MATEMÁTICAS II

Selectividad 2020

Comunidad autónoma de

ASTURIAS

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Andrés García Mirantes

Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato
para el acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2019-2020

MATEMÁTICAS II

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen.

TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada ejercicio se calificará sobre 2,5 puntos.

El estudiante deberá indicar la agrupación de preguntas que responderá. La selección de preguntas deberá realizarse conforme a las instrucciones planteadas, no siendo válido seleccionar preguntas que sumen más de 10 puntos, ni agrupaciones de preguntas que no coincidan con las indicadas, lo que puede conllevar la anulación de alguna pregunta que se salga de las instrucciones.

Bloque 1.A Un estudiante ha gastado 57 euros en una papelería en la compra de un libro, una calculadora y un estuche. Sabemos que el libro cuesta el doble que el total de la calculadora y el estuche juntos.

a) ¿Es posible determinar de forma única el precio del libro? ¿Y el de la calculadora? (1.25 puntos)

b) Además, si los precios del libro, la calculadora y el estuche hubieran sido, respectivamente, un 50 %, un 80 % y un 75 % de los precios iniciales de cada artículo, el estudiante habría pagado un total de 34 euros. Calcula el precio inicial de cada artículo. (1.25 puntos)

Bloque 1.B Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 3 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & m & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Discute el rango de A según los valores de $m \in \mathbb{R}$. (1 punto)

b) ¿Qué dimensiones ha de tener la matriz X para que sea posible la ecuación $A \cdot X = B$? (0.5 puntos)

c) Calcula la matriz X del apartado anterior para $m = 0$. (1 punto)

Bloque 2.A Sea la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.

a) Halla los puntos de corte de la función con el eje de abscisas y, si existen, los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión. (1 punto)

b) Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad y convexidad. Esboza una gráfica de la función. (1 punto)

c) Calcula la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 2$. (0.5 puntos)

Bloque 2.B Sea la función $f(x) = 4 - x^2$

a) Su gráfica determina con el eje de abscisas un recinto limitado D. Calcula su área. (1 punto)

b) La gráfica de la función $g(x) = 3x^2$ divide D en tres partes D_1, D_2 y D_3. Haz un dibujo de los tres recintos. (0.75 puntos)

c) Calcula el área del recinto D_2 que contiene al punto $P(0,1)$. (0.75 puntos)

BY NC SA

Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato
para el acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2019-2020

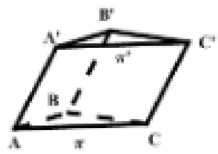
Bloque 3.A Dados el punto $A(2,1,1)$ y la recta $r: \begin{cases} x+y=2 \\ y+z=0 \end{cases}$

a) Calcula un vector director de la recta r. (0.75 puntos)

b) La ecuación del plano π que contiene al punto A y a la recta r. (0.75 puntos)

c) La ecuación de la recta s contenida en π que pasa por A y es perpendicular a r. (1 punto)

Bloque 3.B Sea el prisma triangular(triángulos iguales y paralelos) de la figura, con $A(1,0,0)$, $B'(-1,2,2)$, $C(0,3,0)$ y $C'(0,4,2)$. Y los planos π, al que pertenecen los puntos A,B,C y π', al que pertenecen los puntos A',B',C'. Calcula:



a) Las coordenadas de los puntos restantes: A',B. (0.75 puntos)

b) La distancia entre los planos π y π'. (0.75 puntos)

c) El volumen del prisma triangular. (1 punto)

Bloque 4.A En un espacio muestral se tienen dos sucesos: A y B. Se conocen las siguientes probabilidades:
$P(A\cap B)=0.3$, $P(A/B)=P(B/A)$ y $P(\overline{A})=0.2$ ($\overline{A}$ suceso contrario). Calcula:

a) $P(B/A)$. (1 punto)

b) $P(B)$. (1 punto)

c) ¿Son los sucesos independientes? (0.5 puntos)

Bloque 4.B Los 5 defensas, 3 medios y 2 delanteros de un equipo de fútbol se entrenan lanzando penaltis a su portero. Los defensas marcan gol la mitad de las veces, los medios las 2/3 partes de las veces y los delanteros las 3/4 partes de las veces.

a) Se elige un jugador al azar, ¿cuál es la probabilidad de que meta el penalti? (1.25 puntos)

b) Se supone que la probabilidad del apartado anterior es del 60 %. El equipo realiza en una semana 600 lanzamientos. En cada lanzamiento se elige un jugador al azar y regresa al grupo pudiendo ser elegido nuevamente. Calcula la probabilidad de que como mucho se metan 400 goles aproximando la distribución por una normal. (1.25 puntos)

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(3.25)=0.9994, F(3.2917)=0.9995, F(3.3333)=0.9996, F(3.375)=0.9996, F(3.4167)=0.9997$)

Universidad de Oviedo
Prueba de evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad
2019-2020

CC BY NC SA

Bloque 1.A.

Un estudiante ha gastado 57 euros en una papelería en la compra de un libro, una calculadora y un estuche. Sabemos que el libro cuesta el doble que el total de la calculadora y el estuche juntos.

a) ¿Es posible determinar de forma única el precio del libro? ¿Y el de la calculadora?

b) Además, si los precios del libro, la calculadora y el estuche hubieran sido, respectivamente, un 50 %, un 80 % y un 75 % de los precios iniciales de cada artículo, el estudiante habría pagado un total de 34 euros. Calcula el precio inicial de cada artículo.

Solución:

a) Sean x: "precio del libro", y: "precio de la calculadora", z: "precio del estuche". Planteamos el sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=57 \\ x=2(y+z) \end{cases} \to \begin{cases} 2(y+z)+y+z=57 \\ x=2(y+z) \end{cases} \to \begin{cases} 3y+3z=57 \\ x=2(y+z) \end{cases}$$

Sistema lineal de dos ecuaciones y tres incógnitas. Sistema compatible indeterminado.

