

MATEMÀTICAS II

Selectivitat 2020

Comunitat autònoma de CATALUNYA



www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Jaime Carrascosa Orozco





Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

2020

Proves d'accés a la universitat

Matemàtiques

Sèrie 1

Responen a QUATRE de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2,5 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

Podeu utilitzar les pàgines en blanc (pàgines 14 i 15) per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió si necessiteu més espai. En aquest últim cas, cal que ho indiqueu clarament al final de la pàgina de la qüestió corresponent.

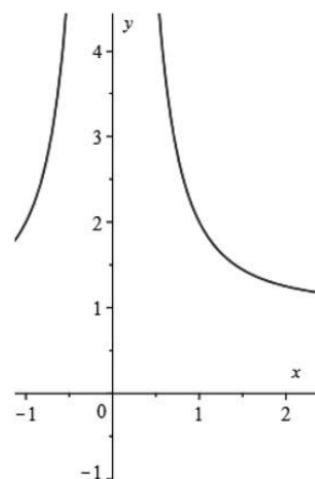
1. Tracem la recta tangent a la funció $f(x) = \frac{1}{x^2} + 1$ per un punt

$P = (a, f(a))$ del primer quadrant. Aquesta recta juntament amb els eixos de coordenades formen un triangle.

- a) Comproveu que l'àrea d'aquest triangle, en funció de a , ve donada per la funció

$$g(a) = \frac{(a^2 + 3)^2}{4a}.$$

[1,25 punts]



- b) En quin punt P l'àrea del triangle és mínima? Calculeu aquest valor mínim.

[1,25 punts]

2. Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real k :

$$\begin{cases} 5x + y + 4z = 19 \\ kx + 2y + 8z = 28 \\ 5x + y - kz = 23 + k \end{cases}$$

- a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre k .

[1,25 punts]

- b) Resoleu, si és possible, el sistema per al cas $k = 0$.

[1,25 punts]

3. **a)** Calculeu l'equació general del pla π que passa pel punt $(8, 8, 8)$ i té com a vectors directors $\mathbf{u} = (1, 2, -3)$ i $\mathbf{v} = (-1, 0, 3)$.

[1,25 punts]

- b)** Determineu el valor del paràmetre a perquè el punt $(1, -5, a)$ pertanyi al pla π i calculeu l'equació paramètrica de la recta que passa per aquest punt i és perpendicular al pla π .

[1,25 punts]

4. Considereu la funció $f(x) = \frac{ax^2 + b}{x}$, en què a i b són dos paràmetres reals. Calculeu els

valors de a i b de manera que la funció $f(x)$ tingui una asímptota obliqua de pendent 1 i un mínim en el punt de la gràfica d'abscissa $x = 2$.

[2,5 punts]

5. Sigui la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$.

- a)** Trobeu la matriu X que satisfà l'equació $AX = I - 3X$, en què I és la matriu identitat d'ordre 2.

[1,25 punts]

- b)** Comproveu que la matriu X és invertible i calculeu-ne la matriu inversa.

[1,25 punts]

6. Considereu la funció $f(x) = x^3$.

- a)** Calculeu en quin punt del tercer quadrant la recta tangent a $y = f(x)$ és paral·lela a la recta $3x - y = 4$. Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica en aquest punt i feu un dibuix aproximat de la gràfica de la funció i les dues rectes.

[1,25 punts]

- b)** Calculeu l'àrea de la regió delimitada per $y = f(x)$ i la recta $y = 3x + 2$.

[1,25 punts]



Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

2020

CONVOCATÒRIA
ORDINÀRIA DE
JUNY

Proves d'accés a la universitat

Matemàtiques

Sèrie 3

Responeu a QUATRE de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2,5 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

Podeu utilitzar les pàgines en blanc (pàgines 14 i 15) per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió si necessiteu més espai. En aquest últim cas, cal que ho indiqueu clarament al final de la pàgina de la qüestió corresponent.

1. Sigui $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$, en què a és un paràmetre real.

a) Determineu el rang de la matriu A en funció del paràmetre a .

[1,25 punts]

b) Comproveu que $\det(A^2 + A) = 0$.

[1,25 punts]

2. S'han trobat unes pintures rupestres en una cova situada en una zona molt pedregosa. Hi ha un camí que voreja parcialment la cova format per l'arc de corba $y = 4 - x^2$ d'extremes $(0, 4)$ i $(2, 0)$. La cova està situada en el punt de coordenades $(0, 2)$, tal com es mostra en la figura, i es vol habilitar un accés rectilini d des del camí a la cova que sigui el més curt possible.

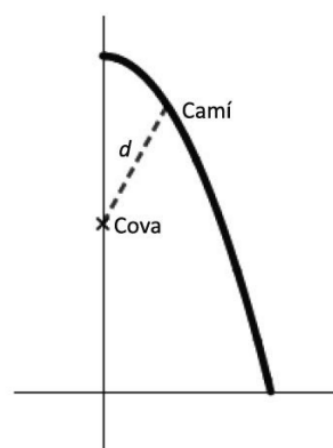
a) Identifiqueu a la gràfica de la figura les coordenades de la cova i del punt del camí des d'on es vol habilitar l'accés.

Comproveu que la funció $f(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}$ calcula la distància des de cada punt del camí a la cova.

[1,25 punts]

b) Calculeu les coordenades del punt del camí que queda més a prop de la cova i digueu quina serà la longitud de l'accés d .

[1,25 punts]



3. Considereu el sistema d'equacions lineals següent:

$$\begin{cases} ax + y = a \\ x + ay + z = 5 \\ x + 2y + z = 5 \end{cases}$$

- a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre a .

[1,25 punts]

- b) Resoleu el sistema per al cas $a = 2$.

[1,25 punts]

4. Sigui la funció $f(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln(x)$, en què $\ln$ indica el logaritme neperià, definida per a $x > 0$.

- a) Calculeu les coordenades del punt de la corba $y = f(x)$ en què la recta tangent a la corba en aquest punt és horitzontal. Estudieu si aquest punt és un extrem relatiu i classifiqueu-lo.

[1,25 punts]

- b) Calculeu l'àrea del recinte delimitat per la corba $y = f(x)$, les rectes verticals $x = 1$ i $x = e$ i l'eix de les abscisses.

[1,25 punts]

5. Considereu la recta r d'equació $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z}{1}$ i la recta s que passa pel punt $P = (2, -5, 1)$

i que té per vector director $(-1, 0, -1)$.

- a) Estudieu la posició relativa de les rectes r i s .

[1,25 punts]

- b) Calculeu l'equació general del pla que és paral·lel a la recta r i conté la recta s .

[1,25 punts]

6. Una empresa de ceràmica vol posar a la venda una rajola quadrada de 20 cm de costat pintada a dos colors, de manera que la superfície de cada color sigui la mateixa i que si es posen les rajoles l'una al costat de l'altra es vegi un dibuix continu (figura 1).



Figura 1



Figura 2

Per a fer-ho, l'empresa utilitza en cada rajola la funció $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ enquadrada entre els punts de coordenades $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 0)$ i $(2, 2)$, tal com es mostra en la figura 2, i fa servir com a unitat de mesura el decímetre.

