MATEMÁTICAS II

Selectividad 2020

Comunidad autónoma de

GALICIA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Paula Orta

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

CiUG	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2019–2020** MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: **ORDINARIA**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Si responde más preguntas de las permitidas, **solo se corregirán las 5 primeras respondidas**.

Problema 1. Números y Álgebra:

Sean A y B las dos matrices que cumplen $A+B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $A-B=\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) Calcular A^2-B^2. (Advertencia: en este caso, $A^2-B^2 \neq (A+B)(A-B)$.)

b) Calcular la matriz X que cumple la igualdad $XA+(A+B)^T=2I+XB$, siendo I la matriz identidad de orden 2 y $(A+B)^T$ la traspuesta de A + B.

Problema 2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema: $\begin{cases} mx + y = 2m, \\ x + z = 0, \\ x + my = 0. \end{cases}$

Problema 3. Análisis:

a) Calcule $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x-1}{1+2x-e^{2x}}$.

b) Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)=x(\ln x-1)$. Calcule, si existen, los máximos y mínimos relativos de la función f.

Problema 4. Análisis:

a) Calcule los valores de b y c para que la función $f(x)=\begin{cases} e^{2x} & si \quad x\le 0 \\ x^2+bx+c & si \quad x>0 \end{cases}$ *sea, primero continua y luego derivable en x = 0.*

b) Calcule $\int_1^2 x(\ln x-1)dx.$

Problema 5. Geometría:

a) Obtenga la ecuación implícita o general del plano que pasa por los puntos A(3,0,-1), B(4,1,1) y C(7,1,5).

b) Obtenga las ecuaciones paramétricas de la recta r que es perpendicular al plano $\pi: 4x+2y-3z-15=0$ y que pasa por el punto P(-1,-2,2).

Problema 6. Geometría:

Estudie la posición relativa de las rectas r y s definidas por las ecuaciones $r:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{-2}$ y $s:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+3}{4}=\dfrac{z+2}{3}$. Si se cortan, calcule el punto de corte.

Problema 7. Estadística y Probabilidad:

Se seleccionan 250 pacientes para estudiar la eficacia de un nuevo medicamento. A 150 de ellos se les administra el medicamento, mientras que el resto son tratados con placebo. Sabiendo que se curaron el 80% de los que tomaron el medicamento, ¿Cuál es la probabilidad de que, seleccionado un paciente al azar, tomara el placebo o no se curara?

Problema 8. Estadística y Probabilidad:

En una cadena de montaje, el tiempo empleado para realizar un determinado trabajo sigue una distribución normal de media 20 minutos y desviación típica 4 minutos. Calcule la probabilidad de que se haga ese trabajo en un tiempo comprendido entre 16 y 26 minutos.

SOLUCIONES

Problema 1. Números y Álgebra:

Sean A y B las dos matrices que cumplen $A+B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $A-B=\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) Calcular A^2-B^2. (Advertencia: en este caso, $A^2-B^2 \neq (A+B)(A-B)$.)

b) Calcular la matriz X que cumple la igualdad $XA + (A + B)^T = 2I + XB$, siendo I la matriz identidad de orden 2 y $(A + B)^T$ la traspuesta de A + B.

Solución:

a)

$$(A+B)+(A-B)=A+B+A-B=2A \;\Rightarrow\; 2A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(A+B)-(A-B)=A+B-A+B=2B \;\Rightarrow\; 2B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; B=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B^2=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -7 & 8 \\ -4 & -7 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $$A^2-B^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -7 & 8 \\ -4 & -7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & -8 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

b)

$$XA+(A+B)^T=2I+XB \;\Rightarrow\; XA-XB=2I-(A+B)^T \;\Rightarrow\; X(A-B)=2I-(A+B)^T \;\Rightarrow\; X(A-B)\cdot(A-B)^{-1}=\left[2I-(A+B)^T\right]\cdot(A-B)^{-1}$$

Por tanto, $$X=\left[2I-(A+B)^T\right]\cdot(A-B)^{-1}$$

$$A+B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; (A+B)^T=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad A-B=\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; (A-B)^{-1}=\frac{\left[ad(A-B)\right]^T}{|A-B|}$$

$|A-B|=\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}=16\neq 0$; por tanto, tiene inversa.

$$ad(A-B)=\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \left[ad(A-B)\right]^T=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; (A-B)^{-1}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{-1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{-1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

$$2I-(A+B)^T=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0\\4&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\-4&2\end{pmatrix}$$