Resolvemos por sustitución.

$$\begin{cases} y+z=\dfrac{57}{3}=19 \\ x=2\cdot 19=38 \end{cases}$$

Sí, es posible determinar el precio del libro, que es de **38 €.**

No es posible determinar el precio de la calculadora. Sólo podemos estimar que el precio de la calculadora + estuche son 19 €.

b) Planteamos el nuevo sistema

$$\begin{cases} x+y+z=57 \\ x=2(y+z) \\ 0.5\,x+0.8y+0.75z=34 \end{cases} \to \begin{cases} y+z=19 \\ x=2(y+z) \\ 19+0.8(19-z)+0.75z=34 \end{cases} \to \begin{cases} y+z=19 \\ x=2(y+z) \\ 0.05z=0.2 \end{cases} \to \begin{cases} x=38 \\ y=15 \\ z=4 \end{cases}$$

Los precios iniciales de cada uno de los artículos son:

$x=\mathbf{38}$ **€** del libro, $y=\mathbf{15}$ **€** de la calculadora, $z=\mathbf{4}$ **€** del estuche

Bloque 1.B.

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 3 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & m & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$:

$a)$ Discute el rango de A según los valores de $x \in R$.

$b)$ ¿Qué dimensiones ha de tener la matriz X para que sea posible resolver la ecuación $A \cdot X = B$?

$c)$ Calcula la matriz X del apartado anterior para $m = 0$.

Solución:

a) Calculamos el determinante de la matriz A

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & 3 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & m & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 3m^2 + 3m + 2 - [3m + 3 + 2m^2] = m^2 - 1$$

- Si $m^2 - 1 \neq 0$, entonces $R(A) = 3$, es decir, $R(A) = 3\ si\ m \neq 1\ y\ m \neq -1$.
- Si $m = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Entonces $|1| \neq 0$, $R(A) > 1$, $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, $R(A) \geq 2\ puesto\ que\ |A| = 0$ entonces $R(A) = 2$.

- Si $m = -1$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Entonces $|3| \neq 0$, $R(A) \geq 1$, $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$, $R(A) \geq 2\ por\ tanto\ R(A) = 2$.

$R(A) = 3\ si\ m \neq 1\ y\ m \neq -1$. Y si $m = 1$ o $m = -1$ entonces $R(A) = 2$.

b) Para que sea posible $A \cdot X = B$, X debe tener 3 filas para que se pueda multiplicar (filas x columnas), y para que el resultado sea 2 columnas X debe tener 2 columnas.

X debe ser una matriz de 3 filas y 2 columnas

c) Para $m = 0$, $A \cdot X = B$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; $|A| = 0^2 - 1 = 1$ por tanto, existe A^{-1}. Entonces

$$A^{-1}(A \cdot X) = A^{-1} \cdot B; A^{-1}(A \cdot X) = (A^{-1} \cdot A) \cdot X = I \cdot X = X; X = A^{-1} \cdot B$$

Siendo A^{-1} matriz inversa de A.

- Si $m = 0$.

CC BY NC SA

$$A=\begin{pmatrix}0&1&3\\1&0&2\\1&0&3\end{pmatrix}\rightarrow A^t=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\3&2&3\end{pmatrix}\rightarrow Ad(A^t)=\begin{pmatrix}0&-3&2\\-1&-3&3\\0&1&-1\end{pmatrix}$$

Siendo I matriz unidad 3x3.

$$A^{-1}=\frac{I}{|A|}Adj(A^t)$$

$$X=\begin{pmatrix}0&3&-2\\1&3&-3\\0&-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&2\\1&0\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-4\\8&-4\\-2&2\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}5&-4\\8&-4\\-2&2\end{pmatrix}$$

BY NC SA

Bloque 2.A.

Sea la función $f: R \rightarrow R, f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.

$a)$ Halla los puntos de corte de la función con el eje de abscisas y, si existen, los máximos y mínimos y los puntos de inflexión.

$b)$ Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad y convexidad. Esboza una gráfica de la función.

$c)$ Calcula la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 2$.

Solución:

a) *La función* $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ es un polinomio y por tanto es continua en $\mathbb{R}$, así como sus funciones derivadas primera y segunda

$$f(x) = x(x^2 - 6x + 9) = x(x-3)^2$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3)$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \rightarrow x_1 = 3, x_2 = 1$$

$$f''(x) = 3(2x - 4)$$

$$f''(1) = -6 < 0\ es\ un\ máximo\ relativo$$

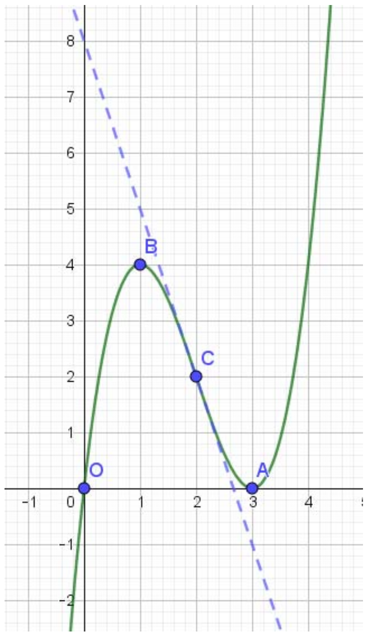
$$f''(3) = 6 > 0\ es\ un\ mínimo\ relativo$$

$$f''(2) = 0\ es\ un\ punto\ de\ inflexión$$

Los puntos de corte son:

- Para OX: *y = 0, x = 0, x = 3*
- Para OY: *x = 0, y = 0, O(0, 0), P(0, 3)*

Puntos de corte: A(3, 0); O(0, 0); Máximo relativo: B(1, 4).
Mínimo relativo: A(3, 0). Punto de inflexión: C(2, 2).



b) Estudiamos el signo de la derivada primera.

