MATEMÁTICAS II

Selectividad 2020

Comunidad autónoma de

CANARIAS

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Lidia Esther Fumero Acosta

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Distrito Universitario de Canarias	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2019–2020** MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Instrucciones:

- Configure su examen con cuatro preguntas seleccionadas libremente de los grupos A o B.
- En caso de presentar más de cuatro preguntas, sólo se corregirán las cuatro primeras.
- En el desarrollo de cada pregunta, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarla. Se califica todo el proceso.
- Se puede utilizar cualquier calculadora científica no programable ni con conexión a Internet.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Problema A.1:

1. Consideremos la función $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$, donde *ln* denota el logaritmo neperiano. Resuelva justificadamente los siguientes apartados:

a. Presente el dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los posibles extremos relativos de la función *f(x)*. 1.25 ptos

b. Calcule el valor de la integral: $\int_1^e f(x)dx$ 1.25 ptos

Problema A.2:

2. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 0 & k-1 & k-1 \\ k & 1 & k-3 \end{pmatrix}$

a. Halle los valores del parámetro k para los que la matriz A tiene inversa. 1 pto

b. Tomando el valor k = −1 en la matriz A, calcule la matriz X que verifica que: $A \cdot X = 24 \cdot I_3$, siendo I_3 la matriz identidad de orden 3. 1.5 ptos

Problema A.3:

3. Dadas las rectas siguientes $r: \begin{cases} x+y-z=4 \\ x+2y=7 \end{cases}$, $s: \begin{cases} x=2 \\ y+5=0 \end{cases}$

a. Estudie la posición relativa de r y s. 1.5 ptos

b. Halle la ecuación del plano perpendicular a la recta r, y que contiene el punto A (11,−2.5). 1 pto

Problema A.4:

4. El tiempo que transcurre hasta la primera avería de una unidad de cierta marca de impresoras de chorro de tinta viene dado, aproximadamente, por una distribución normal con un promedio de 1500 horas y una desviación típica de 200 horas.

a. ¿Qué porcentaje de esas impresoras fallarán antes de 1000 horas de funcionamiento? 1.5 ptos

b. ¿Qué porcentaje de esas impresoras tendrán la primera avería entre las 1000 y 2000 horas de uso? 1.5 ptos

Distrito Universitario de Canarias	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2019–2020** MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Instrucciones:

- Configure su examen con cuatro preguntas seleccionadas libremente de los grupos A o B.
- En caso de presentar más de cuatro preguntas, sólo se corregirán las cuatro primeras.
- En el desarrollo de cada pregunta, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarla. Se califica todo el proceso.
- Se puede utilizar cualquier calculadora científica no programable ni con conexión a Internet.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN B

Problema B.1:

1. Sean las funciones $f(x) = 2x^4 + ax^2 + b$ y $g(x) = -2x^3 + c$.

a. Calcule los valores a, b y c de manera que las gráficas de *f(x)* y *g(x)* cumplan las dos condiciones siguientes:

- Se corten en el punto P(1,1). 1.5 ptos
- En dicho punto coincida la pendiente de las rectas tangentes.

Dar las expresiones de las funciones resultantes.

b. Suponiendo a = b = 1 en f*(x)*, halle las asíntotas de la función: $h(x) = \dfrac{f(x)}{x^3 - 1}$ 1 pto

Problema B.2:

2. Una pequeña bombonería tiene en su almacén 24 kg de chocolate y 60 litros de leche, con los que elabora tres productos distintos: cajas de bombones, tabletas de chocolate y paquetes de chocolate en polvo. Del resto de los ingredientes se tienen reservas suficientes.

Se sabe que las cajas de bombones requieren 2 kg de chocolate y 6 litros de leche, las tabletas de chocolate requieren 4 kg de chocolate y 4 litros de leche, y cada paquete de chocolate en polvo requiere 1 kg de chocolate y 4 litros de leche. Se quiere fabricar un total de 12 unidades y con ello se consume todo el chocolate y toda la leche almacenados. ¿Cuántas unidades deben fabricarse de cada tipo de producto?

Problema B.3:

3. Consideremos la recta $r: \begin{cases} 2x - y = 5 \\ 3x - 4z = -1 \end{cases}$, y el plano $\pi_1 \equiv x - y + 3z = 12$

a. Calcule la ecuación del plano π_2 que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π_1. 1.25 ptos

b. Sabiendo que la recta r corta el plano π_1, averigüe el punto de intersección. 1.25 ptos

Problema B.4:

4. Se sabe que el 8 % de los análisis de comprobación del níquel en una aleación de acero son erróneos. Se realizan 10 análisis.

a. Se afirma que la probabilidad de que 3 o más análisis sean erróneos es menor que el 3 %. Justifique si es cierto. 1.25 ptos

b. Se afirma que la probabilidad de obtener exactamente 3 análisis erróneos es menor que el 3 %. Justifique si es cierto. 0.75 ptos

c. Si se realizan 100 análisis, justifique si el número esperado de análisis correctos es igual a 8. 0.5 ptos

RESPUESTAS OPCIÓN A

Problema A.1:

Consideremos la función $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$ *, donde ln denota el logaritmo neperiano. Resuelva justificadamente los siguientes apartados:*

a. *Presente el dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los posibles extremos relativos de la función f(x).*

b. Calcule el valor de la integral: $\displaystyle\int_1^e f(x)dx$

Soluciones:

Dominio: la función logarítmica existe cuando el argumento del logaritmo es positivo, por lo tanto debe ser $x > 0$. Además, el denominador de la función racional debe ser distinto de cero. En este caso $x^2 \neq 0$. Se concluye que $Dom f = (0, +\infty)$.