Por tanto, $X=\begin{pmatrix}0&0\\-4&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{-1}{8}&\frac{1}{4}\\\frac{-1}{4}&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&-1\end{pmatrix}$

Problema 2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema: $\begin{cases}mx+y=2m,\\x+z=0,\\x+my=0.\end{cases}$

Solución:

$A=\begin{pmatrix}m&1&0\\1&0&1\\1&m&0\end{pmatrix}$ matriz de coeficientes $\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}m&1&0&2m\\1&0&1&0\\1&m&0&0\end{array}\right)$ matriz ampliada.

$$\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=1\neq 0\Rightarrow rg(A)\geq 2$$

$$\begin{vmatrix}m&1&0\\1&0&1\\1&m&0\end{vmatrix}=1-m^2 \qquad 1-m^2=0\Leftrightarrow m^2-1=0\Leftrightarrow m^2=1\Leftrightarrow m=\pm 1$$

$\bullet Si \quad m\neq 1 \quad y \quad m\neq -1 \quad \Rightarrow \quad rg(A)=3=rg(\overline{A})$

$\bullet Si \quad m=1 \quad \Rightarrow \quad rg(A)=2 \qquad \begin{vmatrix}1&0&2\\0&1&0\\1&0&0\end{vmatrix}=-2\neq 0\Rightarrow rg(\overline{A})=3$

$\bullet Si \quad m=-1 \quad \Rightarrow \quad rg(A)=2 \qquad \begin{vmatrix}1&0&-2\\0&1&0\\-1&0&0\end{vmatrix}=-2\neq 0\Rightarrow rg(\overline{A})=3$

DISCUSIÓN:

$\bullet Si \quad m\neq 1 \quad y \quad m\neq -1 \quad \Rightarrow \quad rg(A)=rg(\overline{A})=3=n^o$ *de incógnitas* $\Rightarrow$ *Sistema Compatible Determinado* ($\exists$! *Solución*)

$\bullet Si \quad m=1 \quad o \quad m=-1 \quad \Rightarrow \quad rg(A)\neq rg(\overline{A}) \quad \Rightarrow$ *Sistema Incompatible (No Existe Solución)*

Problema 3. Análisis:

a) Calcule $\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{1+2x-e^{2x}}$.

Autora: Paula Orta
www.apuntesmareaverde.org.es

b) Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)=x(\ln x-1)$. Calcule, si existen, los máximos y mínimos relativos de la función f.

Solución:

a) $$\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{1+2x-e^{2x}} \underset{\frac{0}{0}(L'Hôpital)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-2\cos x\cdot sen x}{2-2e^{2x}} \underset{\frac{0}{0}(L'Hôpital)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2sen^2 x-2\cos^2 x}{-4e^{2x}}=\frac{-2}{-4}=\frac{1}{2}$$

b) $f(x)=x(\ln x-1)\Rightarrow Domf=(0,+\infty)$

$$f'(x)=\ln x-1+x\cdot\frac{1}{x}\Rightarrow f'(x)=\ln x-1+1\Rightarrow f'(x)=\ln x$$

$f'(x)=0\Leftrightarrow \ln x=0\Leftrightarrow x=1$ 0 ↘ 1 ↗

f *crece en* $(1,+\infty)$
f *decrece en* $(0,1)$

f tiene un mínimo en (1,-1)

Problema 4. Análisis:

a) Calcule los valores de b y c para que la función $f(x)=\begin{cases} e^{2x} & si \quad x\le 0\\ x^2+bx+c & si \quad x>0\end{cases}$ *sea, primero continua y luego derivable en x = 0.*

b) Calcule $\int_1^2 x(\ln x-1)dx$.

