MATEMÁTICAS II

Selectividad 2020

Comunidad autónoma de

MURCIA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano Corbacho

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

UNIVERSIDAD DE MURCIA — Región de Murcia — Universidad Politécnica de Cartagena

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

206-MATEMÁTICAS II

EBAU2020 - **JULIO**

OBSERVACIONES IMPORTANTES: Se debe responder a un máximo de 4 cuestiones y no es necesario hacerlo en el mismo orden en que están enunciadas. Cada cuestión tiene una puntuación de 2,5 puntos. Si se responde a más de 4 cuestiones, sólo se corregirán las cuatro primeras, en el orden que haya respondido el estudiante. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a:

$$\begin{cases} x + y - z = 4 \\ x + a^2 y - z = 3-a \\ x - y + az = 1 \end{cases}$$

a) **[1 p.]** Determine para qué valores de a el sistema tiene solución única. Si es posible, calcule dicha solución para $a = 0$.

b) **[1 p.]** Determine para qué valor de a el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

c) **[0,5 p.]** Determine para qué valor de a el sistema no tiene solución.

2: Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) **[1 p.]** Compruebe que las matrices A y B son regulares (o inversibles) y calcule sus matrices inversas.

b) **[1,5 p.]** Resuelva la ecuación matricial $AXB = A^t - 3B$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

3: **[2,5 p.]** De entre todos los triángulos rectángulos cuya hipotenusa mide 4 metros, determine las dimensiones de aquel cuya área es máxima. ¿Cuál es el valor de dicha área máxima?

4: a) **[2 p.]** Calcule la integral indefinida $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$.

b) **[0,5 p.]** Determine el área del recinto limitado por el eje OX, la gráfica de la función $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ y la recta vertical $x = 1$.

5: Se llama **mediana** de un triángulo a cada una de las rectas que pasan por un vértice del triángulo y por el punto medio del lado opuesto a dicho vértice.

a) **[1,5 p.]** Calcule las ecuaciones de las tres medianas del triángulo de vértices $A = (-1,2,3)$, $B = (3,-4,1)$ y $C = (1,-4,5)$.

b) **[1 p.]** Compruebe que las tres medianas se cortan en un punto y calcule las coordenadas de dicho punto.

El examen continúa por detrás

6: Considere la recta r y el plano π dados por las siguientes ecuaciones:

$$r: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{0} \qquad \text{y} \qquad \pi: x-2y-z=4.$$

a) **[1 p.]** Estudie la posición relativa de la recta y el plano.

b) **[0,5 p.]** En caso de que la recta corte al plano, calcule el punto de corte y el ángulo que forman. En caso contrario, calcule la distancia entre la recta y el plano.

c) **[1 p.]** Determine el plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π.

7: Una urna tiene 2 bolas blancas y 3 bolas rojas. Consideramos la variable aleatoria que cuenta el número de bolas blancas que se obtienen al repetir nueve veces el siguiente experimento: se saca una bola de la urna y, después de anotar el color, se devuelve la bola a la urna.

a) **[1 p.]** ¿Qué tipo de distribución sigue dicha variable aleatoria y cuáles son sus parámetros?

b) **[0,5 p.]** ¿Cuál es la media y la desviación típica de esta distribución?

c) **[1 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que el número de bolas anotado sea menor o igual que 4?

8: En una determinada población, el 40 % de los individuos lee diariamente la prensa y el 75 % ve diariamente las noticias en la televisión. Además, el 25 % de los individuos lee la prensa y ve las noticias en la televisión diariamente.

a) **[0,5 p.]** ¿Son independientes los sucesos "leer diariamente la prensa" y "ver diariamente las noticias en la televisión"?

b) **[1 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que un individuo lea la prensa diariamente pero no vea las noticias en la televisión?

c) **[1 p.]** Si un individuo lee la prensa diariamente, ¿cuál es la probabilidad de que también vea las noticias en la televisión?

UNIVERSIDAD DE MURCIA — Región de Murcia — Universidad Politécnica de Cartagena

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
206-MATEMÁTICAS II
EBAU2020 - **JULIO**

CRITERIOS DE CALIFICACIÓN

OBSERVACIONES GENERALES:

El corrector deberá ajustarse a los criterios de evaluación establecidos en este documento y en la reunión correspondiente. En ningún caso se podrá puntuar por encima de la valoración indicada en cada apartado. Se procurará que, en lo posible, los errores en un apartado no afecten a otros apartados.

Los errores simples de cálculo restarán 0,25 puntos. Los errores importantes de cálculo o errores simples reiterados pueden conllevar puntuación 0 en ese apartado. Si un error simple ha llevado a un problema más sencillo se disminuirá la puntuación.

Las preguntas contestadas correctamente sin incluir el desarrollo necesario para llegar a su resolución serán valoradas con 0 puntos.

Se valorará el correcto uso del vocabulario y de la notación. El alumno puede elegir el método que considere más oportuno para la resolución de una cuestión pero, si esto demuestra la falta de comprensión de conocimientos básicos, la puntuación final puede ser menor que la indicada para dicha cuestión.

OBSERVACIONES PARTICULARES:

CUESTIÓN 1: [2,5 p.]
Apartado a) Justificación correcta y razonada de que el sistema tiene solución única (SCD) para todo valor de a distinto de 1 y de -1 **[0,5 p.]**. Cálculo correcto de esa solución única cuando $a=0$ **[0,5 p.]**.
Apartado b) Justificación correcta y razonada de que el sistema tiene infinitas soluciones (SCI) cuando $a=-1$ **[0,5 p.]**. Cálculo correcto de dicha solución dependiente de un parámetro **[0,5 p.]**.
Apartado c) Justificación correcta y razonada de que el sistema no tiene solución (SI) cuando $a=1$ **[0,5 p.]**.

CUESTIÓN 2: [2,5 p.]
Apartado a) Justificación de que A y B son matrices regulares **[0,5 p.]**. Cálculo correcto de sus matrices inversas **[0,5 p.]**.
Apartado b) Expresión correcta de X en términos A^{-1}, B^{-1} y A^t-3B **[0,5 p.]**. Cálculo correcto de la solución numérica **[1 p.]**.

CUESTIÓN 3: [2,5 p.] Cálculo correcto de la función a maximizar en función de una variable **[0,5 p.]**.
Cálculo correcto de la derivada de la función a maximizar **[0,5 p.]**.
Cálculo correcto del único punto crítico de la función a maximizar (y candidato a ser máximo) $x=2\sqrt{2}$ **[0,25 p.]**.
Justificación de que se trata de un punto de máximo **[0,5 p.]**.
Cálculo de la dimensiones del triángulo: cateto$_1$ = cateto$_2$ $=2\sqrt{2}$ e hipotenusa $=4$ **[0,5 p.]**.
Cálculo correcto del área máxima $=4u^2$ **[0,25 p.]**.