Intervalos de crecimiento y decrecimiento: se halla la derivada de f:

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x^2-(\ln x)\cdot 2x}{\left(x^2\right)^2}=\frac{x-2x\cdot\ln x}{x^4}=\frac{x\cdot(1-2\ln x)}{x^4}=\frac{1-2\ln x}{x^3}$$

Igualando a cero la derivada:

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{1-2\ln x}{x^3}=0\Rightarrow 1-2\ln x=0\Rightarrow 1=2\ln x\Rightarrow \ln x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=e^{1/2}$$

$$f\left(e^{1/2}\right)=\frac{\ln\left(e^{1/2}\right)}{\left(e^{1/2}\right)^2}=\frac{\frac{1}{2}}{e}=\frac{1}{2e}$$

Se estudia el signo de la derivada en los intervalos determinados por el valor obtenido:

Intervalos	$(0, e^{1/2})$	$(e^{1/2}, +\infty)$
Signo de f ‘	+	-
Crecimiento/decrecimiento	Creciente	Decreciente

Extremos relativos: El punto $\left(e^{1/2},\dfrac{1}{2e}\right)$ es un máximo.

Otra forma: *mediante la derivada segunda se puede determinar si el punto es un máximo o un mínimo.*

$$f''(x)=\frac{-2\cdot\frac{1}{x}\cdot x^3-(1-2\ln x)\cdot 3x^2}{(x^3)^2}=\frac{-2x^2-(1-2\ln x)\cdot 3x^2}{x^6}=\frac{x^2(-2-3+6\ln x)}{x^6}=\frac{6\ln x-5}{x^4}$$

$$f''(e^{1/2})=\frac{6\ln(e^{1/2})-5}{(e^{1/2})^4}=\frac{3-5}{e^2}=-\frac{2}{e^2}<0$$

Como la derivada segunda en este punto es negativa, se trata de un máximo.

Domf **= (0, + ∞). Creciente en (0, $e^{1/2}$) y decreciente en ($e^{1/2}$, + ∞).**

El punto ($e^{1/2}$, 1/(2e)) es un máximo.

b) $$\int_1^e f(x)dx$$

Calculamos la integral indefinida mediante la integración por partes:

$$\int u\cdot dv=u\cdot v-\int vdu \qquad \text{siendo} \quad \begin{cases} u=\ln x;\, du=\frac{1}{x}dx \\ dv=\frac{dx}{x^2};\, v=-\frac{1}{x}\end{cases}$$

$$\int\frac{\ln x}{x^2}dx=\ln x\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)-\int\left(-\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}dx=-\frac{\ln x}{x}+\int\frac{1}{x^2}dx=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+C$$

Por la regla de Barrow $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$ siendo $F(x)$ una función primitiva de $f(x)$.

La integral definida es:

$$\int_1^e\frac{\ln x}{x^2}dx=\left[-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}\right]_1^e=-\frac{\ln e}{e}-\frac{1}{e}-\left(-\frac{\ln 1}{1}-\frac{1}{1}\right)=-\frac{1}{e}-\frac{1}{e}+1=\frac{e-2}{e}$$

$$\boldsymbol{\int_1^e\frac{\ln x}{x^2}dx=\frac{e-2}{e}}$$

Problema A.2:

2. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 0 & k-1 & k-1 \\ k & 1 & k-3 \end{pmatrix}$

a. Halle los valores del parámetro k para los que la matriz A tiene inversa.

b. Tomando el valor $k = -1$ en la matriz A, calcule la matriz X que verifica que: $A \cdot X = 24 \cdot I_3$, siendo I_3 la matriz identidad de orden 3.

Soluciones:

a) La matriz A tiene inversa si su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} k & 0 & 1 \\ 0 & k-1 & k-1 \\ k & 1 & k-3 \end{vmatrix} = k(k-1)(k-3) - k(k-1) - k(k-1) = k(k-1)[k-3-1-1] = k(k-1)(k-5)$$

La matriz A tiene inversa si $\boldsymbol{k \neq 0}$**,** $\boldsymbol{k \neq 1}$ **y** $\boldsymbol{k \neq 5}$**.**

b) Si $k = -1$ $\quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$

$$A \cdot X = 24 \cdot I_3 \Rightarrow X = A^{-1} \cdot (24 \cdot I_3) = 24 \cdot A^{-1} \cdot I_3 = 24 \cdot A^{-1}$$

Se calcula la matriz inversa de A, si existe:

$$|A| = k(k-1)(k-5) = -1 \cdot (-1-1) \cdot (-1-5) = -12$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 8 - (-2) = 10 \; ; \; A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = -(0-2) = 2 \; ; \; A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -(0-1) = 1 \; ; \; A_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = 4 - (-1) = 5 \; ; \; A_{23} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -(-1-0) = 1$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 0 - (-2) = 2 \; ; \; A_{32} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -(2-0) = -2 ; \; A_{33} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2$$

$$\mathrm{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 10 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad (\mathrm{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = 24 \cdot A^{-1} = 24 \cdot \frac{1}{|A|} \cdot (\mathrm{Adj}(A))^t = 24 \cdot \frac{1}{-12} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -20 & -2 & -4 \\ -4 & -10 & 4 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -20 & -2 & -4 \\ -4 & -10 & 4 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Problema A.3:

3. Dadas las rectas siguientes $r:\begin{cases} x+y-z=4 \\ x+2y=7 \end{cases}$, $s:\begin{cases} x=2 \\ y+5=0 \end{cases}$

a. Estudie la posición relativa de r y s.

b. Halle la ecuación del plano perpendicular a la recta r, y que contiene el punto A (11,–2.5).

Soluciones:

a) Se resuelve el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x+y-z=4 \\ x+2y=7 \\ x=2 \\ y=-5 \end{array}\right\} \qquad A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow Rang(A)=3$$

$$\left|A^*\right| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & -5 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -7-10-2\cdot(-1) = -15 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Rang(A^*)=4$$

$$Rang(A)=3 \neq Rang(A^*)=4$$

El sistema es incompatible, por lo tanto las rectas r y s **se cruzan**.

