MATEMÁTICAS II

Selectividad 2020

Comunidad autónoma de

NAVARRA

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Álvaro Garmendia Antolín

Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad
CURSO: 2019-2020
ASIGNATURA: **MATEMÁTICAS II**

upna
Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Realiza cuatro preguntas de las ocho que se presentan

P1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} (a^2-2)x+2y+z=a+2 \\ (a^2-2)x+4y+(a+1)z=a+6 \\ (a^2-2)x+2y+(2-a)z=a+\sqrt{2} \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

(2.5 puntos)

P2) El plano π pasa por los puntos $P_1(2,0,5)$, $P_2(1,-2,2)$ y $P_3(3,-1,2)$. Una esfera con centro en $C(0,1,-3)$ toca al plano en un único punto. Calcula el radio de la esfera y el punto de intersección.

(2.5 puntos)

P3) Calcula las integrales indefinidas:

$$\int \frac{x-7}{x^2+x-6}\,dx$$ (1.25 puntos)

$$\int e^{2x}\sin(2x+1)\,dx$$ (1.25 punto2)

P4) Sea la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{3}+\ln\dfrac{x^2+2}{3} & x<1 \\ \dfrac{x^2}{3} & x\geq 1 \end{cases}$.

a) Demuestra que la función es derivable en todo $\mathbb{R}$.

(1 punto)

b) Demuestra que existe un valor $\alpha\in(0,2)$ tal que $f'(\alpha)=1$. Enuncia el (los) resultado(s) teórico(s) utilizado(s) y justifica su uso.

(1.5 puntos)

P5) Sabiendo que la inversa de una matriz A es $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y la inversa de la matriz $A \cdot B$ es $\begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, determina la matriz B.

(2.5 puntos)

P6) Calcula la ecuación continua de la recta t sabiendo que corta perpendicularmente a las siguientes rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0 \\ x + 3z - 7 = 0 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \frac{x+2}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{0}$$

(2.5 puntos)

P7) Calcula los extremos absolutos de la función $f(x) = e^{\pi x} \cdot \sin \pi x$ en el intervalo $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$. Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

(2.5 puntos)

P8) Sean las funciones $f(x) = \frac{x}{2} + 1$ y $g(x) = \sqrt{x-2} + 2$. Encuentra los dos puntos en los que se cortan sus gráficas, y calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas.

(2.5 puntos)

Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad
CURSO: 2019-2020
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

upna
Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Criterios de corrección y calificación

Criterios generales

La duración de la prueba es de 90 minutos. Se calificará de 0 a 10 puntos, redondeando a cuartos de punto.

- Se debe responder **exclusivamente** a cuatro de los problemas planteados. Si alguien responde a más de cuatro, solo se sumarán las cuatro peores puntuaciones.

- Se tendrá en cuenta el planteamiento seguido para la resolución del problema y la claridad en la exposición. Si es pertinente, se valorará la referencia a los resultados teóricos usados.

- Para la penalización de los errores en los cálculos; se tendrá en cuenta:
  - si son consecuencia de no haber seguido el procedimiento más adecuado.
  - si reflejan fallos de concepto.
  - si producen simplificaciones relevantes.
  - si ocurren con reiteración.

Criterios específicos

P1) Se valorará con 1.5 puntos la discusión completa, incluyendo la mención del teorema, 0,5 puntos la solución del caso compatible determinado y 0,5 puntos la del caso compatible indeterminado.

P4) En el apartado (b) se valorará sobre 0.75 puntos el enunciado del (de los) resultado(s) teórico(s) requerido(s). Se valorará sobre 1 punto la justificación de su uso.

P7) En el apartado (b) se valorará sobre 0.5 puntos el enunciado del (de los) resultado(s) teórico(s) requerido(s). Se valorará sobre 1 punto la justificación de su uso.

P8) Se valorará con 0.5 puntos la obtención de los puntos de corte, con 0,5 puntos el dibujo de la gráfica (aunque no sea muy detallado) y con 1,5 puntos el cálculo del área. Si la resolución es correcta, se puede obtener la máxima puntuación aunque no incluya dibujo.

Problema P1:

Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro a y resuélvelo en los casos en que sea compatible.

$$\begin{cases} (a+1)x + (a^2+a)y = 2 \\ (-a-1)x - a^2y = 0 \\ ay + (a^2-1)z = 3-a \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso

Soluciones:

Para discutir el sistema calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada.

$$C = \begin{pmatrix} a+1 & a^2+a & 0 \\ -a-1 & -a^2 & 0 \\ 0 & a & a^2-1 \end{pmatrix}; A = \begin{pmatrix} a+1 & a^2+a & 0 & 2 \\ -a-1 & -a^2 & 0 & 0 \\ 0 & a & a^2-1 & 3-a \end{pmatrix};$$

El determinante de la matriz de los coeficientes vale:

$$|C| = (a^2-1)\begin{vmatrix} a+1 & a^2+a \\ -a-1 & -a^2 \end{vmatrix} = (a^2-1)((a+1)(-a^2) — a-1(a^2+a) = a(a+1)^2(a-1)$$

Por lo tanto, el rango de la matriz C es 3 si a es distinto de 0, 1 o –1, así como el rango de la matriz ampliada A, por lo que el sistema es compatible determinado según el Teorema de Rouché Frobenius. Podemos resolverlo por Gauss o por Cramer, o incluso directamente resolviendo el sistema de dos ecuaciones en x e y, y sustituyendo en z; y se obtiene:

Si $a \neq 0$, $a \neq 1$; $a \neq -1$, el sistema es compatible determinado. $x = \frac{-2a}{a+1}$; $y = \frac{2}{a}$; $z = \frac{-1}{a+1}$

Para $a = 0$: $C(a=0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; A(a=0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix};$

El rango de la matriz ampliada es 3, y el rango de la matriz de los coeficientes es 2, luego el sistema es incompatible.

Si $a = 0$ el sistema es incompatible.

Para $a = 1$: $C(a=1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; A(a=1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix};$

El rango de la matriz de los coeficientes es 2, y el rango de la matriz ampliada también es 2, luego el sistema es compatible, pero indeterminado al ser los rangos menores que el número de incógnitas.

$$\begin{cases} 2x+2y=2 \\ -2x-y=0 \\ y=2 \end{cases} \rightarrow (F1 = F1 - F2) \begin{cases} y=2 \\ -2x-y=0 \\ z=t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=-1 \\ z=t, \forall t \in R \end{cases} \rightarrow$$

Para $a = 1 \rightarrow x = -1; y = 2; z = t, \forall t \in R$. Sistema compatible indeterminado

Para $a = -1$: $C(a=-1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}; A(a=-1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix};$

El rango de la matriz de los coeficientes es 1, y el rango de la matriz ampliada es 2, luego el sistema es incompatible.

Si $a = -1$, el sistema es incompatible.