- a) Justifiqueu que, efectivament, aquesta funció permet ajuntar les rajoles de manera contínua i derivable.
[1,25 punts]
- b) Justifiqueu que aquesta funció divideix el quadrat esmentat en dues parts que tenen la mateixa superfície.
[1,25 punts]

SÈRIE 1

CONVOCATÒRIA
ORDINÀRIA DE
JUNY

Problema A.1:

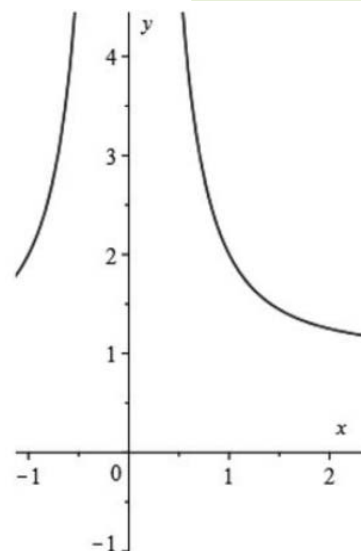
1. Tracem la recta tangent a la funció $f(x) = \frac{1}{x^2} + 1$ per un punt

$P = (a, f(a))$ del primer quadrant. Aquesta recta juntament amb els eixos de coordenades formen un triangle.

- a) Comproveu que l'àrea d'aquest triangle, en funció de a , ve donada per la funció

$$g(a) = \frac{(a^2 + 3)^2}{4a}.$$

[1,25 punts]

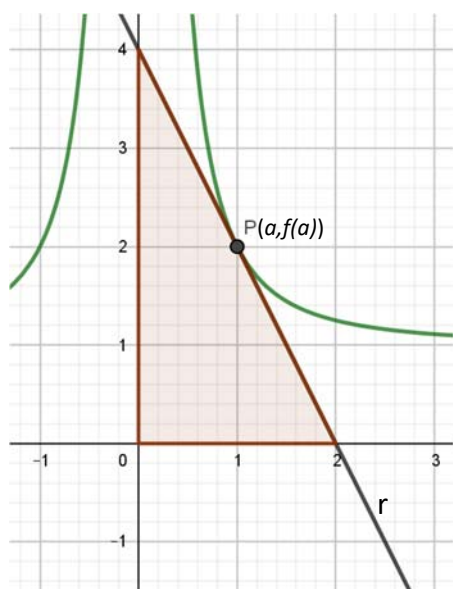


- b) En quin punt P l'àrea del triangle és mínima? Calculeu aquest valor mínim.

[1,25 punts]

Solució:

- a) Al següent dibuix ens podem fer una idea de la situació i del que ens estan demanant:



Per trobar l'àrea del triangle necessitem la seva base i la seva altura, que són respectivament el punt de tall de la recta r (la recta tangent a la funció en $(a, f(a))$) amb OX i amb OY .

Primer trobarem l'equació de la recta tangent a la funció en $(a, f(a))$ i després buscarem els punts de tall amb els eixos per poder fer l'àrea del triangle:

i) Equació de la recta tangent a la funció en $(a, f(a))$:

L'equació explícita d'una recta qualsevol, ve donada per l'expressió: $y = mx + n$ on m és el pendent de la recta, com que la recta que busquem és tangent a la funció $f(x)$ en $(a, f(a))$, el seu pendent serà la derivada de la funció en a , es a dir $f'(a)$.

$$\text{Calculem } f'(x) = -\frac{2}{x^3}, \text{ llavors: } m = f'(a) = -\frac{2}{a^3}$$

De moment tenim que l'equació de la recta serà: $y = -\frac{2}{a^3}x + n$, ara, per trobar el valor de n , fem servir el fet de que la recta passa pel punt $(a, f(a)) = (a, \frac{1}{a^2} + 1)$, és a dir, canviem la x i la y per les coordenades del punt i aïllant la n trobem el seu valor:

$$\frac{1}{a^2} + 1 = -\frac{2}{a^3}a + n \longrightarrow \frac{1}{a^2} + 1 = -\frac{2}{a^2} + n \longrightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{2}{a^2} + 1 = n \longrightarrow \frac{3}{a^2} + 1 = n$$

Amb el que tenim que l'equació de la recta tangent a la funció en $(a, f(a))$ és: $y = -\frac{2}{a^3}x + \frac{3}{a^2} + 1$

(També podríem haver trobat l'equació de la recta tangent amb la fórmula de l'equació punt-pendent: $y - y_0 = m(x - x_0)$, on $(x_0, y_0) = (a, f(a))$ i $m = f'(a)$).

ii) Ara busquem els punts de tall de la recta amb els eixos de coordenades:

- Tall amb OX ($y = 0$):

$$0 = -\frac{2}{a^3}x + \frac{3}{a^2} + 1 \longrightarrow \frac{2}{a^3}x = \frac{3}{a^2} + 1 \longrightarrow 2x = \frac{3a^3}{a^2} + a^3 \longrightarrow 2x = 3a + a^3 \longrightarrow x = \frac{3a + a^3}{2}$$

- Tall amb OY ($x = 0$):

El tall amb l'eix de la y és el valor de n de l'equació explícita de la recta, llavors $y = \frac{3}{a^2} + 1$

iii) Busquem l'expressió de l'àrea del triangle:

Base Altura

$$g(a) = \frac{\frac{3a+a^3}{2} \cdot \left(\frac{3}{a^2} + 1\right)}{2} = \frac{\frac{a \cdot (3+a^2)}{2} \cdot \left(\frac{3}{a^2} + \frac{a^2}{a^2}\right)}{2} = \frac{\frac{a \cdot (3+a^2)}{2} \cdot \frac{3+a^2}{a^2}}{2} = \frac{\frac{a \cdot (3+a^2)^2}{2a^2}}{2} = \frac{\frac{(3+a^2)^2}{2a}}{2} = \frac{(3+a^2)^2}{4a}$$

L'àrea del triangle serà: $g(a) = \frac{(3+a^2)^2}{4a}$ amb $a > 0$.

- b)** El que ens demana l'apartat "b" és que trobem el valor de a pel que la funció $g(a)$ té un mínim i el valor de $g(a)$ per a aquest valor de a .

El mínim de $g(a)$ és un dels punts singulars de $g(a)$, de manera que per trobar-lo buscarem els punts singulars de $g(a)$ i després mirarem quin d'ells és un mínim; com que els punts singulars de $g(a)$ es troben als valors de a que anul·len la derivada, per trobar-los calcularem la derivada i la igualarem a zero:

i) Càlcul de la derivada de $g(a) = \frac{(3+a^2)^2}{4a}$:

$$g'(a) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2(3+a^2) \cdot 2a \cdot a - 1 \cdot (3+a^2)^2}{a^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4a^2(3+a^2) - (9+6a^2+a^4)}{a^2} = \frac{12a^2+4a^4-9-6a^2-a^4}{4a^2}$$

$$= \frac{3a^4+6a^2-9}{4a^2} = \frac{3(a^4+2a^2-3)}{4a^2}$$

ii) Busquem els punts singulars igualant la derivada a zero:

$$\frac{3(a^4 + 2a^2 - 3)}{4a^2} = 0 \longleftrightarrow a^4 + 2a^2 - 3 = 0 \xrightarrow{*} (a^2 + 3)(a^2 - 1) = 0.$$

Igualant els factors a zero:

- $a^2 + 3 = 0 \longrightarrow a = \pm\sqrt{-3} \nexists$ Solució.
- $a^2 - 1 = 0 \longrightarrow a = \pm\sqrt{1} = \pm 1$, tenim 2 solucions 1 i -1.