Signo de *f'*.

$$f'(0) = 9 > 0, f'(2) = -3 < 0; f'(4) > 0$$

- Si $x < 1, f' > 0, f$ es creciente.
- Si $1 < x < 3, f' > 0, f$ es decreciente.
- Si $x > 3, f' > 0, f$ es creciente.

Por tanto, tiene un máximo relativo en $\left(1, f(1)\right) = (1, 4)$.

Tiene un mínimo relativo en $\left(3, f(3)\right) = (3, 0)$.

- Si $x = 2, f''(x) = 3(2\mathrm{x} - 4); f''(x) = 0$.
- Si $x < 2, f''(x) < 0, f$ es convexa, curva debajo de la tangente.

Autor: Andrés García Mirantes
www.apuntesmareaverde.org.es
Textos Marea Verde

- Si $x > 2, f''(x) > 0, f$ es cóncava, curva encima de la tangente.

Por tanto, tiene un punto de inflexión en $\left(2, f(2)\right) = (2, 2)$.

c) Calculo la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 2$.

$$tg\ en\ x = 2 \begin{cases} pasa\ por\ \left(2, f(2)\right) = (2,2) \\ pendiente\ f'(2) = 3(4 - 8 + 3) = -3 \end{cases}$$

$$tg: y - 2 = -3(x - 2) \to y = -3x + 8$$

$$y = -3x + 8$$

BY NC SA

Bloque 2.B.

Sea la función $f(x) = 4 - x^2$.

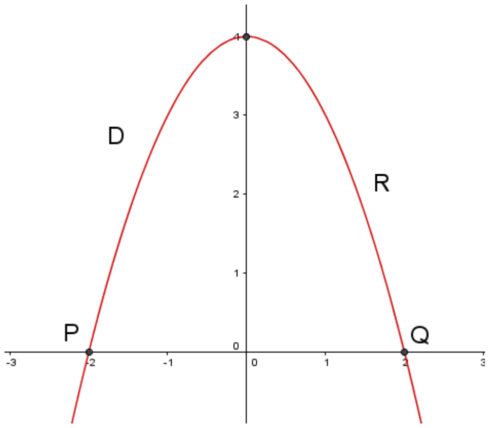
a) Su gráfica determina con el eje de abscisas un recinto limitado D. Calcula su área.

b) La gráfica de la función $g(x) = 3x^2$ divide D en tres partes, D_1, D_2 y D_3. Haz un dibujo de los tres recintos.

c) Calcula el área del recinto D_2 que contiene al punto $P(0, 1)$.

Solución:

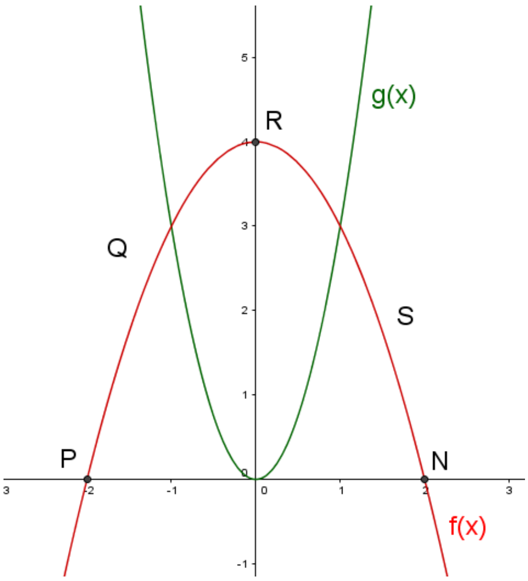
a) $f(x) = 4 - x^2, es$ una parábola de eje vertical, ramas hacia abajo, vértice en (0, 4), simetría en eje Y, corte con OX en $y = 0, x = \pm 2, x = -2$.



$$D = PRQ = Área\ D = 2 \cdot Área\ ORQ = 2\int_0^2 f(x)dx = 2\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 2\left(8 - \frac{8}{3}\right) = 2 \cdot \frac{16}{3} = \frac{32}{3}u^2$$

$$Área = \frac{32}{3}u^2 \cong 10.67\ u^2$$

b) La gráfica de la función $g(x) = 3x^2$ es otra parábola



Textos Marea Verde

Parábola eje vertical, ramas hacia arriba, y vértice en (0, 0), simétrica en eje Y.

$$Cortes \begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases} \to \begin{cases} y = 4 - x^2 \\ y = 3x^2 \end{cases} \to \begin{cases} 4 - x^2 = 3x^2 \\ 4 = 4x^2 \end{cases} \to x = \pm 1$$

$$D_1 = POQ, \quad D_2 = QOSR, \quad D_3 = ONS$$

c) $P(0, 1)$ pertenece a D_2.

$$Área = \int_{-1}^{1} \big(f(x) - g(x)\big)dx =^{(1)} 2\int_0^1 \big(f(x) - g(x)\big)dx = 2 \cdot \int_0^1 (4 - x^2 - 3x^2)dx =$$

$$= 2 \cdot \int_0^1 (4 - 4x^2)dx = 2\left(4x - 4 \cdot \frac{x^3}{3}\right)_0^1 = 2 \cdot \left(4 \cdot 1 - 4 \cdot \frac{1}{3}\right) = \left(4 - \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{3}u^2$$

(1) porque ambas son simétricas eje Y.

$$Área = \frac{16}{3}u^2 = 5.33\ u^2$$

Bloque 3.A.