Problema P2:

Calcula la ecuación continua de la recta r sabiendo que corta a la recta $\boldsymbol{s}$: $\begin{cases} \mathbf{3x + y - z - 7 = 0} \\ \mathbf{x + y - 5 = 0} \end{cases}$, *es paralela al plano de ecuación* π*: 2x – y + 3z – 6 = 0, y pasa por el punto* P*(–1, 3, 1)*

Soluciones:

En primer lugar, vamos a buscar un plano que contenga a la recta r. Será paralelo al plano π. Todos los planos paralelos a π tienen de ecuación: *2x – y + 3z = D*. Imponemos que pase por el punto *P. 2(–1) – 3 + 3(1) = D = –2.* Luego el plano es*: 2x – y + 3z + 2 = 0.*

Buscamos ahora un punto que pertenezca al nuevo plano y a la recta s. Para ello resolvemos el sistema

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = -2 \\ 3x + y - z = 7 \\ x + y = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - (5 - x) + 3z = -2 \\ 3x + (5 - x) - z = 7 \\ y = 5 - x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x + 3z = 3 \\ 2x - z = 2 \\ y = 5 - x \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} 3x + 3(2x - 2) = 3 \\ z = 2x - 2 \\ y = 5 - x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 9x = 9 \\ z = 2x - 2 \\ y = 5 - x \end{cases} \rightarrow x = 1; y = 4; z = 0,$$

El punto A (1, 4, 0) debe ser un punto de la recta pedida, que también debe contener al punto P.

Su vector de dirección es $\overrightarrow{PA} = (1 - (-1), 4 - 3, 0 - 1) = (2, 1, -1)$

Como sabemos que el punto P es la recta y nos piden su ecuación continua, dicha ecuación es:

$$r: \frac{x - (-1)}{2} = \frac{y - 3}{1} = \frac{z - 1}{-1}$$

$$r: \frac{x + 1}{2} = \frac{y - 3}{1} = \frac{z - 1}{-1}$$

Problema P3:

Calcula los siguientes límites

$$a)\ \lim_{x\to 1}\left(2+\sin\frac{3\pi x}{2}\right)^{\frac{1}{x^2-x}}$$

$$b)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^4-x^2+1}-\sqrt{x^4-7}\right)$$

Soluciones:

$$a)\ E=\lim_{x\to 1}\left(2+\sin\frac{3\pi x}{2}\right)^{\frac{1}{x^2-x}}$$

Queremos saber si es un límite tipo e, para ello calculamos el límite de la base y vemos si tiende a 1, y el límite del exponente para saber si tiende a infinito.

$$\sin\frac{3\pi(1)}{2}=-1\to\lim_{x\to 1}\left(2+\sin\frac{3\pi x}{2}\right)\quad=1$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x^2-x}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x(x-1)}\right)=\infty$$

Es un límite tipo e. Aplicamos logaritmos neperianos:

$$E=\lim_{x\to 1}\left(2+\sin\frac{3\pi x}{2}\right)^{\frac{1}{x^2-x}}\to Ln(E)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x^2-x}Ln\left(2+\sin\frac{3\pi x}{2}\right)\right)$$

Aplicamos la regla de L´Hôpital pues el numerador tiende a $Ln(1)=0$, y el denominador tiende también a 0.

$$Ln(E)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{Ln\left(2+\sin\frac{3\pi x}{2}\right)}{x^2-x}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{\cos\frac{3\pi x}{2}\cdot\frac{3\pi}{2}}{\left(2+\sin\frac{3\pi x}{2}\right)}}{2x-1}=0$$

Pues $\cos\frac{3\pi x}{2}\cdot\frac{3\pi}{2}\to 0$. Luego $Ln(E)=0\to E=e^0=1$

$$\lim_{x\to 1}\left(2+\sin\frac{3\pi x}{2}\right)^{\frac{1}{x^2-x}}=1$$

b) Para calcular $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^4-x^2+1}-\sqrt{x^4-7}\right)$ racionalizamos. Multiplicamos numerador y denominador por la conjugada del numerador:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^4-x^2+1}-\sqrt{x^4-7}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^4-x^2+1}-\sqrt{x^4-7}\right)\left(\sqrt{x^4-x^2+1}+\sqrt{x^4-7}\right)}{\sqrt{x^4-x^2+1}+\sqrt{x^4-7}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^4-x^2+1)-(x^4-7)}{\sqrt{x^4-x^2+1}+\sqrt{x^4-7}}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2+8}{\sqrt{x^4-x^2+1}+\sqrt{x^4-7}}$$

Los términos de mayor grado del numerador y del denominador son x^2. Miramos sus coeficientes que son – 1 en el numerador y 1 + 1 = 2, en el denominador. Luego el límite vale – 1/2.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^4-x^2+1}-\sqrt{x^4-7}\right)=\frac{-1}{2}$$

Problema P4:

Sea la función $\boldsymbol{f(x) = \left(1 + sin\frac{\pi x}{2}\right)^x}$

a. *Demuestra que la función es continua en el intervalo [1, 2]*
b. *Demuestra que existe $\alpha \in (1, 2)$ tal que $f'(\alpha) = 0$. Enuncia los resultados teóricos empleados y justifica su uso.*

Soluciones:

a) Es una función exponencial. La base, formada por una función trigonométrica es siempre continua, y el exponente, x, también. Veamos el signo en los extremos del intervalo:

$$f(1) = \left(1 + sin\frac{\pi}{2}\right)^1 = 1 + 1 = 2 > 0$$

$$f(2) = \left(1 + sin\frac{\pi 2}{2}\right)^2 = (1 + sin\pi)^2 = (1 + 0)^2 = 1 > 0$$

La base se anula en $1 + sin\frac{\pi x}{2} = 0 \rightarrow sin\frac{\pi x}{2} = -1 \rightarrow x = -1$ que no pertenece al intervalo [1, 2].

La función es continua en [1, 2].

b) El Teorema de Bolzano dice que: si una función es continua en un intervalo cerrado y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, entonces existe un valor en el interior del intervalo en el que la función se anula.

Nos piden que se lo apliquemos a la función derivada. Así que calculamos la derivada. Utilizamos derivación logarítmica:

$$f(x) = \left(1 + sin\frac{\pi x}{2}\right)^x \rightarrow Ln(f(x)) = Ln\left(\left(1 + sin\frac{\pi x}{2}\right)^x\right) = x \cdot Ln\left(1 + sin\frac{\pi x}{2}\right)$$

Derivamos:

$$\left(Ln(f(x))\right)' = \frac{f'(x)}{f(x)} = 1 \cdot Ln\left(1 + \sin\frac{\pi x}{2}\right) + x \cdot \frac{cos\frac{\pi x}{2} \cdot \frac{\pi}{2}}{1 + sin\frac{\pi x}{2}} \rightarrow$$

$$f'(x) = f(x)(1 \cdot Ln\left(1 + \sin\frac{\pi x}{2}\right) + x \cdot \frac{cos\frac{\pi x}{2} \cdot \frac{\pi}{2}}{1 + sin\frac{\pi x}{2}})$$

Analizamos la continuidad de esta función derivada.

Ya hemos visto que $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado [1, 2].