Com que $g(a)$ només està definida per a valors positius de a descartem la solució $a = -1$ i l'única solució que ens queda és $a = 1$.

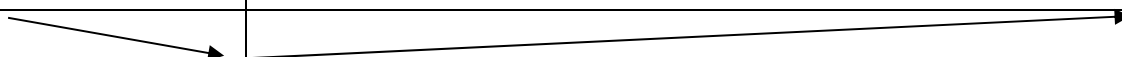
* La descomposició de $a^4 + 2a^2 - 3$, l'hem fet buscant 2 números que sumats facin 2 i multiplicats facin -3, també es podria haver fet servir Ruffini o podríem haver resolt l'equació biquadrada amb el canvi de variable $a^2 = t$.

iii) Comprovem que en $a = 1$, $g(a)$ té un mínim:

Ho farem estudiant la monotonia de la funció, fent un estudi del signe de $g'(a)$ (que només depèn de l'expressió $a^4 + 2a^2 - 3$):

Com que dins del seu domini ($a > 0$) la funció $g'(a)$ és continua i només s'anul·la quan $a = 1$ hem de mirar el signe de la funció als intervals: $(0, 1)$ i $(1, +\infty)$:

- $a = 0.5 \longrightarrow 0.5^4 + 2 \cdot 0.5^2 - 3 = 0.0625 + 0.5 - 3 = -2.4375$. Llavors, si $a \in (0, 1)$ $g'(a) < 0$.
Llavors a l'interval $(0, 1)$, $g(a)$ és decreixent.
- $a = 1.5 \longrightarrow 1.5^4 + 2 \cdot 1.5^2 - 3 = 5.0625 + 4.5 - 3 = 6.5625$. Llavors, si $a \in (1, +\infty)$ $g'(a) > 0$.
Llavors a l'interval $(1, +\infty)$, $g(a)$ és creixent.

x				
$g'(a)$	-		+	
$g(a)$				

Amb el que podem afirmar que quan $a = 1$, $g(a)$ té un mínim absolut.

El punt P, serà: $(a, f(a)) = (a, \frac{1}{a^2} + 1) = (1, \frac{1}{1^2} + 1) = (1, 2)$

iv) Calculem el valor del mínim:

$$g(1) = \frac{(3+1^2)^2}{4 \cdot 1} = 4.$$

L'àrea del triangle serà mínima quan P = (1, 2) i tindrà un valor de 4 u².

Problema A.2:

2. Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real k :

$$\begin{cases} 5x + y + 4z = 19 \\ kx + 2y + 8z = 28 \\ 5x + y - kz = 23 + k \end{cases}$$

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre k .

[1,25 punts]

b) Resoleu, si és possible, el sistema per al cas $k = 0$.

[1,25 punts]

Solució apartat a)

Anomenem $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ k & 2 & 8 \\ 5 & 1 & -k \end{pmatrix}$ a la matriu del sistema i $\bar{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 & 19 \\ k & 2 & 8 & 28 \\ 5 & 1 & -k & 23 + k \end{pmatrix}$ a la matriu ampliada del sistema.

Discutirem el sistema aplicant el Teorema de Rouché-Fröbenius, que compara el rang de la matriu del sistema amb el rang de la matriu ampliada.

i) Rang de la matriu del sistema segons els valors del paràmetre k :

Si el determinant de la matriu és diferent de zero, voldrà dir que les tres files i columnes de la matriu són linealment independents i per tant el rang de la matriu serà 3. Si el determinant queda igual a zero, voldrà dir que al menys una de les files o columnes de la matriu és combinació lineal de les altres i el rang de la matriu serà més petit que tres. Mirem per a quins valors de k s'anul·la el determinant de la matriu:

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 \\ k & 2 & 8 \\ 5 & 1 & -k \end{vmatrix} = -10k + 4k + 40 - (40 + 40 - k^2) = k^2 - 6k - 40$$

$$|A| = 0 \iff k^2 - 6k - 40 = 0 \xrightarrow{*} (x - 10)(x + 4) = 0 \longrightarrow \begin{cases} x - 10 = 0 \longrightarrow x = 10 \\ x + 4 = 0 \longrightarrow x = -4 \end{cases}$$

* La descomposició de $k^2 - 6k - 40$ l'hem fet buscant 2 números que sumats facin -6 i multiplicats facin -40 . També podríem haver resolt l'equació amb la fórmula de Bhaskara o un altre mètode.

Llavors:

- Si $k \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 10\}$ (Si k és un nombre real excepte -4 i 10), el determinant de la matriu serà diferent de zero i per tant el rang de la matriu serà 3.
- Si $k = -4$, $|A| = 0$ i per tant $\text{rg}(A) < 3$, anem a veure quin és el rang de la matriu A quan canviem la k per -4 :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ -4 & 2 & 8 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ si fem } \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 10 + 4 = 14 \neq 0, \text{ llavors podem dir que } \text{rg}(A) = 2.$$

- Si $k = 10$, $|A| = 0$ i per tant $\text{rg}(A) < 3$, anem a veure quin és el rang de la matriu A quan canviem la k per 10 :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 10 & 2 & 8 \\ 5 & 1 & -10 \end{pmatrix} \text{ si fem } \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -10 \end{vmatrix} = -20 - 8 = -28 \neq 0, \text{ llavors podem dir que } \text{rg}(A) = 2.$$

ii) **Rang de la matriu ampliada del sistema segons els valors del paràmetre k :**

- Si $k \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 10\}$, com que la matriu $\bar{A}$ és d'ordre 3×4 , $\text{rg}(\bar{A}) \leq 3$, com que la matriu $A \subset \bar{A}$, $\text{rg}(\bar{A}) \geq 3$; per tant $\text{rg}(\bar{A}) = 3$.

- Si $k = -4$, anem a veure quin és el rang de la matriu $\bar{A}$:

Per fer-ho farem servir el mètode de Gauss.

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 & 19 \\ -4 & 2 & 8 & 28 \\ 5 & 1 & 4 & 19 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{4F_1+5F_2 \\ F_1-F_3}]{\substack{4F_1+5F_2 \\ F_1-F_3}} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 & 19 \\ 0 & 14 & 56 & 216 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{rg}(\bar{A}) = 2.$$

- Si $k = 10$, anem a veure quin és el rang de la matriu $\bar{A}$:

Per fer-ho farem servir el mètode de Gauss.