Dados el punto $A(2,1,1)$ y la recta $r: \begin{cases} x+y=2 \\ y+z=0 \end{cases}$:

$a)$ Calcula el vector director de la recta r.

$b)$ La ecuación del plano π que contiene al punto A y a la recta r.

$c)$ La ecuación de la recta s contenida en π que pasa por A y es perpendicular a r.

Solución:

a) Llamamos $y = \lambda$

$$r \begin{cases} x+y=2 \\ y+z=0 \end{cases} \to \begin{cases} x = 2-\lambda \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$

$$El\ vector\ de\ dirección\ es: \overrightarrow{V_r} = (1,-1,1) \text{ o } (-1,1,-1)$$

b) Para que el plano contenga a la recta debe contener a los vectores formados con puntos de la recta.

$$\pi: contiene\ A(2,1,1), y\ r \ \Leftrightarrow contiene\ a\ A(2,1,1), P(0,2,-2), Q(1,1,-1)$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AP} + s\overrightarrow{AQ}, Ecuación\ paramétrica$$

$$\overrightarrow{AP} = (0-2, 2-1, -2-1), \overrightarrow{AQ} = (-1,0,-2)$$

$$\begin{vmatrix} x-2 & -2 & -1 \\ y-1 & 1 & 0 \\ z-1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -2(x-2) - 1(y-1) + 1(z-1) = 0$$

$$\mathbf{2x + y - z - 4 = 0} \ \ ecuación\ general$$

c) La recta s está contenida en π, pasa por *A,* es perpendicular a *r.*

$\overrightarrow{V_S}$ deber ser perpendicular a *r* y perpendicular a $\overrightarrow{V_\pi}$ (rectos directamente de π) por tanto,

$$\overrightarrow{V_S} = \overrightarrow{V_R} \wedge \overrightarrow{V_\pi} \ producto\ vectorial$$

$$\overrightarrow{V_S} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (0,-3,-3)$$

$$\overrightarrow{A_x} = t(0,-3,-3) \ \to (x-2, y-1, z-1) = t(0,-3,-3)$$

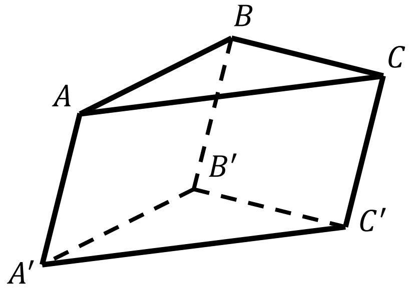
Su vector de dirección es $(0,-3,-3)$ o bien: $(0,1,1)$ y pasa por $A(2,1,1)$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1+t \\ z = 1+t \end{cases} \text{ecuación paramétrica Ecuación implícita:} \begin{cases} x = 2 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

Textos Marea Verde

Bloque 3.B.

Sea el prisma triangular (triángulos iguales y paralelos) de la figura adjunta, con $A(1,0,0), B'(-1,2,2), C(0,3,0)\ y\ C'(0,4,2)$. Y los planos π, al que pertenecen los puntos $A, B\ y\ C$ y π' al que pertenecen los puntos $A', B'\ y\ C'$. Calcula:



$a)$ Las coordenadas de los puntos restantes: $A'\ y\ B$.

$b)$ La distancia entre los planos $\pi\ y\ \pi'$.

$c)$ El volumen del prisma triangular.

Solución:

$a)\ A(1,0,0), A'(a,b,c), B(r,s,t), B'(-1,2,2), C(0,3,0)\ y\ C'(0,4,2)$

Si el triángulo ABC es igual y paralelo a $A'B'C'$ entonces

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{CC'} \ \rightarrow (a-1, b-0, c-0) = (0,1,2) \Rightarrow a = 1, b = 1, c = 2$$

Las coordenadas del punto A' son A' *(1, 1, 2)*.

$$\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} \ \rightarrow (-1-r, 2-s, 2-t) = (0,1,2) \Rightarrow r = -1, s = 1, t = 0$$

Las coordenadas del punto B son B *(−1, 1, 0)*.

$$A'\ (1,\ 1,\ 2).\ B\ (-1,\ 1,\ 0).$$

b) Los planos π y π’ son paralelos.

$$d = (\pi, \pi') = d(B', \pi) = \frac{\pi\ (B')}{\sqrt{1}} = \frac{2}{\sqrt{1}} = 2u^2$$

$$\pi - \overrightarrow{AX} = t\ \overrightarrow{AB} + s\ \overrightarrow{AC}$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & -2 & 1 \\ y-0 & 1 & 3 \\ z-0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0\ \Rightarrow -7(z-0) = 0\ \Rightarrow z = 0$$

$$d = (\pi, \pi') = 2\ u$$

$$c)\ V(prisma) = \left(Área\ de\ la\ base\ ABC\right) \cdot Altura = \frac{5}{2} \cdot 2 = 5\ u^3$$

$$Área\ del\ triángulo\ ABC = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot d(C, recta\ AB) = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (0,0,-5) = \frac{1}{2}\sqrt{0^2 + 0^2 + (-s)^2} = \frac{5}{2}u^2$$

Para calcular el volumen se toma la mitad del paralelepípedo

$$V = \frac{1}{2}\left|\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AC}\right)\right| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 + (-2) + 0 - [-12] = \frac{10}{2}u^3 = 5\ u^3$$

$$V = \mathbf{5}\ \boldsymbol{u^3}$$

Autor: Andrés García Mirantes
www.apuntesmareaverde.org.es
Textos Marea Verde

Bloque 4.A.

En un espacio muestral se tienen dos sucesos A y B. Se conocen las siguientes probabilidades: $P(A \cap B) = 0.3$; $P(A/B) = P(B/A)$ y $P(\overline{A}) = 0.2$. Calcula:

$a)$ $P(B/A)$.

$b)$ $P(B)$.