Solución:

a)

Continuidad:

f *continua en* $x=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=e^0=1\\ \lim_{x\to 0^-} e^{2x}=e^0=1\\ \lim_{x\to 0^+}(x^2+bx+c)=c\end{array}\right\}\Rightarrow f \text{ continua en } x=0\Leftrightarrow c=1; b\in\mathbb{R}$$

Derivabilidad:

Para que sea derivable, tiene que ser continua, por lo que c =1.

$$f(x)=\begin{cases} e^{2x} & si \quad x\le 0 \\ x^2+bx+1 & si \quad x>0 \end{cases}$$ función continua.

$$f'(x)=\begin{cases} 2e^{2x} & si \quad x<0 \\ 2x+b & si \quad x>0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} f'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} 2e^{2x}=2 \\ f'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(2x+b)=b \end{array}$$

Por tanto, f es derivable en x = 0 si y solamente si b = 2 y c = 1.

b) Primero calculo una primitiva aplicando la fórmula de integración por partes.

$$u=\ln x-1 \Rightarrow du=\frac{1}{x}dx \qquad \int x(\ln x-1)dx=(\ln x-1)\cdot\frac{x^2}{2}-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{1}{2}x^2(\ln x-1)-\frac{1}{2}\int xdx=$$

$$dv=xdx \Rightarrow v=\frac{x^2}{2} \qquad =\frac{1}{2}x^2(\ln x-1)-\frac{1}{4}x^2+C=\frac{1}{2}x^2(\ln x-\frac{3}{2})+C$$

Por tanto:

$$\int_1^2 x(\ln x-1)dx=\frac{1}{2}x^2(\ln x-\frac{3}{2})\Big]_1^2=\frac{1}{2}\cdot 4(\ln 2-\frac{3}{2})-\frac{1}{2}(\ln 1-\frac{3}{2})=2(\ln 2-\frac{3}{2})+\frac{3}{4}=2\ln 2-\frac{9}{4}=\ln 4-\frac{9}{4}\approx -0.8637$$

Problema 5. Geometría:

a) Obtenga la ecuación implícita o general del plano que pasa por los puntos A(3,0,-1), B(4,1,1) y C(7,1,5).

b) Obtenga las ecuaciones paramétricas de la recta r que es perpendicular al plano

$\pi: 4x+2y-3z-15=0$ y que pasa por el punto P(-1,-2,2).

Solución:

a) A(3,0,-1); B(4,1,1); C(7,1,5)

$\overrightarrow{AB}=(1,1,2)$ y $\overrightarrow{AC}=(4,1,6)$ son vectores directores del plano pedido. Por tanto,

$$\pi:\begin{vmatrix} 1 & 4 & x-3 \\ 1 & 1 & y \\ 2 & 6 & z+1 \end{vmatrix}=0; (x-3)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}-y\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}+(z+1)\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=0; 4(x-3)+2y-3(z+1)=0; 4x-12+2y-3z-15=0$$

La ecuación implícita del plano pedido es $\pi: 4x+2y-3z-15=0$

b) Por ser la recta y el plano perpendiculares, el vector normal al plano, es un vector director de la recta, $\overline{d_r}=(4,2,-3)$. Por tanto, las ecuaciones paramétricas de r son:

$$r:\begin{cases} x=-1+4\lambda \\ y=-2+2\lambda \quad \lambda\in\mathbb{R} \\ z=2-3\lambda \end{cases}$$

Problema 6. Geometría:

Estudie la posición relativa de las rectas r y s definidas por las ecuaciones $r: \frac{x-3}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{-2}$ y $s: \frac{x}{1} = \frac{y+3}{4} = \frac{z+2}{3}$. Si se cortan, calcule el punto de corte.

Solución:

$$r: \begin{cases} P(3,0,-1) \in r \\ \overrightarrow{d_r} = (2,-1,-2) \end{cases} \qquad s: \begin{cases} Q(0,-3,-2) \in s \\ \overrightarrow{d_s} = (1,4,3) \end{cases}$$

Los vectores directores de las rectas no son proporcionales, por lo que las rectas o se cortan en un punto o se cruzan en el espacio.

$$\overrightarrow{PQ} = (-3,-3,-1) \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 4 & -4 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -8+6+9-24+18-1 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{d_r} \quad \overrightarrow{d_s} \quad \overrightarrow{PQ} \quad \textit{coplanarios}$$

Por tanto, las rectas se cortan en un punto.

Para calcular el punto de corte, utilizo las ecuaciones paramétricas de las rectas:

$$r: \begin{cases} x = 3+2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = -1-2\lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = \mu \\ y = -3+4\mu \\ z = -2+3\mu \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} 3+2\lambda = \mu \\ -\lambda = -3+4\mu \end{array}\right\} \Rightarrow -\lambda = -3+4(3+2\lambda) \Rightarrow -\lambda = -3+12+8\lambda \Rightarrow -9\lambda = 9 \Rightarrow \lambda = -1$$

Por lo que sustituyendo en las ecuaciones paramétricas, obtenemos el punto de corte de las rectas:

$$r \cap s = A(1,1,1)$$

Problema 7. Estadística y probabilidad:

Se seleccionan 250 pacientes para estudiar la eficacia de un nuevo medicamento. A 150 de ellos se les administra el medicamento, mientras que el resto son tratados con placebo. Sabiendo que se curaron el 80% de los que tomaron el medicamento, ¿Cuál es la probabilidad de que, seleccionado un paciente al azar, tomara el placebo o no se curara?