La función $Ln\left(1 + sin\frac{\pi x}{2}\right)$ también es continua, pues ya hemos visto que $1 + sin\frac{\pi x}{2}$ es siempre positiva en el intervalo y se anula para $x = -1$, que no pertenece al intervalo. Por el mismo motivo la función $x \cdot \frac{cos\frac{\pi x}{2} \cdot \frac{\pi}{2}}{1 + sin\frac{\pi x}{2}}$ es continua pues está formada por funciones trigonométricas continuas, y podría no serlo en los valores que anulan al denominador, que ya hemos visto que es $x = -1$, que no pertenece al intervalo. $y = f'(x)$ es por tanto una función continua en el intervalo cerrado [1, 2]. Veamos que signo tiene en los extremos del intervalo:

$$f'(1) = f(1)\left(Ln\left(1 + sin\frac{\pi 1}{2}\right) + 1 \cdot \frac{cos\frac{\pi 1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}}{1 + sin\frac{\pi 1}{2}}\right) = 2(Ln(2) + 0) > 0$$

$$f'(2) = f(2)\left(Ln\left(1 + sin\frac{\pi 2}{2}\right) + 2 \cdot \frac{cos\frac{\pi 2}{2} \cdot \frac{\pi}{2}}{1 + sin\frac{\pi 2}{2}}\right) = 1(Ln(1) + 2\left(\frac{-\pi}{2}\right) = -\pi < 0$$

Luego por el Teorema de Bolzano sabemos que existe un $\alpha \in (1, 2)$ tal que $f'(\alpha) = 0$.

Problema P5:

Sean A y B dos matrices de tamaño 3 x 3 tales que $|A| = |B| = 1/2$. Calcula $|C|$ *teniendo en cuenta que la matriz C es la siguiente:* $C = (2 \cdot A^t \cdot B^{-1})^2$

Soluciones:

Como las matrices son cuadradas y $|A| = |B| = 1/2$, sabemos que $|A^t|$ es igual al determinante de A, y que el determinante de la matriz inversa es 2. Pero $|\ 2 \cdot A^t\ |$ al multiplicar una matriz por un número se multiplican todas sus filas:

$$kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{pmatrix}$$

Por lo que $|\ 2 \cdot A^t\ | = 2^3 = 8$.

Por tanto:

$|C\ | = |\ (2 \cdot A^t \cdot B^{-1})^2| = (8 \cdot (1/2) \cdot 2)^2 = 64$.

$|C\ | = 64$

Problema P6:

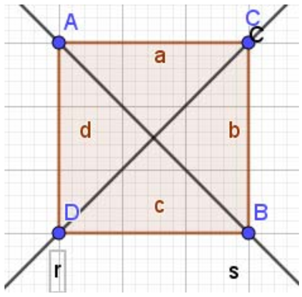
Los puntos A *(–1, 2, 1) y* B *(2, 5, 1) son dos vértices de un cuadrado. Halla los otros dos vértices sabiendo que están en la recta de ecuación:* $\boldsymbol{r}$: $\frac{x}{-1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+1}{-4}$.

Soluciones:

Escribimos la ecuación continua de la recta en forma paramétrica: r: $\begin{cases} x = -t \\ y = 4 + t \\ z = -1 - 4t \end{cases}$ de punto (0, 4, -1) y vector de dirección $\vec{v} = (-1, 1, -4)$.

La recta que contiene a los puntos dados tiene como vector director: $\overrightarrow{AB} = (2-(-1), 5-2, 1-1) = (3,3,0) \to \vec{w} = (1,1,0)$. Va a ser el vector director de la recta s. Observamos que ambas rectas no son paralelas. Nos interesa saber si se cortan (y son coplanarias) o se cruzan. Para ello determinamos un vector que tenga su origen en la recta r, (0, 4, -1) y su extremo en un punto de la recta s: A *(–1, 2, 1):* $\vec{u} = (0-(-1), 4-2, 0-1) = (1, 2, -1)$ y analizamos la posición relativa de esos tres vectores. Si el rango de la matriz de las coordenadas de los tres vectores es distinto de cero, entonces se cruzan, si es cero, son coplanarios.

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 8 + 0 - (-4 + 0 - 1) = 8 - 8 = 0$$



Las rectas r y s son coplanarias.

Buscamos un punto C $(-t, 4+t, -1-4t)$ de la recta r, de tal forma que el vector $\overrightarrow{AC}$ sea perpendicular al vector $\overrightarrow{CB}$.

$$\overrightarrow{AC} = (-t-(-1), 4+t-2, -1-4t-1) = (-t+1, 2+t, -2-4t)$$

$$\overrightarrow{CB} = \big(2-(-t), 5-(4+t), 1-(-1-4t)\big) = (2+t, 1-t, 2+4t)$$

Imponemos que sean perpendiculares, es decir, que su producto escala sea cero:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} &= (-t+1) \cdot (2+t) + (2+t) \cdot (1-t) + (-2-4t) \cdot (2+4t) \\ &= (-2t - t^2 + 2 + t) + (2 - 2t + t - t^2) + (-4 - 8t - 8t - 16t^2) \\ &= -18t^2 - 18t + 0 = 0 \quad \to \end{aligned}$$

$18t\,(t + 1) = 0$. El parámetro puede valer 0 o –1.

Si $t = 0$, entonces $C = (0, 4, -1)$, y si $t = -1$, $C = (1, 3, 3)$.

El cuadrado pedido tiene de vértices*:* A *(–1, 2, 1);* B *(2, 5, 1);* $C = (0, 4, -1)$ y $D = (1, 3, 3)$.

El cuadrado pedido tiene de vértices: A (–1, 2, 1); B (2, 5, 1); $C = (0, 4, -1)$ y $D = (1, 3, 3)$.

Hemos impuesto que los lados son perpendiculares, pero debemos comprobar que efectivamente es un cuadrado y no un rectángulo, que todos los lados son iguales:

$$\overrightarrow{AC} = (0-(-1), 4-2, -1-1) = (1, 2, -2); \ \left|\overrightarrow{AC}\right|^2 = 1 + 4 + 4 = 9;$$

$$\overrightarrow{AD} = (1-(-1), 3-2, 3-1) = (2, 1, 2); \ \left|\overrightarrow{AD}\right|^2 = 4 + 1 + 4 = 9;$$

$$\overrightarrow{CB} = (2, 1, 2); \ \left|\overrightarrow{CB}\right|^2 = 9; \ \overrightarrow{DB} = (2-1, 5-3, 1-3) = (1, 2, -2); \ \left|\overrightarrow{DB}\right|^2 = 9.$$

También podríamos haber comprobado que las diagonales r y s son perpendiculares

Problema P7:

Sea la función $f(x) = (x+3)^{\sin(\pi x)} Ln(x^2 - x + 2)$

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo [–1, 0]
b) Demuestra que existe α ∈ (–1, 0) tal que $f'(\alpha) = -Ln2$. Enuncia los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

Soluciones:

a) Es el producto de una función exponencial y de una función logarítmica. La función exponencial es composición de una función polinómica y una función seno, ambas continuas en toda la recta real; La función logaritmo no sería continua para valores negativos o cero. $x^2 - x + 2$ no se anula, es siempre positiva, luego la función $Ln(x^2 - x + 2)$ es también continua en toda la recta real, y por tanto en el intervalo [–1, 0].