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 & 19 \\ 10 & 2 & 8 & 28 \\ 5 & 1 & -10 & 33 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{2F_1-F_2 \\ F_1-F_3}]{\substack{2F_1-F_2 \\ F_1-F_3}} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 14 & -14 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 & 19 \\ 0 & 0 & 14 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{rg}(\bar{A}) = 3.$$

iii) **Discussió del sistema amb el T^a de Rouché-Fröbenius:**

- Si $k \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 10\}$, tenim que $\text{rg}(A) = \text{rg}(\bar{A}) = n^\circ$ d'incògnites $\xrightarrow{T^a \text{ de Rouché}} \text{SCD}$.
- Si $k = -4$, tenim que $\text{rg}(A) = \text{rg}(\bar{A}) = 2 < 3 = n^\circ$ d'incògnites $\xrightarrow{T^a \text{ de Rouché}} \text{SCI}$ amb 1 grau de llibertat.
- Si $k = 10$, tenim que $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(\bar{A}) \xrightarrow{T^a \text{ de Rouché}} \text{SI}$.

- **Si $k \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 10\}$, el sistema és compatible determinat.**
- **Si $k = -4$, el sistema és compatible indeterminat amb un grau de llibertat.**
- **Si $k = 10$, el sistema és incompatible.**

Solució apartat b)

Si $k = 0$, estem en el cas $k \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 10\}$ i tindrem un SCD, per resoldre'l farem servir el mètode de Gauss:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 & 19 \\ 0 & 2 & 8 & 28 \\ 5 & 1 & 0 & 23 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1-F_3} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 & 19 \\ 0 & 2 & 8 & 28 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow 4z = -4 \longrightarrow z = -1.$$

Substituint z a la 2a fila: $2y - 8 = 28 \longrightarrow 2y = 28 + 8 \longrightarrow 2y = 36 \longrightarrow y = 18$.

Substituint y i z a la 1a fila: $5x + 18 - 4 = 19 \longrightarrow 5x + 14 = 19 \longrightarrow 5x = 19 - 14 \longrightarrow$

$5x = 5 \longrightarrow x = 1$.

La solució del sistema quan $k = 0$, és $(1, 18, -1)$.

Problema A.3:

3. a) Calculeu l'equació general del pla π que passa pel punt $(8, 8, 8)$ i té com a directores $u = (1, 2, -3)$ i $v = (-1, 0, 3)$.

[1,25 punts]

- b) Determineu el valor del paràmetre a perquè el punt $(1, -5, a)$ pertanyi al pla π i calculeu l'equació paramètrica de la recta que passa per aquest punt i és perpendicular al pla π .

[1,25 punts]

Solució apartat a)

L'equació general d'un pla és de la forma $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$, on el vector format pels coeficients de x, y , i z és perpendicular al pla, és a dir $(A, B, C) \perp \pi$.

Com que $u = (1, 2, -3)$ i $v = (-1, 0, 3)$, són vectors directores del pla, el seu producte vectorial, serà un vector perpendicular al pla:

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6i + 3j - (-2k + 3j) = 6i + 2k \longrightarrow u \times v = (6, 0, 2), \text{ dividint entre } 2,$$

continuarem tenint un vector perpendicular al pla: $(3, 0, 1)$.

De moment tenim que l'equació del pla que ens demanen, serà: $3x + z + D = 0$, per trobar el valor de D , fem servir que $(8, 8, 8)$ és un punt del pla i per tant satisfà l'equació del pla:

$$3 \cdot 8 + 8 + D = 0 \longrightarrow 32 + D = 0 \longrightarrow D = -32, \text{ llavors l'equació del pla que ens demanen és:}$$

$$\pi: 3x + z - 32 = 0.$$

(També la podríem haver trobat igualant a zero el determinant $\begin{vmatrix} x-8 & y-8 & z-8 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ ja que si (x, y, z)

és un punt del pla, $(x-8, y-8, z-8)$ és un vector del pla i com que tres vectors d'un mateix pla són sempre linealment dependents, el determinant de la matriu que formen donarà zero).

L'equació del pla és $\pi: 3x + z - 32 = 0$.

Solució apartat b)

$$\text{Si } (1, -5, a) \in \pi, \text{ ha de satisfer l'equació del pla: } 3 \cdot 1 + a - 32 = 0 \longrightarrow a - 29 = 0 \longrightarrow a = 29.$$

Com que la recta que ens demanen és perpendicular al pla, el seu vector director també ho serà, llavors podem fer servir com a vector director de la recta el vector: $(3, 0, 1)$, i com que ha de passar pel punt $(1, -5, 29)$ ja podem escriure l'equació paramètrica de la recta:

L'equació paramètrica d'una recta amb vector director (v_1, v_2, v_3) i que passa pel punt (p_1, p_2, p_3) ve

$$\text{donada per l'expressió: } r: \begin{cases} x = p_1 + \lambda v_1 \\ y = p_2 + \lambda v_2 \\ z = p_3 + \lambda v_3 \end{cases} \text{ en el nostre cas: } r: \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = -5 \\ z = 29 + \lambda \end{cases}$$

L'equació paramètrica de la recta demanada és $r: \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = -5 \\ z = 29 + \lambda \end{cases}$

Problema A.4:

4. Considereu la funció $f(x) = \frac{ax^2 + b}{x}$, en què a i b són dos paràmetres reals. Calculeu els

valors de a i b de manera que la funció $f(x)$ tingui una asímptota obliqua de pendent 1 i un mínim en el punt de la gràfica d'abscissa $x = 2$.

[2,5 punts]

Solució:

- Si la recta $y = mx + n$, és una asímptota obliqua de la funció $f(x) \longrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = m$.

Llavors, en el nostre cas: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{ax^2+b}{x}}{x} = 1 \longrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2+b}{x^2} = 1 \longrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left(a + \frac{b}{x^2}\right) = 1 \longrightarrow a = 1$.

- Si una funció $f(x)$ té un mínim en el punt d'abscissa $x = 2 \longrightarrow f'(2) = 0$.

En el nostre cas: $f(x) = \frac{x^2+b}{x} \longrightarrow f'(x) = \frac{2x \cdot x - (x^2+b)}{x^2} = \frac{x^2-b}{x^2}$ llavors:

$$\frac{2^2-b}{2^2} = 0 \longrightarrow 4 - b = 0 \longrightarrow b = 4.$$

Comprovem que $f(x) = \frac{x^2+4}{x}$ té un mínim en el punt d'abscissa $x = 2$. (Nosaltres el que sabem és que la derivada val zero i això no ens garanteix que la funció tingui un mínim, podria tenir un màxim o un punt d'inflexió i en aquests casos el problema no tindria solució). Per fer-ho estudiarem el signe de la derivada:

$$f'(x) = \frac{x^2-4}{x^2} \longrightarrow f'(x) = 0 \longleftrightarrow \frac{x^2-4}{x^2} = 0 \longleftrightarrow x^2 - 4 = 0 \longleftrightarrow x^2 = 4 \longleftrightarrow x = \pm\sqrt{4} \longrightarrow$$

$$x = -2 \text{ ó } x = 2.$$

A més a més la derivada té una discontinuïtat en $x = 0$ ja que s'anul·la el denominador, llavors per estudiar el signe de la derivada hauríem de considerar els intervals $(-\infty, -2)$, $(-2, 0)$, $(0, 2)$ i $(2, +\infty)$, com que només ens interessa saber què passa en $x = 2$, només cal que mirem el signe en $(0, 2)$ i $(2, +\infty)$.

$$\text{Si } x = 1, f'(1) = \frac{1^2-4}{1^2} = -3 < 0 \longrightarrow f'(x) < 0 \text{ si } x \in (0, 2) \longrightarrow f(x) \text{ és decreixent en } (0, 2).$$

$$\text{Si } x = 3, f'(3) = \frac{3^2-4}{3^2} = \frac{5}{9} > 0 \longrightarrow f'(x) > 0 \text{ si } x \in (2, +\infty) \longrightarrow f(x) \text{ és creixent en } (2, +\infty).$$

Ara sí que podem afirmar que $f(x) = \frac{x^2+4}{x}$ té un mínim en el punt d'abscissa $x = 2$.