Solución:

Sea M ="tomar el medicamento"; el suceso contrario será $\overline{M}$ ="tomar placebo".

P(M) = 0.6 y P($\overline{M}$) = 0.4

Sea C="curarse"; P(C/M) = 0.8

$\overline{M} \cup \overline{C} = \overline{M \cap C}$ (Leyes De Morgan); Por tanto:

$$P\left(\overline{M} \cup \overline{C}\right) = P\left(\overline{M \cap C}\right) = 1 - P\left(M \cap C\right) = 1 - P(M) \cdot P(C/M) = 1 - 0.6 \cdot 0.8 = 0.52$$

Problema 8. Estadística y Probabilidad:

En una cadena de montaje, el tiempo empleado para realizar un determinado trabajo sigue una distribución normal de media 20 minutos y desviación típica 4 minutos. Calcule la probabilidad de que se haga ese trabajo en un tiempo comprendido entre 16 y 26 minutos.

Solución:

$X \in N(20,4)$

$$P(16 \le X \le 26) = P\left(\frac{16-20}{4} \le \frac{X-20}{4} \le \frac{26-20}{4}\right) = P(-1 \le Z \le 1.5) = P(Z \le 1.5) - P(Z \le -1) =$$

$$= P(Z \le 1.5) - P(Z > 1) = P(Z \le 1.5) - [1 - P(Z \le 1)] = 0.9332 - 1 + 0.8413 = 0.7745$$

Por tanto, la probabilidad pedida es 0.7745

CiUG	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2019–2020** MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Si responde más preguntas de las permitidas, **solo se corregirán las 5 primeras respondidas**.

Problema 1. Números y Álgebra:

Para la ecuación matricial $A^2 X + AB = B$, se pide:

a) Despejar X suponiendo que A(y por tanto A^2) es invertible, y decir cuáles serían las dimensiones de X y de B si A tuviera dimensión 4 x 4 y B tuviera 3 columnas.

b) Resolverla en el caso en que $A=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&1&0\\-1&0&3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&-1&0\\1&0&-3\end{pmatrix}$

Problema 2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema: $\begin{cases}(m+3)x - m^2y = 3m\\(m+3)x + my = 3m+6\end{cases}$

Problema 3. Análisis:

Determine los valores de a y b que hacen que la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{a-\cos x}{x} & si \quad x<0\\ bx & si \quad x\ge 0\end{cases}$ sea, primero continua, y luego derivable.

Problema 4. Análisis:

a) Calcule el área de la región encerrada por el eje X y la gráfica de $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}x+1 & si \quad x<0\\ (x-1)^2 & si \quad x\ge 0\end{cases}$

b) Calcule $\int x\sqrt{x^2-1}\,dx$

Problema 5. Geometría:

Sean r la recta de vector director $\vec{d_r}(1,0,3)$ que pasa por P(1,0,0) y $\pi: -2x+y+z=0$. Se pide la posición relativa de r y π. En caso de que se corten, hallar el punto de corte.

Problema 6. Geometría:

a) Calcule k sabiendo que los vectores $\vec{u}(2,0,0)$, $\vec{v}(0,k,1)$ y $\vec{w}(2,2,2)$ son coplanarios.

b) Obtenga la ecuación implícita del plano π que pasa por P(1,0,0) y contiene a $r: x-1=\dfrac{y}{-4}=\dfrac{z+1}{3}$

Problema 7. Estadística y Probabilidad:

El 57% de los estudiantes matriculados en la Universidad de Cambridge son naturales del Reino Unido y, de entre todos esos, el 83% aprueban con honores. Además, el porcentaje global de aprobados con honores es del 80%. Calcular la probabilidad de que un estudiante elegido al azar no haya nacido en el

Reino Unido sabiendo que aprobó con honores.