Otra forma:

Punto de la recta r: $y=0 \Rightarrow \begin{cases} x=7 \\ x-z=4 \Rightarrow 7-z=4 \Rightarrow z=3 \end{cases}$ $\qquad P(7,0,3)$

Vector director de la recta r:

$$\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k} \qquad \vec{u} = (2,-1,1)$$

Punto de la recta s: $x=2; y=-5; z=0$ $\qquad Q(2,-5,0)$

Vector director de la recta s: $\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{k} \qquad \vec{v} = (0,0,1)$

$$\overrightarrow{PQ} = (-5,-5,-3)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -5 & -3 \end{vmatrix} = 5+10=15 \neq 0 \Rightarrow \text{los vectores } \vec{u}, \vec{v} \text{ y } \overrightarrow{PQ} \text{ son linealmente independientes.}$$

Las rectas se cruzan.

b) Como el plano debe ser perpendicular a la recta r, el vector director de r es el vector normal al plano π que hay que hallar.

$$\vec{u} = (2,-1,1); \ \pi \equiv 2x - y + z + D = 0$$

Como el plano contiene el punto A (11,−2.5):

$$2x - y + z + D = 0 \Rightarrow 2 \cdot 11 - (-2) + 5 + D = 0 \Rightarrow D = -29$$

El plano perpendicular a la recta r que contiene el punto A (11,−2.5) es $\pi \equiv 2x - y + z - 29 = 0$

2x – y + z = 29

Problema A.4:

El tiempo que transcurre hasta la primera avería de una unidad de cierta marca de impresoras de chorro de tinta viene dado, aproximadamente, por una distribución normal con un promedio de 1500 horas y una desviación típica de 200 horas.

a. *¿Qué porcentaje de esas impresoras fallarán antes de 1 000 horas de funcionamiento?*

b. *¿Qué porcentaje de esas impresoras tendrán la primera avería entre las 1 000 y 2 000 horas de uso?*

Soluciones:

a) X = "Tiempo que transcurre hasta la primera avería de una unidad de cierta marca de impresoras de chorro de tinta"

$$X \sim N(1500, 200)$$

$$P(X < 1000) = P\left(Z < \frac{1000-1500}{200}\right) = P(Z < -2.5) = P(Z > -2.5) = 1 - P(Z < 2.5) =$$
$$= 1 - 0.9938 = 0.0062$$

Antes de 1 000 horas de funcionamiento fallarán el **0.62 %** de las impresoras.

b. ¿Qué porcentaje de esas impresoras tendrán la primera avería entre las 1 000 y 2 000 horas de uso?

$$P(1000 < X < 2000) = P\left(\frac{1000-1500}{200} < Z < \frac{2000-1500}{200}\right) = P(-2.5 < Z < 2.5) =$$
$$= P(Z < 2.5) - P(Z < -2.5) = 0.9938 - 0.0062 = 0.9876$$

El **98.76 %** de las impresoras tendrán su primera avería cuando hayan transcurrido entre 1 000 y 2 000 horas.

RESPUESTAS OPCIÓN B

Problema B.1:

Sean las funciones f(x) = 2x⁴ + ax² + b y g(x) = – 2x³ + c.

***a.** Calcule los valores a, b y c de manera que las gráficas de f(x) y g(x) cumplan las dos condiciones siguientes:*

- Se corten en el punto P(1, 1).

- En dicho punto coincida la pendiente de las rectas tangentes.

Dar las expresiones de las funciones resultantes.

***b.** Suponiendo a = b = 1 en f(x), halle las asíntotas de la función:* $h(x)=\dfrac{f(x)}{x^3-1}$

Soluciones:

a) Si las gráficas se cortan en $P(1, 1)$, entonces $f(1) = 1$ y $g(1) = 1$:

$$f(1)=1 \Rightarrow 2\cdot 1^4 + a\cdot 1^2 + b = 1 \Rightarrow a+b=-1$$

$$g(1)=1 \Rightarrow -2\cdot 1^3 + c = 1 \Rightarrow c = 3$$

En $P(1, 1)$ coinciden las pendientes de las rectas tangentes, es decir, $f'(1) = g'(1)$

$$f'(x)=8x^3+2ax \quad ; \quad g'(x)=-6x^2$$

$$f'(1)=g'(1) \Rightarrow 8\cdot 1^3 + 2a\cdot 1 = -6\cdot 1^2 \Rightarrow 8+2a=-6 \Rightarrow 2a=-14 \Rightarrow a=-7$$

$$\left.\begin{array}{l} a+b=-1 \\ a=-7 \end{array}\right\} \Rightarrow -7+b=-1 \Rightarrow b=6$$

Las funciones son: $f(x)=2x^4-7x^2+6$ y $g(x)=-2x^3+3$

a = –7, b = 6; c = 3.

b) Si $a = b = 1$: $h(x)=\dfrac{2x^4+x^2+1}{x^3-1}$

Asíntotas verticales:

Se iguala a cero el denominador: $x^3-1=0 \Rightarrow x=1$ Calculamos los límites laterales

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{2x^4+x^2+1}{x^3-1}=\frac{4}{0^-}=-\infty \qquad \lim_{x\to 1^+}\frac{2x^4+x^2+1}{x^3-1}=\frac{4}{0^+}=+\infty$$

Asíntota vertical: $x = 1$

Asíntotas horizontales:

Como el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, los límites cuando x tiende a ±∞ son ±∞.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^4+x^2+1}{x^3-1}=-\infty \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^4+x^2+1}{x^3-1}=+\infty$$

No hay asíntotas horizontales.

Asíntotas oblicuas:

$$y=mx+n$$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^4+x^2+1}{x^3-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4+x^2+1}{x^4-x}=2$$

$$n=\lim_{x\to\infty}[h(x)-mx]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{2x^4+x^2+1}{x^3-1}-2x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4+x^2+1-2x^4+2x}{x^3-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+1}{x^3-1}=0$$

La asíntota oblicua es $y = 2x$.

Asíntota vertical: ***x* = 1**; La asíntota oblicua es ***y* = 2*x***.

Problema B.2:

Una pequeña bombonería tiene en su almacén 24 kg de chocolate y 60 litros de leche, con los que elabora tres productos distintos: cajas de bombones, tabletas de chocolate y paquetes de chocolate en polvo. Del resto de los ingredientes se tienen reservas suficientes.

Se sabe que las cajas de bombones requieren 2 kg de chocolate y 6 litros de leche, las tabletas de chocolate requieren 4 kg de chocolate y 4 litros de leche, y cada paquete de chocolate en polvo requiere 1 kg de chocolate y 4 litros de leche. Se quiere fabricar un total de 12 unidades y con ello se consume todo el chocolate y toda la leche almacenados. ¿Cuántas unidades deben fabricarse de cada tipo de producto?

