

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2020

Comunidad autónoma de CASTILLA Y LEÓN



www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Jorge Muñoz Yañez-Barnuevo



	Pruebas de acceso a enseñanzas universitarias oficiales de grado Castilla y León	MATEMÁTICAS II	EJERCICIO Nº Páginas: 3
---	---	-----------------------	---------------------------------------

El alumno deberá escoger libremente CINCO problemas completos de los DIEZ propuestos. Se expresará claramente los elegidos. Si se resolvieran más, sólo se corregirán los 5 primeros que estén resueltos (según el orden de numeración de pliegos y hojas de cada pliego) y que no aparezcan totalmente tachados.

2.- CALCULADORA: Se permitirá el uso de **calculadoras no programables** (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Los 5 ejercicios se puntuarán sobre un máximo de 2 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. **Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales**, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

E1.- (Álgebra)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales:
$$\begin{cases} x - y + az = 0 \\ x - z = 0 \\ 2x + ay - 2z = 0 \end{cases}$$

- Estudie la existencia y número de soluciones según los valores del parámetro real a . **(1,2 puntos)**
- Resuélvalo, si es posible, para el valor del parámetro $a = -1$. **(0,8 puntos)**

E2.- (Álgebra)

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a+1 & 1 \\ a-3 & a-3 \end{pmatrix}$.

- Indique para qué valores de a existe la matriz inversa A^{-1} . **(0,5 puntos)**
- Si $a = 4$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, encuentre la matriz X que verifica que $B + XA = C$. **(1,5 puntos)**

E3.- (Geometría)

Sea el plano $\pi \equiv x - 2y + 2z + 1 = 0$, la recta $r \equiv \begin{cases} x - y = 0 \\ z + 1 = 0 \end{cases}$ y el punto $A = (1, 3, -1)$.

Hallar la ecuación del plano que pasa por A , es paralelo a r y perpendicular a π .

(2 puntos)

E4.- (Geometría)

Dados el punto $A(1,2,4)$ y la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2}$,

- Hallar un punto B de la recta r de forma que el vector $\overrightarrow{AB}$ sea paralelo al plano $\pi \equiv x + 2z = 0$. **(1,5 puntos)**
- Hallar un vector (a, b, c) perpendicular a $(1,0,-1)$ y $(2,1,0)$. **(0,5 puntos)**

E5.- (Análisis)

Representar gráficamente la función $f(x) = xe^x$, calculando previamente sus extremos relativos, intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad y convexidad y sus asíntotas.

(2 puntos)**E6.- (Análisis)**

Demuestre que la ecuación $x^3 - 12x = -2$ tiene una solución en el intervalo $[-2,2]$ y pruebe además que esa solución es única.

(2 puntos)**E7.- (Análisis)**

a) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x - x}{e^x + \sin x - 1}$.

(1 punto)

b) Calcular $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x) dx$

(1 punto)**E8.- (Análisis)**

a) Calcule los puntos de corte de las gráficas de las funciones $f(x) = \frac{2}{x}$ y $g(x) = 3 - x$.

(0,5 puntos)

b) Sabiendo que en el intervalo $[1,2]$ se verifica que $g(x) \geq f(x)$ calcular el área del recinto limitado por la gráfica de ambas funciones en dicho intervalo.

(1,5 puntos)**E9.- (Probabilidad y estadística)**

El peso de los alumnos de 2º de bachillerato de un instituto de León, sigue una distribución normal, de media 75 kg y de desviación típica 5. Si se elige al azar un alumno, calcular la probabilidad de que:

a) Tenga un peso entre 70 y 80 kg.

(1 punto)

b) Tenga un peso superior a 85 kg.

(1 punto)**E10.- (Probabilidad y estadística)**

La probabilidad de que a un puerto llegue un barco de tonelaje bajo, medio o alto es 0,6, 0,3 y 0,1, respectivamente. La probabilidad de que necesite mantenimiento en el puerto es 0,25 para los barcos de bajo tonelaje, 0,4 para los de tonelaje medio y 0,6 para los de tonelaje alto.

a) Si llega un barco a puerto, calcule la probabilidad de que necesite mantenimiento.

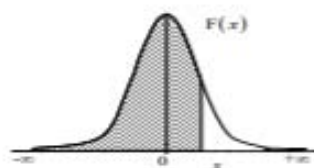
(1 punto)

b) Si un barco ha necesitado mantenimiento, calcule la probabilidad de que sea de tonelaje medio.

(1 punto)

Distribución Normal

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$



	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9014
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9318
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

Ejercicio E1:

Se considera el sistema de ecuaciones lineales:
$$\begin{cases} x - y + az = 0 \\ x - z = 0 \\ 2x + ay - 2z = 0 \end{cases}.$$

a) Estudie la existencia y número de soluciones según los valores del parámetro a .

b) Resuélvalo, si es posible, para el valor del parámetro $a = -1$.

Solución:

a) Primero se pone el sistema de ecuaciones de forma matricial $AX = v$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & a & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

y después se estudia la inversa de A . Es un sistema homogéneo. Empezamos por calcular el determinante de A e igualarlo a cero:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & a & -2 \end{vmatrix} = a^2 + a = a(a + 1) = 0$$

Resolviendo la ecuación se deduce que el determinante será cero cuando $a = -1$ o cuando $a = 0$. Se presentan dos casos:

1. $a = -1$ o $a = 0 \rightarrow$ El sistema es compatible indeterminado porque el rango de la matriz es menor de tres, el número de incógnitas.
2. $a \neq -1$ y $a \neq 0 \rightarrow$ El sistema es determinado porque el rango de la matriz es tres. Pero la única solución, es la solución trivial: $x = y = z = 0$

Si $a = -1$ o $a = 0$ existen infinitas soluciones. Si $a \neq -1$ y $a \neq 0$ sólo existe la solución trivial: $x = y = z = 0$

$$\text{b) Para } a = -1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x - y - x = 0 \\ x = z \\ 2x - y - 2x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -y = 0 \\ x = z \\ -y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$$

Tiene infinitas soluciones distintas de la trivial.

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$$

Ejercicio E2:

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a+1 & 1 \\ a-3 & a-3 \end{pmatrix}$:

a) Indique para qué valores de a existe la matriz inversa A^{-1} .

b) Si $a = 4$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, encuentre la matriz X que verifica la siguiente ecuación:

$$B + X \cdot A = C.$$

Solución:

a) La condición para que sea invertible es $|A| \neq 0$, calculando el determinante e igualando a cero se obtiene:

$$\begin{vmatrix} a+1 & 1 \\ a-3 & a-3 \end{vmatrix} = (a+1) \cdot (a-3) - 1 \cdot (a-3) = (a-3) \cdot a = 0.$$

Resolviendo para a , se obtiene $a = 0$ y $a = 3$, de manera que es invertible para $a \neq 0$ y $a \neq 3$.