Problema 8. Estadística y Probabilidad:

a) En una determinada población de árboles, el 20% tienen más de 30 años. Si se eligen 40 árboles al azar, calcule la probabilidad de que solamente 4 de ellos tengan más de 30 años. El número total de árboles es tan grande que se puede asumir elección con reemplazo.

b) Si X sigue una distribución normal de media 15 y $P(X \leq 18) = 0.6915$, ¿Cuál es la desviación típica?

SOLUCIONES

Problema 1. Números y Álgebra:

Para la ecuación matricial $A^2 X + AB = B$, se pide:

a) Despejar X suponiendo que A(y por tanto A^2) es invertible, y decir cuáles serían las dimensiones de X y de B si A tuviera dimensión 4 x 4 y B tuviera 3 columnas.

b) Resolverla en el caso en que $A=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&1&0\\-1&0&3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&-1&0\\1&0&-3\end{pmatrix}$

Solución:

a) $A^2X+AB=B \Rightarrow A^2X=B-AB \Rightarrow (A^2)^{-1}\cdot A^2X=(A^2)^{-1}\cdot(B-AB)$

Por tanto, $\boxed{X=(A^2)^{-1}\cdot(B-AB)}$

Si A es una matriz 4x4 y B tiene tres columnas, para que se pueda realizar la multiplicación AB, B será una matriz de dimensión 4x3 (4 filas y 3 columnas), y X será también una matriz de dimensión 4x3 (4 filas y 3 columnas).

b)

$$A^2=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&1&0\\-1&0&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&1&0\\-1&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-3\\0&1&0\\-3&0&10\end{pmatrix}$$

$$|A^2|=\begin{vmatrix}1&0&-3\\0&1&0\\-3&0&10\end{vmatrix}=10-9=1 \qquad Ad(A^2)=\begin{pmatrix}10&0&3\\0&1&0\\3&0&1\end{pmatrix} \qquad \left[Ad(A^2)\right]^T=\begin{pmatrix}10&0&3\\0&1&0\\3&0&1\end{pmatrix}$$

$$(A^2)^{-1}=\frac{\left[Ad(A^2)\right]^T}{|A^2|}=\begin{pmatrix}10&0&3\\0&1&0\\3&0&1\end{pmatrix} \qquad A\cdot B=A\cdot(-A)=-A^2=\begin{pmatrix}-1&0&3\\0&-1&0\\3&0&-10\end{pmatrix}$$

$$B-AB=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&-1&0\\1&0&-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&0&3\\0&-1&0\\3&0&-10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&0&0\\-2&0&7\end{pmatrix}$$

Autora: Paula Orta

Por tanto, $X=\begin{pmatrix}10&0&3\\0&1&0\\3&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&0&0\\-2&0&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$

Problema 2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema: $\begin{cases}(m+3)x & - & m^2y & = & 3m\\(m+3)x & + & my & = & 3m+6\end{cases}$

Solución:

$A=\begin{pmatrix}m+3 & -m^2\\m+3 & m\end{pmatrix}$ matriz de coeficientes. $\overline{A}=\left(\begin{array}{cc|c}m+3 & -m^2 & 3m\\m+3 & m & 3m+6\end{array}\right)$ Matriz ampliada.

$$\begin{vmatrix}m+3 & -m^2\\m+3 & m\end{vmatrix}=m(m+3)+m^2(m+3)=(m+3)(m^2+m)=m(m+3)(m+1)$$

$$m(m+3)(m+1)=0\Leftrightarrow m=0;m=-3;m=-1$$

$$Si\quad m\neq 0\quad y\quad m\neq -3\quad y\quad m\neq -1\quad\Rightarrow\quad rg(A)=2=rg(\overline{A})$$

Si m = 0

$A=\begin{pmatrix}3&0\\3&0\end{pmatrix}\Rightarrow rg(A)=1$ $\qquad\begin{vmatrix}3&0\\3&6\end{vmatrix}=18\neq 0\Rightarrow rg(\overline{A})=2$

Si m = -3

$A=\begin{pmatrix}0&-9\\0&-3\end{pmatrix}\Rightarrow rg(A)=1$ $\qquad\begin{vmatrix}-9&-9\\-3&-3\end{vmatrix}=0\Rightarrow rg(\overline{A})=1$

Si m = -1

$A=\begin{pmatrix}2&-1\\2&-1\end{pmatrix}\Rightarrow rg(A)=1$ $\qquad\begin{vmatrix}2&-3\\2&3\end{vmatrix}=6+6=12\neq 0\Rightarrow rg(\overline{A})=2$