La funció tindrà una asímptota obliqua de pendent 1 i un mínim en $x = 2$ quan:

$$a = 1 \text{ i } b = 4$$

Problema A.5:

5. Sigui la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$.

a) Trobeu la matriu X que satisfà l'equació $AX = I - 3X$, en què I és la matriu identitat d'ordre 2.

[1,25 punts]

b) Comproveu que la matriu X és invertible i calculeu-ne la matriu inversa.

[1,25 punts]

Solució apartat a)

$$AX = I - 3X \longrightarrow AX + 3X = I \longrightarrow (A + 3I)X = I \longrightarrow (A + 3I)^{-1}(A + 3I)X = (A + 3I)^{-1}I \longrightarrow X = (A + 3I)^{-1}$$

$$A + 3I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}; \text{ ara calculem la seva inversa:}$$

1r. Calculem el determinant: $|A + 3I| = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -4 + 3 = -1$.

2n. Fem la transposada: $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

3r. Fem la matriu dels adjunts: $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

4t. Dividim entre el determinant: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} = (A + 3I)^{-1} = X$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Solució apartat b)

Per comprovar que X és invertible hem de veure que el seu determinant és diferent de zero:

$$|X| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 3 = -1 \neq 0 \text{ llavors } X \text{ és invertible.}$$

Com que a l'apartat anterior hem vist que: $X = (A + 3I)^{-1} \longrightarrow X^{-1} = ((A + 3I)^{-1})^{-1} = A + 3I$

$$\longrightarrow X^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Problema A.6:

6. Considereu la funció $f(x) = x^3$.

a) Calculeu en quin punt del tercer quadrant la recta tangent a $y = f(x)$ és paral·lela a la recta $3x - y = 4$. Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica en aquest punt i feu un dibuix aproximat de la gràfica de la funció i les dues rectes.

[1,25 punts]

b) Calculeu l'àrea de la regió delimitada per $y = f(x)$ i la recta $y = 3x + 2$.

[1,25 punts]

Solució apartat a)

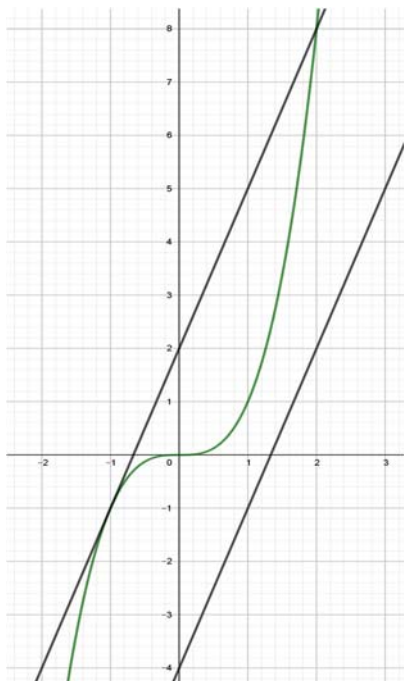
Si dues rectes són paral·leles per força tenen el mateix pendent, la recta $3x - y = 4$ es pot reescriure com $y = 3x - 4$ on es veu que el seu pendent (el coeficient de la x) és 3. Llavors el que volem és veure en quin punt del tercer quadrant la recta tangent a $y = x^3$ té pendent 3. Com que el pendent de la recta tangent a $y = f(x)$ en un punt $(a, f(a))$, és igual a $f'(a)$; el que ens estan demanant és: per a quins valors negatius de x (negatius perquè el punt ha de ser del tercer quadrant) $(x^3)' = 3$?

$(x^3)' = 3x^2 \longrightarrow 3x^2 = 3 \longrightarrow x^2 = 1 \longrightarrow x = \pm\sqrt{1} \longrightarrow x = -1 \text{ ó } x = 1$. Com que només volem el resultat negatiu: $x = -1$.

El punt que ens demanen serà: $(-1, f(-1)) = (-1, (-1)^3) = (-1, -1)$

L'equació de la recta que té pendent 3 i que passa pel punt $(-1, -1)$ serà:

Pendent 3 $\longrightarrow y = 3x + n \xrightarrow{\text{passa per } (-1, -1)} -1 = 3 \cdot (-1) + n \longrightarrow n = 2 \longrightarrow y = 3x + 2$



El punt en el que la recta tangent a $y=f(x)$ és paral·lela a $3x - y = 4$, és $(-1, -1)$ i l'equació de la recta és: $y = 3x + 2$.

Solució apartat b)

1r. Trobem els punts de tall de la corba i la recta:

$$\begin{cases} y = x^3 \\ y = 3x + 2 \end{cases} \longrightarrow x^3 = 3x + 2 \longrightarrow x^3 - 3x - 2 = 0 \xrightarrow{*Ruffini} (x + 1)^2(x - 2) = 0 \longrightarrow$$

$$\begin{cases} x + 1 = 0 \longrightarrow x = -1 \longrightarrow y = (-1)^3 = -1 \\ x - 2 = 0 \longrightarrow x = 2 \longrightarrow y = 2^3 = 8 \end{cases} \quad ; \text{ els punts de tall són: } (-1, -1) \text{ i } (2, 8).$$

*Ruffini:

	1	0	-3	-2
-1		-1	1	2
	1	-1	-2	0
-1		-1	2	
	1	-2		0

Com es pot veure al dibuix de l'apartat a) la recta $y = 3x + 2$ va sempre per sobre de la corba $y = x^3$ de manera que l'àrea demanada ve donada per la solució de la següent integral definida:

$$A = \int_{-1}^2 [(3x + 2) - x^3] dx = \int_{-1}^2 (-x^3 + 3x + 2) dx = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^2 =$$

$$\left(-\frac{2^4}{4} + \frac{3 \cdot 2^2}{2} + 2 \cdot 2 \right) - \left(-\frac{(-1)^4}{4} + \frac{3(-1)^2}{2} + 2(-1) \right) = (-4 + 6 + 4) - \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{2} - 2 \right) =$$

$$6 - \left(-\frac{3}{4} \right) = \frac{27}{4}$$

L'àrea entre la corba i la recta és $\frac{27}{4} u^2$

SÈRIE 3

CONVOCATÒRIA
ORDINARIA DE
JUNY

Problema B.1:

1. Sigui $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$, en què a és un paràmetre real.

a) Determineu el rang de la matriu A en funció del paràmetre a .

[1,25 punts]

b) Comproveu que $\det(A^2 + A) = 0$.