$c)$ ¿Son los sucesos independientes?

Solución:

Se conocen las siguientes probabilidades: $P(A \cap B) = 0.3$; $P(B|A) = P(A|B)$; $P\ (\overline{A}) = 0.2$

a) Cálculo de $P(B|A)$.

Por definición de probabilidad condicionada:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.3}{0.8} = \frac{3}{8}$$

Si $P\ (\overline{A}) = 0.2$, $P(A) = 1 - P\ (\overline{A}) = 0.8$

$$\boldsymbol{P(B|A) = \frac{3}{8}.}$$

b) $P(B)$

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) \Rightarrow 0.3 = \frac{3}{8} \cdot P(B) \Rightarrow P(B) = \frac{0.3}{0.8} = \frac{3}{8} = 0.8$$

$$P(B) = \mathbf{0.8}$$

c) ¿Son los sucesos independientes?

Dos sucesos son independientes si: Si $P(A|B) = P(A) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$P(A) = 0.8$; $P(B) = 0.8$

$$P(A) \cdot P(B) = 0.8 \cdot 0.8 = 0.64 \neq 0.3 = P(A \cap B)$$

Los sucesos NO son independientes.

BY NC SA

Bloque 4.B.

Los 5 defensas, 3 medios y 2 delanteros de un equipo de fútbol se entrenan lanzando penaltis a su portero. Los defensas marcan gol la mitad de las veces, los medios 2/3 de las veces y los delanteros 3/4 de las veces.

a) Se elige un jugador al azar, ¿cuál es la probabilidad de que meta el penalti?

b) Se supone que la probabilidad del apartado anterior es del 60 %. El equipo realiza en una semana 600 lanzamientos. En cada lanzamiento se elige un jugador al azar y regresa al grupo pudiendo ser elegido nuevamente. Calcula la probabilidad de que como mucho se metan 400 goles aproximando la distribución por una normal.

Solución:

a) Sean los sucesos:

- *A: ser defensa*
- *B: ser medio*
- *C: ser delantero*
- *G: meter gol*
- *NG: no meter gol*

$$P(A)=\frac{1}{2}\ P(B)=\frac{3}{10}\ P(C)=\frac{2}{10};P(G|A)=\frac{1}{2},P(G|B)=\frac{2}{3},P(G|C)=\frac{3}{4}$$

$$P(M|N)=\frac{P(M\cap N)}{P(N)}\ definición\ de\ probabiliad\ condicionada$$

$$G=G\cap A+G\cap B+G\cap C\ \Rightarrow P(G)$$

$$P(G)=P(G\cap A)+P(G\cap B)+P(G\cap C)=P(G|A)\cdot P(A)+P(G|B)\cdot P(B)+P(G|C)\cdot P(C)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{10}+\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{10}=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{3}{20}=\frac{12}{20}=0.6$$

La probabilidad de que meta el penalti es **0.6**.

b) Se trata de una distribución binomial de las siguientes características: $p=P(A)=0.6;\ \ q=P(\overline{A})=0.4;\ \ n=600.$

Transformamos la distribución binomial en normal: $\mu=n\cdot p=600\cdot 0.6=360.$

$\sigma=\sqrt{n\cdot p\cdot q}=\sqrt{600\cdot 0.6\cdot 0.4}=\sqrt{144}=12$. Tipificando la variable: $X\to\frac{X-\mu}{\sigma}\Rightarrow\frac{X-400}{12}$.

Consideramos la corrección de Yates:

$$P=P(X\le 400)=P(X<400.5)=P\left(Z<\frac{400.5-360}{12}\right)=P\left(Z<\frac{40.5}{12}\right)=P(Z<3.375)=0.9996.$$

La probabilidad de que como mucho se metan 400 goles es **0.9996**

BY NC SA

Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato
para el acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2019-2020

MATEMÁTICAS II

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen.

TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada ejercicio se calificará sobre 2,5 puntos.

El estudiante deberá indicar la agrupación de preguntas que responderá. La selección de preguntas deberá realizarse conforme a las instrucciones planteadas, no siendo válido seleccionar preguntas que sumen más de 10 puntos, ni agrupaciones de preguntas que no coincidan con las indicadas, lo que puede conllevar la anulación de alguna pregunta que se salga de las instrucciones.

Bloque 1.A Dado el sistema $\left\{\begin{array}{rcrl} x & + & y & = a \\ (2-a)x & + & 2y & = 1 \\ ax & & & = a \end{array}\right. \qquad a \in \mathbb{R}$

a) Estudia su compatibilidad según los valores de a. (1.5 puntos)

b) Resuélvelo cuando sea posible. (1 punto)

Bloque 1.B Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} x+1 & x+1 & x-2 \\ x & x & 2-x \\ x & x-1 & x \end{pmatrix} \quad x \in \mathbb{R}$

a) Calcula su determinante aplicando sus propiedades y estudia cuándo es invertible la matriz. (1.5 puntos)

b) Para $x = 1$, calcula su inversa. (1 punto)

Bloque 2.A Dada la función $f(x) = \dfrac{2x^3+1}{x^2}$

a) Estudia y calcula su dominio de definición y sus asíntotas. (1.25 puntos)

b) Halla, si existen: máximos y mínimos relativos y calcula sus intervalos de crecimiento y decrecimiento. (0.75 puntos)

c) Haz un esbozo de su gráfica. (0.5 puntos)

Bloque 2.B Calcula:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x\,e^x}{x^2 - 2\cos(x) + 2}$ (1.25 puntos)

b) Una primitiva de la función $f(x) = x\cos(x) - e^{-x}$ cuya gráfica pase por el punto $(0,3)$. (1.25 puntos)

Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

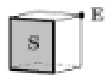
Prueba de evaluación de Bachillerato
para el acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2019-2020