Soluciones:

x = número de cajas de bombones (2 kg de chocolate y 6 litros de leche para cada una)

y = número de tabletas de chocolate (4 kg de chocolate y 4 litros de leche para cada una)

z = número de paquetes de chocolate (1 kg de chocolate y 4 litros de leche para cada una)

Se fabricarán 12 unidades $x+y+z=12$

24 Kg de chocolate en total $2x+4y+z=24$

60 litros de leche $6x+4y+4z=60 \Rightarrow 3x+2y+2z=30$

Se resuelve el sistema por el **método de Gauss:**

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=12 \\ 2x+4y+z=24 \\ 3x+2y+2z=30 \end{array}\right\} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 12 \\ 2 & 4 & 1 & 24 \\ 3 & 2 & 2 & 30 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 - 3F_1]{F_2 \to F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \to 2F_3 + F_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -12 \end{pmatrix} \left.\begin{array}{l} x+y+z=12 \\ 2y-z=0 \\ -3z=-12 \end{array}\right\} \Rightarrow z=\frac{-12}{-3}=4$$

$$2y-z=0 \Rightarrow 2y-4=0 \Rightarrow y=\frac{4}{2}=2$$

$$x+y+z=12 \Rightarrow x+2+4=12 \Rightarrow x=12-6=6$$

Deben fabricarse **6** cajas de bombones, **2** tabletas de chocolate y **4** paquetes de chocolate en polvo.

Otra forma: utilizando el **método de Cramer**

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=12 \\ 2x+4y+z=24 \\ 3x+2y+2z=30 \end{array}\right\} \quad \mathrm{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad |\mathrm{A}|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}=8+4+3-12-2-4=-3$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 12 & 1 & 1 \\ 24 & 4 & 1 \\ 30 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{96+48+30-120-24-48}{-3}=\frac{-18}{-3}=6$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 12 & 1 \\ 2 & 24 & 1 \\ 3 & 30 & 2 \end{vmatrix}}{|\mathrm{A}|}=\frac{48+60+36-72-30-48}{-3}=\frac{-6}{-3}=2$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 12 \\ 2 & 4 & 24 \\ 3 & 2 & 30 \end{vmatrix}}{|\mathrm{A}|}=\frac{120+48+72-144-48-60}{-3}=\frac{-12}{-3}=4$$

Problema B.3:

Consideremos la recta $r:\begin{cases}2x-y=5\\3x-4z=-1\end{cases}$ *, y el plano* $\pi_1 \equiv x-y+3z=12$

a. *Calcule la ecuación del plano π₂ que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π₁.*

b. *Sabiendo que la recta r corta el plano π₁, averigüe el punto de intersección.*

Soluciones:

a) Punto de la recta r: $x=0$ $\begin{cases}2x-y=5\\3x-4z=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\cdot 0-y=5\\3\cdot 0-4z=-1\end{cases}\Rightarrow y=-5; z=\dfrac{1}{4}$

$$P\left(0,-5,\frac{1}{4}\right)$$

Vector director de la recta r: $\vec{u}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 0\\ 3 & 0 & -4\end{vmatrix}=4\vec{i}+8\vec{j}+3\vec{k}$ $\qquad \vec{u}=(4,8,3)$

Como r está contenida en el plano π_2, el punto P está en dicho plano y uno de sus vectores directores es el vector director de la recta r.

Vector normal a π_1: $\vec{w}=(1,-1,3)$

Como el plano π_2 es perpendicular a π_1, este vector es uno de los vectores directores del plano π_2.

La ecuación general del plano π_2 es:

$$\begin{vmatrix}x-0 & y+5 & z-\frac{1}{4}\\ 4 & 8 & 3\\ 1 & -1 & 3\end{vmatrix}=0\Rightarrow x\cdot\begin{vmatrix}8 & 3\\ -1 & 3\end{vmatrix}-(y+5)\cdot\begin{vmatrix}4 & 3\\ 1 & 3\end{vmatrix}+\left(z-\frac{1}{4}\right)\cdot\begin{vmatrix}4 & 8\\ 1 & -1\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 27x-9y-45-12z+3=0\Rightarrow 27x-9y-12z-42=0\Rightarrow \pi_2\equiv 9x-3y-4z-14=0$$

9x – 3y – 4 z = 14

b) Se resuelve el sistema

$$\left.\begin{array}{l}x-y+3z=12\\2x-y=5\\3x-4z=-1\end{array}\right\}\quad \begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & 12\\ 2 & -1 & 0 & 5\\ 3 & 0 & -4 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow[F_3\to F_3-3F_1]{F_2\to F_2-2F_1}\begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & 12\\ 0 & 1 & -6 & -19\\ 0 & 3 & -13 & -37\end{pmatrix}\xrightarrow{F_3\to F_3-3F_2}$$

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & 12\\ 0 & 1 & -6 & -19\\ 0 & 0 & 5 & 20\end{pmatrix}\quad \left.\begin{array}{l}x-y+3z=12\\y-6z=-19\\5z=20\end{array}\right\}\Rightarrow z=\frac{20}{5}=4$$

$$y-6z=-19\Rightarrow y-24=-19\Rightarrow y=5$$

$$x-y+3z=12\Rightarrow x-5+12=12\Rightarrow x=5$$

El punto de intersección es (5, 5, 4)

Otra forma: se expresa la recta r en forma paramétrica y se sustituye en el plano π_1.

$$P\left(0,-5,\frac{1}{4}\right) \qquad \vec{u}=(4,8,3) \qquad r:\begin{cases} x=4\lambda \\ y=-5+8\lambda \\ z=\dfrac{1}{4}+3\lambda \end{cases}$$

$$\pi_1 \equiv x-y+3z=12 \Rightarrow 4\lambda-(-5+8\lambda)+3\cdot\left(\frac{1}{4}+3\lambda\right)=12 \Rightarrow 4\lambda+5-8\lambda+\frac{3}{4}+9\lambda=12$$

$$5\lambda=7-\frac{3}{4} \Rightarrow 5\lambda=\frac{25}{4} \Rightarrow \lambda=\frac{5}{4}$$