[1,25 punts]

Solució apartat a)

Si el determinant de la matriu és diferent de zero, voldrà dir que les tres files i columnes de la matriu són linealment independents i per tant el rang de la matriu serà 3. Si el determinant queda igual a zero, voldrà dir que al menys una de les files o columnes de la matriu és combinació lineal de les altres i el rang de la matriu serà més petit que tres. Mirem per a quins valors de a s'anul·la el determinant de la matriu:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -1 + 2a - a = a - 1 \longrightarrow |A| = 0 \longleftrightarrow a - 1 = 0 \longleftrightarrow a = 1.$$

- Si $a \neq 1$, $|A| \neq 0 \longrightarrow \text{rg}(A) = 3$.
- Si $a = 1$, $|A| = 0 \longrightarrow \text{rg}(A) < 3$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ si fem } \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \longrightarrow \text{rg}(A) = 2.$$

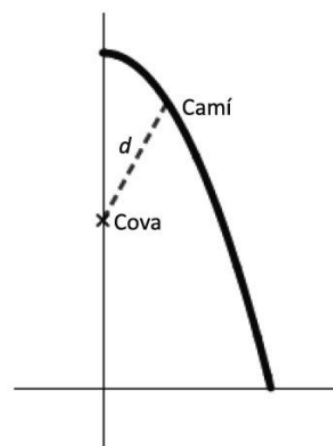
Si $a \neq 1$, $\text{rg}(A) = 3$ i si $a = 1$, $\text{rg}(A) = 2$

Solució apartat b)

$$A^2 + A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2a & 4 \\ 0 & a+1 & 2 \\ a & 0 & a+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2a & 6 \\ 1 & a & 3 \\ a & a & a+2 \end{pmatrix}, \text{ com que la primera fila és el doble de la segona, és segur que } |A^2 + A| = 0.$$

Problema B.2:

2. S'han trobat unes pintures rupestres en una cova situada en una zona molt pedregosa. Hi ha un camí que voreja parcialment la cova format per l'arc de corba $y = 4 - x^2$ d'extremes $(0, 4)$ i $(2, 0)$. La cova està situada en el punt de coordenades $(0, 2)$, tal com es mostra en la figura, i es vol habilitar un accés rectilini d des del camí a la cova que sigui el més curt possible.

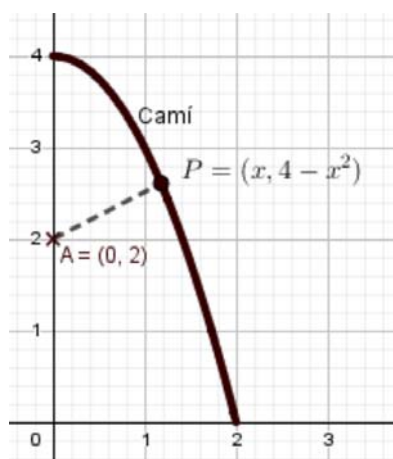


- a) Identifiquen a la gràfica de la figura les coordenades de la cova i del punt del camí des d'on es vol habilitar l'accés. Comproveu que la funció $f(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}$ calcula la distància des de cada punt del camí a la cova.

[1,25 punts]

- b) Calculeu les coordenades del punt del camí que queda més a prop de la cova i diguen quina serà la longitud de l'accés d .

[1,25 punts]

Solució apartat a)

La distància entre 2 punts ve donada per la longitud del vector que els uneix, en el nostre cas:

$$|\vec{AP}| = \sqrt{(x-0)^2 + (4-x^2-2)^2} = \sqrt{x^2 + (2-x^2)^2} = \sqrt{x^2 + 4 - 4x^2 + x^4} = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}.$$

Llavors $f(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}$ $0 \leq x \leq 2$, ens dona la distància de cada punt del camí a la cova.

Solució apartat b)

El que ens demana l'apartat b és que trobem el valor de x pel que la funció $f(x)$ té un mínim i el valor de $f(x)$ per a aquest valor de x (*).

El mínim de $f(x)$ és un dels punts singulars de $f(x)$, de manera que per trobar-lo buscarem els punts singulars de $f(x)$ i després mirarem quin d'ells és un mínim; com que els punts singulars de $f(x)$ es troben als valors de x que anul·len la derivada, per trobar-los calcularem la derivada i la igualarem a zero:

$$\bullet \quad f'(x) = \frac{4x^3 - 6x}{2\sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}} = \frac{2x^3 - 3x}{\sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}}$$

$$\bullet \quad f'(x) = 0 \iff \frac{2x^3 - 3x}{\sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}} = 0 \iff 2x^3 - 3x = 0 \iff x(2x^2 - 3) = 0 \implies$$

$\begin{cases} x = 0 \\ 2x^2 - 3 = 0 \longrightarrow 2x^2 = 3 \longrightarrow x^2 = \frac{3}{2} \longrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \end{cases}$ Amb el que tenim 3 solucions de l'equació $f'(x) = 0$, que són: $-\sqrt{\frac{3}{2}}$, 0 i $\sqrt{\frac{3}{2}}$; la solució $-\sqrt{\frac{3}{2}}$ la descartem ja que $0 \leq x \leq 2$.

- Per identificar a quin dels altres dos valors tenim el mínim demanat, estudiarem el signe de $f'(x)$.

Com que l'expressió $\sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}$ sempre dona valors positius, el signe de $f'(x)$ només dependrà de $2x^3 - 3x$:

$\text{➤ } x = -1 \longrightarrow 2(-1)^3 - 3 \cdot (-1) = 1 > 0 \longrightarrow f'(x) > 0 \text{ quan } x \in \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right) \longrightarrow f(x) \text{ és creixent quan } x \in \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right).$

$\text{➤ } x = 1 \longrightarrow 2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1 = -1 < 0 \longrightarrow f'(x) < 0 \text{ quan } x \in \left(0, \sqrt{\frac{3}{2}}\right) \longrightarrow f(x) \text{ és decreixent quan } x \in \left(0, \sqrt{\frac{3}{2}}\right).$

$\text{➤ } x = 2 \longrightarrow 2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2 = 10 > 0 \longrightarrow f'(x) > 0 \text{ quan } x \in \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \infty\right) \longrightarrow f(x) \text{ és creixent quan } x \in \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \infty\right).$

Amb el que podem afirmar que a l'interval $[0, 2]$ la funció $f(x)$ té un mínim absolut quan $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

- Les coordenades del punt seran: $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, 4 - \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2\right) = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, 4 - \frac{3}{2}\right) = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{5}{2}\right)$

- La longitud de l'accés serà: $f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^4 - 3\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 + 4} = \sqrt{\frac{9}{4} - 3 \cdot \frac{3}{2} + 4} = \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 4} = \sqrt{-\frac{9}{4} + 4} = \sqrt{\frac{7}{2}} = \frac{\sqrt{14}}{2} \text{ u.}$

(*) Com que la funció $g(x) = \sqrt{x}$ és una funció creixent, la funció $f(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}$ assoleix els màxims i els mínims en els mateixos valors de x que la funció $h(x) = x^4 - 3x^2 + 4$ (sempre i quan $x^4 - 3x^2 + 4 \geq 0$, com és el cas), llavors podríem haver fet el problema buscant els punts singulars de $h(x) = x^4 - 3x^2 + 4$ en lloc dels de $f(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}$. (La resolució se simplifica, sobretot a l'hora de comprovar quin dels punts singulars és el mínim, fent servir el criteri de la segona derivada).