Existe la matriz inversa A^{-1} para $a \neq 0$ y $a \neq 3$

b) Calculamos la matriz inversa de $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

Resolviendo la ecuación matricial $B + X \cdot A = C$, resulta:

$B + X \cdot A = C \rightarrow X \cdot A = C - B \rightarrow X = (C - B) \cdot A^{-1}$, y en forma matricial:

$$X = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 0.25 & -0.25 \\ -0.25 & 1.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.25 & -0.25 \\ -0.25 & 1.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 & 1.5 \\ -0.5 & 1.5 \end{pmatrix},$$

que es el resultado solicitado.

$$X = \begin{pmatrix} -0.5 & 1.5 \\ -0.5 & 1.5 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio E3:

Sean el plano $\pi \equiv x - 2y + 2z + 1 = 0$, la recta $r \equiv \begin{cases} x - y = 0 \\ z + 1 = 0 \end{cases}$ y $A(1, 3, -1)$. Halla la ecuación del plano β que pasa por A , es paralelo a r y perpendicular a π .

Solución:

La recta perpendicular al plano π está definida por el vector normal al plano $v_1 = (1, -2, 2)$, que será uno de los vectores de orientación del plano.

El otro vector de orientación del plano debe coincidir con el vector director de la recta r para que el plano resultante final sea paralelo. Para hallar el vector de r , se puede utilizar el producto vectorial de los vectores normales de los planos que la definen, así:

$$v_2 = (1, -1, 0) \times (0, 0, 1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot i - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot j + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot k = -1i - 1j + 0k = (-1, -1, 0).$$

Otra forma, puede ser escribir la ecuación paramétrica de la recta r :

$$r \equiv \begin{cases} x - y = 0 \\ z + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = y \\ y = y \\ z = -1 \end{cases}$$

La recta r pasa por el punto $(0, 0, -1)$ y tiene como vector director $(1, 1, 0)$, que es igual que el anterior, pero de signo opuesto, y define la misma recta. Se usará el primer resultado.

El plano perpendicular a π , paralelo a r , y que pasa por A , está definida como:

$$\begin{aligned} \pi(P; \vec{v}_r, \vec{PQ}) &\equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z+1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 = -2(y-3) - 3(z+1) + 2(x-1) \\ &= -2y + 6 - 3z - 3 + 2x - 2 \end{aligned}$$

Y la solución final para el plano solicitado es:

$$\pi \equiv 2x - 2y - 3z + 1 = 0$$

Se comprueba que pasa por el punto A :

$$2 \cdot 1 - 2 \cdot 3 - 3 \cdot (-1) + 1 = 0$$

Ejercicio E4:

Dados el punto $A(1, 2, 4)$ y la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2}$:

a) Halla un punto B de la recta r de forma que el vector $\overrightarrow{AB}$ sea paralelo al plano de ecuación

$$\pi \equiv x + 2z = 0$$

b) Halla un vector $\vec{w} = (a, b, c)$ perpendicular a $\vec{u} = (1, 0, -1)$ y $\vec{v} = (2, 1, 0)$.

Solución:

a) Primero encontramos el plano paralelo a π que pase por el punto $A(1, 2, 4)$. Como tenemos el vector normal $(1, 0, 2)$ y el punto $A(1, 2, 4)$, el plano que buscamos será:

$$\rho \equiv (x - 1) + 2 \cdot (z - 4) = x + 2z - 9 = 0.$$

Ahora, el punto buscado será la intersección de la recta r con el plano ρ . Para resolver, hallamos la expresión de la recta en forma implícita:

$$\begin{cases} x - 1 = 2y - 2 \\ z - 1 = 2y - 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - 2y = -1 \\ z - 2y = -1 \end{cases}$$

y planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 2z = 9 \\ x - 2y = -1 \\ z - 2y = -1 \end{cases}$$

Su solución nos da el punto buscado $B(3, 2, 3)$.

$$B(3, 2, 3)$$

b) El producto vectorial de $\vec{u} = (1, 0, -1)$ y $\vec{v} = (2, 1, 0)$ resulta perpendicular a ambos, por lo tanto,

$$\vec{w} = (1, 0, -1) \times (2, 1, 0) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot i - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \cdot j + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot k = 1i - 2j + k = (1, -2, 1),$$

por tanto, la solución es $\vec{w} = (1, -2, 1)$

$$\vec{w} = (1, -2, 1)$$

Comprobación:

Calculamos los productos escalares

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = (1, 0, -1) \cdot (1, -2, 1) = 1 + 0 - 1 = 0$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = (2, 1, 0) \cdot (1, -2, 1) = 2 - 2 + 0 = 0$$

Como valen cero, los vectores son ortogonales

Ejercicio E5:

Representar gráficamente la función $f(x) = x \cdot e^x$, calculando previamente sus extremos relativos, intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad y convexidad y sus asíntotas.

Solución:

Lo primero es calcular la derivada de la función e igualar a cero:

$$f'(x) = x \cdot e^x + e^x = e^x(x + 1) = 0.$$

Resolviendo la ecuación se obtiene un valor, $x = -1$, ya que e^x es siempre distinto de cero, que corresponde a la abscisa de posibles máximos o mínimos.

Derivando por segunda vez, se obtiene:

$$f''(x) = x \cdot e^x + 2e^x = e^x(x + 2),$$

y sustituyendo para las abscisas obtenidas resulta:

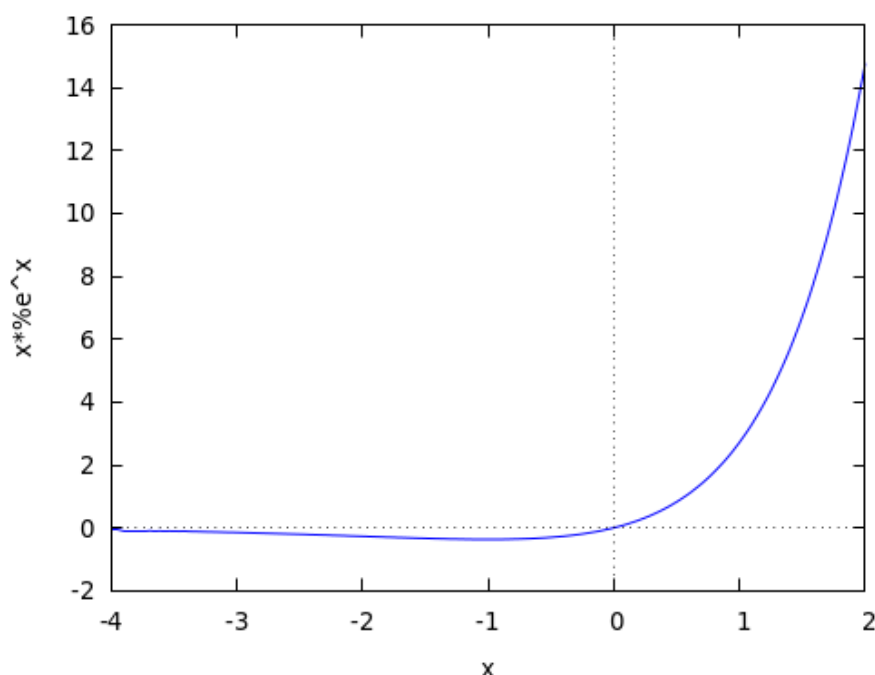
$f''(-1) = e^{-1} > 0 \rightarrow$ mínimo en $x = -1$, de ordenada $f(-1) = -e^{-1} = -\frac{1}{e}$. Como hay un mínimo global en $x = -1$, la función es decreciente para $x < -1$ y la función es creciente para $x > -1$.