UNIVERSIDAD DE MURCIA — Región de Murcia — Universidad Politécnica de Cartagena

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
206-MATEMÁTICAS II
EBAU2020 - **JULIO**

CUESTIÓN 4: [2,5 p.]
Apartado a) Cálculo correcto y justificado de la integral indefinida **[2 p.]**.
Apartado b) Cálculo correcto del área, estudiando el signo de la función $f(x)$ y aplicando la regla de Barrow **[0,5 p.]**.

CUESTIÓN 5: [2,5 p.]
Apartado a) Cálculo correcto de las medianas: **[0,5 p.]** cada una de las tres medianas. Total **[1,5 p.]**.
Apartado b) Cálculo correcto del punto de corte de dos de las medianas **[0,5 p.]**. Comprobación de que la tercera mediana también pasa por ese punto **[0,5 p.]**.

CUESTIÓN 6: [2,5 p.]
Apartado a) Justificación correcta y razonada de que la recta es paralela al plano **[1 p.]**.
Apartado b) Cálculo correcto de la distancia entre la recta y el plano **[0,5 p.]**.
Apartado c) Cálculo correcto y razonado del plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π **[1 p.]**.

CUESTIÓN 7: [2,5 p.]
Apartado a) Justificación de que se trata de una distribución binomial de parámetros $n = 9$ y $p = 0,40$ **[1 p.]**.
Apartado b) Cálculo correcto de la media **[0,25 p.]** y de la desviación típica **[0,25 p.]**.
Apartado c) Cálculo correcto de la probabilidad pedida **[1 p.]**.

CUESTIÓN 8: [2,5 p.]
Apartado a) Justificación de que los sucesos no son independientes **[0,5 p.]**.
Apartado b) Cálculo correcto y justificado de la probabilidad pedida **[1 p.]**.
Apartado c) Cálculo correcto y justificado de la probabilidad pedida **[1 p.]**.

CONVOCATORIA ORDINARIA

Problema.1:

1º) Considere el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+y-z=4 \\ x+a^2y-z=3-a \\ x-y+az=1 \end{cases}$ en función del parámetro a.

a) Determine para qué valores de a, el sistema tiene solución única. Si es posible, calcule dicha solución para $a=0$.

b) Determine para qué valor de a el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

c) Determine para qué valor de a el sistema no tiene solución.

Solución:

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & a^2 & -1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & a^2 & -1 & 3-a \\ 1 & -1 & a & 1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & a^2 & -1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix}=a^3+1-1+a^2-1-a=$$

$$=a^3+a^2-a-1=0.$$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & & 1 & 2 & 1 \\ \hline & 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & & -1 & -1 & \\ \hline & 1 & 1 & 0 & \end{array}$$

Resolviendo por la regla de Ruffini, las raíces son: $x_1=1, x_2=x_3=-1$.

$$a)\ Para \begin{Bmatrix} a\neq 1 \\ a\neq -1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.$$

Si $\boldsymbol{a\neq 1}$ y $\boldsymbol{a\neq -1}$ el sistema es compatible determinado.

Para $a=0$ el sistema resulta $\begin{cases} x+y-z=4 \\ x-z=3 \\ x-y=1 \end{cases}$, que es compatible determinado. Resolviendo por Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}}=\frac{3-1-4}{1-1-1}=\frac{-2}{-1}=2. \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-1}=\frac{-1-4+3+1}{-1}=\frac{-1}{-1}=1.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-1}=\frac{-4+3+3-1}{-1}=\frac{+1}{-1}=-1.$$

$$Si\ \boldsymbol{a=0}: \boldsymbol{x=2, y=1, z=-1}$$

$b)\ Para\ a=-1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 4\\ 1 & 1 & -1 & 4\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1=F_2\} \Rightarrow Rang\ M'=2.$

$\underline{Para\ a=-1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < n^{\underline{o}}\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$

Para $a=-1$ el sistema resulta $\begin{cases}x+y-z=4\\ x+y-z=4\\ x-y-z=1\end{cases}$, que es compatible indeterminado y equivalente al sistema $\left.\begin{matrix}x+y-z=4\\ x-y-z=1\end{matrix}\right\}$.

Para resolverlo se hace $z=\lambda$: $\left.\begin{matrix}x+y=4+\lambda\\ x-y=1+\lambda\end{matrix}\right\} \Rightarrow 2x=5+2\lambda;\ \ x=\frac{5}{2}+\lambda.$

$x+y=4+\lambda;\ \frac{5}{2}+\lambda+y=4+\lambda;\ \ y=4-\frac{5}{2}=\frac{3}{2}.$

$\underline{Solución: x=\frac{5}{2}+\lambda, y=\frac{3}{2}, z=\lambda, \forall\lambda\in R.}$

Si $a=-1$ el sistema es compatible indeterminado, de solución: $\boldsymbol{x=\frac{5}{2}+\lambda, y=\frac{3}{2}, z=\lambda}, \forall\lambda\in R$

$c)\ Para\ a=1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 4\\ 1 & 1 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 1 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{vmatrix}1 & 1 & 4\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix} = 1-4+2-4+2-1=-4\neq 0 \Rightarrow Rang\ M'=3.$

$\underline{Para\ a=1 \Rightarrow Rang\ M=2;\ Rang\ M'=3 \Rightarrow Sistema\ incompatible}$

Si $a=1$ el sistema es incompatible

Problema.2:

2º) Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$a)$ Compruebe que las matrices A y B son regulares (o invertibles) y calcule sus matrices inversas.

$b)$ Resuelve la ecuación matricial $AXB = A^t - 3B$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

Solución:

$a)$ Una matriz es regular o invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 3 = -1 \neq 0.$$

$$|B| = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 3 = 1 \neq 0.$$

$$\underline{Queda\ comprobado\ que\ las\ matrices\ A\ y\ B\ son\ regulares\ (o\ invertibles).}$$

$|A| = -1.$ $A^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$. $Adj. de\ A^t = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$A^{-1} = \frac{Adj. de\ B^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}{-1} = \underline{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}}.$$

Se obtiene la inversa de B por el método de Gauss-Jordan.

$$(B|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_2 \to F_2 + F_1\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \to -2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_1 \to F_1 - 2F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \underline{B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}.$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix};\ B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$b)$ $AXB = A^t - 3B;\ \ A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot (A^t - 3B) \cdot B^{-1};$

$I \cdot X \cdot I = A^{-1} \cdot (A^t - 3B) \cdot B^{-1} \Rightarrow X = A^{-1} \cdot (A^t - 3B) \cdot B^{-1}.$ (*)

$$A^t - 3B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & -9 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo en (*) los valores obtenidos anteriormente:

$$X = A^{-1} \cdot (A^t - 3B) \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} =$$

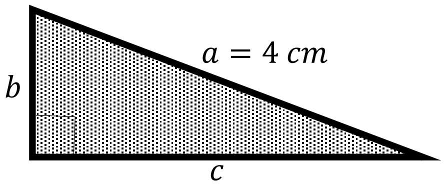
$$= \begin{pmatrix} 10 & -8 \\ -5 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{X = \begin{pmatrix} 28 & 38 \\ -18 & -23 \end{pmatrix}}.$$

$$X = \begin{pmatrix} 28 & 38 \\ -18 & -23 \end{pmatrix}$$

Problema.3:

3º) De entre todos los triángulos rectángulo cuya hipotenusa mide 4 metros, determine las dimensiones de aquel cuya área es máxima. ¿Cuál es el valor de dicha área máxima?

