3) = 6 \cdot 3^2 - 18 = 36 > 0 \Rightarrow \text{Mínimo relativo para } x = 3.$$

Modelo 3. OPCIÓN A. Problema 3:

3º) Sean A y B dos sucesos tales que $P(A \cup B) = 0,8$; $P(A^c) = 0,5$, donde A^c denota el suceso complementario de A, y $P(A \cap B) = 0,3$.

- a) Calcula las probabilidades $P(B)$ y $P(A/B)$.
- b) Calcule las probabilidades $P(A \cap B^c)$ y $P(A^c \cup B^c)$.
- c) ¿Son A y B sucesos independientes? Razona la respuesta.

Solución:

$$\text{Datos: } P(A \cup B) = 0,8; \quad P(A^c) = 0,5; \quad P(A \cap B) = 0,3.$$

a)

$$P(A^c) = 1 - P(A) \Rightarrow P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - 0,5 = 0,5.$$

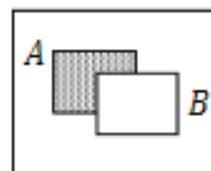
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(B) = P(A \cup B) - P(A) + P(A \cap B) = 0,8 - 0,5 + 0,3 = \underline{0,6}.$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,3}{0,6} = \underline{0,5}.$$

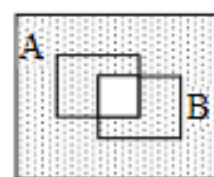
b)

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = 0,5 - 0,3 = \underline{0,2}.$$



$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(A^c \cup B^c) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0,3 = \underline{0,7}.$$



$$P(A^c \cup B^c) = 1 - P(A \cap B)$$

- c)
- Dos sucesos A y B son independientes cuando $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$:
- $$P(A) \cdot P(B) = 0,5 \cdot 0,6 = 0,3 = P(A \cap B).$$

Por lo expuesto anteriormente los sucesos A y B son independientes.

Modelo 3. OPCIÓN A. Problema 4:

4º) En una población una variable aleatoria sigue una ley normal con desviación típica 8. Se ha elegido, al azar, una muestra de 100 personas cuya media ha sido 67.

a) Calcular un intervalo de confianza al 93 % para la media de la población.

b) ¿Cuál ha de ser el tamaño mínimo de la muestra que se ha de tomar para estimar, con un nivel de confianza del 99 %, la media de la población con un error no superior a 2?

Solución:

a)

Para un nivel de confianza del 93 % es:

$$1 - \alpha = 0,93 \rightarrow \alpha = 1 - 0,93 = 0,07 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,035} = 1,81.$$

$$(1 - 0,035 = 0,965 \rightarrow z = 1,81).$$

$$\text{Datos: } n = 100; \bar{x} = 67; \sigma = 8; z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,81.$$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\bar{x}$, σ y n , es la siguiente: $(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$.

$$\left(67 - 1,81 \cdot \frac{8}{\sqrt{100}}; 67 + 1,81 \cdot \frac{8}{\sqrt{100}}\right); (67 - 1,81 \cdot 0,8; 67 + 1,81 \cdot 0,8);$$

$$(67 - 1,448; 67 + 1,448).$$

$$\underline{I.C._{93\%} = (65,552; 68,448)}.$$

b)

Para un nivel de confianza del 99 % es:

$$1 - \alpha = 0,99 \rightarrow \alpha = 1 - 0,99 = 0,01 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,005} = 2,575.$$

$$(1 - 0,05 = 0,9950 \rightarrow z = 2,575).$$

$$\text{Datos: } \sigma = 8; z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,575; E = 2.$$

$$\text{Siendo } E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(2,575 \cdot \frac{8}{2}\right)^2 =$$

$$= (2,575 \cdot 4)^2 = 10,3^2 = 106,09.$$

El tamaño mínimo de la muestra tiene que ser de 107 personas.

Modelo 3. OPCIÓN B. Problema 1:

1º) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$:

a) Calcula A^2 y A^3 .

b) Determina una fórmula para calcular A^n y utilízala para calcular A^{14} .

c) Resuelve la ecuación matricial $A \cdot X + \frac{1}{5} \cdot B^t \cdot B = 2A$, siendo B^t la matriz traspuesta de B.