Sustituyendo el valor obtenido en la recta r se obtiene el punto (5, 5, 4):

$$x=4\cdot\frac{5}{4}=5 \qquad y=-5+8\cdot\frac{5}{4}=5 \qquad z=\frac{1}{4}+3\cdot\frac{5}{4}=4$$

Problema B.4:

Se sabe que el 8 % de los análisis de comprobación del níquel en una aleación de acero son erróneos. Se realizan 10 análisis.

a. *Se afirma que la probabilidad de que 3 o más análisis sean erróneos es menor que el 3 %. Justifique si es cierto.*

b. *Se afirma que la probabilidad de obtener exactamente 3 análisis erróneos es menor que el 3 %. Justifique si es cierto*

c. *Si se realizan 100 análisis, justifique si el número esperado de análisis correctos es igual a 8.*

Soluciones:

a) Los análisis de comprobación de níquel son independientes

X = "número de análisis erróneos"

la variable X sigue una distribución binomial. $X \sim B(10, 0.08)$

n = 10 (número de análisis realizados)

Éxito: el análisis es erróneo p = 0.08 (probabilidad de que un análisis se erróneo) $q = 1 - p$ = 0.92

$$P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} = \binom{10}{k} \cdot 0.08^k \cdot 0.92^{n-k}$$

$$P(X \geq 3) = 1 - [P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)] =$$

$$1 - \left[\binom{10}{0} \cdot 0.08^0 \cdot 0.92^{10} + \binom{10}{1} \cdot 0.08^1 \cdot 0.92^9 + \binom{10}{2} \cdot 0.08^2 \cdot 0.92^8 \right] =$$

$$= 1 - \left[\frac{10!}{0! \cdot 10!} \cdot 0.92^{10} + \frac{10!}{1! \cdot 9!} \cdot 0.08 \cdot 0.92^9 + \frac{10!}{2! \cdot 8!} \cdot 0.08^2 \cdot 0.92^8 \right] = 0.0401$$

La afirmación no es cierta, la probabilidad de que 3 o más análisis sean erróneos es superior al 3 %, es **4.01 %**

b)

$$P(X=3) = \binom{10}{3} \cdot p^3 \cdot q^7 = \frac{10!}{3! \cdot 7!} \cdot 0.08^3 \cdot 0.92^7 = 0.0343$$

La afirmación no es cierta, la probabilidad de que exactamente 3 análisis sean erróneos es superior al 3 %, concretamente **3. 43 %.**

c) q = probabilidad de que el análisis sea correcto.

$$n \cdot q = 100 \cdot 0.92 = 92$$

Es falso, el número esperado de análisis correctos es **92**.

Distrito Universitario de Canarias	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2019–2020** MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA DE SEPTIEMBRE

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Instrucciones:

- Configure su examen con cuatro preguntas seleccionadas libremente de los grupos A o B.
- En caso de presentar más de cuatro preguntas, sólo se corregirán las cuatro primeras.
- En el desarrollo de cada pregunta, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarla. Se califica todo el proceso.
- Se puede utilizar cualquier calculadora científica no programable ni con conexión a Internet.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Problema A.1:

1. Responda razonadamente a las siguientes cuestiones:

a. Calcule: $\int_0^{\pi/2} x\cos x dx$ 1.25 ptos

b. Halle las asíntotas de la función: $f(x)=\dfrac{x^3+5x^2}{x^2-1}$ 1.25 ptos

Problema A.2:

2. Dadas las matrices: $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 9\\ 10 & -3 & 5\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ 1 & 3 & 9\\ 10 & -3 & 4\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -3 & -1\\ 6 & 0\end{pmatrix}$

Se plantea la siguiente ecuación matricial: $X\cdot A - C^t = X\cdot B$

a. Justifique razonadamente cuál es la dimensión de la matriz X. 0.5 ptos

b. Halle la matriz X que cumple la ecuación. 2 ptos

Problema A.3:

3. Dada la recta $r:\begin{cases}x=-2\lambda\\ y=2+\lambda\\ z=2+\lambda\end{cases}$, y dado el plano $\pi_1 \equiv x-3y+5z=2$

a. ¿Cuál es la posición relativa de la recta r y el plano π? 1.25 ptos

b. Calcular el plano π′ que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π. 1.25 ptos

Problema A.4:

4. Si una bombilla fluorescente presenta un 90 % de posibilidades de tener una vida útil de al menos 800 horas, seleccionando 20 bombillas fluorescentes de este tipo, justificar si las siguientes afirmaciones son ciertas:

a. Al seleccionar exactamente 18 bombillas fluorescentes, más del 30 % tienen una vida útil de al menos 800 horas. 1 pto

b. La probabilidad de que dos bombillas fluorescentes o menos NO tengan una duración de al menos 800 horas es menor que 0,7. 1 pto

c. El valor esperado de bombillas con una vida útil de al menos 800 horas si se toma una muestra de 100 bombillas fluorescentes es igual a 10. 0.5 ptos

Distrito Universitario de Canarias	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2019–2020** MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA DE SEPTIEMBRE

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Instrucciones:

- Configure su examen con cuatro preguntas seleccionadas libremente de los grupos A o B.
- En caso de presentar más de cuatro preguntas, sólo se corregirán las cuatro primeras.
- En el desarrollo de cada pregunta, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarla. Se califica todo el proceso.
- Se puede utilizar cualquier calculadora científica no programable ni con conexión a Internet.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN B

Problema B.1:

1. Halle los valores de a y b para que la recta de ecuación *y = 6x + a* sea tangente a la curva $f(x)=\frac{bx-1}{bx+1}$ en el punto de abscisa x = 0.