Bloque 3.A Sean $A(2,1,0)$, $B(5,5,0)$ y $C(2,1,5)$ tres vértices de la cara S de un cubo (cuadrados iguales) y $E(-2,4,0)$ un vértice de la cara opuesta. Se pide:

a) El cuarto vértice D de la cara S. (1 punto)

b) La ecuación del plano π que contiene la cara opuesta de S. (1 punto)

c) ¿Cuál es el vértice de la cara S adyacente a E? (0.5 puntos)



Bloque 3.B Dados dos planos $\begin{cases} \pi\ :\ x+y-2z=3 \\ \pi'\ :\ x-z=5 \end{cases}$. Sea P un punto de π cuya proyección ortogonal sobre π' es el punto $A(5,1,0)$

a) Calcula las ecuaciones implícitas de la recta r que une P y A. (1.5 puntos)

b) Calcula el punto P. (1 punto)

Bloque 4.A En un curso de un instituto hay tres clases: la clase A con 50 alumnos, la clase B con 30 y la clase C con 20. Cada clase tiene un profesor distinto de matemáticas. Con el profesor de la clase A aprueban el 40 % de los alumnos, con el de la clase B el 50 % y con el de la clase C el 75 % de los alumnos. Se coge al azar un alumno del curso. Calcula:

a) La probabilidad de que el alumno haya aprobado matemáticas. (1.25 puntos)

b) Sabiendo que ha aprobado, cuál es la probabilidad de que sea de la clase B. (1.25 puntos)

Bloque 4.B En una pumarada la producción en kilogramos de cada manzano sigue una distribución normal de media $\mu = 50$ y desviación típica $\sigma = 10$. Calcula:

a) La proporción de árboles que dan entre 30 y 60 kilogramos. (1.25 puntos)

b) El número de kilogramos por árbol a los que no llegan o igualan el 60 % de los árboles. (1.25 puntos)

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(x) = P(Z \le x)$, $F(2) = 0.9772$, $F(1) = 0.8413$, $F(1.5) = 0.9332$, $F(0.5) = 0.6915$, $F(0.2533) = 0.6$, $F(0.5244) = 0.7$, $F(0.8416) = 0.8$)

Bloque 1.A.

Dado el sistema $\begin{cases} x+y=a \\ (2-a)x+2y=1 \\ ax=a \end{cases}, a \in R$.

$a)$ Estudia la compatibilidad según los valores de a.

$b)$ Resuélvelo cuando sea posible.

Solución:

a) Para estudiar su compatibilidad según los valores de a resolvemos el sistema por sustitución.

$$\begin{cases} x+y=a \\ (2-a)x+2y=1 \\ ax=a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=a-x \\ (2-a)x+2(a-x)=1 \\ ax=a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=ax \\ -ax=1-2a \\ ax=a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=a-x \\ x=\dfrac{1-2a}{-a} \\ ax=a \end{cases}$$

- Si $a \neq 0$, para que exista solución del sistema.

$$\begin{cases} - \\ x=1 \end{cases} \quad x=\frac{1-2a}{-a} \to \frac{1-2a}{-a}=1 \quad \to \begin{cases} a=1 \end{cases} \begin{cases} x+y=1 \\ - \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow y=0$$

Sistema compatible determinado.

- Si $a=0$,

$$\begin{cases} x+y=0 \\ 2x+2y=1 \\ 0\cdot x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x+y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Sistema incompatible.

Si $a \neq 0$, Sistema compatible determinado. Si $a=0$, Sistema incompatible.

b) *Resuélvelo cuando sea posible.*

- Si $a=1$,

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x+2y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$$

Para cualquier $a \neq 0$: $ax=a \to x=1$. $x+y=a \to y=a-x$

$$x=1; y=a-x$$

Textos Marea Verde

Bloque 1.B.

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} x+1 & x+1 & x-2 \\ x & x & 2-x \\ x & x-1 & x \end{pmatrix}$ $x \in R$:

$a)$ Calcula su determinante aplicando sus propiedades y estudia cuando es invertible la matriz.

$b)$ Para $x = 1$, calcula su inversa.

Solución:

a) Calcula su determinante aplicando sus propiedades y estudia cuándo es invertible la matriz.

$|A| = |B|$ El determinante de una matriz no varía si a una fila (o columna) se le suma una combinación lineal de las demás.

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} x+1 & x+1 & x-2 \\ x & x & 2-x \\ x & x-1 & x \end{pmatrix} \end{array}$$ $\Rightarrow B|A| = |B|$ El determinante de una matriz no varía si a una fila (o columna) se le suma una combinación lineal de las demás.

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} C_1 & C_2 - C_1 & C_3 - C_1 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} x+1 & 0 & -3 \\ x & 0 & 2-2x \\ x & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Un determinante es la suma de los elementos de una línea por sus adjuntos. Desarrollando por la segunda columna.

$$|\mathrm{B}| = 0 \cdot \mathrm{Adj} + 0 \cdot \mathrm{Adj} + (-1)(-1)^5 \begin{vmatrix} x+1 & 3 \\ x & 2(1-x) \end{vmatrix} = 2(1-x^2) + 3x = -2x^2 + 3x + 2 = |A|$$

Si $-2x^2 + 3x + 2 \neq 0$ existe A^{-1}.

Si $-2x^2 + 3x + 2 = 0$ no existe.

$-2x^2 + 3x + 2 = 0$ entonces $x_1 = \frac{1}{1}$ y $x_2 = 2$. Por tanto,

$$\exists\, A^{-1} \text{ si y sólo sí, } x_1 \neq \frac{1}{1} \text{ y } x_2 \neq 2$$

b) Si $\mathrm{x} = 1$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - |A| = 2 + 2 + 0 - [-1 + 2 + 0] = 3; A^{-1} = Adj(A^t) \cdot \frac{1}{|A|}$

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Bloque 2.A.