Mínimo: $(-1, -\frac{1}{e})$. **Creciente:** $x \in (-1, +\infty)$. **Decreciente:** $x \in (-\infty, -1)$

Por ser exponencial, crece a ritmo exponencial para números positivos y tiende a cero para números negativos, así que tendrá una asíntota que tiende a cero hacia a la izquierda de -1 , y un comportamiento exponencial a la derecha, pasando por el punto $(0,0)$, ya que $f(0) = 0$.

Igualando a cero la derivada segunda hay un punto de inflexión para $x = -2$; $(-2, -\frac{2}{e^2})$. **Concavidad:** $x \in (-\infty, -2)$. **Convexidad (U):** $x \in (-2, +\infty)$

El gráfico es el siguiente:



Ejercicio E6:

Demuestre que la ecuación $x^3 - 12x = -2$ tiene una solución en el intervalo $[-2, 2]$ y pruebe además que esa solución es única.

Solución:

Pondremos la ecuación en forma de función para observar cuando se cumple la ecuación propuesta:

$$f(x) = x^3 - 12x + 2$$

Teorema de Bolzano: "si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$ ".

Es una función continua en toda la recta real pues es una función polinómica.

$$f(-2) = (-2)^3 - 12(-2) + 2 = -8 + 24 + 2 > 0$$

$$f(2) = (2)^3 - 12(2) + 2 = 8 - 24 + 2 < 0$$

Tiene distinto signo en los extremos del intervalo, luego por el teorema de Bolzano sabemos que se anula en algún punto del interior del intervalo:

$$x^3 - 12x + 2 = 0 \rightarrow x^3 - 12x = -2 \text{ en algún punto del intervalo } [-2, 2]$$

Podemos analizar el resto de raíces del polinomio:

Lo primero es calcular la derivada de la función e igualar a cero:

$$f'(x) = 3x^2 - 12$$

Resolviendo la ecuación se obtienen dos valores, $[x = 2, x = -2]$, que corresponden a las abscisas que tienen máximos o mínimos.

Derivando por segunda vez, se obtiene $f''(x) = 6x$, y sustituyendo para las abscisas obtenidas resulta:

1. $f''(2) = 12 > 0$, Positivo $\rightarrow$ mínimo en $x = 2$.

2. $f''(-2) = -12 < 0$. Negativo $\rightarrow$ máximo en $x = -2$.

Como hay un máximo en $x = -2$, la función es creciente si $x < -2$ y decreciente si $x > -2$.

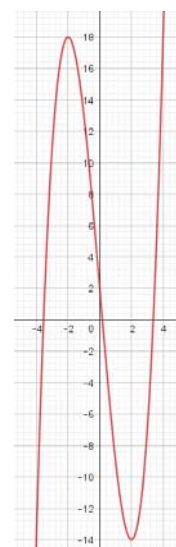
Como hay un mínimo en $x = 2$, la función es decreciente si $x < 2$ y creciente si $x > 2$.

Por ser de tercer orden, hay tres intervalos con la misma tendencia y dos cambios en la tendencia, que coinciden con el máximo y mínimo relativos. Las tendencias son, por orden de abscisas:

$$(-\infty, -2) \text{ creciente; } (-2, 2) \text{ decreciente; } (2, +\infty) \text{ creciente.}$$

Como no hay más cambios en la función, y el valor de $f(x)$ cambia de signo, obligatoriamente hay una única raíz en el intervalo $[-2, 2]$.

Como $f(2) = -14$ es negativa y creciente, tiene que haber una raíz fuera del intervalo por la derecha, en $(2, +\infty)$. Al ser $f(-2) = 18$ positiva y decreciente, tiene que haber otra raíz a la izquierda de -2 , en $(-\infty, -2)$. Como el polinomio de tercer grado tiene un máximo de tres raíces, y dos están fuera del intervalo $[-2, 2]$, se puede asegurar que la raíz es única en ese intervalo.



Ejercicio E7:

a) Calcular: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x - x}{e^x + \sin x - 1}$.

b) Calcular: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x) \cdot dx$.

Solución:

- a) Primero hallamos el límite en cero como se anula el numerador y el denominador, indeterminado.

Usando la regla de *L'Hôpital* resulta

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x - x}{e^x + \sin x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin(x) - 1}{e^x + \cos(x)} = \frac{e^0 + \sin(0) - 1}{e^0 + \cos(0)} = \frac{1 + 0 - 1}{1 + 1} = \frac{0}{2} = 0..$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x - x}{e^x + \sin x - 1} = 0$$

- b) Calculando la integral indefinida para la función resulta:

- $F(x) = \sin(x) - \cos(x)$

Ahora sustituyendo los valores para la integral definida:

$$\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] - [\sin(0) - \cos(0)] = [1 - 0] - [0 - 1] = +2$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x) \cdot dx = 2$$

Ejercicio E8:

a) Calcule los puntos de corte de las gráficas $f(x) = \frac{2}{x}$ y $g(x) = 3 - x$.

b) Sabiendo que en el intervalo $[1, 2]$ se verifica que $g(x) \geq f(x)$ calcular el área del recinto limitado por las gráficas de ambas funciones en dicho intervalo.