Escriba las funciones que se obtienen. 2.5 ptos

Problema B.2:

2. Sea el siguiente sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{l} kx+2y+6z=0 \\ 2x+ky+4z=2 \\ 2x+ky+6z=k-2 \end{array}\right\}$

a. Discuta el sistema según los valores del parámetro k. 1.75 ptos

b. Resuelva el sistema para *k* = 0. 0.75 ptos

Problema B.3:

3. Consideremos el punto A(1,2,1), y la recta $r:\begin{cases} x+y=5 \\ 3y+z=14 \end{cases}$

a. Encuentre la ecuación del plano π que contiene al punto A y es perpendicular a la recta r. 1.5 ptos

b. Consideremos P (1,4,2), un punto de la recta r. Y sea s la recta determinada por los puntos A y P. Calcule el ángulo que forman las rectas r y s. 1 pto

Problema B.4:

4. Mi despertador no funciona muy bien, pues el 20 % de las veces no suena. Cuando suena, llego tarde a clase el 20 % de las veces; pero si no suena, la probabilidad de que llegue tarde es 0,9.

a. Represente el diagrama de árbol del problema. 0.5 ptos

b. Justifique si el porcentaje de veces que llego tarde a clase y ha sonado el despertador es mayor que el 20 %. 0.75 ptos

c. Justifique si la probabilidad de que no llegue tarde a clase es menor que 0,5. 0.75 ptos

d. Si un día llego tarde a clase, ¿cuál es la probabilidad de que haya sonado el despertador? 0.5 ptos

RESPUESTAS OPCIÓN A

Problema A.1:

Responda razonadamente a las siguientes cuestiones:

***a.** Calcule:* $\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx$

***b.** Halle las asíntotas de la función:* $f(x)=\dfrac{x^3+5x^2}{x^2-1}$

Soluciones:

a) Calculamos la integral indefinida mediante la integración por partes:

$$\int u\cdot dv = u\cdot v-\int v du \qquad \text{siendo} \quad \begin{cases} u=x; du=dx \\ dv=\cos x dx; v=senx \end{cases}$$

$$\int x\cos x dx = xsenx-\int senxdx = xsenx+\cos x+C$$

Por la regla de Barrow $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$ siendo $F(x)$ una función primitiva de $f(x)$.

La integral definida es:

$$\int_0^{\pi/2} x\cos x dx = [xsenx+\cos x]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}sen\left(\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-(0\cdot sen0+\cos 0)=$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot 1+0-1=\frac{\pi-2}{2}$$

b) Asíntotas verticales:

Se iguala a cero el denominador: $x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm 1$ Calculamos los límites laterales

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^3+5x^2}{x^2-1}=\frac{6}{0^-}=-\infty \qquad \lim_{x\to 1^+}\frac{x^3+5x^2}{x^2-1}=\frac{6}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{x^3+5x^2}{x^2-1}=\frac{4}{0^+}=+\infty \qquad \lim_{x\to -1^+}\frac{x^3+5x^2}{x^2-1}=\frac{4}{0^-}=-\infty$$

Asíntotas verticales*:* $x = 1; x = -1$

Asíntotas horizontales:

Como el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, los límites cuando x tiende a ±∞ son ±∞.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+5x^2}{x^2-1}=-\infty \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+5x^2}{x^2-1}=+\infty$$

No hay asíntotas horizontales.

Asíntotas oblicuas:

$y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3+5x^2}{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+5x^2}{x^3-x}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3+5x^2}{x^2-1}-x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+5x^2-x^3+x}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+x}{x^2-1}=5$$

Asíntotas verticales: $x = 1$; $x = -1$. La asíntota oblicua es $y = x + 5$.

Problema A.2:

Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 9 \\ 10 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 9 \\ 10 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & -1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$

Se plantea la siguiente ecuación matricial: X·A – C^t = X·B

***a.** Justifique razonadamente cuál es la dimensión de la matriz X.*

***b.** Halle la matriz X que cumple la ecuación.*

Soluciones:

a) Las operaciones indicadas en la ecuación deben ser posibles. Como la dimensión de la matriz C es 3x2 (3 filas y 2 columnas), su traspuesta será 2x3. El producto XA debe tener también dimensión 2x3 (2 filas y 3 columnas). Por lo tanto, X debe tener 2 filas.

La dimensión de la matriz A es 3x3 (3 filas y 3 columnas). Para poder multiplicar X por A el número de columnas de X tiene que ser igual al número de filas de A. De aquí se deduce que el número de columnas de X debe ser 3.

La dimensión de X es, entonces, 2x3.

b)
$$X \cdot A - X \cdot B = C^t \Rightarrow X \cdot (A - B) = C^t \Rightarrow X = C^t \cdot (A-B)^{-1}$$

Se calcula la matriz inversa de $M = A - B$, si existe:

$$M = A - B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 9 \\ 10 & -3 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 9 \\ 10 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad ; \quad M_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad M_{13} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$M_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad M_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad ; \quad M_{23} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \quad ; \quad M_{32} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad M_{33} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\mathrm{Adj}(M) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (\mathrm{Adj}(M))^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|} \cdot (\mathrm{Adj}(M))^t = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = C^t \cdot M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Otra forma:

$$X \cdot M = C^t \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -x_1 & -x_2 & x_1+x_3 \\ -x_4 & -x_5 & x_4+x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$-x_1 = -1 \Rightarrow x_1 = 1$

$-x_2 = -3 \Rightarrow x_2 = 3$

$x_1 + x_3 = 6 \Rightarrow x_3 = 6 - x_1 \Rightarrow x_3 = 5$

$-x_4 = 0 \Rightarrow x_4 = 0$

$-x_5 = -1 \Rightarrow x_5 = 1$

$x_4 + x_6 = 0 \Rightarrow x_6 = 0$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Problema A.3:

Dada la recta $r:\begin{cases} x=-2\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=2+\lambda \end{cases}$ *, y dado el plano* $\pi_1 \equiv x-3y+5z=2$

a. *¿Cuál es la posición relativa de la recta r y el plano π?*

b. Calcular el plano π' que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π.

Soluciones:

a) Se sustituye la recta en el plano:

$$x-3y+5z=2 \Rightarrow -2\lambda-3(2+\lambda)+5(2+\lambda)=2 \Rightarrow -2\lambda-6-3\lambda+10+5\lambda=2 \Rightarrow 0\cdot\lambda=-2$$

La ecuación no tiene solución, por lo tanto, la recta y el plano no tienen puntos en común, es decir, son paralelos.

La recta y el plano son **paralelos**

Otra forma:

Vector director de r: $\vec{u}=(-2,1,1)$

Vector normal al plano π: $\vec{n}=(1,-3,5)$

Hallamos el producto escalar de los vectores: $\vec{u}\cdot\vec{n}=(-2,1,1)\cdot(1,-3,5)=-2\cdot1+1\cdot(-3)+1\cdot5=0$

Los vectores son perpendiculares, por lo que la recta puede estar contenida en el plano o ser paralela a él.