Dada la función $f(x) = \frac{2x^3+1}{x^2}$.

$a)$ Estudia y calcula su dominio de definición y sus asíntotas.

$b)$ Halla, si existen: máximos y mínimos relativos y calcula sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$c)$ Haz un esbozo de su gráfica.

Solución:

a) La función$f(x) = \frac{2x^3+1}{x^2} = 2x + \frac{1}{x^2}$ es una función racional, cociente de dos polinomios, por tanto, existe es continua y derivable menos cuando el denominador sea 0.

$$D(t) = \{x|\ x \in \mathbb{R}\ \ y\ \ x \neq 0\}$$

Asíntotas:

- Horizontales, para $y = k$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3+1}{x^2} = +\infty\,; \ \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3+1}{x^2} = -\infty\,; \text{ No existen.}$$

- Verticales, para $x = k$.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$$

Por tanto, $\boldsymbol{x} = 0$, es una asíntota vertical.

- Oblicuas, para $y = mx + n$.

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} 2 + \frac{1}{x^3} = 2$$

$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(2x + \frac{1}{x^2} - 2x\right) = 0$$

Por tanto, $\boldsymbol{y} = 2\boldsymbol{x}$ es una asíntota oblicua

$\boldsymbol{x} = 0$ es una asíntota vertical. $\boldsymbol{y} = 2\boldsymbol{x}$ es una asíntota oblicua

b) Halla, si existen: máximos y mínimos relativos y calcula sus intervalos de crecimiento y decreciente.

$$f(x) = 2x + \frac{1}{x^2} \to f'(x) = 2 + \frac{-2x}{x^4} = 2 - \frac{2}{x^3} = \frac{2(x^3 - 1)}{x^3}$$

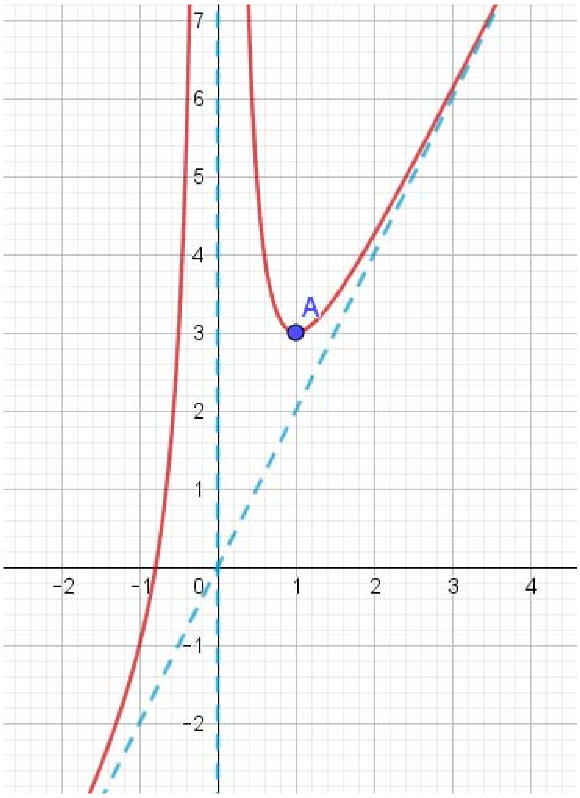
- Si $x = 1$, $f'(x) = 2 - \frac{2}{x^3} = 0$. Miramos los intervalos: $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, +\infty)$
- Si $x < 0$, $x^3 < 0$, $f'(x) > 0$, la función es creciente.
- Si $0 < x < 1$, $0 < x^3 < 1$, $\frac{2}{x^3} > 2$, $f'(x) < 0$, la función es decreciente
- Si $x > 1$, $f'(x) > 0$, la función es creciente $(1, +\infty)$.
- En $A(1, 3)$ la función pasa de ser creciente a ser decreciente, luego es un mínimo relativo.

$x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ creciente; $x \in (0, 1)$ decreciente. $A(1, 3)$ mínimo

c) Haz un esbozo de su gráfica.

Los cortes con los ejes son:

- Para $x = 0$, no existe.
- Para $y = 0$, $x = \sqrt[3]{\frac{-1}{2}}$



Textos Marea Verde

Bloque 2.B.

Calcula:

$a)\ \lim\limits_{x\to 0} \frac{sen\ x - x\cdot e^x}{x^2 - 2\cdot cos\ x + 2}$.

$b)$ Una primitiva de la función $f(x) = x \cdot cos\ x - e^{-x}$ cuya gráfica pase por el punto $P(0,3)$.

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sen(x) - x\,e^x}{x^2 - 2\,cos(x) + 2} = \frac{0-0}{0-2\cdot 1+2} = \frac{0}{0}\ Indeterminación$

Como está formada por funciones trigonométricas, polinómicas y exponenciales, son funciones continuas y derivables en todo $\mathbb{R}$, por lo que es aplicable la Regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen(x) - x\,e^x}{x^2 - 2\,cos(x) + 2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - (e^x + xe^x)}{2x - 2\big(-sen(x)\big) + 0} = \frac{1-1-0}{0+2\cdot 0} = \frac{0}{0}$$