La función es continua en [-1, 0].

b) El Teorema del Valor Medio de Lagrange dice: Si una función es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el abierto entonces existe α ∈ (a, b) tal que $f'(\alpha) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Veamos si la función es continua en [–1, 0] y derivable en (–1, 0) para poder aplicar el Teorema de Lagrange:

$$f(x) = (x+3)^{\sin(\pi x)} Ln(x^2 - x + 2) \rightarrow$$

$$f'(x) = \left((x+3)^{\sin(\pi x)}\right)' \cdot Ln(x^2 - x + 2) + (x+3)^{\sin(\pi x)} \cdot \frac{2x-1}{Ln(x^2 - x + 2)}$$

Utilizamos derivación logarítmica:

$$g(x) = (x+3)^{\sin(\pi x)} \rightarrow Ln\big(g(x)\big) = \sin(\pi x) \cdot Ln(x+3) \rightarrow$$

$$\Big(Ln\big(g(x)\big)\Big)' = \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{\pi\cos(\pi x) \cdot Ln(x+3) + \sin(\pi x) \cdot \frac{1}{Ln(x+3)}}{\sin(\pi x) \cdot Ln(x+3)} \rightarrow$$

$$g'(x) = g(x) \cdot \frac{\pi\cos(\pi x) \cdot Ln(x+3) + \sin(\pi x) \cdot \frac{1}{Ln(x+3)}}{\sin(\pi x) \cdot Ln(x+3)} \rightarrow$$

$$f'(x) = (x+3)^{\sin(\pi x)} \frac{\pi\cos(\pi x) \cdot Ln(x+3) + \sin(\pi x) \cdot \frac{1}{Ln(x+3)}}{\sin(\pi x) \cdot Ln(x+3)} \cdot Ln(x^2 - x + 2) + (x+3)^{\sin(\pi x)} \cdot \frac{2x-1}{Ln(x^2 - x + 2)} = (x+3)^{\sin(\pi x)} \pi \tan(\pi x) + \frac{1}{(Ln(x+3))^2} \cdot Ln(x^2 - x + 2)$$

La función es derivable en (–1, 0)

$$f(x) = (x+3)^{\sin(\pi x)} Ln(x^2 - x + 2) \rightarrow$$

$$f(-1) = (-1+3)^{\sin(-\pi)} Ln(1+1+2) = (2)^0 Ln(4) = Ln(4)$$

$$f(0) = (3)^{\sin(\pi 0)} Ln(2) = Ln(2)$$

Entonces existe α ∈ (–1, 0) tal que $f'(\alpha) = \frac{Ln(2)-Ln(4)}{0-(-1)} = \frac{Ln(2)-Ln(4)}{1} = Ln\frac{2}{4} = Ln\left(\frac{1}{2}\right) = -Ln(2)$

Luego por el Teorema del Valor Medio sabemos que existe un α ∈ (–1, 0) tal que $f'(\alpha) = -Ln(2)$.

Problema P8:

Encuentra los dos puntos en que se cortan las gráficas de estas funciones:

$$\boldsymbol{f(x) = \sin(\pi x)} \text{ y } \boldsymbol{g(x) = |x^2 - x|}$$

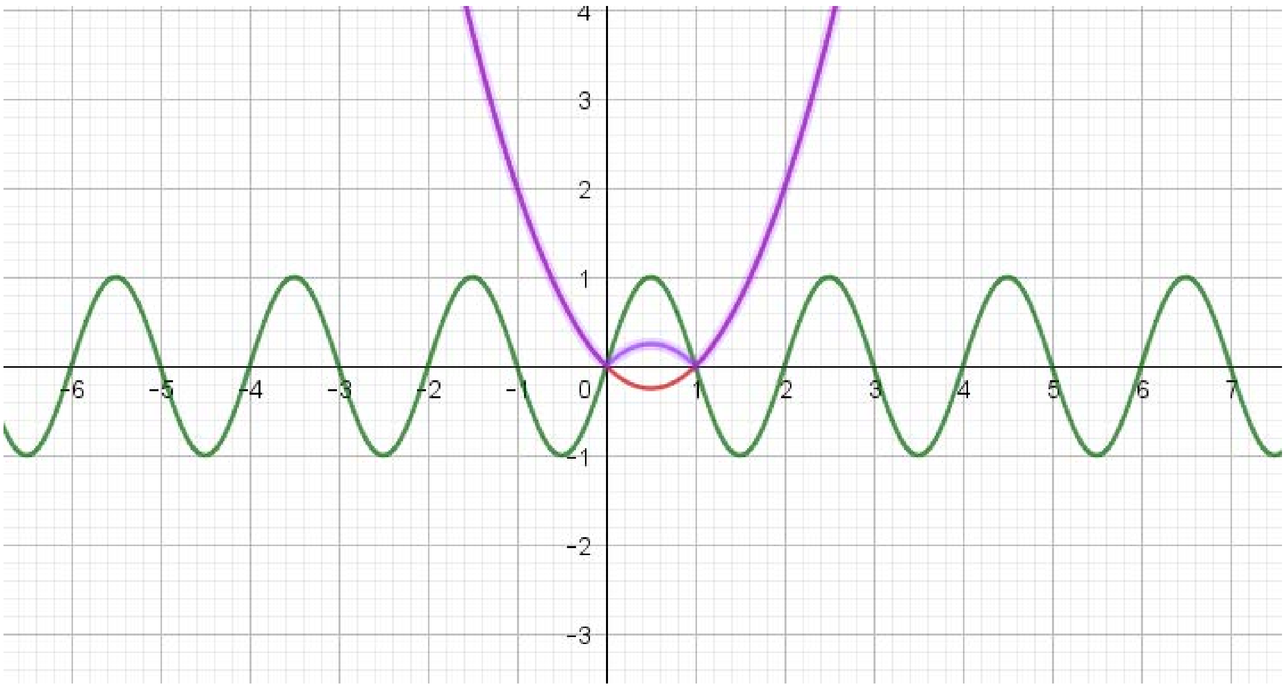
Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas.

Soluciones:

La función $y = x^2 - x$ es una parábola que corta al eje de abscisas en (0, 0) y (1, 0), con vértice (1/2, 1).

Por tanto, es positiva en $(-\infty, 0)$ y en $(1, +\infty)$; y negativa en (0, 1)

Representamos ambas funciones, que se cortan en los puntos (0, 0) y (1, 0):



El área de la región viene dada por la integral:

$$\left|\int_0^1 (f(x) - g(x))dx\right| = \left|\int_0^1 (\sin(\pi x) - |x^2 - x|)dx\right| = \left|\int_0^1 (\sin(\pi x) - (-x^2 + x))dx\right|$$

$$= \left|\int_0^1 (\sin(\pi x) + x^2 - x)dx\right| = \left|\left[\frac{\cos(\pi x)}{\pi} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1\right|$$

$$= \left|\left(\frac{\cos(\pi)}{\pi} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{\cos(0)}{\pi} + 0\right)\right| = \left|-\frac{1}{\pi} - \frac{1}{6} - \frac{1}{\pi}\right| = \left|\frac{-2}{\pi} - \frac{1}{6}\right| \cong 0.803$$

El área de la región encerrada es de **0.803 u²**.

Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad
CURSO: 2019-2020
ASIGNATURA: **MATEMÁTICAS II**

upna
Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Realiza cuatro preguntas de las ocho que se presentan

P1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} (a^2-2)x+2y+z=a+2 \\ (a^2-2)x+4y+(a+1)z=a+6 \\ (a^2-2)x+2y+(2-a)z=a+\sqrt{2} \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

(2.5 puntos)

P2) El plano π pasa por los puntos $P_1(2,0,5)$, $P_2(1,-2,2)$ y $P_3(3,-1,2)$. Una esfera con centro en $C(0,1,-3)$ toca al plano en un único punto. Calcula el radio de la esfera y el punto de intersección.