Solución:

a) Resolvemos la ecuación: $f(x) = g(x) \rightarrow \frac{2}{x} = 3 - x$; $2 = 3x - x^2$; $x^2 - 3x + 2 = 0$;

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \rightarrow x = 1; x = 2 \rightarrow f(1) = 2; f(2) = 1:$$

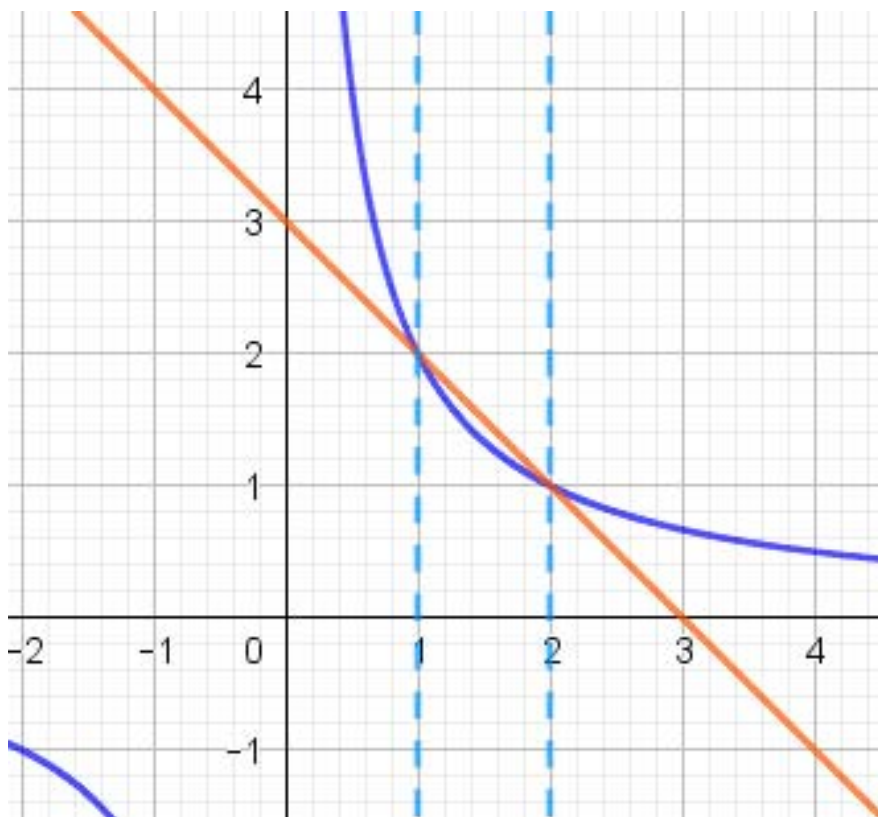
Los puntos de corte son $(1, 2)$ y $(2, 1)$

b) El área pedida es la integral definida:

$$\text{Área} = \int_1^2 [g(x) - f(x)] \cdot dx = \int_1^2 \left(3 - x - \frac{2}{x}\right) \cdot dx = \left[3x - \frac{x^2}{2} - 2Lx\right]_1^2 =$$

$$\left(3 \cdot 2 - \frac{2^2}{2} - 2L2\right) - \left(3 \cdot 1 - \frac{1^2}{2} - 2L1\right) = 6 - 2 - 2L2 - 3 + \frac{1}{2} + 0 = \frac{3}{2} - 2L2 = 0.1137.$$

$$\text{Área} = \left(\frac{3}{2} - 2L2\right) u^2 = 0.1137 u^2$$



Ejercicio E9:

El peso de los alumnos de 2º de bachillerato de un instituto de León, sigue una distribución normal, de media 75 kg y desviación típica 5. Si se elige al azar un alumno, calcular la probabilidad de que:

- a) Tenga un peso entre 70 y 80 kg.
- b) Tenga un peso superior a 85 kg.

Solución:

Nos dicen que es una distribución normal de media $\mu = 75$ y desviación típica $\sigma = 5$.

$$X \rightarrow N(\mu; \sigma) = N(75; 5).$$

Tipificamos la variable: $Z = \frac{X-75}{5}$.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad P(70 \leq X \leq 80) &= P\left(\frac{70-75}{5} \leq Z \leq \frac{80-75}{5}\right) = P(-1 \leq Z \leq 1) = P(Z < 1) - [1 - P(Z < 1)] = \\ &= 2 \cdot P(Z < 1) - 1 = 2 \cdot 0.8413 - 1 = 1.6826 - 1 = 0.6826. \end{aligned}$$

Buscando en la tabla se obtiene $P(Z < 1) = 0.8413$, que hemos sustituido.

Si se elige al azar un alumno, la probabilidad de que tenga un peso entre 70 y 80 kg es de **0.6826**.

$$\text{b)} \quad P(X > 85) = P\left(Z > \frac{85-75}{5}\right) = P\left(Z > \frac{10}{5}\right) = P(Z > 2) = 1 - P(Z < 2) = 1 - 0.9772 = 0.0228.$$

Ahora buscando en la tabla, se obtiene $P(Z < 2) = 0.9772$, que hemos sustituido.

Si se elige al azar un alumno, la probabilidad de que tenga un peso superior a 85 kg es de **0.0228**.

Ejercicio E10:

La probabilidad de que a un puerto llegue un barco de tonelaje bajo, medio o alto es 0.6, 0.3 y 0.1, respectivamente. La probabilidad de que necesite mantenimiento en el puerto es de 0.25 para los barcos de bajo tonelaje, 0.4 para los de tonelaje medio y 0.6 para los de tonelaje alto.

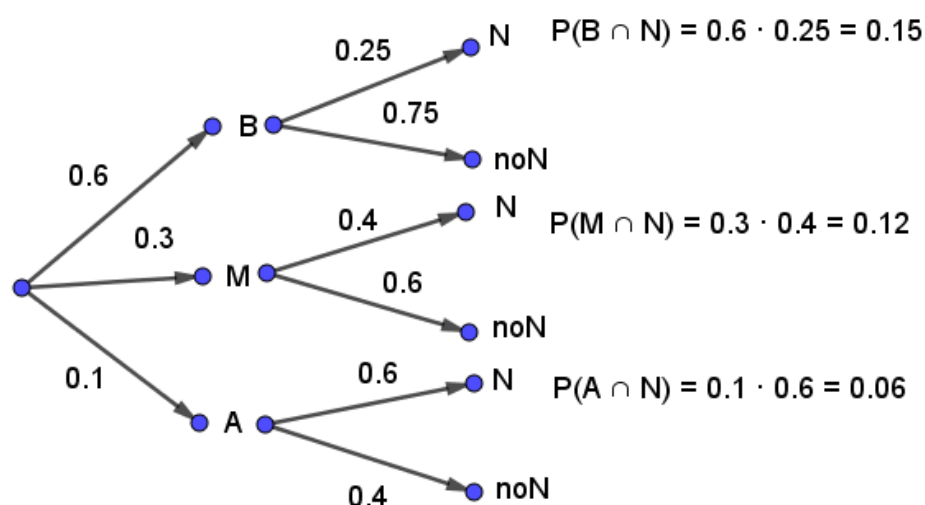
a) Si llega un barco a puerto, calcule la probabilidad de que necesite mantenimiento.

b) Si un barco ha necesitado mantenimiento, calcule la probabilidad de que sea de tonelaje medio.

