# MATEMÁTICAS II

## Selectividad 2020

## Comunidad autónoma de

# Extremadura

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano Corbacho

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

# Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU)

Universidad de Extremadura

Curso 2019-2020

Materia: **Matemáticas II** Tiempo máximo de la prueba: 1h 30 min

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN. El examen consta de **10 preguntas**, cuyo valor es de **2 puntos cada una**. El estudiante ha de elegir 5 preguntas.

**Observación importante**: En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen solo se tendrán en cuenta las cinco primeras preguntas respondidas. Se seguirá el orden en el que las respuestas aparezcan desarrolladas por el estudiante. Si se desea que alguna de ellas no sea tenida en cuenta, el estudiante ha de tacharla y dejarlo claramente indicado. En ese caso, además de las cuatro primeras preguntas sin tachar, se corregiría la que ocupe el siguiente lugar. **Justificar** las respuestas.

## PREGUNTAS

**1.** Dada la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ 2 & -k & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Estudie los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los que la matriz tiene inversa. (1 punto)

b) Calcule la inversa para $k = 1$. (1 punto)

**2.** Discuta en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ el siguiente sistema de ecuaciones: (2 puntos)

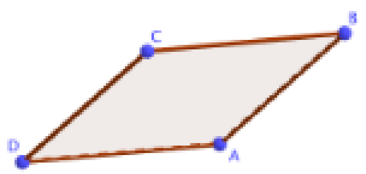
$$\left.\begin{array}{rcrcrl} x & + & \lambda y & - & z & = 1 \\ -\lambda x & + & y & & & = \lambda \\ & & (\lambda+3)\,y & - & 2z & = 4 \end{array}\right\}$$

**3.** Sean el plano $\Pi$ de ecuación $2x + y - z - 2 = 0$ y la recta $r$ dada por $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z-1}{3}$.

a) Estudie la posición relativa de la recta respecto del plano. (1 punto)

b) Calcule la distancia de la recta al plano. (1 punto)

**4.** Tres vértices consecutivos de un paralelogramo son $A(1,3,-2)$, $B(4,3,1)$ y $C(1,0,1)$ como podemos observar en la siguiente representación:




a) Calcule el cuarto vértice D. (1 punto)

b) Calcule el área del paralelogramo. (1 punto)

# Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU)

Universidad de Extremadura

Curso 2019-2020

Materia: **Matemáticas II** Tiempo máximo de la prueba: 1h 30 min

**5.** a) Estudie la monotonía (crecimiento y decrecimiento) y los extremos relativos (máximos y mínimos) de la función $f(x) = e^x\,(x^2 - x + 1)$. (1 punto)

b) Justifique si existe algún valor de $x$ tal que $f(x) = 2$. (1 punto)

**6.** Considere la función $f(x)$, donde $a \in \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-e^x}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ a & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

a) Calcule el valor de $a$ para que la función sea continua. (1 punto)

b) Calcule la ecuación de la recta tangente en $x = 1$. (1 punto)

**7.** Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 4x + 1$ y $g(x) = -x + 1$, se pide:

a) Represente de forma aproximada la región delimitada por las dos curvas. (0,5 puntos)

b) Calcule el área de dicha región. (1,5 puntos)

**8.** Resuelva la integral (2 puntos)

$$\int \frac{-x+7}{x^2+x-2}\,dx.$$

**9.** Una librería compra lotes de material escolar a tres empresas $A$, $B$ y $C$. A la empresa $A$ le compra el 40 % de los lotes, a $B$ el 25 % y a $C$ el resto. De la empresa $A$ le viene defectuoso el 1 % de los lotes, de $B$ el 2 % y de $C$ el 3 %. Elegido un lote al azar, se pide:

a) Calcule la probabilidad de que sea defectuoso. (1 punto)

b) Si sabemos que no es defectuoso, calcule la probabilidad de que lo haya fabricado la empresa $B$. (1 puntos)

**10.** Se ha hecho un estudio de un famoso jugador de baloncesto de la ACB y se sabe que tiene una probabilidad de encestar un triple del 60 %. Si realiza 8 tiros a canasta

a) Calcule la probabilidad de que enceste 5 triples. (0,75 puntos)

b) Calcule la probabilidad de que enceste al menos 2. (0,75 puntos)

c) Determine la media y la desviación típica de la distribución. (0,5 puntos)

## SOLUCIONES CONVOCATORIA ORDINARIA DE 2020

***Pregunta 1:***

1. Dada la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ 2 & -k & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Estudie los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los que la matriz tiene inversa.

b) Calcule la inversa para $k = 1$.

***Solución:***

*a)*

Una matriz tiene inversa cuando su determinante es distinto de cero.

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & k \\ 2 & -k & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = k - 2k - 1 + k^2 + 1 - 2 = k^2 - k - 2 = 0;$$

$$k = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow k_1 = -1, k_2 = 2.$$

$$\underline{La\ matriz\ M\ es\ inverible\ \forall k \in R - \{-1, 2\}.}$$

*b)*

Para $k = 1$ la matriz es $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. $|M| = -2$.

$$M^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$Adj.de\ M^t = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$M^{-1} = \frac{Adj.\ de\ M^t}{|M|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{-2} \Rightarrow \underline{M^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}.$$

***Pregunta 2:***

**2.** Discuta en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rcrcrl} x & + & \lambda y & - & z & = 1 \\ -\lambda x & + & y & & & = \lambda \\ & & (\lambda+3)\,y & - & 2z & = 4 \end{array}\right\}$$

***Solución:***

----------

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda+3 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 1 \\ -\lambda & 1 & 0 & \lambda \\ 0 & \lambda+3 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro $\lambda$ es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda+3 & -2 \end{vmatrix} = -2 + \lambda(\lambda+3) - 2\lambda^2 = -2 + \lambda^2 + 3\lambda - 2\lambda^2 =$$

$$= -\lambda^2 + 3\lambda - 2 = 0;\ \ \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0;\ \ \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2.$$

$$\underline{Para \begin{cases} \lambda \neq 1 \\ \lambda \neq 2 \end{cases} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = n^{\underline{o}}\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ \lambda = 1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_3\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 4 - 2 = 0 \Rightarrow Rang\ M' = 2.$$

$$Para\ \lambda = 2 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \{2F_1 + F_2 = F_3\} \Rightarrow Rang\ M' = 2.$$

$$\underline{Para \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = 2 \end{cases} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < n^{\underline{o}}\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

## Pregunta 3:

3. Sean el plano $\Pi$ de ecuación $2x + y - z - 2 = 0$ y la recta $r$ dada por $\frac{x}{3} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-1}{3}$.

a) Estudie la posición relativa de la recta respecto del plano. (1 punto)

b) Calcule la distancia de la recta al plano. (1 punto)

## Solución:

3º) Sean el plano $\pi \equiv 2x + y - z - 2 = 0$ y la recta $r \equiv \frac{x}{3} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-1}{3}$.