(2.5 puntos)

P3) Calcula las integrales indefinidas:

$$\int \frac{x-7}{x^2+x-6}\,dx \qquad (1.25 \text{ puntos})$$

$$\int e^{2x}\sin(2x+1)\,dx \qquad (1.25 \text{ punto2})$$

P4) Sea la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{3}+\ln\dfrac{x^2+2}{3} & x<1 \\ \dfrac{x^2}{3} & x\geq 1 \end{cases}$.

a) Demuestra que la función es derivable en todo $\mathbb{R}$.

(1 punto)

b) Demuestra que existe un valor $\alpha\in(0,2)$ tal que $f'(\alpha)=1$. Enuncia el (los) resultado(s) teórico(s) utilizado(s) y justifica su uso.

(1.5 puntos)

P5) Sabiendo que la inversa de una matriz A es $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y la inversa de la matriz $A \cdot B$ es $\begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, determina la matriz B.

(2.5 puntos)

P6) Calcula la ecuación continua de la recta t sabiendo que corta perpendicularmente a las siguientes rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0 \\ x + 3z - 7 = 0 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \frac{x+2}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{0}$$

(2.5 puntos)

P7) Calcula los extremos absolutos de la función $f(x) = e^{\pi x} \cdot \sin \pi x$ en el intervalo $\left[\frac{1}{2}, 2\right[$. Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

(2.5 puntos)

P8) Sean las funciones $f(x) = \frac{x}{2} + 1$ y $g(x) = \sqrt{x-2} + 2$. Encuentra los dos puntos en los que se cortan sus gráficas, y calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas.

(2.5 puntos)

Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad
CURSO: 2019-2020
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

upna
Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Criterios de corrección y calificación

Criterios generales

La duración de la prueba es de 90 minutos. Se calificará de 0 a 10 puntos, redondeando a cuartos de punto.

- Se debe responder **exclusivamente** a cuatro de los problemas planteados. Si alguien responde a más de cuatro, solo se sumarán las cuatro peores puntuaciones.

- Se tendrá en cuenta el planteamiento seguido para la resolución del problema y la claridad en la exposición. Si es pertinente, se valorará la referencia a los resultados teóricos usados.

- Para la penalización de los errores en los cálculos, se tendrá en cuenta:
    - si son consecuencia de no haber seguido el procedimiento más adecuado.
    - si reflejan fallos de concepto.
    - si producen simplificaciones relevantes.
    - si ocurren con reiteración.

Criterios específicos

P1) Se valorará con 1.5 puntos la discusión completa, incluyendo la mención del teorema, 0,5 puntos la solución del caso compatible determinado y 0,5 puntos la del caso compatible indeterminado.

P4) En el apartado (a) se valorará sobre 0.5 puntos el estudio de la continuidad y con 0.5 puntos el de la derivabilidad. En el apartado (b) se valorará sobre 0.75 puntos el enunciado del (de los) resultado(s) teórico(s) requerido(s). Se valorará sobre 0.75 puntos la justificación de su uso.

P7) Se valorará sobre 1 punto el enunciado del resultado teórico requerido. Se valorará sobre 1.5 puntos la justificación de su uso.

P8) Se valorará con 0.5 puntos la obtención de los puntos de corte, con 0,5 puntos el dibujo de la gráfica (aunque no sea muy detallado) y con 1,5 puntos el cálculo del área. Si la resolución es correcta, se puede obtener la máxima puntuación aunque no incluya dibujo.

Problema P1:

Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro real α *y resuélvelo en los casos en que es compatible*

$$\begin{cases} (a^2-2)x+2y+z=a+2 \\ (a^2-2)x+4y+(a+1)z=a+6 \\ (a^2-2)x+2y+(2-a)z=a+\sqrt{2} \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

Soluciones:

Para discutir el sistema calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada.

$$C=\begin{pmatrix} (a^2-2) & 2 & 1 \\ (a^2-2) & 4 & a+1 \\ (a^2-2) & 2 & 2-a \end{pmatrix}; A=\begin{pmatrix} (a^2-2) & 2 & 1 & a+2 \\ (a^2-2) & 4 & a+1 & a+6 \\ (a^2-2) & 2 & 2-a & a+\sqrt{2} \end{pmatrix};$$

El determinante de la matriz de los coeficientes vale:

$$|C|=(a^2-2)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & a+1 \\ 1 & 2 & 2-a \end{vmatrix}=2(a^2-2)(1-a)$$

Luego el rango de la matriz de los coeficientes es 3 si a es distinto de 1, de $+\sqrt{2}$ y de $-\sqrt{2}$. El rango de la matriz ampliada en esos casos no puede ser mayor de 3, luego el sistema es compatible determinado. Podemos entonces resolver el sistema por Gauss o por Cramer, y se obtiene:

$$\begin{pmatrix} (a^2-2) & 2 & 1 & a+2 \\ (a^2-2) & 4 & a+1 & a+6 \\ (a^2-2) & 2 & 2-a & a+\sqrt{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} (a^2-2) & 2 & 1 & a+2 \\ 0 & 2 & a & 4 \\ 0 & 0 & 1-a & \sqrt{2}-2 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{cases} (a^2-2)x+2y+\frac{\sqrt{2}-2}{1-a}=a+2 \\ 2y+a\frac{\sqrt{2}-2}{1-a}=4 \\ z=\frac{\sqrt{2}-2}{1-a} \end{cases} \to \begin{cases} x=\frac{1}{a+\sqrt{2}} \\ y=\frac{4-2a-a\sqrt{2}}{2(1-a)};; \\ z=\frac{\sqrt{2}-2}{1-a} \end{cases}$$

$$Si\ a\neq 1, a\neq +\sqrt{2}, a\neq -\sqrt{2} \to x=\frac{1}{a+\sqrt{2}};\ y=\frac{4-2a-a\sqrt{2}}{2(1-a)}; z=\frac{\sqrt{2}-2}{1-a}.$$

El sistema es compatible y determinado.

Si $a = 1$, entonces la matriz ampliada es: $A(1)=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 2 & 7 \\ -1 & 2 & 1 & 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}$; La segunda y la tercera columna son dependientes. Calculamos el determinante: $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 7 \\ -1 & 1 & 1+\sqrt{2} \end{vmatrix}=2-\sqrt{2}\neq 0$; por lo que su rango es 3, y el rango de la matriz de los coeficientes es 2, por lo que el sistema es incompatible.

Si a = 1, el sistema es incompatible

Si $a = +\sqrt{2}$, calculamos el rango de la matriz ampliada: $A(\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & \sqrt{2}+2 \\ 0 & 4 & \sqrt{2}+1 & \sqrt{2}+6 \\ 0 & 2 & 2-\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Calculamos el determinante: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & \sqrt{2}+2 \\ 4 & \sqrt{2}+1 & \sqrt{2}+6 \\ 2 & 2-\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \end{vmatrix} = 0$, por lo que el rango es 2, igual al rango de la matriz de los coeficientes y menor que el número de incógnitas, por lo que el sistema es compatible indeterminado.