Solución:

Llamamos B al suceso de que el barco sea de tonelaje bajo, M que lo sea, medio, y A que lo sea alto. Llamamos N al suceso de que necesite mantenimiento, y noN que no lo necesite.

Confeccionamos un diagrama de árbol con los datos del problema:



$$a) P(N) = P(B \cap N) + P(M \cap N) + P(A \cap N) = 0.6 \cdot 0.25 + 0.3 \cdot 0.40 + 0.1 \cdot 0.60 = 0.15 + 0.12 + 0.06 = 0.33.$$

Si llega un barco a puerto, la probabilidad de que necesite mantenimiento es **0.33**.

b) Ahora nos piden la probabilidad condicionada: $P(M/N)$. Sabemos que: $P(M/N) = \frac{P(M \cap N)}{P(N)}$. En el apartado anterior ya hemos calculado $P(N) = 0.33$.

$$P(M/N) = \frac{P(M \cap N)}{P(N)} = \frac{0.3 \cdot 0.4}{0.33} = \frac{0.120}{0.33} = 0.3636.$$

Si un barco ha necesitado mantenimiento, la probabilidad de que sea de tonelaje medio es de **0.3636**.

	Pruebas de acceso a enseñanzas universitarias oficiales de grado Castilla y León	MATEMÁTICAS II	EJERCICIO Nº Páginas: 3
---	---	-----------------------	--

El alumno deberá escoger libremente CINCO problemas completos de los DIEZ propuestos. Se expresará claramente los elegidos. Si se resolvieran más, sólo se corregirán los 5 primeros que estén resueltos (según el orden de numeración de pliegos y hojas de cada pliego) y que no aparezcan totalmente tachados.

2.- CALCULADORA: Se permitirá el uso de calculadoras **no programables** (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Los 5 ejercicios se puntuarán sobre un máximo de 2 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. **Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales**, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

E1.- (Álgebra)

- a) Discutir el sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro λ :

$$\begin{cases} \lambda x + y = 1 \\ x + \lambda y + z = 2 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \quad (1,2 \text{ puntos})$$

- b) Resolverlo para $\lambda=1$. (0,8 puntos)

E2.- (Álgebra)

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & n \end{pmatrix}$

- a) Encontrar los valores de m y n para que se verifique:

$$A^2 = A^t \quad (A^t \equiv \text{la traspuesta de } A). \quad (1,2 \text{ puntos})$$

- b) ¿Para qué valores de m y n la matriz A no es invertible? (0,8 puntos)

E3.- (Geometría)

Dados el punto $P(2,1,1)$ y la recta $r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-4}{-3}$,

- a) Hallar la recta paralela a r que pase por P . (0,8 puntos)

- b) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto P y contiene a la recta r . (1,2 puntos)

E4.- (Geometría)

- a) Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1,2,3)$ y es paralela a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x - y - z - 1 = 0 \\ x + y + z - 3 = 0 \end{cases} \quad (1 \text{ punto})$$

- b) Calcular el punto simétrico del $(1,2,3)$ respecto del plano $\pi \equiv 3x + 2y + z + 4 = 0$. (1 punto)

E5.- (Análisis)

Determinar la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, conociendo que tiene un punto de inflexión en $x = 1$ y que la recta tangente a su gráfica en el punto $(-1, 0)$ es el eje de abscisas. **(2 puntos)**

E6.- (Análisis)

Demostrar que la ecuación $x^4 + 3x = 1 + \operatorname{sen} x$ tiene alguna solución real en el intervalo $[0, 2]$. Probar que la solución es única. **(2 puntos)**

E7.- (Análisis)

a) Calcular $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - \sqrt{2x - 1}}{1 - x}$. **(1 punto)**

b) Dada la función $f(x) = \frac{2x - e^{-x}}{x^2 + e^{-x}}$, hallar la función primitiva cuya $F(x)$ que verifique $F(0) = 3$. **(1 punto)**

E8.- (Análisis)

a) Dada la función $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Encontrar sus extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento. **(1 punto)**

b) Dada la función $f(x) = x^2 - 2x$. Estudiar el signo de la función en el intervalo $[1, 3]$ y encontrar el área del recinto comprendido entre su gráfica, el eje OX y las rectas $x = 1$ y $x = 3$. **(1 punto)**

E9.- (Probabilidad y estadística)

El consumo de azúcar en un determinado país, calculado en Kg (kilogramos) por persona y año, varía según una distribución normal de media 15 y desviación típica 5.

a) ¿Qué porcentaje de personas de ese país consumen menos de 10 Kg de azúcar al año? **(1 punto)**

b) ¿Cuál es el porcentaje de personas del país cuyo consumo anual de azúcar es superior a 25 Kg? **(1 punto)**

E10.- (Probabilidad y estadística)

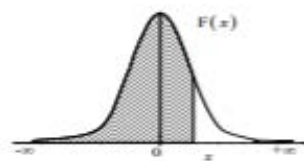
Los estudiantes, que comienzan los estudios de Medicina, en el conjunto formado por las comunidades autónomas de Andalucía, Baleares y Castilla y León, se distribuyen de la siguiente forma: un 50% de Andalucía, un 15% de Baleares y un 35% provienen de Castilla y León. Los porcentajes de dichos estudiantes que no consiguen el título de Médico son los siguientes: 15% de Andalucía, 10% de Baleares y 5% de Castilla y León

a) Calcular la probabilidad de que uno de dichos estudiantes, elegido al azar, no consiga el título de Licenciado en Medicina. **(1 punto)**

b) Si un alumno no consigue el título de Licenciado en Medicina, ¿es más probable que provenga de Andalucía o de Castilla y León? **(1 punto)**

Distribución Normal

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$



	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9014
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9318
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

Ejercicio E1:

a) Discutir el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} \lambda x + y = 1 \\ x + \lambda y + z = 2 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$, según los valores del parámetro λ .

b) Resolverlo para $\lambda = 1$.

Solución:

a) Escribimos las matrices de los coeficientes y la ampliada:

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$|M| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 - \lambda - 1 = 0; \quad \lambda^2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1.$$

Si $\lambda \neq 0$ o $\lambda \neq 1$ el rango de la matriz M es 3, igual al rango de la matriz ampliada, e igual al número de incógnitas, luego el sistema es compatible y determinado.

Si $\lambda = 0 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 + 2 - 2 = 1 \neq 0$. El rango de la matriz ampliada es 3, mientras que el de la matriz de los coeficientes es 2, luego el sistema es incompatible.

Si $\lambda = 1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ Su rango es 2, igual al de la matriz de los coeficientes luego el sistema es compatible indeterminado.