*a)* Estudie la posición relativa de la recta con respecto al plano.

*b)* Calcule la distancia de la recta al plano.

----------

*a)*

La expresión de $r$ dada por unas ecuaciones implícitas es la siguiente:

$$r \equiv \frac{x}{3} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-1}{3} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -x = y-2 \\ x = z-1 \end{array}\right\} \Rightarrow r \equiv \left\{\begin{array}{l} x+y=2 \\ x-z=-1 \end{array}\right..$$

La recta $r$ y el plano $\pi$ determinan el sistema $\left.\begin{array}{r} 2x+y-z=2 \\ x+y=2 \\ x-z=-1 \end{array}\right\}$.

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Según sean los rangos de $M$ y $M'$ pueden presentarse los siguientes casos:

$1 \rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 \Rightarrow$ *La recta está contenida en el plano.*

$2 \rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow$ *La recta es paralela al plano.*

$3 \rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow$ *La recta y el plano son secantes.*

$$Rang\ M \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2+1+1 = 0 \Rightarrow Rang\ M = 2.$$

$$Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2+2-2+1 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$\underline{Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow \text{La recta } r \text{ y el plano } \pi \text{ son paralelos}.}$

*b)*

La distancia entre $r$ y $\pi$ cuando son paralelos es la misma que la distancia de un punto de la recta $r$ al plano $\pi$. Un punto de $r$ es $A(0, 2, 1)$.

La distancia de un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula $d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

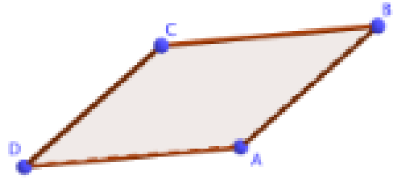
Aplicando la fórmula al punto $A(0, 2, 1)$ y al plano $\pi \equiv 2x + y - z - 2 = 0$:

$$d(r, \pi) = d(A, \pi) = \frac{|2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 - 2|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{|2-1-2|}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{|-1|}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \underline{\frac{\sqrt{6}}{6}\ unidades.}$$

**********

**Pregunta 4:**

4. Tres vértices consecutivos de un paralelogramo son $A(1,3,-2)$, $B(4,3,1)$ y $C(1,0,1)$ como podemos observar en la siguiente representación:




a) Calcule el cuarto vértice D. (1 punto)

b) Calcule el área del paralelogramo. (1 punto)

**Solución:**

*a)*

Sea el punto $D(x, y, z)$. Los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DC}$ son iguales.

$\overrightarrow{AB} = [B - A] = [(4,3,1) - (1,3,-2)] = (3,0,3)$.

$\overrightarrow{DC} = [C - D] = [(1,0,1) - (x,y,z)] = (1-x, -y, 1-z)$.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow (3,0,3) = (1-x,-y,1-z) \Rightarrow \begin{Bmatrix} 1-x=3 \to x=-2 \\ -y=0 \to y=0 \\ 1-z=3 \to z=-2 \end{Bmatrix}.$$

$$\underline{D \equiv (-2,0,-2)}.$$

*b)*

El área de un paralelogramo es igual que el módulo del producto vectorial de los dos vectores que lo determinan:

$$S = |\overrightarrow{DA} \times \overrightarrow{DC}| = |[A-D] \times [C-D]| =$$

$$= |[(1,3,-2)-(-2,0,-2)] \times [(1,0,1)-(-2,0,-2)]| = |(3,3,0) \times (3,0,3)| =$$

$$= \left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} \right| = |9i - 9k - 9j| = 9 \cdot |i - j - k| = 9 \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2} =$$

$$= 9 \cdot \sqrt{1+1+1} \Rightarrow \underline{S = 9\sqrt{3}\, u^2}.$$

**********

***Pregunta 5:***

5. a) Estudie la monotonía (crecimiento y decrecimiento) y los extremos relativos (máximos y mínimos) de la función $f(x) = e^x\,(x^2 - x + 1)$. (1 punto)

b) Justifique si existe algún valor de $x$ tal que $f(x) = 2$. (1 punto)

***Solución:***

*a)*

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = e^x(x^2 - x + 1) + e^x(2x - 1) = e^x(x^2 + x).$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^x(x^2 + x) = 0;\ x^2 + x = 0;\ x(x + 1) = 9 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 0.$$

Por ser $f(x)$ continua en su dominio, las raíces de su primera derivada dividen su dominio en los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$ y $(0, +\infty)$, en los cuales la función es, alternativamente, creciente o decreciente.

Considerando, por ejemplo, el valor $x = 1 \in (0, +\infty)$ es $f'(1) = 2e > 0$.

De lo expuesto anteriormente se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función, que son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento\colon f'(x) > 0 \Rightarrow x\epsilon(-\infty, -1) \cup (0, +\infty).}$$

$$\underline{Decrecimiento\colon f'(x) < 0 \Rightarrow x\epsilon(-1, 0).}$$

*b)*

$$f(x) = 2 \Rightarrow e^x(x^2 - x + 1) = 2.$$

Se considera la función $g(x) = f(x) - 2 = e^x(x^2 - x + 1) - 2$, que es continua en R, por ser la suma de una constante y el producto de una función exponencial por una función polinómica.

Demostrar que existe un valor real de $x$ para el cual $f(x) = 2$ es equivalente a demostrar que $g(x) = 0$.

El teorema de Bolzano dice que "si $g(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $g(c) = 0$".

Aplicando el teorema de Bolzano a $g(x)$, por ejemplo, en el intervalo $(0, 1)$:

$$g(0) = e^0(0^2 - 0 + 1) - 2 = 1 \cdot 1 - 2 = -1 < 0.$$

***Pregunta 6:***

**6.** Considere la función $f(x)$, donde $a \in \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-e^x}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ a & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

a) Calcule el valor de $a$ para que la función sea continua.

b) Calcule la ecuación de la recta tangente en $x = 1$.