Solución:

a)

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}}.$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}}.$$

b)

$$\text{Del apartado anterior se deduce que } A^n = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}}}. \quad A^{14} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 14 & 1 \end{pmatrix}}}.$$

c)

$$A \cdot X + \frac{1}{5} \cdot B^t \cdot B = 2A; \quad A \cdot X = 2A - \frac{1}{5} \cdot B^t \cdot B = M;$$

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot M; \quad I \cdot X = A^{-1} \cdot M \Rightarrow X = \underline{\underline{A^{-1} \cdot \left(2A - \frac{1}{5} \cdot B^t \cdot B\right)}}.$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1. \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \text{Adj. de } A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj. de } A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}{1} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$M = 2A - \frac{1}{5} \cdot B^t \cdot B = 2A - \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 2A - \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{5}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{8}{5} & \frac{9}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} = M.$$

$$X = A^{-1} \cdot M = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \underline{\underline{\frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}}}.$$

Modelo 3. OPCIÓN B. Problema 2:

2º) Un taller de joyería dispone de 150 gramos de plata y de 180 horas de trabajo para producir dos modelos de anillos. Para hacer un anillo del modelo A necesita 6 gramos de plata y 3 horas de trabajo, mientras que para hacer un anillo del modelo B necesita 2 gramos de plata y 6 horas de trabajo. Los anillos de los modelos A y B le proporcionan por unidad un beneficio de 35 y 55 euros, respectivamente.

a) Plantea la maximización del beneficio de la joyería como un problema de programación lineal.

b) Dibuja la región factible para la resolución, indicando las rectas y vértices que la determinan.

c) Sabiendo que vende toda la producción, determina cuantos anillos de cada modelo tiene que fabricar para obtener el máximo beneficio e indica cuál es este beneficio.

Solución:

a)

Sean x e y el número de anillos de los tipos A y B que fabrica y vende el taller joyería, respectivamente.

$$\text{Las restricciones son: } \begin{cases} 6x + 2y \leq 150 \\ 3x + y \leq 75 \\ x + 2y \leq 60 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$$

b)

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

$$\textcircled{1} \Rightarrow 3x + y \leq 75 \Rightarrow y \leq 75 - 3x \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$$

x	20	25
y	15	0

$$\textcircled{2} \Rightarrow x + 2y \leq 60 \Rightarrow y \leq \frac{60-x}{2} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$$

x	60	0
y	0	30

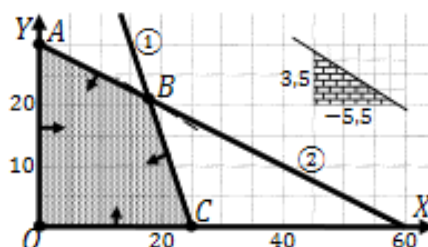
Los vértices de la zona factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:

$$A \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + 2y = 60 \end{cases} \Rightarrow A(0, 30).$$

$$B \Rightarrow \begin{cases} 3x + y = 75 \\ x + 2y = 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x + 2y = 150 \\ -x - 2y = -60 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x = 90; x = 18; 18 + 2y = 60; 9 + y = 30; y = 21 \Rightarrow B(18, 21).$$

$$C \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 3x + y = 75 \end{cases} \Rightarrow 3x = 75; x = 25 \Rightarrow C(25, 0).$$



c)

La función de objetivos es la siguiente: $f(x, y) = 35x + 55y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$$A \Rightarrow f(0, 30) = 35 \cdot 0 + 55 \cdot 30 = 0 + 1.650 = 1.650.$$

$$B \Rightarrow f(18, 21) = 35 \cdot 18 + 55 \cdot 21 = 630 + 1.115 = 1.785.$$

$$C \Rightarrow f(25, 0) = 35 \cdot 25 + 55 \cdot 0 = 875 + 0 = 875.$$

El máximo se produce en el punto $B(18, 21)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x, y) = 35x + 55y = 0 \Rightarrow y = -\frac{35}{55}x = -\frac{7}{11}x \Rightarrow m = -\frac{3,5}{5,5}.$$

El beneficio es máximo fabricando 18 anillos modelo A y 21 modelo B.

El beneficio máximo es de 1.785 euros.

Modelo 3. OPCIÓN B. Problema 3:

3º) El beneficio semanal de una empresa expresado en euros, que fabrica y vende x objetos, según la función $B(x) = -0,75x^2 + 75x - 1.200$, con $20 \leq x \leq 80$.

a) Calcula el beneficio que obtiene fabricando y vendiendo 20 objetos.

b) Busca el número de objetos que ha de fabricar y vender para obtener el beneficio máximo, y determina también ese beneficio máximo.

c) El beneficio medio por x objetos es $M(x) = \frac{B(x)}{x}$. Diga cuántos objetos ha de fabricar y vender para que el beneficio medio sea máximo, y cuál es este beneficio.