Se elige un punto de r y se comprueba si pertenece al plano:

$$\lambda=0 \Rightarrow x=0, y=2, z=2 \quad P(0,2,2)$$
$$x-3y+5z=2 \Rightarrow 0-3\cdot2+5\cdot2=2 \Rightarrow 4\neq2$$

El punto no pertenece al plano, por tanto la recta r y el plano π son paralelos.

b) El plano viene determinado por un punto de la recta r y dos vectores directores, que son el vector director de la recta r y el vector normal al plano π, ya que los planos deben ser perpendiculares.

Punto de r: $P(0,2,2)$ Vector director de r: $\vec{u}=(-2,1,1)$ Vector normal al plano π: $\vec{n}=(1,-3,5)$

La ecuación general del plano π' es:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-2 & z-2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow x\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}-(y-2)\cdot\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}+(z-2)\cdot\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 8x-(y-2)\cdot(-11)+(z-2)\cdot5=0 \Rightarrow 8x+11y-22+5z-10=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \pi'\equiv 8x+11y+5z-32=0$$

$$8x+11y+5z=32$$

Problema A.4:

Si una bombilla fluorescente presenta un 90 % de posibilidades de tener una vida útil de al menos 800 horas, seleccionando 20 bombillas fluorescentes de este tipo, justificar si las siguientes afirmaciones son ciertas:

a. *Al seleccionar exactamente 18 bombillas fluorescentes, más del 30 % tienen una vida útil de al menos 800 horas.*

b. *La probabilidad de que dos bombillas fluorescentes o menos NO tengan una duración de al menos 800 horas es menor que 0.7.*

c. *El valor esperado de bombillas con una vida útil de al menos 800 horas si se toma una muestra de 100 bombillas fluorescentes es igual a 10.*

Soluciones:

a) X = "número de bombillas que tienen una vida útil de al menos 800 horas"

La variable X sigue una distribución binomial. $X \sim B(20, 0.9)$

n = 20 (número de bombillas analizadas)

Éxito: la bombilla tiene una vida útil de al menos 800 horas p = 0.9 $q = 1 - p$ = 0.1

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} = \binom{10}{k} \cdot 0.08^k \cdot 0.92^{n-k}$$

$$P(X = 18) = \binom{20}{18} \cdot 0.9^{18} \cdot 0.1^2 = \frac{20!}{18! \cdot 2!} \cdot 0.9^{18} \cdot 0.1^2 = 0.2852$$

La afirmación no es cierta, la probabilidad de que exactamente 18 bombillas tengan una vida útil de más de 800 horas es del **28.52 %,** inferior al 30 %.

b) Si dos bombillas o menos no duran al menos 800 horas significa que hay 18 bombillas o más que sí duran al menos 800 horas.

$$P(X \geq 18) = P(X = 18) + P(X = 19) + P(X = 20) =$$

$$= \binom{20}{18} \cdot 0.9^{18} \cdot 0.1^2 + \binom{20}{19} \cdot 0.9^{19} \cdot 0.1^1 + \binom{20}{20} \cdot 0.9^{20} \cdot 0.1^0 =$$

$$= \frac{20!}{18! \cdot 2!} \cdot 0.9^{18} + \frac{20!}{19! \cdot 1!} \cdot 0.9^{19} \cdot 0.1 + \frac{20!}{20! \cdot 0!} \cdot 0.9^{20} = 0.6769$$

La afirmación es cierta, la probabilidad de que dos bombillas o menos no tengan una duración de al menos 800 horas es 0.6769, menor que 0.7.

c)

$$n \cdot p = 100 \cdot 0.9 = 90$$

La afirmación no es cierta, se espera que 90 bombillas tengan una vida útil de al menos 800 horas.

RESPUESTAS OPCIÓN B

Problema B.1:

Halle los valores de a y b para que la recta de ecuación y = 6x + a sea tangente a la curva $f(x)=\frac{bx-1}{bx+1}$ *en el punto de abscisa x = 0.*

Escriba las funciones que se obtienen.

Solución:

Como la recta es tangente a la función f en x = 0, su pendiente coincide con la derivada de f en dicho punto, es decir

$$f'(0)=6 \qquad f'(x)=\frac{b\cdot(bx+1)-(bx-1)\cdot b}{(bx+1)^2}=\frac{b^2x+b-b^2x+b}{(bx+1)^2}=\frac{2b}{(bx+1)^2}$$

$$f'(0)=6\Rightarrow\frac{2b}{(b\cdot 0+1)^2}=6\Rightarrow 2b=6\Rightarrow b=3$$

$$f(x)=\frac{3x-1}{3x+1}$$

Por otro lado, la recta y la función f coinciden en el punto de abscisa x = 0, por tanto

$$f(0)=6\cdot 0+a\Rightarrow\frac{3\cdot 0-1}{3\cdot 0+1}=a\Rightarrow a=-1 \qquad y=6x-1$$

a =–1; b = 3.

Las funciones que se obtienen son $f(x)=\frac{3x-1}{3x+1}$ $\quad y=6x-1$

Problema B.2:

Sea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} kx+2y+6z=0 \\ 2x+ky+4z=2 \\ 2x+ky+6z=k-2 \end{array}\right\}$$

a. *Discuta el sistema según los valores del parámetro k.*

b. *Resuelva el sistema para k = 0.*

Solución:

Se estudia el rango de la matriz A y el de la matriz ampliada A^*.

$$\left.\begin{array}{l} kx+2y+6z=0 \\ 2x+ky+4z=2 \\ 2x+ky+6z=k-2 \end{array}\right\} \mathrm{A}=\begin{pmatrix} k & 2 & 6 \\ 2 & k & 4 \\ 2 & k & 6 \end{pmatrix} \quad \mathrm{A}^*=\begin{pmatrix} k & 2 & 6 & 0 \\ 2 & k & 4 & 2 \\ 2 & k & 6 & k-2 \end{pmatrix}$$

$$|\mathrm{A}|=\begin{vmatrix} k & 2 & 6 \\ 2 & k & 4 \\ 2 & k & 6 \end{vmatrix}=6k^2+12k+16-12k-4k^2-24=2k^2-8$$

$$|\mathrm{A}|=0 \Rightarrow 2k^2-8=0 \Rightarrow k=\pm 2$$

- Si $k \neq \pm 2$ Rango(A) = Rango(A^*) = 3. El sistema es compatible determinado (tiene una única solución).