***Solución:***

*a)*

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x = 0$, cuya continuidad es dudosa y se va a determinar el valor real de $a$ para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1-e^x}{x} = \frac{1-e^0}{0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Ind. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{-e^x}{1} = -e^0 = -1.$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = a \Rightarrow \underline{a = -1}.$$

*b)*

$f(1) = \frac{1-e^1}{1} = 1 - e \Rightarrow$ Punto de tangencia $\Rightarrow P(1, 1-e)$.

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-e^x \cdot x - (1-e^x)\cdot 1}{x^2} = \frac{-e^x \cdot x - 1 + e^x}{x^2} = \frac{e^x(1-x)-1}{x^2} & si \ \ x \neq 0 \\ 0 \quad si \quad x = 0 \end{cases}.$$

$$m = f'(1) = \frac{e^1(1-1)-1}{1^2} = \frac{-1}{1} = -1.$$

La expresión de una recta conocidos un punto y la pendiente viene dada por la expresión $y - y_0 = m(x - x_0)$, que aplicada al punto $P(1, 1-e)$ y $m = -1$:

$$y - (1-e) = -1 \cdot (x-1); \ \ y - 1 + e = -x + 1.$$

$$\underline{Recta\ tangente: t \equiv x + y + (e-2) = 0}.$$

**Pregunta 7:**

7. Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 4x + 1$ y $g(x) = -x + 1$, se pide:

a) Represente de forma aproximada la región delimitada por las dos curvas.

b) Calcule el área de dicha región.

**Solución:**

La función $f(x) = x^2 - 4x + 1$ es una parábola convexa ($\cup$) por ser positivo el coeficiente de $x^2$. Su vértice es el siguiente:

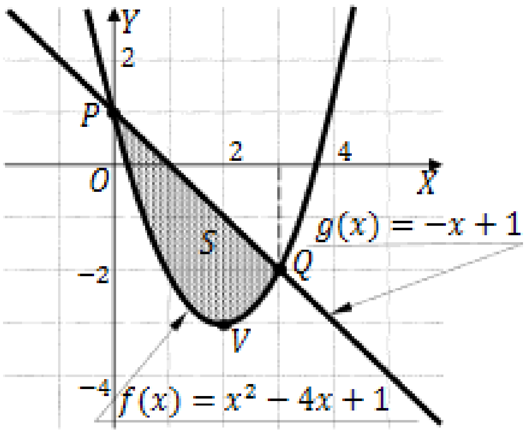
$f'(x) = 2x - 4.$ $\quad f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0;\ \ x = 2.$

$f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 1 = 4 - 8 + 1 = -3 \Rightarrow V(2, -3).$

Los puntos de corte de la parábola y la recta se obtienen de la igualación de sus expresiones:

$$x^2 - 4x + 1 = -x + 1;\ x^2 - 3x = 0;\ x(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \rightarrow P(0,1) \\ x_2 = 3 \rightarrow Q(3,-2) \end{cases}.$$

La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la que se indica en la figura adjunta.




Por ser todas las ordenadas de la recta mayores que las correspondientes ordenadas de la parábola en el intervalo $(0, 3)$, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S = \int_0^3 [g(x) - f(x)] \cdot dx =$$

$$= \int_0^3 [(-x+1) - (x^2 - 4x + 1)] \cdot dx =$$

$$= \int_0^3 (-x^2 + 3x) \cdot dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_0^3 = \left(-\frac{3^3}{3} + \frac{3 \cdot 3^2}{2}\right) - 0 = -9 + \frac{27}{2} = \frac{-18+27}{2} =$$

$$= \underline{\frac{9}{2}\ u^2 = 4{,}5\ u^2}.$$

***Pregunta 8:***

8. Resuelva la integral

$$\int \frac{-x+7}{x^2+x-2}\, dx.$$

***Solución:***

$$x^2+x-2=0;\;\; x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}\;\Rightarrow\; x_1=-2,x_2=1.$$

$$x^2+x-2=(x+2)(x-1).$$

$$\frac{-x+7}{x^2+x-2}=\frac{M}{x+2}+\frac{N}{x-1}=\frac{Mx-M+Nx+2N}{(x+2)(x-1)}=\frac{(M+N)x+(-M+2N)}{x^2+x-2}\Rightarrow \left.\begin{matrix} M+N=-1 \\ -M+2N=7 \end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3N=6;\; N=2\Rightarrow M+2=-1\Rightarrow M=-3.$$

$$A=\int\frac{-x+7}{x^2+x-2}\cdot dx=\int\left(\frac{M}{x+2}+\frac{N}{x-1}\right)\cdot dx=\int\left(\frac{-3}{x+3}+\frac{2}{x-1}\right)\cdot dx=$$

$$=-3\cdot L|x+2|+2\cdot L|x-1|+C.$$

$$\underline{\int\frac{5}{x^2+2x-3}\cdot dx=2L|x-1|-3L|x+2|+C.}$$

************

***Pregunta 9:***

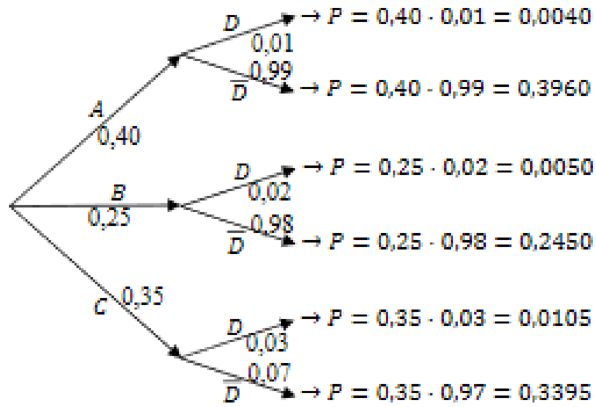
**9.** Una librería compra lotes de material escolar a tres empresas $A$, $B$ y $C$. A la empresa $A$ le compra el 40 % de los lotes, a $B$ el 25 % y a $C$ el resto. De la empresa $A$ le viene defectuoso el 1 % de los lotes, de $B$ el 2 % y de $C$ el 3 %. Elegido un lote al azar, se pide:

a) Calcule la probabilidad de que sea defectuoso. (1 punto)

b) Si sabemos que no es defectuoso, calcule la probabilidad de que lo haya fabricado la empresa $B$. (1 puntos)

***Solución:***

$a)$




$$P = P(D) = P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) + P(C) \cdot P(D/C) =$$

$$= 0{,}40 \cdot 0{,}01 + 0{,}25 \cdot 0{,}02 + 0{,}35 \cdot 0{,}03 = 0{,}0040 + 0{,}0050 + 0{,}0105 = \underline{0{,}0195}.$$