Si $\lambda \neq 0$ o $\lambda \neq 1$ el sistema es compatible y determinado. Si $\lambda = 0$ el sistema es incompatible. Si $\lambda = 1$ el sistema es compatible indeterminado.

b) Ya hemos visto que para $\lambda = 1$ el sistema es compatible indeterminado, y es resulta $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y + z = 2 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$

Tiene dos ecuaciones iguales, luego es equivalente a $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$. Hacemos $y = \lambda$; y despejamos x y z : $x = 1 - \lambda$; $z = 1$.

$$\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Ejercicio E2:

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & n \end{pmatrix}$:

- a) Encontrar los valores de m y n para que se verifique: $A^2 = A^t$, siendo la matriz traspuesta de A .
 b) ¿Para qué valores de m y n la matriz A es invertible?

Solución:

- a) Calculamos A^2 y lo igualamos con A^t .

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m + mn & n^2 \end{pmatrix}.$$

$$A^2 = A^t \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m + mn & n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & n \end{pmatrix} \Rightarrow 1 = 1; 0 = m; m + mn = 0; n^2 = n \rightarrow m = 0; n^2 = n$$

$$m = 0; n = 1; n = 0.$$

- b) Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ m & n \end{vmatrix} = n.$$

La matriz A es invertible para todo valor de m , y si n es distinto de cero.

Ejercicio E3:

Dado el punto $P(2, 1, 1)$ la recta $r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-4}{-3}$:

a) Hallar la recta s paralela a r y que pase por P .

b) Hallar la ecuación del plano π que pasa por el punto P y contiene a la recta r .

Solución:

a) De la recta s , pedida, conocemos su vector de dirección por ser paralela a r : $\vec{v}_s = (1, -1, -3)$. Y conocemos un punto, que nos dan. Luego podemos escribir su ecuación continua:

$$s \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-3}$$

b) Del plano π pedido conocemos el punto $P(2, 1, 1)$ que nos dan. Como contiene a la recta r conocemos también el punto: $Q(2, 3, 4)$, y un vector de orientación: $\vec{v}_s = (1, -1, -3)$. Calculaos el otro vector de orientación:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = [(2, 3, 4) - (2, 1, 1)] = (0, 2, 3).$$

Y escribimos la ecuación del plano:

$$\pi(P; \vec{v}_r, \overrightarrow{PQ}) \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 = -3(x-2) + 2(z-1) + 6(x-2) - 3(y-1) =$$

$$3(x-2) - 3(y-1) + 2(z-1) = 0; \quad 3x - 6 - 3y + 3 + 2z - 2 = 0.$$

$$\pi \equiv 3x - 3y + 2z - 5 = 0$$

Ejercicio E4:

a) Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(1, 2, 3)$ y es paralela a la recta $r \equiv \begin{cases} x - y - z - 1 = 0 \\ x + y + z - 3 = 0 \end{cases}$

b) Calcular el punto A' , simétrico de $A(1, 2, 3)$ respecto del plano π de ecuación general $\pi \equiv 3x + 2y + z + 4 = 0$.

Solución:

a) Buscamos las ecuaciones paramétricas de r :

$$r \equiv \begin{cases} x - y - z - 1 = 0 \\ x + y + z - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow z = \lambda \Rightarrow \begin{cases} x - y = 1 + \lambda \\ x + y = 3 - \lambda \end{cases} \Rightarrow 2x = 4; \quad x = 2 \rightarrow 2 + y = 3 - \lambda; \quad y = 1 - \lambda$$

$$\rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Con lo que obtenemos un punto y un vector director de r que son $P(2, 1, 0)$ y $\vec{v}_r = (0, -1, 1)$.

La recta pedida s contiene al punto $A(1, 2, 3)$ y, por ser paralela a r , tiene por vector director a cualquiera que sea linealmente dependiente del vector director de la recta r : $\vec{v}_s = (0, -1, 1)$. Su ecuación continua es:

$$s \equiv \frac{x - 2}{0} = \frac{y - 2}{-1} = \frac{z - 3}{1}$$

b) La recta t que pasa por A y es perpendicular a π tiene como vector director al vector normal del plano $\pi \equiv 3x + 2y + z + 4 = 0$: $\vec{n} = (3, 2, 1) \Rightarrow t \equiv \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$

El punto M , intersección del plano π con la recta t se obtiene resolviendo el sistema:

$$\pi \equiv 3x + 2y + z + 4 = 0$$

$$t \equiv \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases} \Rightarrow 3(1 + 3\lambda) + 2(2 + 2\lambda) + (3 + \lambda) + 4 = 0; \rightarrow$$

$$3 + 9\lambda + 4 + 4\lambda + 3 + \lambda + 4 = 0; \rightarrow 14 + 14\lambda = 0; \rightarrow 1 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow M(-2, 0, 2).$$

Para obtener el simétrico tiene que cumplirse que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MA'}$.

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = [(-2, 0, 2) - (1, 2, 3)] = (-3, -2, -1).$$

$$\overrightarrow{MA'} = \overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OM} = [(x, y, z) - (-2, 0, 2)] = (x + 2, y, z - 2).$$

$$(-3, -2, -1) = (x + 2, y, z - 2) \Rightarrow \begin{cases} x + 2 = -3 \rightarrow x = -5 \\ y = -2 \\ z - 2 = -1 \rightarrow z = 1 \end{cases} \Rightarrow A'(-5, -2, 1)$$

$$A'(-5, -2, 1)$$

Ejercicio E5:

Determinar la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, conociendo que tiene un punto de inflexión en $x = 1$ y que la recta tangente a su gráfica en el punto $P(-1, 0)$ es el eje de abscisas.

Solución:

Sabemos que:

Por contener al punto $P(-1, 0) \Rightarrow f(-1) = 0$:

$$f(-1) = (-1)^3 + a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 0 = -1 + a - b + c = 0 \Rightarrow a - b + c = 1. \quad (1)$$

Por tener un punto de inflexión para $x = 1 \Rightarrow f''(1) = 0$:

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \rightarrow f''(x) = 6x + 2a \rightarrow f''(1) = 6 \cdot 1 + 2a = 0; \quad 3 + a = 0$$

$$a = -3$$

Sustituyendo este valor en (1):

$$-3 - b + c = 1 \rightarrow b - c = -4. \quad (2)$$

La pendiente de la tangente a la gráfica de una función en un punto es igual que el valor de la primera derivada de la función en ese punto.

El eje de abscisas es la recta de pendiente cero: $y = 0 \Rightarrow m = 0$.