El sistema queda:

$$\begin{cases} 2y + z = \sqrt{2}+2 \\ 4y + (\sqrt{2}+1)z = \sqrt{2}+6 \\ 2y + (2-\sqrt{2})z = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Despejamos z de la primera ecuación y sustituimos o en la segunda o en la tercera y obtenemos:

$$\begin{cases} 2y + z = \sqrt{2}+2 \\ 4y + (\sqrt{2}+1)z = \sqrt{2}+6 \\ 2y + (2-\sqrt{2})z = 2\sqrt{2} \end{cases} \to \begin{cases} z = \sqrt{2}+2-2y \\ 4y + (\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+2-2y) = \sqrt{2}+6 \\ 2y + (2-\sqrt{2})(\sqrt{2}+2-2y) = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} z = \sqrt{2}+2-2y \\ 4y + (\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+2-2y) = \sqrt{2}+6 \\ 2y + \left(2\sqrt{2}+4-4y-2-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}y\right) = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} z = \sqrt{2}+2-2y = \sqrt{2}+2-2 = \sqrt{2} \\ 4y + (\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+2-2y) = \sqrt{2}+6 \\ -2y + 2 + 2\sqrt{2}y = 2\sqrt{2} \to y = 1 \end{cases} \to \begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = \sqrt{2} \end{cases}$$

$Si\ a = +\sqrt{2}, \to x = t;\ y = 1; z = \sqrt{2}$. El sistema es compatible e indeterminado.

Si $a = -\sqrt{2}$, calculamos el rango de la matriz ampliada: $A(-\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -\sqrt{2}+2 \\ 0 & 4 & 1-\sqrt{2} & -\sqrt{2}+6 \\ 0 & 2 & 2+\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$.

Calculamos el determinante: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -\sqrt{2}+2 \\ 4 & -\sqrt{2}+1 & -\sqrt{2}+6 \\ 2 & 2+\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} = -8-4\sqrt{2} \neq 0$, por lo que el rango es 3, distinto del rango de la matriz de los coeficientes, luego el sistema es incompatible.

Si $a = -\sqrt{2}$, el sistema es incompatible.

Problema P2:

El plano $\boldsymbol{\pi}$ pasa por los puntos P1 (2, 0, 5), P2 (1, -2, 2) y P3 (3, -1, 2). Una esfera de centro C (0, 1, -3) toca al plano en un único punto. Calcula el radio de la esfera y el punto de intersección.

Soluciones:

Tres puntos determinan un plano, luego podemos encontrar la ecuación de dicho plano: $ax + by + cz = d$, por ejemplo, resolviendo el sistema obtenido de imponer que pase por los tres puntos. O buscando dos vectores de orientación del plano y un punto.

Como la esfera toca al plano en un único punto, significa que el plano es tangente a la esfera, por lo que el vector normal al plano que pasa por el centro de la esfera nos proporcionará el radio.

Vectores de orientación del plano:

$$\overrightarrow{P2P1} = (2-1, 0-(-2), 5-2) = (1, 2, 3)$$

$$\overrightarrow{P3P1} = (2-3, 0-(-1), 5-2) = (-1, 1, 3)$$

Ecuación del plano:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y & z-5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3(x-2) - 6y + 3(z-5) = 3x - 6y + 3z - 21 = 0$$

Simplificando, la ecuación del plano es $\pi\colon x - 2y + z = 7$, de vector normal (1, –2, 1). Al ser este plano tangente a la esfera el radio es la distancia del centro al plano:

$$d(C,\pi) = \left|\frac{ac1 + bc2 + cc3 + d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right| = \left|\frac{0 - 2(1) + 1(-3) - 7}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}}\right| = \left|\frac{-12}{\sqrt{6}}\right| = \frac{12\sqrt{6}}{6} = 2\sqrt{6}$$

Otra forma:

Buscamos ahora la recta perpendicular al plano que pasa por el centro de la esfera, tomando como punto en centro de la esfera C (0, 1, –3) y como vector director el perpendicular al plano:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 - 2t \\ z = -3 + t \end{cases}$$

Buscamos el punto de intersección de esta recta con el plano:

$$x - 2y + z = 7 \to t - 2(1-2t) + (-3+t) = 7 \to 6t = 7 + 5 = 12 \to t = 2 \to P4(2, -3, -1)$$

El radio de la esfera es la distancia del centro de la esfera a este punto:

$$d(P4, C) = \sqrt{(0-2)^2 + (1-(-3))^2 + (-3-(-1))^2} = \sqrt{4+16+4} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

El radio de la esfera mide $\mathbf{2\sqrt{6}}$ unidades

Autor: Álvaro Garmendia Antolín
www.apuntesmareaverde.org.es

Problema P3:

Calcula las integrales indefinidas: a) $\int \frac{x-7}{x^2+x-6}\boldsymbol{dx}$*; b)* $\int \boldsymbol{e^{2x} sin(2x-1)\,dx}$

Soluciones:

a) La primera integral es una integral racional por lo que la descomponemos en fracciones simples

$$\int \frac{x-7}{x^2+x-6}dx \to x^2+x-6=(x+3)(x-2) \to \frac{x-7}{x^2+x-6}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-2}$$
$$=\frac{A(x-2)+B(x+3)}{(x+3)(x-2)} \to A(x-2)+B(x+3)=x-7$$
$$\to \begin{cases} A+B=1 \\ -2A+3B=-7 \end{cases} \to \begin{cases} A=2 \\ B=-1 \end{cases} \to \frac{x-7}{x^2+x-6}=\frac{2}{x+3}+\frac{-1}{x-2}$$

$$\int \frac{x-7}{x^2+x-6}dx=\int\left(\frac{2}{x+3}+\frac{-1}{x-2}\right)dx=2Ln(x+3)-Ln(x-2)+C=Ln\frac{(x+3)^2}{x-2}+C$$

$$\boldsymbol{\int \frac{x-7}{x^2+x-6}dx = Ln\frac{(x+3)^2}{x-2}+C}$$

b) $\int \boldsymbol{e^{2x} sin(2x-1)\,dx}$

Esta integral se puede hacer por partes:

El método de integración por partes se basa en la derivada del producto de dos funciones:

$(uv)'=v\cdot u'+u\cdot v'=u\cdot v'+v\cdot u'$, luego integrando término a término:

$\int (uv)'dx = uv = \int((u\cdot v')dx+(v\cdot u')dx)=\int(u\cdot dv+v\cdot du)$.

La fórmula de la integración por partes queda, por tanto: $\int u\cdot dv = uv - \int v\cdot du$

Buscamos las funciones *u* y *v* teniendo en cuenta que *u* lo debemos derivar y *v*, integral.