$b)$

$$P = (B/\overline{D}) = \frac{P(B \cap \overline{D})}{P(\overline{D})} = \frac{P(C) \cdot P(\overline{E}/C)}{1 - P(D)} = \frac{P(B) \cdot P(\overline{D}/B)}{1 - P(D)} = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}98}{1 - 0{,}0195} = \frac{0{,}2450}{0{,}9805} = \underline{0{,}2499}.$$

***Pregunta 10:***

**10.** Se ha hecho un estudio de un famoso jugador de baloncesto de la ACB y se sabe que tiene una probabilidad de encestar un triple del 60 %. Si realiza 8 tiros a canasta

a) Calcule la probabilidad de que enceste 5 triples. (0,75 puntos)

b) Calcule la probabilidad de que enceste al menos 2. (0,75 puntos)

c) Determine la media y la desviación típica de la distribución. (0,5 puntos)

***Solución:***

*a)*

Se trata de una distribución binomial con $p = 0{,}6$ y $q = 0{,}4$.

Aplicando la fórmula de la probabilidad de la distribución binomial, que es la siguiente: $P = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot q^{n-r}$.

$$P = \binom{8}{5} \cdot 0{,}6^5 \cdot 0{,}4^3 = \frac{8!}{(8-5)! \cdot 5!} \cdot 0{,}6^5 \cdot 0{,}4^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{3! \cdot 5!} \cdot 0{,}6^5 \cdot 0{,}4^3 =$$

$$= 56 \cdot 0{,}07776 \cdot 0{,}064 = \underline{0{,}2787}.$$

*b)*

El suceso contrario a "encestar al menos 2" es "la unidad menos la probabilidad de no encestar ninguna vez más la probabilidad de encestar una vez", por lo cual, la probabilidad pedida es la siguiente:

$$P = 1 - \left[\binom{8}{0} \cdot 0{,}6^0 \cdot 0{,}4^8 + \binom{8}{1} \cdot 0{,}6^1 \cdot 0{,}4^7\right] =$$

$$= 1 - (1 \cdot 1 \cdot 0{,}4^8 + 8 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4^7) = 1 - (0{,}000262 + 4{,}8 \cdot 0{,}001638) =$$

$$= 1 - (0{,}000262 + 0{,}007864) = 1 - 0{,}008126 = \underline{0{,}9918}.$$

*c)*

La media y la desviación típica en una distribución binomial vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$\mu = n \cdot p = 8 \cdot 0{,}6 \Rightarrow \underline{\mu = 4{,}8}.$$

$$\rho = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{8 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4} = \sqrt{1{,}92} \Rightarrow \underline{\rho = 1{,}3856}.$$

# Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad de Extremadura

Curso 2019-2020

Materia: **Matemáticas II** Tiempo máximo de la prueba: 1h 30 min.

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN. El examen consta de **10 preguntas**, cuyo valor es de **2 puntos cada una**. El estudiante ha de elegir 5 preguntas.

**Observación importante**: En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen solo se tendrán en cuenta las cinco primeras preguntas respondidas. Se seguirá el orden en el que las respuestas aparezcan desarrolladas por el estudiante. Si se desea que alguna de ellas no sea tenida en cuenta, el estudiante ha de tacharla y dejarlo claramente indicado. En ese caso, además de las cuatro primeras preguntas sin tachar, se corregiría la que ocupe el siguiente lugar. **Justificar** las respuestas.

## PREGUNTAS

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

   a) Calcule los productos de matrices $A \cdot B$ y $B \cdot A$. ¿Se cumple que $A \cdot B = B \cdot A$? (1 punto)

   b) Compruebe si es cierta la igualdad $(A + B)^2 = A^2 + B^2$. (1 punto)

2. a) Estudie en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ el siguiente sistema de ecuaciones: (1,25 puntos)

$$\left.\begin{array}{rcrcrl} x & & & + & \lambda z & = 1 \\ x & + & y & + & \lambda z & = 1 \\ \lambda x & - & y & + & z & = 1 \end{array}\right\}$$

   b) Resuelve el sistema (si es posible) para $\lambda = 1$. (0,75 puntos)

3. Sean los vectores $\vec{u} = (4, 3, \alpha)$, $\vec{v} = (\alpha, 1, 0)$ y $\vec{w} = (2\alpha, 1, \alpha)$ (con $\alpha \in \mathbb{R}$).

   a) Determine los valores de $\alpha$ para que $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean linealmente independientes. (1 punto)

   b) Para el valor $\alpha = 1$ exprese $\vec{w}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ . (1 punto)

4. Dados el plano $\Pi_1$ determinado por los puntos $(0, 1, 1)$, $(2, 0, 2)$ y $(1, 2, 6)$ y el plano $\Pi_2$ dado por la ecuación $x - y + z = 3$. Calcule una recta que sea paralela a los dos planos y que no esté contenida en ninguno de ellos. (2 puntos)

5. Sea la función $f(x) = \dfrac{4x}{1 + x^2}$.

   a) Estudie las asíntotas, la monotonía (crecimiento y decrecimiento) y los extremos relativos (máximos y mínimos) de la función $f(x)$. (1,5 puntos)

   b) Con los datos obtenidos en el apartado anterior, represente de forma aproximada la gráfica de la función $f(x)$. (0,5 puntos)

6. Calcule los valores de $a$ y $b$ sabiendo que la siguiente función $f(x)$ es derivable en todo su dominio: (2 puntos)

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + ax + b & \text{si } x \leq 1 \\ -2 + \ln(x) & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

# Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad de Extremadura

Curso 2019-2020

Materia: **Matemáticas II** Tiempo máximo de la prueba: 1h 30 min.