- Si $k = 2$ Rango(A) = Rango(A^*) = 2. En este caso el sistema es compatible indeterminado (tiene infinitas soluciones).

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{A}^*=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de A^* es 2 porque la primera fila y la última son iguales.

$$|\mathrm{A}|=0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=8-12=-4\neq 0$$

- Si $k = -2$ Rango(A) = 2 ≠ Rango(A^*) = 3. En este caso el sistema es incompatible (no tiene solución).

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} -2 & 2 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{A}^*=\begin{pmatrix} -2 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

$$|\mathrm{A}|=0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}=8+12=20\neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \\ -2 & 6 & -4 \end{vmatrix}=-32-24-24-48=-128\neq 0$$

b)

$$\left.\begin{array}{l} 2y+6z=0 \\ 2x+4z=2 \\ 2x+6z=-2 \end{array}\right\} \qquad A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad |A|=\begin{vmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \end{vmatrix}=-8$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 6 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-16-24}{-8}=\frac{-40}{-8}=5$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 6 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-24-24}{-8}=\frac{-48}{-8}=6$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{8+8}{-8}=\frac{16}{-8}=-2$$

Solución del sistema: ***x* = 5, *y* = 6, *z* = – 2**

Problema B.3:

Consideremos el punto A(1,2,1), y la recta $r:\begin{cases} x+y=5 \\ 3y+z=14 \end{cases}$

a. *Encuentre la ecuación del plano π que contiene al punto A y es perpendicular a la recta r.*

b. *Consideremos P (1,4,2), un punto de la recta r. Y sea s la recta determinada por los puntos A y P. Calcule el ángulo que forman las rectas r y s.*

Solución:

a) Como la recta r es perpendicular al plano π, el vector director de r será el vector normal a π.

Vector director de la recta r: $\vec{u}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}=\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k} \qquad \vec{u}=(1,-1,3)$

Plano: $\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0 \Rightarrow x-y+3z+D=0$

El punto $A($1, 2, 1) pertenece al plano, por lo que sustituyendo en π las coordenadas de A obtenemos el valor de D.

$$x-y+3z+D=0 \Rightarrow 1-2+3\cdot 1+D=0 \Rightarrow D=-2$$

$$\pi \equiv x-y+3z-2=0$$

La ecuación general del plano es: $x-y+3z=2$

Vector director de la recta r: $\vec{w}=\overrightarrow{AP}=(1-1,\ 4-2,\ 2-1)=(0,2,1)$

b) Ángulo que forman los vectores directores de r y s:

$$\cos\alpha=\frac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{w}|}=\frac{(1,-1,3)\cdot(0,2,1)}{\sqrt{1^2+(-1)^2+3^2}\cdot\sqrt{0^2+2^2+1^2}}=\frac{0-2+3}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{55}}$$

$$\alpha=\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{55}}\right)=82.25^{\circ}$$

El ángulo α que forman las rectas r y s es 82.25°.

Problema B.4:

Mi despertador no funciona muy bien, pues el 20 % de las veces no suena. Cuando suena, llego tarde a clase el 20 % de las veces; pero si no suena, la probabilidad de que llegue tarde es 0.9.

a. *Represente el diagrama de árbol del problema.*

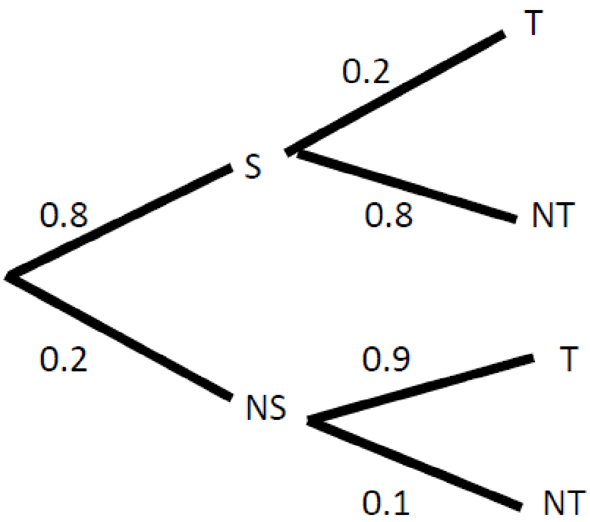
b. *Justifique si el porcentaje de veces que llego tarde a clase y ha sonado el despertador es mayor que el 20 %.*

c. *Justifique si la probabilidad de que no llegue tarde a clase es menor que 0.5.*

d. *Si un día llego tarde a clase, ¿cuál es la probabilidad de que haya sonado el despertador.*

Solución:

a) Se definen los sucesos S = "el despertador suena" y T = "llegar tarde a clase" y sus contrarios NS = "el despertador no suena" y NT = "no llegar tarde a clase"



b) $P(T \cap S) = P(S) \cdot P(T/S) = 0.8 \cdot 0.2 = 0.16$

La afirmación no es cierta, la probabilidad de que llegue tarde a clase y suene el despertador es del 16 %, inferior al 20 %.

c) $P(NT) = P(S) \cdot P(NT/S) + P(NS) \cdot P(NT/NS) = 0.8 \cdot 0.8 + 0.2 \cdot 0.1 = 0.64 + 0.02 = 0.66$

La afirmación no es cierta, la probabilidad de que no llegue tarde a clase es superior a 0.5.

d)
$$P(S/T) = \frac{P(S \cap T)}{P(T)} = \frac{P(S) \cdot P(T/S)}{1 - P(NT)} = \frac{0.8 \cdot 0.2}{1 - 0.66} = \frac{0.16}{0.34} = 0.4706$$

La probabilidad de que, habiendo llegado tarde a clase, haya sonado el despertador, es 0.4706.