Llamamos $u = e^{2x}$, luego $du = 2e^{2x}\,dx$; $dv = sen(2x+1)dx$, luego $v = (-1/2)\,cos(2x+1)$

$$\int \mathbf{e^{2x}}\,sin(\mathbf{2x-1})\,\mathbf{dx} = e^{2x}\cdot\frac{-1}{2}cos(2x+1)-\int\frac{-1}{2}cos(2x+1)\cdot 2\cdot e^{2x}dx$$
$$= e^{2x}\cdot\frac{-1}{2}cos(2x+1)+\int cos(2x+1)\cdot e^{2x}dx$$

Repetimos el proceso siendo ahora *dv* el coseno: $dv = cos(2x+1)dx$, luego $v = (1/2)\,sen(2x+1)$

$$\int cos(2x+1)\cdot e^{2x}dx$$
$$= e^{2x}\frac{1}{2}sen(2x+1)-\int\frac{1}{2}sen(2x+1)\cdot 2\cdot e^{2x}dx$$
$$= e^{2x}\cdot\frac{1}{2}sen(2x+1)-\int sen(2x+1)\cdot e^{2x}dx$$

Llamamos I a la integral pedida y sustituimos:

$$I = e^{2x}\cdot\frac{-1}{2}cos(2x+1)+e^{2x}\frac{1}{2}sen(2x+1)-I \to 2I=\frac{e^{2x}}{2}(sen(2x+1)-\cos(2x+1))+C$$

$$\boldsymbol{\int e^{2x}\,sen(2x-1)\,dx = \frac{e^{2x}}{2}(sen(2x+1)-cos(2x+1))+C}$$

Problema P4:

Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} + ln\frac{x^2+2}{3} & x < 1 \\ \frac{x^2}{3} & x \geq 1 \end{cases}$

a) *Demuestra que la función es derivable en todo R.*

b) *Demuestra que existe $\alpha \in (0, 2)$ tal que $f'(\alpha) = 1$. Enuncia el (los) resultado(s) teórico(s) utilizado(s) y justifica su uso.*

Soluciones:

a) Debemos probar que la función es continua en todo R y que además existe la derivada. Es una función definida a trozos. La primera rama es una función logarítmica que no sería continua si se aplica a valores negativos o cero. Pero $\frac{x^2+2}{3}$ es siempre positiva. La segunda rama es una parábola, una función polinómica que es siempre continua. Nos queda comprobar que ocurre en el punto de unión de ambas ramas, es decir, en $x = 1$.

$\frac{1}{3} + ln\frac{x^2+2}{3}$ para $x = 1$, $\frac{1}{3} + ln\frac{1+2}{3} = \frac{1}{3} + ln\frac{3}{3} = \frac{1}{3} + \ln(0) = \frac{1}{3}$

$\frac{x^2}{3}$ para $x = 1$, es también $\frac{1}{3}$, luego la función es continua en toda la recta real.

Estudiamos la derivabilidad:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{\frac{2x}{3}}{ln\frac{x^2+2}{3}} & x < 1 \\ \dfrac{2x}{3} & x > 1 \end{cases}$$

Ya hemos visto que la función $ln\frac{x^2+2}{3}$ es continua en todo R y no se anula nunca. La función $\frac{2x}{3}$ es polinómica y derivable. De nuevo el único punto dudoso es x = 1.

La función $ln\frac{x^2+2}{3}$ en x = 1, vale $ln\frac{x^2+2}{3} = \ln(0) = 1$. Luego $f'(1) = \frac{2(1)}{3} = \frac{2}{3}$ en las dos ramas. La función es derivable en toda la recta real.

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{\frac{2x}{3}}{ln\frac{x^2+2}{3}} & x < 1 \\ \dfrac{2x}{3} & x \geq 1 \end{cases}$$

La función $f'(x) - 1$ es también continua y derivable en toda la recta real, luego podemos usar el Teorema de Bolzano en cualquier intervalo, en particular en [0, 2].

b) El Teorema de Bolzano dice que, si una función es continua en un intervalo cerrado y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, entonces existe un valor en el interior del intervalo en el que la función se anula.

$$f'(0) - 1 = 0 - 1 = -1 < 0;\ f'(2) - 1 = \frac{4}{3} > 0$$

La función $f'(x) - 1$ es continua en [0, 2], y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo.

Luego existe un punto en el interior del intervalo dónde se anula $f'(x) - 1$, luego *f'*(α) – 1 = 0, *f'*(α) = 1.

Existe $\alpha \in (0, 2)$ tal que $f'(\alpha) = 1$.

Problema P5:

Sabiendo que la inversa de la matriz A es $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ *y la inversa de la matriz AB es* $\begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$*, determina la inversa de la matriz B.*

Soluciones:

La inversa de la inversa de una matriz, es la matriz de origen. Por tanto

$$(A \cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \to ((A \cdot B)^{-1})^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = A \cdot B$$

Calculamos la inversa:

El determinante vale –1.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\to A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \to \cdot B = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Problema P6:

Calcula la ecuación continua de la recta t sabiendo que corta perpendicularmente a las siguientes rectas: $r: \begin{cases} x+2y+z-1=0 \\ x+3z-7=0 \end{cases}$ *y* $s: \frac{x+2}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+3}{0}$

Soluciones:

Escribimos la ecuación paramétrica de la recta r, tomando a z como parámetro:

$$r: \begin{cases} (7-3z)+2y+z-1=0 \to 2y=2z-6 \\ x=7-3z \end{cases} \to \begin{cases} x=7-3t \\ y=-3+t \\ z=t \end{cases}$$

Conocemos, por tanto, ya un punto y el vector director de cada una de las rectas r y s.

$$\begin{cases} r: A(7,-3,0);\ \vec{v}=(-3,1,1) \\ s: B(-2,0,-3);\ \vec{w}=(2,1,0) \end{cases}$$

Los vectores directores NO son linealmente dependientes, pues no son proporcionales. Las rectas no son paralelas, luego o se cortan o se cruzan. Determinamos el vector $\overrightarrow{AB}$ y comprobamos si es coplanario o no con los vectores de dirección:

$$\overrightarrow{AB}=(-2-7,0-(-3),-3-0)=(-9,3,-3)\to(3,-1,1)$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-3-2-(2+3)=-6-4=-10\neq 0$$

Las rectas se cruzan. Buscamos un vector (a, b, c) que sea ortogonal a (-3, 1, 1) y a (2, 1, 0). Su producto escalar debe ser cero: *-3a + b +c = 0; 2a +b = 0*.

$$\begin{cases} -3a+b+c=0 \\ 2a+b=0\to b=-2a \end{cases} \to \begin{cases} -3a-2a+c=0\to c=5a \\ 2a+b=0\to b=-2a \end{cases} \to \begin{cases} a=a \\ b=-2a \\ c=5a \end{cases}$$

Es el vector (1, -2, 5). Buscamos ahora las ecuaciones de dos planos, uno que contenga a la recta r, y tenga como vector de orientación (1, -2, 5) y otro que contenga a la recta s, y también tenga a este vector como vector de orientación:

$$\pi 1: \begin{vmatrix} x-7 & y+3 & z \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix}=7(x-7)+16(y+3)+5z=7x+16y+5z-1=0$$

$$\pi 2: \begin{vmatrix} x+2 & y & z+3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix}=5(x+2)-10y-5(z+3)=5x-10y-5z-5=0\to \pi 2: x-2y-z=1$$

La recta buscada es: $\begin{cases} 7x+16y+5z=1 \\ x-2y-z=1 \end{cases}$. Nos piden su ecuación continua, luego debemos encontrar un punto y un vector de dirección:

$$\begin{cases} 7x+16y+5z=1 \\ x-2y-z=1 \end{cases} \to \begin{cases} 7x+5z=-16y+1 \\ x-z=2y+1 \end{cases} \to \begin{cases} 7x+5z=-16y+1 \\ 5x-5z=10y+5 \end{cases} \to \begin{cases} 12x=-6y+6 \\ x-z=2y+5 \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} x=-\left(\frac{1}{2}\right)y+1/2 \\ y=y \\ z=-1/2-(\frac{5}{2})y \end{cases}$$

La ecuación continua es: $t\equiv \frac{x-1/2}{-1/2}=y=\frac{z+1/2}{-5/2}$

Problema P7:

Calcula los extremos relativos de la función $f(x) = e^{\pi x} \cdot sen(\pi x)$ en el intervalo [1/2, 2]. Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso

Soluciones:

La función dada es el producto de dos funciones, una exponencial y otra trigonométrica, continuas y derivables en toda la recta real.