DISCUSIÓN:

$Si\quad m\neq 0\quad y\quad m\neq -3\quad y\quad m\neq -1\quad\Rightarrow\quad rg(A)=rg(\overline{A})=2=n^o\ de\ incógnitas\quad\Rightarrow\quad Sistema\ Compatible\ Determinado\ (\exists\ Solución)$

$Si\quad m=0\quad o\quad m=-1\quad\Rightarrow\quad rg(A)\neq rg(\overline{A})\quad\Rightarrow\quad Sistema\ Incompatible\ (no\ tiene\ Solución)$

$Si\quad m=-3\quad\Rightarrow\quad rg(A)=rg(\overline{A})=1<n^o\ de\ incógnitas\quad\Rightarrow\quad Sistema\ Compatible\ Indeterminado\ (infinitas\ Soluciones)$

Problema 3. Análisis:

Determine los valores de a y b que hacen que la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{a-\cos x}{x} & si \quad x<0\\ bx & si \quad x\geq 0\end{cases}$ sea, primero continua, y luego derivable.

Solución:

La función es continua y derivable en $\mathbb{R}-\{0\}$ para cualquier valor de a y b.

Veamos que ocurre en x = 0.

Continuidad: $f \quad continua \quad en \quad x=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$

f(0) =0

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{a-\cos x}{x}$ Para que este límite sea finito a = 1; Por tanto:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x} & si \quad x<0\\ bx \quad si \quad x\geq 0\end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{senx}{1}=\lim\limits_{x\to 0^-} senx=0$ (Aplicando L'Hôpital)

$\lim\limits_{x\to 0^+} bx=0$

Por tanto,

$$f \quad continua \quad en \quad x=0 \Leftrightarrow a=1 \quad y \quad b\in\mathbb{R}$$

Derivabilidad: Para que f sea derivable en x = 0, tiene que ser continua, por tanto a = 1.

$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x} & si \quad x<0\\ bx \quad si \quad x\geq 0\end{cases}$ función continua.

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{xsenx-1+\cos x}{x^2} & si \quad x<0\\ b \quad si \quad x>0\end{cases}$$

$f'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{xsenx-1+\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{senx+x\cos x-senx}{2x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\cos x}{2}=\dfrac{1}{2}$ (L'Hôpital)

$f'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} b=b$

Por tanto, f es derivable en x = 0 si y solo si a = 1 y b = ½.

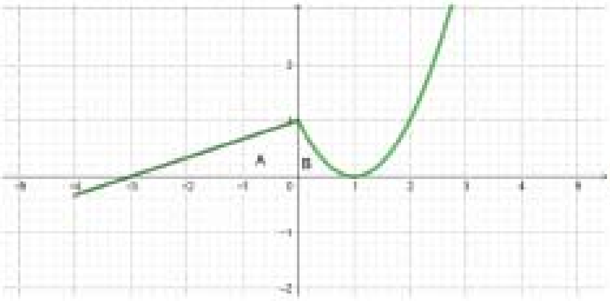
Problema 4. Análisis:

a) Calcule el área de la región encerrada por el eje X y la gráfica de $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}x+1 & si \quad x<0\\ (x-1)^2 & si \quad x\geq 0\end{cases}$

b) Calcule $\int x\sqrt{x^2-1}dx$

Solución:

a)



Divido el área en dos zonas:

La zona A es un triángulo, por lo que $A_A = \frac{3}{2}u^2$

$$A_B = \int_0^1 (x-1)^2 dx = \int_0^1 (x^2-2x+1)dx = \left.\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right]_0^1 = \left(\frac{1}{3}-1+1\right) - 0 = \frac{1}{3}u^2$$

$$A = \frac{3}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}u^2 = 1.8\overline{3}u^2$$

b) Hacemos un cambio de variable:

$$x^2 - 1 = t^2 \Rightarrow t = \sqrt{x^2-1}$$
$$2xdx = 2tdt \Rightarrow xdx = tdt$$

$$\int x\sqrt{x^2-1}dx = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C$$

Deshago el cambio:

$$\int x\sqrt{x^2-1}dx = \frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2-1\right)^3} + C$$

Problema 5. Geometría:

Sean r la recta de vector director $\overline{d_r}(1,0,3)$ que pasa por P(1,0,0) y $\pi: -2x+y+z=0$. Se pide la posición relativa de r y π. En caso de que se corten, hallar el punto de corte.