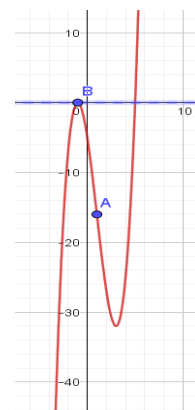
$$\text{Para } a = -3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x + b \rightarrow f'(-1) = m = 0 \Rightarrow 3 \cdot (-1)^2 + 6 + b = 0; \quad 3 + 6 + b = 0$$

$$b = -9$$

Sustituyendo en (2): $-9 - c = -4 \Rightarrow c = -5$

$$c = -5$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5$$



Ejercicio E6:

Demuestre que la ecuación $x^4 + 3x = 1 + \operatorname{sen} x$ tiene alguna solución real en el intervalo $[0, 2]$. Probar que la solución es única.

Solución:

Demostrar lo pedido es equivalente a demostrar que la función $f(x) = x^4 + 3x - 1 - \operatorname{sen} x = 0$ tiene una solución única.

La función $f(x)$ está formada por suma de funciones polinómicas y la función seno, por lo que es continua y derivable en toda la recta real.

El teorema de Bolzano dice que “si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$ ”.

Aplicamos a $f(x)$ el teorema de Bolzano en cualquier intervalo cerrado en el que alcance distinto signo en los extremos, por ejemplo, $[0, 2]$:

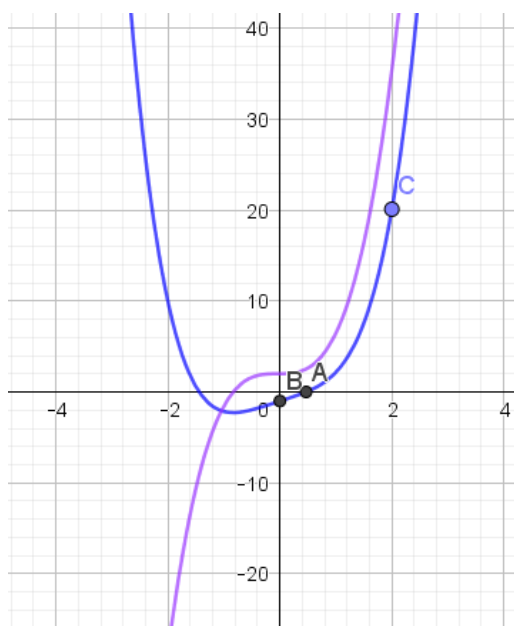
$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 0^4 + 3 \cdot 0 - 1 - \operatorname{sen} 0 = -1 < 0 \\ f(2) = 2^4 + 3 \cdot 2 - 1 - \operatorname{sen} 2 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \exists c \in [0, 2] \Rightarrow f(c) = 0.$$

Ya se ha probado que la función tiene una raíz $x = c \in [0, 2]$; ahora se debe demostrar que este valor es único.

$f'(x) = 4x^3 + 3 - \cos x > 0, \forall x \in [0, 2]$, lo cual significa que la función es monótona creciente lo que implica que sólo puede tener una raíz.

La función dada viene en azul. Observamos como, en efecto, en $x = 0$, B , toma un valor negativo, y en $x = 2$, C toma un valor positivo. La función es continua y creciente en $(0, 2)$, luego existe un valor, A , para el que se anula.

La función derivada, en malva, observamos que es creciente, y que en el intervalo $(0, 2)$ es positiva, luego en ese intervalo la función dada es creciente.



Ejercicio E7:

a) Calcular: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{2x-1}}{1-x}$.

b) Dada la función $f(x) = \frac{2x-e^{-x}}{x^2+e^{-x}}$, hallar la función primitiva cuya $F(x)$ que verifique $F(0) = 3$.

Solución:

a) Para $x = 1$ se anula tanto el numerador como el denominador, luego para quitar la indeterminación multiplicamos por el conjugado:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{2x-1}}{1-x} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{2x-1})(\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{2x-1})}{(1-x)(\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{2x-1})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x^2-x+1})^2 - (\sqrt{2x-1})^2}{(1-x)(\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{2x-1})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x + 1 - (2x - 1)}{(1-x)(\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{2x-1})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x + 1 - 2x + 1}{(1-x)(\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{2x-1})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{(1-x)(\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{2x-1})} \quad (*) \end{aligned}$$

(*) $x^2 - 3x + 2 = 0$; $x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 2 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$

Dividimos numerador y denominador por $x-1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{2x-1})} = - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-2}{\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{2x-1}} = - \frac{1-2}{\sqrt{1^2-1+1}+\sqrt{2 \cdot 1-1}} = - \frac{-1}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{2x-1}}{1-x} = \frac{1}{2}$$

También puede hacerse utilizando L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{2x-1}}{1-x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}} - \frac{2}{2\sqrt{2x-1}}}{-1} = \frac{\frac{2 \cdot 1-1}{2\sqrt{1^2-1+1}} - \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 1-1}}}{-1} = - \left(\frac{1}{2\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{1}} \right) = - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$$

b) Es una integral inmediata de tipo logaritmo:

$$F(x) = \int \frac{2x-e^{-x}}{x^2+e^{-x}} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 + e^{-x} = t \\ (2x - e^{-x}) \cdot dx = dt \end{array} \right\} \Rightarrow \int \frac{1}{t} \cdot dt = Lt + C \Rightarrow F(x) = L(2x - e^{-x}) + C.$$

$$F(0) = 3 \Rightarrow L(2 \cdot 0 - e^{-0}) + C = 3; L(2 - 1) + C = 3; L1 + C = 3; 0 + 3 = C \Rightarrow C = 3.$$

$$F(x) = L(2x - e^{-x}) + 3$$

Ejercicio E8:

a) Dada la función $f(x) = \frac{Lx}{x}$. Encontrar sus extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Dada la función $f(x) = x^2 - 2x$. Estudiar el signo de la función en el intervalo $[1, 3]$ y encontrar el área del recinto comprendido entre su gráfica, el eje OX y las rectas $x = 1$ y $x = 3$.

Solución:

a) La función logaritmo sólo está definida para los valores positivos, por lo que el dominio de la función es $D(f) = (0, +\infty)$.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - Lx \cdot 1}{1} = 1 - Lx \rightarrow Le = 1.$$

Los intervalos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

Si $x \in (e, +\infty)$ entonces $f'(x) > 0$ y la función es creciente. Si $x \in (0, e)$ entonces $f'(x) < 0$ y la función es decreciente.

Una función tiene un máximo o un mínimo relativo cuando se anula su primera derivada, o cuando cambia su crecimiento:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - Lx = 0 \Rightarrow Lx = 1 \Rightarrow x = e.$$

Como para $x = e$ la función pasa de ser decreciente a ser creciente, tiene un máximo relativo.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es negativa para los valores que anulan la primera derivada se trata de un máximo y, si es positiva, de un mínimo.