7. Sean las funciones $f(x) = 1 - x^2$ y $g(x) = -3$.

   a) Represente la región plana encerrada por las funciones $f(x)$ y $g(x)$. (0,5 puntos)

   b) Calcule el área de la región anterior. (1,5 puntos)

8. Calcule la integral (2 puntos)

$$\int \frac{3x}{x^2 - x - 2}\,dx.$$

9. Se realizaron dos debates electorales, uno el lunes y otro el martes. Se hizo una encuesta a 1.500 personas para estimar la audiencia, de las cuales: 1.100 personas vieron el debate del lunes, 1.000 vieron el debate del martes y 300 no vieron ninguno. Eligiendo al azar a uno de los encuestados:

   a) Calcule la probabilidad de que viera los dos debates. (1 punto)

   b) Si vio el debate del lunes, calcule la probabilidad de que viera el del martes. (1 punto)

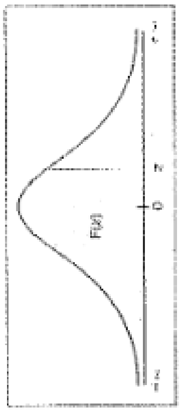
10. El radio de un pistón se distribuye según una distribución normal de media 5 cm y desviación típica de 0,01 cm.

   a) Calcule la probabilidad de que un pistón tenga un radio mayor que 5,01 cm. (1 punto)

   b) Calcule la probabilidad de que un pistón tenga un radio entre 4,98 y 5 cm. (1 punto)

**Tabla de distribución normal** $N(0,1)$

$F(z) = P(Z \le z)$




| z | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0,5000 | 0,5040 | 0,5080 | 0,5120 | 0,5160 | 0,5199 | 0,5239 | 0,5279 | 0,5319 | 0,5359 |
| 0,1 | 0,5398 | 0,5438 | 0,5478 | 0,5517 | 0,5557 | 0,5596 | 0,5636 | 0,5675 | 0,5714 | 0,5753 |
| 0,2 | 0,5793 | 0,5832 | 0,5871 | 0,5910 | 0,5948 | 0,5987 | 0,6026 | 0,6064 | 0,6103 | 0,6141 |
| 0,3 | 0,6179 | 0,6217 | 0,6255 | 0,6293 | 0,6331 | 0,6368 | 0,6406 | 0,6443 | 0,6480 | 0,6517 |
| 0,4 | 0,6554 | 0,6591 | 0,6628 | 0,6664 | 0,6700 | 0,6736 | 0,6772 | 0,6808 | 0,6844 | 0,6879 |
| 0,5 | 0,6915 | 0,6950 | 0,6985 | 0,7019 | 0,7054 | 0,7088 | 0,7123 | 0,7157 | 0,7190 | 0,7224 |
| 0,6 | 0,7257 | 0,7291 | 0,7324 | 0,7357 | 0,7389 | 0,7422 | 0,7454 | 0,7486 | 0,7517 | 0,7549 |
| 0,7 | 0,7580 | 0,7611 | 0,7642 | 0,7673 | 0,7704 | 0,7734 | 0,7764 | 0,7794 | 0,7823 | 0,7852 |
| 0,8 | 0,7881 | 0,7910 | 0,7939 | 0,7967 | 0,7995 | 0,8023 | 0,8051 | 0,8078 | 0,8106 | 0,8133 |
| 0,9 | 0,8159 | 0,8186 | 0,8212 | 0,8238 | 0,8264 | 0,8289 | 0,8315 | 0,8340 | 0,8365 | 0,8389 |
| 1,0 | 0,8413 | 0,8438 | 0,8461 | 0,8485 | 0,8508 | 0,8531 | 0,8554 | 0,8577 | 0,8599 | 0,8621 |
| 1,1 | 0,8643 | 0,8665 | 0,8686 | 0,8708 | 0,8729 | 0,8749 | 0,8770 | 0,8790 | 0,8810 | 0,8830 |
| 1,2 | 0,8849 | 0,8869 | 0,8888 | 0,8907 | 0,8925 | 0,8944 | 0,8962 | 0,8980 | 0,8997 | 0,9015 |
| 1,3 | 0,9032 | 0,9049 | 0,9066 | 0,9082 | 0,9099 | 0,9115 | 0,9131 | 0,9147 | 0,9162 | 0,9177 |
| 1,4 | 0,9192 | 0,9207 | 0,9222 | 0,9236 | 0,9251 | 0,9265 | 0,9279 | 0,9292 | 0,9306 | 0,9319 |
| 1,5 | 0,9332 | 0,9345 | 0,9357 | 0,9370 | 0,9382 | 0,9394 | 0,9406 | 0,9418 | 0,9429 | 0,9441 |
| 1,6 | 0,9452 | 0,9463 | 0,9474 | 0,9484 | 0,9495 | 0,9505 | 0,9515 | 0,9525 | 0,9535 | 0,9545 |
| 1,7 | 0,9554 | 0,9564 | 0,9573 | 0,9582 | 0,9591 | 0,9599 | 0,9608 | 0,9616 | 0,9625 | 0,9633 |
| 1,8 | 0,9641 | 0,9649 | 0,9656 | 0,9664 | 0,9671 | 0,9678 | 0,9686 | 0,9693 | 0,9699 | 0,9706 |
| 1,9 | 0,9713 | 0,9719 | 0,9726 | 0,9732 | 0,9738 | 0,9744 | 0,9750 | 0,9756 | 0,9761 | 0,9767 |
| 2,0 | 0,9772 | 0,9778 | 0,9783 | 0,9788 | 0,9793 | 0,9798 | 0,9803 | 0,9808 | 0,9812 | 0,9817 |
| 2,1 | 0,9821 | 0,9826 | 0,9830 | 0,9834 | 0,9838 | 0,9842 | 0,9846 | 0,9850 | 0,9854 | 0,9857 |
| 2,2 | 0,9861 | 0,9864 | 0,9868 | 0,9871 | 0,9875 | 0,9878 | 0,9881 | 0,9884 | 0,9887 | 0,9890 |
| 2,3 | 0,9893 | 0,9896 | 0,9898 | 0,9901 | 0,9904 | 0,9906 | 0,9909 | 0,9911 | 0,9913 | 0,9916 |
| 2,4 | 0,9918 | 0,9920 | 0,9922 | 0,9925 | 0,9927 | 0,9929 | 0,9931 | 0,9932 | 0,9934 | 0,9936 |
| 2,5 | 0,9938 | 0,9940 | 0,9941 | 0,9943 | 0,9945 | 0,9946 | 0,9948 | 0,9949 | 0,9951 | 0,9952 |
| 2,6 | 0,9953 | 0,9955 | 0,9956 | 0,9957 | 0,9959 | 0,9960 | 0,9961 | 0,9962 | 0,9963 | 0,9964 |
| 2,7 | 0,9965 | 0,9966 | 0,9967 | 0,9968 | 0,9969 | 0,9970 | 0,9971 | 0,9972 | 0,9973 | 0,9974 |
| 2,8 | 0,9974 | 0,9975 | 0,9976 | 0,9977 | 0,9977 | 0,9978 | 0,9979 | 0,9979 | 0,9980 | 0,9981 |
| 2,9 | 0,9981 | 0,9982 | 0,9982 | 0,9983 | 0,9984 | 0,9984 | 0,9985 | 0,9985 | 0,9986 | 0,9986 |
| 3,0 | 0,9987 | 0,9987 | 0,9987 | 0,9988 | 0,9988 | 0,9989 | 0,9989 | 0,9989 | 0,9990 | 0,9990 |
| 3,1 | 0,9990 | 0,9991 | 0,9991 | 0,9991 | 0,9992 | 0,9992 | 0,9992 | 0,9992 | 0,9993 | 0,9993 |
| 3,2 | 0,9993 | 0,9993 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9995 | 0,9995 | 0,9995 |
| 3,3 | 0,9995 | 0,9995 | 0,9995 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9997 |
| 3,4 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9998 |
| 3,5 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 |
| 3,6 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 |
| 3,7 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 |
| 3,8 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 |
| 3,9 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |

# SOLUCIONES CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE 2020

***Pregunta 1:***

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

   **a)** Calcule los productos de matrices $A \cdot B$ y $B \cdot A$. ¿Se cumple que $A \cdot B = B \cdot A$?

   **b)** Compruebe si es cierta la igualdad $(A+B)^2 = A^2 + B^2$.

***Solución:***

*a)*

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}}.$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}}.$$

$\underline{\textit{Como se observa, no se cumple que } A \cdot B = B \cdot A.}$

*b)*

$$(A+B)^2 = \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 12 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$(A+B)^2 = A^2 + B^2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 12 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

$\underline{\textit{Como se observa, no se cumple que } (A+B)^2 = A^2 + B^2.}$

***Pregunta 2:***

**2. a)** Estudie en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ el siguiente sistema de ecuaciones: (1,25 puntos)

$$\left.\begin{array}{rcrcrl} x & & & + & \lambda z & = 1 \\ x & + & y & + & \lambda z & = 1 \\ \lambda x & - & y & + & z & = 1 \end{array}\right\}$$

**b)** Resuelve el sistema (si es posible) para $\lambda = 1$. (0,75 puntos)

***Solución:***

*a)*

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda \\ \lambda & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda \\ \lambda & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - \lambda - \lambda^2 + \lambda = 0;\ -\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1.$$

$$\underline{Para \begin{Bmatrix} \lambda \neq -1 \\ \lambda = 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = n^{\underline{o}}\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ \lambda = -1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 + 1 + 1 = 2 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$\underline{Para\ \lambda = -1 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible}.$$

$$Para\ \lambda = 1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1 = C_3 = C_4\} \Rightarrow Rang\ M' = 2.$$

$$\underline{Para\ \lambda = 1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < n^{\underline{o}}\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

*b)*

Para $\lambda = 1$ el sistema resulta $\left.\begin{array}{r} x + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x - y + z = 1 \end{array}\right\}$, que es compatible determinado.

Despreciando la tercera ecuación y haciendo $z = \lambda$:

$$\underline{Solución: x = 1 - \lambda;\ \ y = 0;\ \ z = \lambda, \forall \lambda \in R}.$$

***Pregunta 3:***

3. Sean los vectores $\vec{u} = (4, 3, \alpha)$, $\vec{v} = (\alpha, 1, 0)$ y $\vec{w} = (2\alpha, 1, \alpha)$ (con $\alpha \in \mathbb{R}$).

   a) Determine los valores de $\alpha$ para que $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean linealmente independientes.

   b) Para el valor $\alpha = 1$ exprese $\vec{w}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ .

***Solución:***

*a)*

Para que los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ sean linealmente independientes es necesario que el determinante que forman tenga rango tres, es decir, que sea distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & a \\ a & 1 & 0 \\ 2a & 1 & a \end{vmatrix} = 4a + a^2 - 2a^2 - 3a^2 = 0;\ 4a - 4a^2 = 0;\ \ 4a(1 - a) = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow a_1 = 0, a_2 = 1.$

$\underline{\textit{Los vectores } \vec{u}, \vec{v} \textit{ y } \vec{w} \textit{ son linealmente independientes } \forall a \in R - \{0, 1\}}.$

*b)*

Para $a = 1$ los vectores son $\vec{u} = (4, 3, 1), \vec{v} = (1, 1, 0)$ y $\vec{w} = (2, 1, 1)$.

$$\vec{w} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 4\alpha + \beta = 2 \\ 3\alpha + \beta = 1 \\ \alpha = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \beta = -2 \Rightarrow \underline{\vec{w} = \vec{u} - 2\vec{v}}.$$

. . . . . . . . . .

**Pregunta 4:**

4. Dados el plano $\Pi_1$ determinado por los puntos $(0,1,1)$, $(2,0,2)$ y $(1,2,6)$ y el plano $\Pi_2$ dado por la ecuación $x-y+z=3$. Calcule una recta que sea paralela a los dos planos y que no esté contenida en ninguno de ellos. (2 puntos)

**Solución:**

Los puntos $A(0,1,1)$, $B(2,0,2)$ y $C(1,2,6)$ determinan los vectores:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(2,0,2)-(0,1,1)] = (2,-1,1)$.

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = [(2,0,2)-(1,2,6)] = (1,-2,-4)$.

$$\pi(A;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z-1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 0;$$

$4x + (y-1) - 4(z-1) + (z-1) + 2x + 8(y-1) = 0;$

$6x + 9(y-1) - 3(z-1) = 0;\ \ 2x + 3(y-1) - (z-1) = 0;$

$2x + 3y - 3 - z + 1 = 0 \Rightarrow \underline{\pi_1 \equiv 2x + 3y - z - 2 = 0}.$

Los planos $\pi_1$ y $\pi_2$ determinan la recta $r' \equiv \begin{cases} 2x+3y-z-2=0 \\ x-y+z-3=0 \end{cases}$.

Un vector director de $r'$ es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores directores de los planos que la determinan, que son los siguientes: $\overrightarrow{n_1} = (2,3,-1)$ y $\overrightarrow{n_2} = (1,-1,1)$.

$$\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3i - j - 2k - 3k - i - 2j = 2i - 3j - 5k \Rightarrow$$

$\Rightarrow \overrightarrow{v_{r'}} = (2,-3,-5)$.