El punt del camí demanat és: $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{5}{2}\right)$ i la distància del punt a la cova és: $\frac{\sqrt{14}}{2} \text{ u.}$

Problema B.3:

3. Considereu el sistema d'equacions lineals següent:

$$\begin{cases} ax + y = a \\ x + ay + z = 5 \\ x + 2y + z = 5 \end{cases}$$

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre a .

[1,25 punts]

b) Resoleu el sistema per al cas $a = 2$.

[1,25 punts]

Solució apartat a)

Discutirem el sistema aplicant el Teorema de Rouché-Fröbenius, que compara el rang de la matriu del sistema amb el rang de la matriu ampliada.

i) Rang de la matriu del sistema segons els valors del paràmetre a :

Si el determinant de la matriu és diferent de zero, voldrà dir que les tres files i columnes de la matriu són linealment independents i per tant el rang de la matriu serà 3. Si el determinant queda igual a zero, voldrà dir que al menys una de les files o columnes de la matriu és combinació lineal de les altres i el rang de la matriu serà més petit que tres. Mirem per a quins valors de a s'anul·la el determinant de la matriu:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow |A| = a^2 + 1 - (2a + 1) = a^2 - 2a.$$

$$|A| = 0 \iff a^2 - 2a = 0 \iff a(a - 2) = 0 \longrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a - 2 = 0 \longrightarrow a = 2 \end{cases}$$

Llavors:

- Si $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$ (Si a és un nombre real excepte 0 i 2), el determinant de la matriu serà diferent de zero i per tant el rang de la matriu serà 3.
- Si $a = 0$, $|A| = 0$ i per tant $\text{rg}(A) < 3$, anem a veure quin és el rang de la matriu A quan canviem la a per 0:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ si fem } \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1 \neq 0, \text{ llavors podem dir que } \text{rg}(A) = 2.$$

- Si $k = 2$, $|A| = 0$ i per tant $\text{rg}(A) < 3$, anem a veure quin és el rang de la matriu A quan canviem la a per 2:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ si fem } \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \neq 0, \text{ llavors podem dir que } \text{rg}(A) = 2.$$

ii) Rang de la matriu ampliada del sistema segons els valors del paràmetre k :

- Si $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$, com que la matriu $\bar{A}$ és d'ordre 3×4 , $\text{rg}(\bar{A}) \leq 3$, com que la matriu $A \subset \bar{A}$,

$\text{rg}(\bar{A}) \geq 3$; per tant $\text{rg}(\bar{A}) = 3$.

- Si $a = 0$, anem a veure quin és el rang de la matriu $\bar{A}$:

Per fer-ho farem servir el mètode de Gauss.

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 = F_1 - F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 = 2F_2 + F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Llavors: $\text{rg}(\bar{A}) = 2$.

- Si $a = 2$, anem a veure quin és el rang de la matriu $\bar{A}$:

Per fer-ho farem servir el mètode de Gauss.

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{Com que} \\ F_2 = F_3}]{F_2 = F_1 - 2F_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 = F_1 - 2F_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{rg}(\bar{A}) = 2.$$

iii) Discussió del sistema amb el T^a de Rouché-Fröbenius:

- Si $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$, tenim que $\text{rg}(A) = \text{rg}(\bar{A}) = n^0$ d'incògnites $\xrightarrow{\text{T}^a \text{ de Rouché}} \text{SCD}$.
- Si $a = 0$, tenim que $\text{rg}(A) = \text{rg}(\bar{A}) = 2 < 3 = n^0$ d'incògnites $\xrightarrow{\text{T}^a \text{ de Rouché}} \text{SCI}$ amb 1 grau de llibertat.
- Si $a = 2$, tenim que $\text{rg}(A) = \text{rg}(\bar{A}) = 2 < 3 = n^0$ d'incògnites $\xrightarrow{\text{T}^a \text{ de Rouché}} \text{SCI}$ amb 1 grau de llibertat.

- Si $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$, el sistema és compatible determinat.
- Si $a = 0$, el sistema és compatible indeterminat amb un grau de llibertat.
- Si $a = 2$, el sistema és compatible indeterminat amb un grau de llibertat.

Solució apartat b)

Quan $a = 2$, el sistema queda:
$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x + 2y + z = 5 \\ x + 2y + z = 5 \end{cases}$$

Per l'apartat anterior sabem que la matriu ampliada del sistema després d'aplicar Gauss queda:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ llavors el sistema d'equacions inicial és equivalent al sistema d'equacions:}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ -3y - 2z = -8 \end{cases}, \text{ fem } z = t \text{ i aïllem la } y \text{ de la segona equació: } -3y - 2t = -8 \longrightarrow -3y = 2t - 8$$

$$y = \frac{2t-8}{-3} = \frac{8-2t}{3}. \text{ Substituïm } y \text{ a la primera equació i aïllem la } x: 2x + \frac{8-2t}{3} = 2 \longrightarrow$$

$$6x + 8 - 2t = 6 \longrightarrow 6x = 2t + 6 - 8 \longrightarrow x = \frac{2t-2}{6} \longrightarrow x = \frac{t-1}{3}.$$

La solució del sistema en el cas $a = 2$ és: $(\frac{t-1}{3}, \frac{8-2t}{3}, t)$ amb $t \in \mathbb{R}$

Problema B.4:

4. Sigui la funció $f(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln(x)$, en què $\ln$ indica el logaritme neperià, definida per a $x > 0$.

a) Calculeu les coordenades del punt de la corba $y = f(x)$ en què la recta tangent a la corba en aquest punt és horitzontal. Estudieu si aquest punt és un extrem relatiu i classifiqueu-lo.

[1,25 punts]

b) Calculeu l'àrea del recinte delimitat per la corba $y = f(x)$, les rectes verticals $x = 1$ i $x = e$ i l'eix de les abscisses.

[1,25 punts]

Solució apartat a)

Als punts de la corba on la tangent a $y = f(x)$ és horitzontal, $f'(x) = 0$. Llavors calculem $f'(x)$ i mirem per a quins valors de x $f'(x) = 0$:

- $f'(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot \ln(x) + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2} \cdot \ln(x) + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} (1 - \ln(x))$
- $f'(x) = 0 \longrightarrow \frac{1}{x^2} (1 - \ln(x)) = 0 \longrightarrow 1 - \ln(x) = 0 \longrightarrow \ln(x) = 1 \longrightarrow x = e$.
- Les coordenades del punt demanat seran: $(e, f(e)) = \left(e, \frac{1}{e} \cdot \ln(e)\right) = \left(e, \frac{1}{e}\right)$.