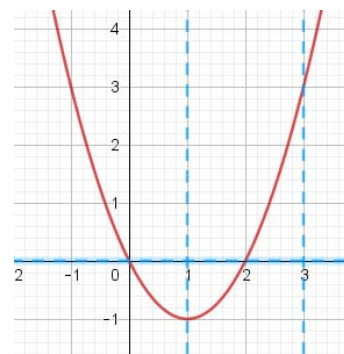
$$f(e) = \frac{Le}{e} = \frac{1}{e} \Rightarrow P\left(e, \frac{1}{e}\right) \text{ es un máximo relativo}$$

$$P\left(e, \frac{1}{e}\right) \text{ es un máximo relativo}$$

b) La función $f(x) = x^2 - 2x$ es una parábola convexa (U) por ser positivo el coeficiente de x^2 ; su vértice es el siguiente: $f'(x) = 2x - 2$. $f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 2 = 0$; $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow V(1, -1)$.

Entre 1 y 2, el área es negativa, entre 2 y 3, es positiva. Luego:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_2^1 x^2 - 2x \cdot dx + \int_2^3 x^2 - 2x \cdot dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} \right]_2^1 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} \right]_2^3 \\ &= \left(\frac{1^3}{3} - 1^2 \right) + \left(\frac{3^3}{3} - 3^2 \right) - 2 \cdot \left(\frac{2^3}{3} - 2^2 \right) \\ &= \frac{1}{3} - 1 + 9 - 9 - 2 \cdot \left(\frac{8}{3} - 4 \right) = \\ &= \frac{1}{3} - 1 - \frac{16}{3} + 8 = 7 - \frac{15}{3} = 7 - 5 = 2. \end{aligned}$$



$$\text{Área} = 2u^2$$

Ejercicio E9:

El consumo de azúcar en un determinado país, calculado en kg por persona y año, varía según una distribución normal de media 15 kg y desviación típica 5.

a) ¿Qué porcentaje de personas de ese país consumen menos de 10 kg de azúcar al año?

b) ¿Cuál es el porcentaje de personas del país cuyo consumo anual de azúcar es superior a 25 kg?

Solución:

a) Nos dicen que: $\mu = 15$; $\sigma = 5$. $X: N(\mu; \sigma) = N(15; 5)$. Tipificamos la variable: $Z = \frac{X-15}{5}$.

$$P = P(X < 10) = P\left(Z < \frac{10-15}{5}\right) = P\left(Z < \frac{-5}{5}\right) = P(Z < -1) = 1 - P(Z \leq 1) = 1 - 0.8413 = 0.1587.$$

El porcentaje de personas que consumen menos de 10 kg de azúcar al año es del **15.87 %**

$$b) P = P(X > 25) = P\left(Z > \frac{25-15}{5}\right) = P\left(Z > \frac{10}{5}\right) = P(Z > 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0.9772 = 0.0228.$$

El porcentaje de personas cuyo consumo anual de azúcar es superior a 25 kg es del **2.28 %**

Ejercicio E10:

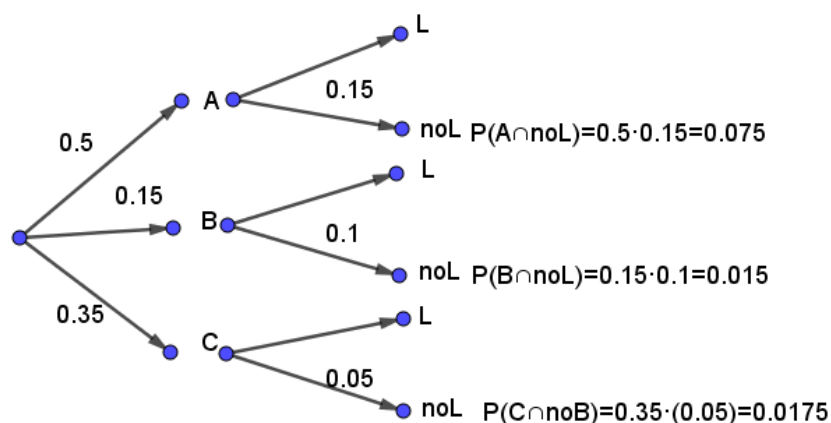
Los estudiantes, que comienzan los estudios en Medicina, en el conjunto formado por las comunidades de Andalucía, Baleares y Castilla y León, se distribuyen de la siguiente forma: un 50 % de Andalucía, un 15 % de Baleares y un 35 % provienen de Castilla y León. Los porcentajes de dichos estudiantes que no consiguen el título de Médico son los siguientes: 15 % de Andalucía, 10 % de Baleares y 5 % de Castilla y León.

a) Calcular la probabilidad de que uno de dichos estudiantes, elegido al azar, no consiga el título de Licenciado en Medicina.

b) Si un alumno no consigue el título de Licenciado en Medicina, ¿es más probable que provenga de Andalucía o de Castilla y León?

Solución:

Llamamos A al suceso ser de Andalucía, B a ser de Baleares y C a ser de Castilla León. Llamamos L al suceso conseguir el título, y $\bar{L}$ a no conseguirlo. Llevamos los datos a un diagrama de árbol.



$$\begin{aligned} a) \text{ La probabilidad de no obtener el título es } P &= P(\bar{L}) = P(A \cap \bar{L}) + P(B \cap \bar{L}) + P(C \cap \bar{L}) = \\ &= P(A) \cdot P(\bar{L}/A) + P(B) \cdot P(\bar{L}/B) + P(C) \cdot P(\bar{L}/C) = 0.50 \cdot 0.15 + 0.15 \cdot 0.10 + 0.35 \cdot 0.05 = \\ &= 0.0750 + 0.0150 + 0.0175 = 0.1075 \end{aligned}$$

La probabilidad de no conseguir el título de Licenciado en Medicina es del **0.1075**.

b) Ahora queremos valorar dos probabilidades condicionadas: $P(A/\bar{L})$ y $P(C/\bar{L})$

$$P_1 = P(A/\bar{L}) = \frac{P(A \cap \bar{L})}{P(\bar{L})} = \frac{P(A) \cdot P(\bar{L}/A)}{P(\bar{L})} = \frac{0.50 \cdot 0.15}{0.1075} = \frac{0.0750}{0.1075} = 0.6977.$$

$$P_2 = P(C/\bar{L}) = \frac{P(C \cap \bar{L})}{P(\bar{L})} = \frac{P(C) \cdot P(\bar{L}/C)}{P(\bar{L})} = \frac{0.35 \cdot 0.05}{0.1075} = \frac{0.0175}{0.1075} = 0.1628.$$

Si un alumno no consigue el título de Licenciado en Medicina, es mucho más probable que provenga de Andalucía que de Castilla y León