Solución:

a) -----

$$B(20) = -0,75 \cdot 20^2 + 75 \cdot 20 - 1.200 = -0,75 \cdot 400 + 1.500 - 1.200 =$$

$$= -300 + 300 = 0.$$

Fabricando 20 objetos no se obtiene ningún beneficio.

b) Una función tiene un máximo relativo cuando se anula su primera derivada y es negativa su segunda derivada para los valores que anulan la primera derivada.

$$B'(x) = -1,5x + 75.$$

$$B'(x) = 0 \Rightarrow -1,5x + 75 = 0; -15x + 750 = 0; -x + 50 = 0 \Rightarrow x = 50.$$

$$B''(x) = -1,5 < 0 \Rightarrow \text{Máximo para } x = 50.$$

El beneficio es máximo fabricando y vendiendo 50 objetos.

$$B(50) = -0,75 \cdot 50^2 + 75 \cdot 50 - 1.200 = -0,75 \cdot 2.500 + 3.750 - 1.200 =$$

$$= -1.875 + 2.550 = 675.$$

El beneficio máximo es de 675 euros.

c)

$$M(x) = \frac{B(x)}{x} = \frac{-0,75x^2 + 75x - 1.200}{x} = -0,75x + 75 - \frac{1.200}{x}.$$

$$M'(x) = -0,75 + 0 + \frac{1.200}{x^2} = -0,75 + \frac{1.200}{x^2}.$$

$$M'(x) = 0 \Rightarrow -0,75 + \frac{1.200}{x^2} = 0; 0,75x^2 = 1.200; 75x^2 = 120.000;$$

$$x^2 = \frac{120.000}{75} = 1.600 \Rightarrow x = \sqrt{1.600} = 40.$$

El beneficio medio es máximo fabricando y vendiendo 40 objetos.

$$M(40) = -0,75 \cdot 40 + 75 - \frac{1.200}{40} = 75 - 30 = 45.$$

El beneficio medio máximo es de 45 euros cada objeto.

.....

Modelo 3. OPCIÓN B. Problema 4:

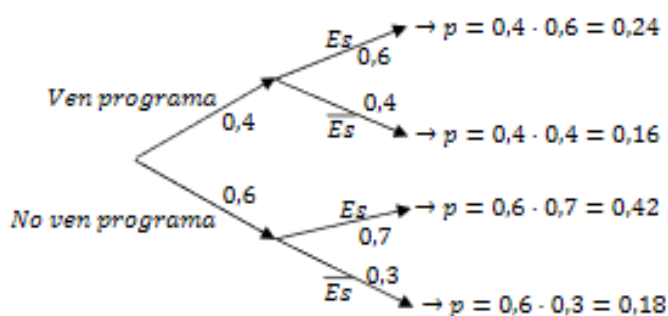
4º) En una población, el tanto por ciento de personas que ven un cierto programa de televisión es del 40 %. Se sabe que el 60 % de las personas que lo ven tienen estudios superiores y que el 30 % de las personas que no lo ven no tienen estudios superiores.

a) Interpretar los datos proporcionados en términos de sucesos, probabilidades y probabilidades condicionadas.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona tenga estudios superiores?

c) Halla la probabilidad que una persona que tenga estudios superiores, vea el programa.

Solución:



a)

Datos: $P(V) = 0,4$; $P(Es/V) = 0,6$; $P(\overline{V}/\overline{Es}) = 0,3$.

b)

$$P = P(Es) = P(V \cap Es) + P(\overline{V} \cap Es) =$$

$$= P(V) \cdot P(Es/V) + P(\overline{V}) \cdot P(Es/\overline{A}) = 0,4 \cdot 0,6 + 0,6 \cdot 0,7 = 0,24 + 0,42 = \underline{0,66}.$$

c)

$$P = P(V/Es) = \frac{P(V \cap Es)}{P(Es)} = \frac{P(V) \cdot P(Es/V)}{P(Es)} = \frac{0,4 \cdot 0,6}{0,66} = \frac{0,24}{0,66} = \underline{0,3636}.$$