Las infinitas rectas que son solución del ejercicio tienen como vector director al vector hallado $\overrightarrow{v_{r'}} = (2,-3,-5)$; considerando un punto que no pertenezca a ninguno de los dos planos dados, por ejemplo el origen, una recta solución es la siguiente:

$$\underline{r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -3\lambda \\ z = -5\lambda \end{cases}}.$$

**Pregunta 5:**

5. Sea la función $f(x) = \dfrac{4x}{1+x^2}$.

a) Estudie las asíntotas, la monotonía (crecimiento y decrecimiento) y los extremos relativos (máximos y mínimos) de la función $f(x)$. (1,5 puntos)

b) Con los datos obtenidos en el apartado anterior, represente de forma aproximada la gráfica de la función $f(x)$. (0,5 puntos)

**Solución:**

*a)*

Por ser $1 + x^2 \neq 0, \forall x \in R \Rightarrow \underline{D(f) \Rightarrow R}$.

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$; son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{4x}{1+x^2} = 0.$$

*El eje de abscisas* ($y = 0$) *es asíntota horizontal de la función.*

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito; son los valores que anulan el denominador.

$1 + x^2 = 0 \Rightarrow x \notin R \Rightarrow$ *La función $f(x)$ no tiene asíntotas verticales.*

Asíntotas oblicuas: son de la forma $y = mx + n$, con $m \neq 0, m \neq \infty$, siendo:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{4x}{1+x^2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x}{x+x^3} = 0.$$

*La función $f(x)$ no tiene asíntotas oblicuas.*

También se sabe que no tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las asíntotas horizontales.

Una función es simétrica con respecto al eje Y cuando $f(-x) = f(x)$ y es simétrica con respecto al origen cuando $f(-x) = -f(x)$.

$$f(-x) = \frac{-4x}{1+(-x)^2} = -\frac{4x}{1+x^2} = -f(x).$$

*La función $f(x)$ es simétrica con respecto al origen.*

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$f'(x) = \frac{4\cdot(1+x^2)-4x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{4+4x^2-8x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{4-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = 0;\ 1-x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1.$

Como quiera que $(1+x^2)^2 > 0, \forall x \in R$, la derivada es positiva o negativa cuando lo sea la expresión $1-x^2$.

Los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x\epsilon(-1,1).}$

$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x\epsilon(-\infty,-1) \cup (1,+\infty).}$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto. Esta condición necesaria no es suficiente; para que exista el máximo o mínimo es necesario que no se anule la segunda derivada en ese punto para el valor que anula la primera derivada.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; se es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$f''(x) = \frac{-8x\cdot(1+x^2)^2-4(1-x^2)\cdot[2\cdot(1+x^2)\cdot 2x]}{(1+x^2)^4} = \frac{-8x\cdot(1+x^2)-16x\cdot(1-x^2)}{(1+x^2)^3} =$

$= \frac{-8x-8x^3-16x+16x^3}{(1+x^2)^3} = \frac{8x^3-24x}{(1+x^2)^3} = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}.$

$f''(-1) = \frac{-8+24}{2^3} > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = -1.$

$f(-1) = \frac{-4}{1+1} = -\frac{4}{2} = -2 \Rightarrow \underline{Mínimo: P(-1,-2)}.$

$f''(1) = \frac{8-24}{2^3} < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = 1.$

$f(1) = \frac{4}{1+1} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow \underline{Máximo: Q(1,2)}.$

También se obtiene el máximo teniendo en cuenta la simetría con respecto al origen de la función.

Aunque no se piden, se obtienen a continuación los puntos de inflexión de la función.

Para que una función tenga un punto de inflexión es condición necesaria que se anule su segunda derivada:

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3} = 0;\ 8x(x^2-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\sqrt{3} \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \sqrt{3} \end{cases}.$$

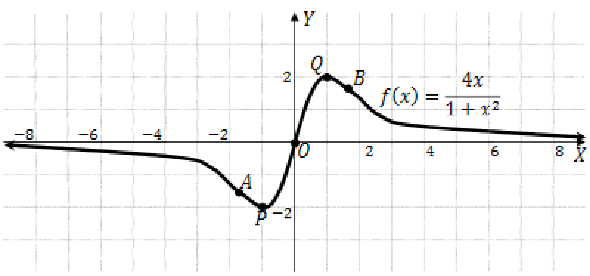
$f(-\sqrt{3}) = \frac{-4\sqrt{3}}{1+(-\sqrt{3})^2} = \frac{-4\sqrt{3}}{1+3} = -\sqrt{3} \Rightarrow Punto\ de\ inflexión: A(-\sqrt{3},-\sqrt{3}).$

$f(0) = \frac{4\cdot 0}{1+0} = 0 \Rightarrow Punto\ de\ inflexión: O(0,0).$

$f(\sqrt{3}) = \frac{4\sqrt{3}}{1+(\sqrt{3})^2} = \frac{4\sqrt{3}}{1+3} = \sqrt{3} \Rightarrow Punto\ de\ inflexión: B(\sqrt{3},\sqrt{3}).$

*b)*

Con los datos obtenidos y teniendo en cuenta que la función pasa por el origen de coordenadas, puede hacerse un esbozo de la gráfica de $f(x)$, que es el siguiente:



**Pregunta 6:**

6. Calcule los valores de $a$ y $b$ sabiendo que la siguiente función $f(x)$ es derivable en todo su dominio: (2 puntos)

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + ax + b & \text{si } x \le 1 \\ -2 + \ln(x) & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

**Solución:**

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo cual, antes de estudiar su derivabilidad se estudia su continuidad.

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x = 1$, cuya continuidad es dudosa y se van a determinar los valores reales de $a$ y $b$ para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1}(2x^2 + ax + b) = 2 + a + b = f(1) \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1}(-2 + Lx) = -2 + L1 = -2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow 2 + a + b = -2 \Rightarrow a + b = -4. \quad (1)$$

La función $f(x)$ es derivable en R, excepto para $x = 1$ cuya derivabilidad se va a forzar determinando los correspondientes valores de $a$ y $b$.

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales en ese punto.

$$f'(x) = \begin{cases} 4x + a & si\ x \le 1 \\ \frac{1}{x} & si\ x > 1 \end{cases} \Rightarrow f'(1) = \begin{cases} 4 + a & si\ x \le 1 \\ 1 & si\ x > 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(1^-) = f'(1^+) \Rightarrow 4 + a = 1 \Rightarrow a = -3.$$

Sustituyendo el valor de $a$ en (1): $-3 + b = -4 \Rightarrow b = -1$.

$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ derivable\ en\ x = 1\ para\ a = -3\ y\ b = -1.}$

**Pregunta 7:**

7. Sean las funciones $f(x) = 1 - x^2$ y $g(x) = -3$.

a) Represente la región plana encerrada por las funciones $f(x)$ y $g(x)$.