Solución:



Solución: Superficie: $S = \frac{b \cdot c}{2} \Rightarrow Máxima.$

Por el teorema de Pitágoras: $4^2 = b^2 + c^2$.

$c = \sqrt{16 - b^2}$. Sustituyendo en la superficie:

$S(b) = \frac{b \cdot \sqrt{16-b^2}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{16b^2 - b^4}.$

La superficie será máxima cuando se anule su primera derivada:

$S'(b) = \frac{1}{2} \cdot \frac{32b-4b^3}{2 \cdot \sqrt{16b^2-b^4}} = 0 \Rightarrow 32b - 4b^3 = 0;\ \ 4b(8 - b^2) = 0 \Rightarrow$

$b_1 = 0;\ \ 8 - b^2 = 0;\ \ b = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2} \Rightarrow b_2 = -2\sqrt{2}, b_3 = 2\sqrt{2}.$

La solución $b = 0$ es para mínimo.

El valor negativo carece de sentido lógico, por lo cual: $b = 2\sqrt{2}$.

$c = \sqrt{16 - b^2} = \sqrt{16 - 8} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$

$S = \frac{b \cdot c}{2} = \frac{2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}}{2} = 2 \cdot 2 = 4.$

$\underline{Triángulo\ rectángulo\ isósceles\ de\ catetos\ \boldsymbol{b = c = 2\sqrt{2}\ cm}\ y\ \boldsymbol{4\ cm^2}\ de\ área}$

Problema.4:

4º) a) Calcule la siguiente integral indefinida: $I = \int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \cdot dx$.

b) Determine el área del recinto limitado por el eje OX, la gráfica de la función $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ y la recta vertical $x = 1$.

Solución:

a) $I = \int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} 1+\sqrt{x} = t \rightarrow \sqrt{x} = t-1 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot dx = dt \Rightarrow dx = 2(t-1) \cdot dt \end{array} \right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \int \frac{t-1}{t} \cdot 2(t-1) \cdot dt = 2 \cdot \int \frac{t^2-2t+1}{t} \cdot dt = 2 \cdot \int \left(t - 2 + \frac{1}{t}\right) \cdot dt =$

$= 2 \cdot \left(\frac{t^2}{2} - 2t + Lt\right) + C = 2 \cdot \left[\frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}{2} - 2 \cdot \left(1+\sqrt{x}\right) + L\left(1+\sqrt{x}\right)\right] + C =$

$= 1 + 2\sqrt{x} + x - 4 - 4\sqrt{x} + 2L\left(1+\sqrt{x}\right) + C.$

$$\underline{I = \int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \cdot dx = x - 2\sqrt{x} - 3 + 2L\left(1+\sqrt{x}\right) + C.}$$

$$I = \int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \cdot dx = x - 2\sqrt{x} + 2L\left|1+\sqrt{x}\right| + C$$

b) La función $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ corta al eje OX, únicamente, en el origen de coordenadas y, en el intervalo $(0, 1)$ todas las ordenadas de la función son positivas, por lo cual, la superficie a calcular es la siguiente:

$S = \int_0^1 f(x) \cdot dx = \left[x - 2\sqrt{x} - 3 + 2L\left(1+\sqrt{x}\right)\right]_0^1 =$

$= \left[1 - 2\sqrt{1} - 3 + 2L\left(1+\sqrt{1}\right)\right] - \left[0 - 2\sqrt{0} - 3 + 2L\left(1+\sqrt{0}\right)\right] =$

$= -2 - 2 + 2L2 + 3 - 2L1 = 2L2 - 1 - 0.$

$$\underline{S = \boldsymbol{(2L2 - 1)\ u^2} \cong 0.38629\ u^2.}$$

Problema 5:

5º) Se llama *mediana* de un triángulo a cada una de las rectas que pasan por un vértice del triángulo y por el punto medio del lado opuesto a dicho vértice.

a) Calcule las ecuaciones de las tres medianas del triángulo de vértices $A(-1,2,3)$, $B(3,-4,1)$ y $C(1,-4,5)$.

b) Compruebe que las tres medianas se cortan en un punto y calcule las coordenadas de dicho punto.

Solución:

a) Punto medio de $AB \Rightarrow M(1,-1,2)$.

Punto medio de $AC \Rightarrow N(0,-1,4)$.

Punto medio de $BC \Rightarrow P(2,-4,3)$.

Vector director de $r_{CM} \Rightarrow \overrightarrow{v_{CM}} = [M - C] = [(1,-1,2) - (1,-4,5)] = (0,3,-3)$.

Vector director de $r_{BN} \Rightarrow \overrightarrow{v_{BN}} = [N - B] = [(0,-1,4) - (3,-4,1)] = (-3,3,3)$.

Vector director de $r_{AP} \Rightarrow \overrightarrow{v_{AP}} = [P - A] = [(2,-4,3) - (-1,2,3)] = (3,-6,0)$.

Las ecuaciones paramétricas de las tres medianas son las siguientes:

$$\underline{r_{CM} \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = -4 + 3\lambda. \\ z = 5 - 3\lambda \end{cases}} \quad \underline{r_{BN} \equiv \begin{cases} x = 3 - 3\mu \\ y = -4 + 3\mu. \\ z = 1 + 3\mu \end{cases}} \quad \underline{r_{AP} \equiv \begin{cases} x = -1 + 3\delta \\ y = 2 - 6\delta \\ z = 3 \end{cases}}.$$

b) Punto de corte de las medianas r_{CM} y r_{BN}: $\left.\begin{cases} 1 = 3 - 3\mu \\ -4 + 3\lambda = -4 + 3\mu \\ 5 - 3\lambda = 1 + 3\mu \end{cases}\right\}.$

$1 = 3 - 3\mu;\ \ 3\mu = 2 \Rightarrow \mu = \frac{2}{3}.$

$-4 + 3\lambda = -4 + 3\mu;\ \ -4 + 3\lambda = -4 + 2;\ \ 3\lambda = 2 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{3}.$

Punto de corte de las medianas r_{CM} y r_{BN} $\Rightarrow D(1,-2,3)$.