Solución:

$\overline{d_r} \cdot \overline{n_\pi} = (1,0,3)\cdot(-2,1,1) = -2+3 = 1 \neq 0$; es decir, el vector director de la recta y el vector normal del plano no son perpendiculares, por tanto:

la recta y el plano se cortan en un punto

Para calcular el punto de corte, utilizo las ecuaciones paramétricas de la recta:

$r:\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=0 \\ z=3\lambda \end{cases}$ y sustituyo en la ecuación del plano: $-2(1+\lambda)+0+3\lambda=0 \Rightarrow -2-2\lambda+3\lambda=0 \Rightarrow \lambda=2$

Por tanto, el punto de corte de recta y plano es: $r \cap \pi = A(3,0,6)$

Problema 6. Geometría:

a) Calcule k sabiendo que los vectores $\vec{u}(2,0,0)$, $\vec{v}(0,k,1)$ y $\vec{w}(2,2,2)$ son coplanarios.

b) Obtenga la ecuación implícita del plano π que pasa por P(1,0,0) y contiene a $r: x-1=\frac{y}{-4}=\frac{z+1}{3}$

Solución:

a) Al ser los tres vectores coplanarios, son linealmente dependientes, por lo que:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & k & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4k-4=0 \Leftrightarrow k=1$$ Por tanto, k =1

b)

$$\pi: \begin{cases} P(1,00) \in \pi \\ r \subset \pi; r: x-1=\frac{y}{-4}=\frac{z+1}{3} \begin{cases} \vec{d_r}=(1,-4,3) \\ Q(1,0,-1) \end{cases} \end{cases}$$

$\vec{d_r}=(1,-4,3)$ *y* $\overrightarrow{PQ}(0,0,-1)$ *son vectores directores de* π; por tanto:

$$\pi: \begin{vmatrix} 1 & 0 & x-1 \\ -4 & 0 & y \\ 3 & -1 & z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x-1)\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4(x-1)+y=0 \Leftrightarrow 4x-4+y=0$$

Por lo que el plano pedido es:

$$\pi: 4x+y-4=0$$

Problema 7. Estadística y Probabilidad:

El 57% de los estudiantes matriculados en la Universidad de Cambridge son naturales del Reino Unido y, de entre todos esos, el 83% aprueban con honores. Además, el porcentaje global de aprobados con honores es del 80%. Calcular la probabilidad de que un estudiante elegido al azar no haya nacido en el Reino Unido sabiendo que aprobó con honores.

Solución:

Sea RU ="ser natural del Reino Unido" y H = "aprobar con honores",
P(RU) =0.57; P(H/RU) = 0.83; P(H) = 0.8

$$P\left(\overline{RU}/H\right)=\frac{P\left(\overline{RU}\cap H\right)}{P(H)}=\frac{P(H)-P(RU\cap H)}{P(H)}=\frac{P(H)-P(RU)\cdot P(H/RU)}{P(H)}=\frac{0.8-0.57\cdot 0.83}{0.8}=0.408625$$

Por tanto, la probabilidad pedida es 0.408625.

Problema 8. Estadística y Probabilidad:

a) En una determinada población de árboles, el 20% tienen más de 30 años. Si se eligen 40 árboles al azar, calcule la probabilidad de que solamente 4 de ellos tengan más de 30 años. El número total de árboles es tan grande que se puede asumir elección con reemplazo.

b) Si X sigue una distribución normal de media 15 y $P(X \leq 18) = 0.6915$, ¿Cuál es la desviación típica?

Solución:

a) p = 0.2; q = 0.8; n = 40. $X \in B(40, 0.2)$

$$P(X=4) = \binom{40}{4} \cdot (0.2)^4 \cdot (0.8)^{36} = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot (0.2)^4 \cdot (0.8)^{36} = 0.0475$$

Por tanto, la probabilidad pedida es 0.0475.

b) $X \in N(15, \sigma)$ $\quad P(X \leq 18) = 0.6915$

$$P(X \leq 18) = P\left(\frac{X-15}{\sigma} \leq \frac{18-15}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{3}{\sigma}\right) = 0.6915 \Rightarrow \frac{3}{\sigma} = 0.5 \Rightarrow \sigma = \frac{3}{0.5} = 6$$

Por tanto, la desviación típica es 6.