Para calcular los máximos y los mínimos relativos buscamos los puntos que anulan a la derivada primera:

$$f'(x) = \pi e^{\pi x} \cdot sen(\pi x) + e^{\pi x} \cdot \pi \cdot \cos(\pi x) = 0$$

La función exponencial no se anula nunca. Debemos resolver la ecuación:

$$sen(\pi x) + \cos(\pi x) = 0 \to \frac{sen(\pi x)}{cos(\pi x)} + 1 = 0 \to Tang(\pi x) = -1$$

$$\to \begin{cases} \pi x = 135° + 360°k = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi \to 2^{\underline{o}}\ cuadrante \\ \pi x = 315° + 360°k = \dfrac{7\pi}{4} + 2k\pi \to 4^{\underline{o}}\ cuadrante \end{cases} \to \begin{cases} x = \dfrac{3}{4} + 2k \\ x = \dfrac{7}{4} + 2k \end{cases}$$

En el intervalo [1/2, 2] están las soluciones 1/2 = 0.5 < 3/4 = 0.75 < 2 y 1/2 = 0.5 < 7/4 = 1.75 < 2.

Para saber si se trata de máximos o mínimos, podemos determinar los intervalos de crecimiento de la función, o utilizar la derivada segunda:

$$f'(x) = \pi e^{\pi x} \cdot sen(\pi x) + e^{\pi x} \cdot \pi \cdot \cos(\pi x) = \pi e^{\pi x} \cdot (sen(\pi x) + \cos(\pi x))$$

$$\to f''(x) = \pi^2 e^{\pi x}(sen(\pi x) + \cos(\pi x)) + \pi e^{\pi x} \cdot \big(\pi \cos(\pi x) - \pi sen(\pi x)\big) = \pi^2 e^{\pi x}(2\cos(\pi x))$$

$f''\left(\frac{3}{4}\right) = \pi^2 e^{\frac{3}{4}}\left(2\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}\pi^2 e^{\frac{3}{4}} < 0.$. Máximo relativo. $f(3/4) = e^{\pi 3/4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cong 7.46$

$f''\left(\frac{7}{4}\right) = \pi^2 e^{\frac{7}{4}}\left(2\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\pi^2 e^{\frac{7}{4}} > 0.$ Mínimo relativo. $f(7/4) = -e^{\pi 7/4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cong -172.64$

Para saber si son máximos o mínimos absolutos, tenemos que calcular el valor de la función en los extremos del intervalo:

$$f(1/2) = e^{\pi/2} \cdot sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}} \cong 4.81$$

$$f(2) = e^{2\pi} \cdot sen(2\pi) = 0$$

Por tanto: $-172.64 < 0 < 4.81 < 7.46$, luego (3/4, $e^{\pi 3/4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$) es el máximo absoluto y $(\frac{7}{4}, -e^{\pi 7/4})$ es el mínimo absoluto.

El punto (3/4, $e^{\pi 3/4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$) es el máximo absoluto y $(\frac{7}{4}, -e^{\pi 7/4})$ es el mínimo absoluto

Problema P8:

Sean las funciones $f(x) = \frac{x}{2} + 1$ *y* $g(x) = \sqrt{x-2} + 2$*. Encuentra los dos puntos en los que se cortan sus gráficas, y calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas.*

Soluciones:

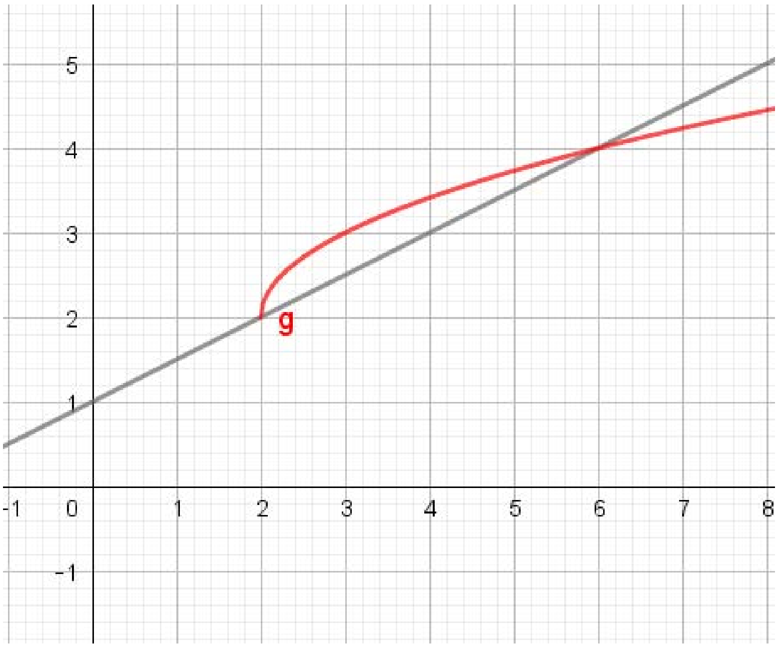
La primera función es una recta. La segunda, una función racional. Buscamos los puntos de intersección:

$$f(x) = g(x) \to \frac{x}{2} + 1 = \sqrt{x-2} + 2 \to \sqrt{x-2} = \frac{x}{2} - 1 = \frac{x-2}{2}$$

Elevamos al cuadrado:

$$x - 2 = \left(\frac{x-2}{2}\right)^2 = \frac{(x-2)^2}{4} \to 4(x-2) = (x-2)^2 \to$$

Una solución es $x - 2 = 0 \to x = 2, \to\ (2, 2)$ y la otra: $4 = x - 2 \to x = 6 \to (6, 4)$



En el intervalo [2, 6] la función raíz está por encima de la recta.

Luego área de la región pedida viene dada por la integral:

$$\int_2^6 (g(x) - f(x))dx = \int_2^6 (\sqrt{x-2} + 2 - (\frac{x}{2} + 1))dx$$

$$= \int_2^6 (\sqrt{x-2} + 1 - \frac{x}{2})dx = \left[\frac{(x-2)^{3/2}}{3/2} + x - \frac{x^2}{4}\right]_2^6$$

$$= \left(\frac{(4)^{3/2}}{3/2} + 6 - \frac{6^2}{4}\right) - \left(\frac{(0)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 2 - \frac{4^2}{4}\right) = \left(\frac{8}{\frac{3}{2}} + 6 - 9\right) - (2 - 1) = \left(\frac{16}{3} - 3\right) - 1$$

$$= \frac{16}{3} - 4 = \frac{4}{3} \cong 1.3333$$

El área de la región encerrada es de **4/3** ≅ **1.3333 u²**.