Punto de corte de las medianas r_{CM} y r_{AP}: $\left.\begin{cases} 1 = -1 + 3\delta \\ -4 + 3\lambda = 2 - 6\delta \\ 5 - 3\lambda = 3 \end{cases}\right\}.$

$1 = -1 + 3\delta;\ \ 3\delta = 2 \Rightarrow \delta = \frac{2}{3}.$

$5 - 3\lambda = 3;\ \ 3\lambda = 2 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{3}.$

Punto de corte de las medianas r_{CM} y r_{AP} $\Rightarrow D(1,-2,3)$.

$$\underline{\mathit{Queda\ comprobado\ que\ las\ medianas\ se\ cortan\ en\ el\ punto\ } D(1,-2,3).}$$

Problema 6:

6º) Considere la recta $r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{0}$ y el plano $\pi \equiv x - 2y - z = 4$:

a) Estudie la posición relativa de la recta y el plano.

b) En caso de que la recta corte al plano, calcule el punto de corte y el ángulo que forman. En caso contrario, calcule la distancia entre la recta y el plano.

c) Determine el plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π.

Solución:

a) La expresión de r dada por unas ecuaciones implícitas es la siguiente:

$$r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{0} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+1 = 2y-4 \\ z-1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x - 2y = -5 \\ z = 1 \end{cases}.$$

La recta r y el plano π determinan el sistema $\left.\begin{array}{r} x - 2y = -5 \\ z = 1 \\ x - 2y - z = 4 \end{array}\right\}$.

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Según sean los rangos de M y M’ pueden presentarse los siguientes casos:

$1 \to Rang\ M = Rang\ M' = 2 \Rightarrow La\ recta\ está\ contenida\ en\ el\ plano.$

$2 \to Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow La\ recta\ es\ paralela\ al\ plano.$

$3 \to Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow La\ recta\ y\ el\ plano\ son\ secantes.$

$$Rang\ M \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow \{C_2 = -2C_1\} \Rightarrow Rang\ M = 2.$$

$$Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_3, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 5 + 1 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ son\ paralelos$$

b) La distancia entre r y π es la misma que la distancia de un punto de la recta r al plano π. Un punto de la recta r es $P(-1, 2, 1)$.

La distancia de un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula $d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Aplicando la fórmula al punto $P(-1, 2, 1)$ y al plano $\pi \equiv x - 2y - z - 4 = 0$:

$$d(r, \pi) = d(P, \pi) = \frac{|1\cdot(-1) - 2\cdot 2 - 1\cdot 1 - 4|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{|-1-4-1-4|}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{|-10|}{\sqrt{6}} = \frac{10\sqrt{6}}{6} = \frac{5\sqrt{6}}{3}\ unidades.$$

$$d(r, \pi) = d(P, \pi) = \frac{|-10|}{\sqrt{6}} = \frac{10\sqrt{6}}{6} = \frac{\mathbf{5\sqrt{6}}}{\mathbf{3}}\ unidades = \mathbf{4.083}\ u.$$

$c)$ Un vector normal del plano π es $\vec{n} = (1, -2, -1)$.

Un punto y un vector director de r son $\overrightarrow{v_r} = (2, 1, 0)$ y $P(-1, 2, 1)$.

El plano β que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π tiene la siguiente expresión general: $\beta(P;\ \vec{n}, \overrightarrow{v_r}) \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0;$

$-2(y-2) + (z-1) + 4(z-1) + (x+1) = 0;\ -2y + 4 + 5z - 5 + x + 1 = 0.$

$$\underline{\beta \equiv x - 2y + 5z = 0}.$$

Problema 7:

7º) Una urna tiene 2 bolas blancas y 3 bolas negras. Consideramos la variable aleatoria que cuenta el número de bolas blancas que se obtienen al repetir nueve veces el siguiente experimento: se saca una bola de la urna y, después de anotar el color, se devuelve la bola a la urna.

a) ¿Qué tipo de distribución sigue dicha variable aleatoria y cuáles son sus parámetros?

b) ¿Cuál es la media y la desviación típica de esta distribución?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que el número de bolas anotado sea menor o igual que 4?

Solución:

----

a)

$\underline{Se\ trata\ de\ una\ distribución\ binomial\ de\ parámetros\ n = 9; p = \frac{2}{5} = 0.4\ y\ q = \frac{3}{5} = 0.6.}$

$$P(X = k) = \binom{9}{k} \cdot 0.4^k \cdot 0.6^{9-k} = \frac{9!}{k! \cdot 4(9-k)!} \cdot 0.4^k \cdot 0.6^{9-k}$$

b) La media y la desviación típica en una distribución binomial vienen dadas por las siguientes expresiones:

$\mu = n \cdot p = 9 \cdot 0.4 \Rightarrow \underline{\mu = 3.6}.$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{9 \cdot 0.4 \cdot 0.6} = \sqrt{2.16} \Rightarrow \underline{\sigma \cong 1.4697}.$

Media: $\mu = \mathbf{3.6}$. Desviación típica: $\sigma \cong \mathbf{1.47}$

c) $P = P(X \leq 4) = P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4) =$

$= \binom{9}{0} \cdot 0.4^0 \cdot 0.6^9 + \binom{9}{1} \cdot 0.4^1 \cdot 0.6^8 + \binom{9}{2} \cdot 0.4^2 \cdot 0.6^7 + \binom{9}{3} \cdot 0.4^3 \cdot 0.6^6 +$

$+ \binom{9}{4} \cdot 0.4^4 \cdot 0.6^5 = 1 \cdot 1 \cdot 0.0101 + 9 \cdot 0.4 \cdot 0.0168 + \frac{9!}{7! \cdot 2!} \cdot 0.16 \cdot 0.0278 +$

$+ \frac{9!}{6! \cdot 3!} \cdot 0.064 \cdot 0.0467 + \frac{9!}{5! \cdot 4!} \cdot 0.0256 \cdot 0.0778 =$

$= 0.0101 + 0.0605 + 36 \cdot 0.0045 + 84 \cdot 0.0030 + 126 \cdot 0.0020 =$

$= 0.0101 + 0.0605 + 0.1612 + 0.2508 + 0.2508 = \underline{0.7334}.$

$\boldsymbol{P(X \leq 4) = 0.7334}$

Problema 8:

8º) En una determinada población, el 40 % de los individuos lee diariamente la prensa y el 75 % ve diariamente las noticias en la televisión. Además, el 25 % de los individuos lee la prensa y ve las noticias en la televisión diariamente.

a) ¿Son independientes los sucesos "leer diariamente la prensa" y "ver diariamente las noticias en la televisión"?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un individuo lea la prensa diariamente pero no vea las noticias en la televisión?

c) Si un individuo lee la prensa diariamente, ¿cuál es la probabilidad de que también vea las noticias de la televisión?