Per saber si quan $x = e$ $f(x)$ té un extrem relatiu i saber de quin tipus és, estudiarem el signe de la derivada als intervals $(0, e)$ i $(e, +\infty)$:

- Si $x = 1 \longrightarrow f'(1) = \frac{1}{1^2} (1 - \ln(1)) = 1(1 - 0) = 1 > 0 \longrightarrow$ Si $x \in (0, e)$, $f'(x) > 0$ llavors si $x \in (0, e)$, $f(x)$ és creixent.
- Si $x = e^2 \longrightarrow f'(e^2) = \frac{1}{e^4} (1 - \ln(e^2)) = \frac{1}{e^4} (1 - 2) = -\frac{1}{e^4} < 0 \longrightarrow$ Si $x \in (e, +\infty)$, $f'(x) < 0$ llavors si $x \in (e, +\infty)$, $f(x)$ és decreixent.

Ara podem dir que quan $x = e$, $f(x)$ té un màxim relatiu.

Les coordenades del punt demanat són: $\left(e, \frac{1}{e}\right)$ i és un màxim relatiu.

Solució apartat b)

Com que $f(x) > 0$ quan $x \in (1, e)$ l'àrea demanada és la solució de la següent integral definida:

$$\int_1^e \frac{1}{x} \cdot \ln(x) dx = \left[\frac{\ln^2(x)}{2} \right]_1^e = \frac{\ln^2(e)}{2} - \frac{\ln^2(1)}{2} = \frac{1}{2} u^2$$

L'àrea demanada és $\frac{1}{2} u^2$.

Problema B.5:

5. Considereu la recta r d'equació $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z}{1}$ i la recta s que passa pel punt $P = (2, -5, 1)$

i que té per vector director $(-1, 0, -1)$.

a) Estudieu la posició relativa de les rectes r i s .

[1,25 punts]

b) Calculeu l'equació general del pla que és paral·lel a la recta r i conté la recta s .

[1,25 punts]

Solució apartat a)

Un vector director de r és $\vec{v} = (2, -2, 1)$ i un punt de r és $Q = (1, 3, 0)$.

Un vector director de s és $\vec{u} = (-1, 0, -1)$ i un punt de s és $P = (2, -5, 1)$.

- Com que els vectors no són proporcionals $\left(\frac{-1}{2} \neq \frac{0}{-2} \neq \frac{-1}{1}\right)$ les rectes no poden ser ni paral·leles ni coincidents. Ens queden les possibilitats que siguin secants o que es creuin.
- Si són secants, també són coplanàries, llavors qualsevol vector que vagi d'un punt d'una de les rectes a un punt de l'altra recta, estarà al mateix pla on es troben les rectes, de manera que serà combinació lineal dels vectors directores de les rectes, llavors al fer el rang de la matriu formada pels vectors $\overrightarrow{PQ}$, $\vec{v}$ i $\vec{u}$ ens quedarà rang 2.
- Si es creuen, un vector que vagi d'un punt d'una de les rectes a un punt de l'altra recta i els vectors directores de les rectes, seran linealment independents, de manera que al fer el rang de la matriu formada pels vectors $\overrightarrow{PQ}$, $\vec{v}$ i $\vec{u}$ ens quedarà rang 3.

$$\overrightarrow{PQ} = (1, 3, 0) - (2, -5, 1) = (-1, 8, -1) \longrightarrow \begin{vmatrix} -1 & 8 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 8 - 2 - 16 = 8 \neq 0$$

Amb el que el rang de la matriu formada per $\overrightarrow{PQ}$, $\vec{v}$ i $\vec{u}$ és 3 i les rectes es creuen.

(També podríem haver trobat les equacions cartesianes de les rectes i estudiar el rang del sistema que formen les equacions juntes, ens quedaria que el rang de la matriu del sistema és 3 i el de la matriu ampliada és 4 el que implica que les rectes es creuen).

Les rectes es creuen.

Solució apartat b)

El vector perpendicular al pla que ens demanen és perpendicular als vectors directors de les rectes, de manera que el podem trobar fent: $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$:

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - \vec{j} - (2\vec{k} - 2\vec{j}) = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k} = (2, 1, -2)$$

Lavors el pla demanat serà de la forma: $\pi: 2x + y - 2z + D = 0$, com que conté a la recta s passarà pel punt $(2, -5, 1)$, de manera que: $2 \cdot 2 - 5 - 2 + D = 0 \longrightarrow D = 3$ i el pla demanat és:

$$\pi: 2x + y - 2z + 3 = 0$$

(També podríem haver trobat l'equació del pla amb la fórmula: $\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = 0$; en

aquest cas: $\begin{vmatrix} x - 2 & y + 5 & z - 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow 2x + y - 2z + 3 = 0$).

L'equació del pla demanat és: $2x + y - 2z + 3 = 0$.

Problema B.6:

6. Una empresa de ceràmica vol posar a la venda una rajola quadrada de 20 cm de costat pintada a dos colors, de manera que la superfície de cada color sigui la mateixa i que si es posen les rajoles l'una al costat de l'altra es vegi un dibuix continu (figura 1).



Figura 1



Figura 2

Per a fer-ho, l'empresa utilitza en cada rajola la funció $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ enquadra entre els punts de coordenades $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 0)$ i $(2, 2)$, tal com es mostra en la figura 2, i fa servir com a unitat de mesura el decímetre.

- a) Justifiqueu que, efectivament, aquesta funció permet ajuntar les rajoles de manera contínua i derivable.
[1,25 punts]
- b) Justifiqueu que aquesta funció divideix el quadrat esmentat en dues parts que tenen la mateixa superfície.
[1,25 punts]

Solució apartat a)

- Continuïtat: Com que les funcions polinòmiques són contínues en $\mathbb{R}$, el que hem de veure és que a l'interval $[0, 2]$ $f(x)$ comença i acaba al mateix valor:

$$\begin{cases} f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 + 1 = 1 \\ f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + 1 = 8 - 12 + 4 + 1 = 1 \end{cases} \longrightarrow f(0) = f(2) \text{ les rajoles s'ajunten de manera contínua.}$$
- Derivabilitat: Com que les funcions polinòmiques són derivables en $\mathbb{R}$, i de derivada contínua, el que hem de veure és que al punt on s'ajunten les rajoles el pendent amb el que s'arriba ($f'(2)$), és el mateix pendent amb el que se surt ($f'(0)$):

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2 \longrightarrow \begin{cases} f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 6 \cdot 0 + 2 = 2 \\ f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + 2 = 12 - 12 + 2 = 2 \end{cases} \longrightarrow f'(0) = f'(2)$$

Les rajoles s'ajunten de manera derivable.

Solució apartat b)

L'àrea fosca és l'àrea entre la funció i l'eix OX des de $x = 0$ fins a $x = 2$, llavors vindrà donada per la següent integral definida:

$$\int_0^2 (x^3 - 3x^2 + 2x + 1) dx = \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 + x \right]_0^2 = \left[\left(\frac{2^4}{4} - 2^3 + 2^2 + 2 \right) - \left(\frac{0^4}{4} - 0^3 + 0^2 + 0 \right) \right] = 4 - 8 + 4 + 2 = 2 \text{ dm}^2$$

Com que la rajola té àrea $= 2 \text{ dm} \times 2 \text{ dm} = 4 \text{ dm}^2$ queda provat que:

La funció divideix la rajola en dues parts amb la mateixa superfície.

(També es podria haver justificat veient que la funció és simètrica respecte el centre de la rajola, per exemple comprovant que $f(1-x) = 2 - f(1+x)$, $x \in [0, 1]$).