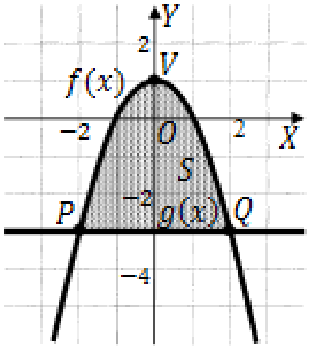
b) Calcule el área de la región anterior.

**Solución:**

*a*)

La función $f(x) = 1 - x^2$ es una parábola cóncava ($\cap$) por ser negativo el coeficiente de $x^2$ y su vértice es siguiente:

$$f'(x) = -2x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow Vértice\colon V(0,1).$$




Los puntos de corte de ambas funciones tienen por abscisas las raíces de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 1 - x^2 = -3;\ \ x^2 = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \Rightarrow P(-2,-3) \\ x_2 = 2 \Rightarrow Q(2,-3) \end{cases}.$$

La representación gráfica de la situación, aproximada, se expresa en la figura adjunta.

*b*)

Teniendo en cuenta que ambas funciones son simétricas con respecto al eje de ordenadas y de la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = 2\int_0^2 [f(x) - g(x)] \cdot dx = 2\int_0^2 (1 - x^2 + 3) \cdot dx = 2\int_0^2 (-x^2 + 4) \cdot dx =$$

$$= 2 \cdot \left[-\frac{x^3}{3} + 4x\right]_0^2 = 2 \cdot \left[\left(-\frac{2^3}{3} + 4 \cdot 2\right) - 0\right] = -\frac{16}{3} + 16 = \frac{-16+48}{3} = \frac{32}{3}.$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\right]_{-1}^3 = \left(-\frac{3^3}{3} + 3^2 + 3 \cdot 3\right) - \left[-\frac{(-1)^3}{3} + (-1)^2 + 3 \cdot (-1)\right] =$$

$$= -9 + 9 + 9 - \frac{1}{3} - 1 + 3 = 11 - \frac{1}{3} = \frac{33-1}{3} = \underline{\frac{32}{3}\,u^2 \cong 10{,}67\,u^2 = S}.$$

***Pregunta 8:***

8. Calcule la integral

$$\int \frac{3x}{x^2 - x - 2}\, dx.$$

***Solución:***

----------

$$J = \int \frac{3x}{x^2-x-2} \cdot dx.$$

$$x^2 - x - 2 = 0;\ \ x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 2.$$

$$x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2).$$

$$\frac{3x}{x^2-x-2} = \frac{M}{x+1} + \frac{N}{x-2} = \frac{Mx - 2M + Nx + N}{(x+1)(x-2)} = \frac{(M+N)x + (-2M+N)}{x^2-x-2} \Rightarrow \left.\begin{matrix} M + N = 3 \\ -2M + N = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} 2M + 2N = 6 \\ -2M + N = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3N = 6;\ \ N = 2;\ \ M + 2 = 3 \Rightarrow M = 1.$$

$$J = \int \frac{3x}{x^2-x-2} \cdot dx = \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-2}\right) \cdot dx = L|x+1| + 2 \cdot L|x-2| + C.$$

$$\underline{J = \int \frac{3x}{x^2-x-2} \cdot dx = L[|x+1| \cdot (x-2)^2] + C.}$$

### *Pregunta 9:*

9. Se realizaron dos debates electorales, uno el lunes y otro el martes. Se hizo una encuesta a 1.500 personas para estimar la audiencia, de las cuales: 1.100 personas vieron el debate del lunes, 1.000 vieron el debate del martes y 300 no vieron ninguno. Eligiendo al azar a uno de los encuestados:

   a) Calcule la probabilidad de que viera los dos debates. (1 punto)

   b) Si vio el debate del lunes, calcule la probabilidad de que viera el del martes. (1 punto)

### *Solución:*

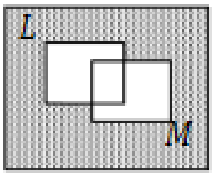
$$Datos: P(L) = \frac{1.100}{1.500} = \frac{11}{15};\; P(M) = \frac{1.000}{1.500} = \frac{2}{3};\; P(\overline{L} \cap \overline{M}) = \frac{300}{1.500} = \frac{1}{5}.$$

*a)*

$$P(\overline{L} \cap \overline{M}) = 1 - P(L \cup M) \Rightarrow P(L \cup M) = 1 - P(\overline{L} \cap \overline{M}).$$

$$P(L \cup M) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}.$$

$$P(L \cap M) = P(L) + P(M) - P(L \cup M) =$$



$P(\overline{L} \cap \overline{M}) = 1 - P(L \cup M)$

$$= \frac{11}{15} + \frac{2}{3} - \frac{4}{5} = \frac{11+10-12}{15} = \frac{9}{15} = \underline{\frac{3}{5} = 0{,}6.}$$

*b)*

$$P = P(M/L) = \frac{P(L \cap M)}{P(L)} = \frac{\frac{9}{15}}{\frac{11}{15}} = \underline{\frac{9}{11} = 0{,}8182.}$$

***Pregunta 10:***

**10.** El radio de un pistón se distribuye según una distribución normal de media 5 cm y desviación típica de 0,01 cm.

a) Calcule la probabilidad de que un pistón tenga un radio mayor que 5,01 cm. (1 punto)
b) Calcule la probabilidad de que un pistón tenga un radio entre 4,98 y 5 cm. (1 punto)

***Solución:***

*a)*

$Datos\text{: } \mu = 5; \ \ \sigma = 0{,}01.$

$X \to N(\mu;\ \sigma) = N(5;\ 0{,}01).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-5}{0{,}01}.$

$$P = P(X > 5{,}01) = P\left(Z > \frac{5{,}01-5}{0{,}01}\right) = P\left(Z > \frac{0{,}01}{0{,}01}\right) = P(Z > 1) =$$

$$= 1 - P(Z \le 1) = 1 - 0{,}8413 = \underline{0{,}1587}.$$

*b)*

$$P = P(4{,}98 < X < 5) = P\left(\frac{4{,}98-5}{0{,}01} < Z < \frac{5-5}{0{,}01}\right) = P\left(\frac{-0{,}02}{0{,}01} < Z < \frac{0}{0{,}01}\right) =$$

$$= P(-2 < Z < 0) = P(Z < 0) - [1 - P(Z \le 2)] =$$

$$= P(Z < 0) - 1 + P(Z \le 2) = 0{,}5 - 1 + 0{,}9772 = 1{,}4772 - 1 = \underline{0{,}4772}.$$