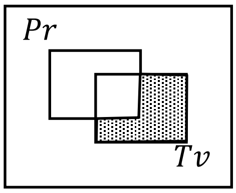
Solución:

$$Datos: P(pr) = 0{,}40;\ \ P(tv) = 0{,}75;\ \ P(pr \cap tv) = 0{,}25.$$

a) Dos sucesos A y B son independientes cuando $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$:

$$P(Pr) \cdot P(Tv) = 0.4 \cdot 0.75 = 0.3 \neq 0.25 = P(Pr \cap Tv).$$

$$\underline{Los\ sucesos\ (Pr)\ y\ (Tv)\ no\ son\ independientes}.$$



b)

$$P = P(Pr \cap \overline{Tv}) = P(Pr) - P(Pr \cap Tv) = 0.40 - 0.25 = \underline{0.15}.$$

La probabilidad de que un individuo lea la prensa diariamente pero no vea las noticias en la televisión es **0.15**.

c)

$$P(Tv|Pr) = \frac{P(Tv \cap Pr)}{P(Pr)} = \frac{0{,}25}{0{,}40} = \underline{0{,}625}.$$

Si un individuo lee la prensa diariamente, la probabilidad de que también vea las noticias de la televisión es **0.625**.

UNIVERSIDAD DE MURCIA — Región de Murcia — Universidad Politécnica de Cartagena

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
206-MATEMÁTICAS II
EBAU2020 - **SEPTIEMBRE**

OBSERVACIONES IMPORTANTES: Se debe responder a un máximo de 4 cuestiones y no es necesario hacerlo en el mismo orden en que están enunciadas. Cada cuestión tiene una puntuación de 2,5 puntos. Si se responde a más de 4 cuestiones, sólo se corregirán las cuatro primeras, en el orden que haya respondido el estudiante. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - ay + a^2 z = -1 \\ -ax + a^2 y - a^3 z = 2 \end{cases}$$

a) **[1 p.]** Compruebe que el sistema nunca tiene solución única.

b) **[1 p.]** Determine para qué valores de a el sistema tiene infinitas soluciones.

c) **[0,5 p.]** Si es posible, resuélvalo para el valor de $a = 2$.

2: Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) **[1 p.]** Calcule las potencias sucesivas A^2, A^3, A^4, A^5 y A^6.

b) **[1 p.]** Calcule A^{2020}.

c) **[0,5 p.]** Compruebe que la matriz A es regular (o inversible) y calcule su inversa.

3: Calcule los siguientes límites:

a) **[1,25 p.]** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(3+x) - \ln(3-x)}{2x}$.

b) **[1,25 p.]** $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2})$.

4: a) **[2 p.]** Calcule la integral indefinida $\int \ln(1+x^2)\, dx$.

b) **[0,5 p.]** Calcule la integral definida $\int_0^1 \ln(1+x^2)\, dx$.

El examen continúa por detrás

UNIVERSIDAD DE MURCIA — Región de Murcia — Universidad Politécnica de Cartagena

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

206-MATEMÁTICAS II

EBAU2020 - **SEPTIEMBRE**

5: Considere los puntos $P=(5,6,1)$ y $Q=(-3,-2,5)$, y la recta

$$r:\frac{x}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{4}.$$

a) **[1,5 p.]** Determine el punto R de la recta r para el cual el área del triángulo $\widehat{PQR}$ es $18\sqrt{2}$ unidades cuadradas.

Observación: hay dos puntos R que son solución del apartado a); basta con encontrar uno de ellos.

b) **[1 p.]** Calcule la ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q y compruebe que dicha recta corta perpendicularmente a la recta r.

6: Considere las rectas r y s dadas por las siguientes ecuaciones:

$$r:\begin{cases}5x+3y=19\\ y-5z=3\end{cases} \qquad \text{y} \qquad s:\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z-5}{0}.$$

a) **[1,25 p.]** Estudie la posición relativa de ambas rectas.

b) **[1,25 p.]** En caso de que las rectas se corten, calcule el punto de corte y el ángulo que forman. En caso de que las rectas se crucen, determine el plano que contiene a la recta r y es paralelo a la recta s.

7: El peso de los recién nacidos, medido en kilogramos (kg), sigue una distribución normal de media $\mu=2,8$ kg y desviación típica σ. Se sabe que solo el $20,05\,\%$ de ellos pesa más de 3 kg.

a) **[0,5 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que un recién nacido pese más de 2,6 kg?

b) **[1 p.]** Calcule la desviación típica de esta distribución normal.

c) **[1 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que un recién nacido pese menos de 2,9 kg?

IMPORTANTE: Trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal.

8: Dos urnas A y B contienen bolas de colores con la siguiente composición: La urna A contiene 3 bolas verdes, 4 negras y 3 rojas, y la urna B contiene 6 bolas verdes y 4 bolas negras. Además, se tiene un dado que tiene 2 caras marcadas con la letra A y 4 caras marcadas con la letra B. Se lanza el dado y se saca una bola al azar de la urna que indica el dado.

a) **[0,75 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea verde?

b) **[0,75 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea roja?

c) **[1 p.]** Si bola extraída es verde, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la urna B?

UNIVERSIDAD DE MURCIA   Región de Murcia   Universidad Politécnica de Cartagena

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

206-MATEMÁTICAS II

EBAU2020 - **SEPTIEMBRE**

CRITERIOS DE CALIFICACIÓN

OBSERVACIONES GENERALES:

El corrector deberá ajustarse a los criterios de evaluación establecidos en este documento y en la reunión correspondiente. En ningún caso se podrá puntuar por encima de la valoración indicada en cada apartado. Se procurará que, en lo posible, los errores en un apartado no afecten a otros apartados.

Los errores simples de cálculo restarán 0,1 puntos. Los errores graves de concepto restarán 0,25 puntos. Los errores importantes de cálculo o errores simples reiterados pueden conllevar puntuación 0 en ese apartado. Si un error simple ha llevado a un problema más sencillo se disminuirá la puntuación.

Las preguntas contestadas correctamente sin incluir el desarrollo necesario para llegar a su resolución serán valoradas con 0 puntos.

Se valorará el correcto uso del vocabulario y de la notación. El alumno puede elegir el método que considere más oportuno para la resolución de una cuestión pero, si esto demuestra la falta de comprensión de conocimientos básicos, la puntuación final puede ser menor que la indicada para dicha cuestión.

OBSERVACIONES PARTICULARES:

CUESTIÓN 1: [2,5 p.]
Apartado a) Justificación correcta y razonada de que el sistema nunca tiene solución única (nunca es SCD) **[1 p.]**.
Apartado b) Justificación correcta y razonada de que el sistema tiene infinitas soluciones (SCI) si y solo si $a = 2$ **[1 p.]**.
Apartado c) Cálculo correcto de dicha solución dependiente de un parámetro cuando $a = 2$ **[0,5 p.]**.

CUESTIÓN 2: [2,5 p.]
Apartado a) Cálculo correcto de A^2 **[0,2 p.]**. Cálculo correcto de A^3 **[0,2 p.]**. Cálculo correcto de A^4 **[0,2 p.]**. Cálculo correcto de A^5 **[0,2 p.]**. Cálculo correcto de A^6 **[0,2 p.]**.
Apartado b) Cálculo correcto de A^{2020} **[1 p.]**.
Apartado c) Justificación de que la matriz A es regular **[0,25 p.]**. Cálculo correcto de su matriz inversa **[0,25 p.]**.

CUESTIÓN 3: [2,5 p.]
Apartado a) Cálculo correcto y justificado del límite cuando x tiende a 0, resolviendo la indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ **[1,25 p.]**.
Apartado b) Cálculo correcto y justificado del límite cuando x tiende a $+\infty$, resolviendo la indeterminación del tipo $\infty - \infty$ **[1,25 p.]**.

UNIVERSIDAD DE MURCIA — Región de Murcia — Universidad Politécnica de Cartagena

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

206-MATEMÁTICAS II

EBAU2020 - **SEPTIEMBRE**

CUESTIÓN 4: [2,5 p.]
Apartado a) Cálculo correcto y justificado de la integral indefinida **[2 p.]**.
Apartado b) Cálculo correcto de la integral definida aplicando la regla de Barrow **[0,5 p.]**.

CUESTIÓN 5: [2,5 p.]
Apartado a) Cálculo correcto y justificado del punto R **[1,5 p.]**.
Apartado b) Cálculo correcto de la recta pedida **[0,5 p.]**. Comprobación de que dicha recta corta perpendicularmente a la recta r **[0,5 p.]**.

CUESTIÓN 6: [2,5 p.]
Apartado a) Justificación correcta y razonada de que las dos rectas se cruzan en el espacio **[1,25 p.]**.
Apartado b) Cálculo correcto y razonado del plano que contiene a la recta r y es paralelo a la recta s **[1,25 p.]**.

CUESTIÓN 7: [2,5 p.]
Apartado a) Cálculo correcto y razonado de la probabilidad pedida **[0,5 p.]**.
Apartado b) Cálculo correcto y razonado de la desviación típica **[1 p.]**.
Apartado c) Cálculo correcto de la probabilidad pedida **[1 p.]**.

CUESTIÓN 8: [2,5 p.]
Apartado a) Cálculo correcto y justificado de la probabilidad pedida **[0,75 p.]**.
Apartado b) Cálculo correcto y justificado de la probabilidad pedida **[0,75 p.]**.
Apartado c) Cálculo correcto y justificado de la probabilidad pedida **[1 p.]**.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

1º) Considere el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+y+z=2 \\ x-ay+a^2z=-1 \\ -ax+a^2y-a^3z=2 \end{cases}$ en función del parámetro a.

a) Compruebe que el sistema nunca tiene solución única.

b) Determine para qué valores de a el sistema tiene infinitas soluciones.

c) Si es posible, resuélvalo para el valor de $a=2$.

Solución:

a) Según el teorema de Rouché-Fröbenius, un sistema tiene solución única cuando los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada son iguales e igual al número de incógnitas, que en este caso es tres.

La matriz de coeficientes es $M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -a & a^2 \\ -a & a^2 & -a^3 \end{pmatrix}$, cuyo rango es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -a & a^2 \\ -a & a^2 & -a^3 \end{vmatrix}=a^4+a^2-a^3-a^2-a^4+a^3=0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow Rang\ M<3, \forall a \in R.$ El sistema no puede ser compatible determinado.

$\underline{Queda\ comprobado\ que\ el\ sistema\ nunca\ tiene\ solución\ única.}$

b) La matriz ampliada es $M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -a & a^2 & -1 \\ -a & a^2 & -a^3 & 2 \end{pmatrix}$, cuyo rango, en función del valor de a, es el siguiente:

$$M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -a & a^2 & -1 \\ -a & a^2 & -a^3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -a & -1 \\ -a & a^2 & 2 \end{vmatrix}=-2a+2a^2+a-2a^2+a^2-2=a^2-a-2=0;$$

$$a=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{1\pm3}{2} \Rightarrow a_1=-1, a_2=2.$$

$$Para \begin{Bmatrix} a=-1 \\ a=2 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=2<nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.$$

$El\ sistema\ tiene\ infinitas\ soluciones\ para\ a=-1\ y\ para\ a=2.$

$Para\ a \neq -1\ y\ a \neq 2\ el\ sistema\ es\ incompatible$

$c)$ Para $a=2$ el sistema resulta $\left.\begin{array}{r} x+y+z=2 \\ x-2y+4z=-1 \\ -2x+4y-8z=2 \end{array}\right\}$, equivalente al sistema $\left.\begin{array}{r} x+y+z=2 \\ x-2y+4z=-1 \end{array}\right\}$, que es compatible indeterminado. Haciendo $z=\lambda$:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=2-\lambda \\ x-2y=-1-4\lambda \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x+y=2-\lambda \\ -x+2y=1+4\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 3y=3+3\lambda;\ \ y=1+\lambda.$$

$x+y=2-\lambda;\ \ x=2-\lambda-1-\lambda \Rightarrow x=1-2\lambda.$

$\underline{Solución: \boldsymbol{x=1-2\lambda};\ \ \boldsymbol{y=1+\lambda};\ \ \boldsymbol{z=\lambda},\ \forall\lambda \in R.}$

Problema 2:

2º) Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calcule las potencias sucesivas A^2, A^3, A^4, A^5 y A^6

b) Calcule $A^{2\,020}$.

c) Compruebe que la matriz A es regular (o invertible) y calcule su inversa.

Solución:

a) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$.

$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I}$.

$A^4 = A^3 \cdot A = -I \cdot A = \underline{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}}$.

$A^5 = A^4 \cdot A = -A \cdot A = -A^2 = \underline{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}$.

$A^6 = A^3 \cdot A^3 = -I \cdot (-I) = I^2 = \underline{I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};\ A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I;\ A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix};\ A^5 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}; A^6 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $A^{2\,020} = A^{6 \cdot 336 + 4} = A^{6 \cdot 336} \cdot A^4 = [A^6]^{336} \cdot A^4 = I^{336} \cdot A^4 = I \cdot A^4 = A^4$.

$$\underline{A^{2\,020} = A^4 = -A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}}.$$

c) Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$|A| = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 3 = 1 \neq 0 \Rightarrow \underline{La\ matriz\ A\ es\ invertible}$.

$A^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix};\ Adj.de\ A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

$A^{-1} = \frac{Adj.de\ A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}{1} \Rightarrow \underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}$.

$$\boldsymbol{A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}$$

Problema 3:

3º) Calcule los siguientes límites:

$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{L(3+x)-L(3-x)}{2x}.$

$b)\ \lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}\right).$

Solución:

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{L(3+x)-L(3-x)}{2x} = \frac{L3-L3}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3+x}-\frac{-1}{3-x}}{2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3+x}+\frac{1}{3-x}}{2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{3-x+3+x}{9-x^2}}{2} = \lim_{x\to 0} \frac{6}{2(9-x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{3}{9-x^2} = \frac{3}{9-0^2} = \frac{1}{3}.$$

$$\underline{\boldsymbol{\lim_{x\to 0} \frac{L(3+x)-L(3-x)}{2x} = \frac{1}{3}.}}$$

$$b)\ \lim_{x\to \infty} \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}\right) = \infty - \infty \Rightarrow Indet. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}\right)\cdot\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-\left(\sqrt{x+2}\right)^2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x+1-(x+2)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}} =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{x+1-x-2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}} = \frac{-1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}} = \frac{-1}{\infty+\infty} = \frac{-1}{\infty} = 0.$$

$$\underline{\boldsymbol{\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}\right) = 0.}}$$

Problema 4:

4º) a) Calcule la integral indefinida: $I = \int L(1+x^2) \cdot dx$.

b) Calcule la integral definida: $I = \int_0^1 L(1+x^2) \cdot dx$.

Solución:

$a)\ I = \int L\,(1+x^2) \cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{matrix} u = L(1+x^2) \to du = \frac{2x \cdot dx}{1+x^2} \\ dx = dv \to v = x \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \cdot L(1+x^2) - \int x \cdot \frac{2x \cdot dx}{1+x^2} = x \cdot L(1+x^2) - 2\int \frac{x^2}{1+x^2} \cdot dx =$

$= x \cdot L(1+x^2) - 2\int \frac{1+x^2-1}{1+x^2} \cdot dx = x \cdot L(1+x^2) - 2\int \frac{1+x^2}{1+x^2} \cdot dx + 2\int \frac{1}{1+x^2} dx.$

$$\underline{\boldsymbol{I = \int L\,(1+x^2) \cdot dx = x \cdot L(1+x^2) - 2x + 2 \cdot arc\ tg\ x + C.}}$$

$b)\qquad I = \int_0^1 L(1+x^2) \cdot dx = \left[x \cdot L(1+x^2) - 2x + 2 \cdot arc\ tg\ x\right]_0^1 =$

$= [1 \cdot L(1+1^2) - 2 \cdot 1 + 2 \cdot arc\ tg\ 1] - [0 \cdot L(1+0^2) - 0 + 2 \cdot arc\ tg\ 0] =$

$= L2 - 2 + 2 \cdot \frac{\pi}{4} - 0 = L2 - 2 + \frac{\pi}{2}.$

$$\underline{\boldsymbol{I = \int_0^1 L(1+x^2) \cdot dx = L2 - 2 + \frac{\pi}{2} \cong 0.2639.}}$$

Problema 5:

5º) Considere los puntos $P(5,6,1)$ y $Q(-3,-2,5)$ y la recta $r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{4}$.

a) Determine el punto R de la recta r para el cuál el área del triángulo PQR tiene el valor de $18\sqrt{2}$ unidades cuadradas.

Observación: Hay dos puntos R que son solución del apartado a); basta con encontrar uno de ellos.

b) Calcule la ecuación de la recta s que pasa por los puntos P y Q y comprueba que dicha recta corta perpendicularmente a la recta r.

Solución:

a) La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 + 4\lambda \end{cases}$.

Un punto genérico de r es $R(\lambda, 1+\lambda, -1+4\lambda)$.

Los puntos P, Q y R determinan los siguientes vectores:

$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} = [(5,6,1) - (-3,-2,5)] = (8,8,-4)$.

$\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OQ} = [(\lambda, 1+\lambda, -1+4\lambda) - (-3,-2,5)] = (3+\lambda, 3+\lambda, -6+4\lambda)$.

El área del triángulo que determinan tres puntos no alineados es la mitad del módulo del producto vectorial de los dos vectores que determinan:

$$S_{PQR} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{QR}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{matrix} i & j & k \\ 8 & 8 & -4 \\ 3+\lambda & 3+\lambda & -6+4\lambda \end{matrix} \right\| = 18\sqrt{2};$$

$$\left\| \begin{matrix} i & j & k \\ 2 & 2 & -1 \\ 3+\lambda & 3+\lambda & -6+4\lambda \end{matrix} \right\| = 9\sqrt{2};$$

$= |(-12+8\lambda)i - (3+\lambda)j + (6+2\lambda)k - (6+2\lambda)k + (3+\lambda)i + (12-8\lambda)j| =$

$= |(-9+9\lambda)i + (9-9\lambda)j| = 9 \cdot |(-1+\lambda)i + (1-\lambda)j| = 9\sqrt{2};$

$|(-1+\lambda)i + (1-\lambda)j| = \sqrt{2};$ $\sqrt{(-1+\lambda)^2 + (1-\lambda)^2} = \sqrt{2};$

$1 - 2\lambda + \lambda^2 + 1 - 2\lambda + \lambda^2 = 2;$ $2\lambda^2 - 4\lambda = 0;$ $\lambda^2 - 2\lambda = 0;$ $\lambda(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2.$ Cumplen la condición pedida los siguientes puntos:

$$\boldsymbol{R_1(0,1,-1)\ y\ R_2(2,3,7).}$$

b) $\overrightarrow{QP} = (8,8,-4) \Rightarrow \overrightarrow{v_s} = (2,2,-1)$.

Considerando, por ejemplo, el punto $Q(-3,-2,5)$, la expresión de la recta s dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$\boldsymbol{s \equiv \frac{x+3}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-5}{-1}.}$$

Dos rectas son perpendiculares cuando lo son sus vectores directores.

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero.

$\overrightarrow{v_r} = (1, 1, 4)$.

$\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s} = (1, 1, 4) \cdot (2, 2, -1) = 2 + 2 - 4 = 0$.

Las rectas $r\ y\ s$ son perpendiculares.

Para verificar que las rectas se cortan consideramos, por ejemplo, el vector $\overrightarrow{QR_1}$, que tiene origen en un punto de s y extremo en un punto de r:

$\overrightarrow{QR_1} = \overrightarrow{OR_1} - \overrightarrow{OQ} = [(0, 1, -1) - (-3, -2, 5)] = (3, 3, -6)$.

Para que $r\ y\ s$ se corten es necesario que los vectores $\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s}\ y\ \overrightarrow{QR_1}$ sean linealmente dependiente (estén en un mismo plano), para lo cual es necesario que se anule el determinante que forman:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & -6 \end{vmatrix} = -12 + 24 - 3 - 24 + 3 + 12 = 0.$$

$\underline{Queda\ comprobado\ que\ las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cortan\ y\ son\ perpendiculares}.$

Problema 6:

6º) Considere las rectas $r \equiv \begin{cases} 5x + 3y = 19 \\ y - 5z = 3 \end{cases}$ $y\ s \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-5}{0}$.

a) Estudie la posición relativa de ambas rectas.

b) En caso de que las rectas se corten, calcule el punto de corte y el ángulo que forman. En caso de que las rectas se crucen, determine el plano que contiene a la recta r y es paralelo a la recta s.

Solución:

a) La expresión de la recta r dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$r \equiv \begin{cases} 5x + 3y = 19 \\ y - 5z = 3 \end{cases} \Rightarrow z = \lambda;\ \ y = 3 + 5\lambda.$ $\qquad 5x + 3y = 19;$

$5x + 9 + 15\lambda = 19;\ \ 5x = 10 - 15\lambda;\ \ x = 2 - 3\lambda \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 3 + 5\lambda \\ z = \lambda \end{cases}.$

Un punto y un vector director de la recta r son $A(2, 3, 0)$ y $\overrightarrow{v_r} = (-3, 5, 1)$.

Un punto y un vector director de la recta s son $B(1, 0, 5)$ y $\overrightarrow{v_s} = (-1, 1, 0)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas r y s se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Se considera el vector $\overrightarrow{w}$ que tiene como origen el punto $A \in r$ y extremo el punto $B \in s$: $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(1, 0, 5) - (2, 3, 0)] = (-1, -3, 5)$.

Según que los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w}\}$ sean o no coplanarios las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w}\}$ son coplanarios cuando el rango del determinante que forman es cero y las rectas r y s se cortan; en caso contrario, se cruzan.

$$Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} -3 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = -15 + 3 + 1 + 25 = 14 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w}\} = 3\ \Rightarrow\ \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w}\ no\ son\ coplanarios.$$

Las rectas r y s se cruzan.

b) El plano π que contiene a r y es paralelo a s tiene la siguiente expresión general:

$$\pi(A;\ \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}) \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z \\ -3 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0;\ -(y-3) - 3z + 5z - (x-2) = 0;$$

$-y + 3 + 2z - x + 2 = 0.$

$$\boldsymbol{\pi \equiv x + y - 2z - 5 = 0.}$$

Problema 7:

7º) El peso de los recién nacidos, medido en kg, sigue una distribución normal de media $\mu = 2.8$ kg y desviación típica σ. Se sabe que solo el 20.05 % de ellos pesa más de 3 kg.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un recién nacido pese más de 2.6 kg?

b) Calcule la desviación típica de esta distribución normal.

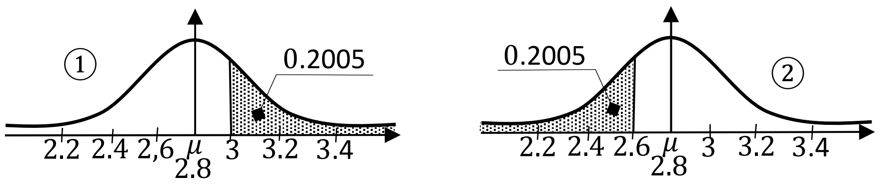
c) ¿Cuál es la probabilidad de que un recién nacido pese menos de 2.9 kg?

Importante: Trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal.

Solución:

$a)\ Datos:\ \mu = 2.8;\ \ P = P(X > 3) = 0.2005.$

El gráfico adjunto facilita la comprensión del apartado.



La gráfica de la Normal es simétrica con respecto a la media μ, por lo cual las superficies sombreadas de las figuras ① y ② son iguales.

La gráfica de la Normal expresa la probabilidad $F(a) = P(Z \leq a)$, por lo cual:

$P = P(X > 3) = 1 - P(X \leq 2.6) = 1 - 0.2005 = \underline{0.7995}.$

La probabilidad de que un recién nacido pese más de 2.6 kg es de **0.7995**.

$b)\ X \to N(\mu;\ \sigma) = N(2.8;\ \sigma).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-2.8}{\sigma}$.

$P = P(X > 3) = P\left(Z > \frac{3-2.8}{\sigma}\right) = P\left(Z > \frac{0.2}{\sigma}\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{0.2}{\sigma}\right) = 0.2005;$

$P\left(Z \leq \frac{0.2}{\sigma}\right) = 1 - 0.2005 = 0.7995.$

Mirando de forma inversa en la tabla $N(0, 1)$ a 0.7995 le corresponde 0.84:

$\frac{0.2}{\sigma} = 0.84\ \Rightarrow\ \sigma = \frac{0.2}{0.84} = \underline{0.24}.$

$$\sigma = \frac{20}{84} = \frac{5}{21} = \mathbf{0.24}$$

$c)\ P = P(X \leq 2.9) = P\left(Z \leq \frac{2.9-2.8}{0.24}\right) = P\left(Z \leq \frac{0.1}{0.24}\right) = P(Z \leq 0.42) = \underline{0.6628}.$

La probabilidad de que un recién nacido pese menos de 2.9 kg es de **0.6628**.

Problema 8:

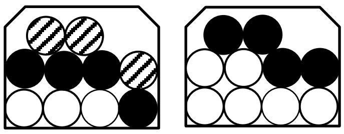
8º) Dos urnas A y B contienen bolas con la siguiente composición: La urna A contiene 3 bolas blancas, 4 negras y 3 rayadas, la urna B contiene 6 bolas blancas y 4 bolas negras. Además, se tiene un dado que tiene 2 caras marcadas con la letra A y 4 caras marcadas con la letra B. Se lanza el dado y se saca una bola al azar de la urna que indique el dado.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea blanca?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea rayada?

c) Si la bola extraída es blanca, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la urna B?

Solución:



a) $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; $P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

$P = P(Bl) = P(A \to Bl) + P(B \to Bl) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{10} + \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{10} = \frac{1}{10} + \frac{2}{5} = \frac{1+4}{10} =$

$= \frac{5}{10} = \underline{\frac{1}{2} = 0.5}$.

La probabilidad de que la bola sea blanca es **0.5**.

b) $P = P(A \to Ra) + P(B \to Ra) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{10} + \frac{2}{3} \cdot \frac{0}{10} = \frac{1}{10} + 0 = \underline{\frac{1}{10} = 0.1}$.

La probabilidad de que la bola sea rayada es **0.1**.

c)

$$P(B/Bl) = \frac{P(Bl \cap B)}{P(Bl)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{6}{10}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{2}} = \underline{\frac{4}{5} = 0.8}.$$

Si la bola extraída es blanca, la probabilidad de que proceda de la urna B es **0.8**.