Aplicando de nuevo la regla de L'Hôpital

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - (e^x + xe^x)}{2x - 2\big(-sen(x)\big) + 0} = \lim_{x\to 0} \frac{-sen(x) - e^x - e^x - x\,e^x}{2 + 2\,cos(x)} = \frac{0-1-1-0}{2+2} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen\ x - x\cdot e^x}{x^2 - 2\cdot cos\ x + 2} = \frac{-1}{2}$$

a) *Una primitiva de la función $f(x) = x\,cos(x) - e^{-x}$ Cuya gráfica pase por el punto (0, 3).*

$$F(x) = \int (x\cos(x) - e^{-x})dx = \int x\cos(x)\,dx - \int e^{-x}dx = \int x\cos(x)\,dx =$$

$$= x\,sen(x) - \int\ sen(x)\,dx = x\,sen(x) + \cos(x) + k$$

Integramos por partes

$$\left.\begin{matrix} x = t \\ \cos(x)\,dx = dg \end{matrix}\right| \Rightarrow \left.\begin{matrix} dx = dt \\ sen(x) = g \end{matrix}\right|$$

$$\int f\,dg = f\cdot g - \int g\,dt$$

$$\int e^{-x}dx = -e^{-x} + k\ \ \rightarrow F(x) = x\,sen(x) + \cos(x) + e^{-x} + k$$

$$F(3) = 0$$

$$F(0) = 0 + 1 + 1 + k = 3\ \rightarrow k = 1$$

$$F(x) = x\,sen(x) + \cos(x) + e^{-x} + 1$$

Autor: Andrés García Mirantes
www.apuntesmareaverde.org.es
Textos Marea Verde

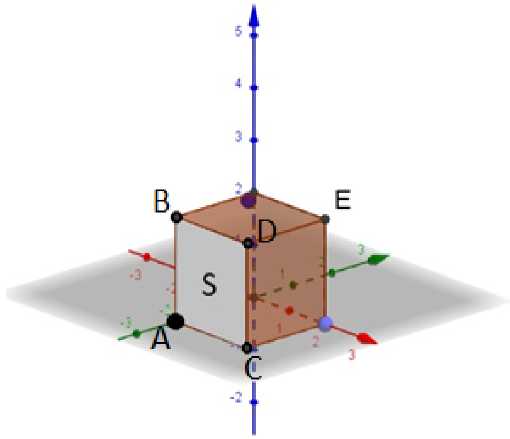
Bloque 3.A.

Sean $A(2,1,0), B(5,5,0)\ y\ C(2,1,5)$ tres vértices de la cara S de un cubo (cuadrados iguales) y $E(-2,4,0)$ un vértice de la cara opuesta. Se pide:

$a)$ El cuarto vértice D de la cara S.

$b)$ La ecuación del plano π que contiene la cara opuesta de S.

$c)$ ¿Cuál es el vértice de la cara S adyacente a E?



Solución:

Siendo los vértices $A(2,1,0), B(5,5,0)\ y\ C(2,1,5)$

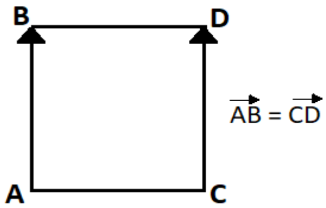
a) El cuarto vértice D de la cara S.

A, B, C, D son vértices de un cuadrado, pero no sabemos en qué orden. Calculamos módulos.

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2+4^2+0^2} = 5 \to |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{0^2+0^2+5^2} = 5 \to |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{3^2+4^2+0^2} = \sqrt{50}$$

$$|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{?^2+?^2+?^2} =$$

Luego B, es consecutivo de A y C.



El cuadrado es $ABDC$, es decir, $(3,4,0) = (x-2, y-1, z-5)$, con lo cual *D(5, 5, 5).*

D(5, 5, 5).

b) La ecuación del plano π que contiene la cara opuesta de S.

El plano π es paralelo a ABC y pasa por $E(-2,4,0)$; por tanto, sus vectores directores serán $|\overrightarrow{AB}|$, $|\overrightarrow{AC}|$.

Siendo $|\overrightarrow{AB}| = (3{,}4{,}0)$, $|\overrightarrow{AC}| = (0{,}0{,}5)$.

$$\pi = \begin{vmatrix} x-(-2) & 3 & 0 \\ y-4 & 4 & 0 \\ z-0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0 \to 5[4(x+2) - 3(y-4)] = 0 \to 4x - 3y + 20 = 0$$

$$\mathbf{4x - 3y + 20 = 0}$$

c) Cuál es el vértice de la cara S adyacente a E?

Si se designan los vértices como en la figura adjunta, sería el vértice $C(2,1,5)$.

$$\boldsymbol{C(2,1,5)}$$

CC BY NC SA

Bloque 3.B.

Dados dos planos: $\begin{cases} \pi \equiv x + y - 2z = 3 \\ \pi' \equiv x - z = 5 \end{cases}$. Sea P un punto de π cuya proyección ortogonal sobre π' es el punto $A(5, 1, 0)$.

$a)$ Calcula las ecuaciones implícitas de la recta r que une P y A.

$b)$ Calcula el punto P.

Solución:

Sean $M: x + y - 2z = 3$, sea $M': x - z = 5$, A (5, 1, 0)

La recta r será la recta que pase por A y sea perpendicular a M', por tanto, $\overrightarrow{V_r}$ será el vector director de M': $\overrightarrow{V_r} = (1, 0, -1)$

La ecuación resultante de r es $\overrightarrow{AX} = t\overrightarrow{V_{M'}}$

$$(x-5, y-1, z-0) = t(1, 0, -1) \rightarrow x - 5 = t, y - 1 = 0, z - 0 = -t$$

Eliminando t nos queda

$$x - 5 = -z, y - 1 \rightarrow$$

$$r \begin{cases} x + z = 5 \\ y = 1 \end{cases}$$

b) Calcula el punto P.

P es la intersección de M y r. Será la solución del sistema:

$$\begin{cases} x + y - 2z = 3 \\ x + z = 5 \\ y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5 - z + 1 - 2z = 3 \\ x + z = 5 \\ y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3z = 3 \\ x + z = 5 \\ y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = 1 \\ y = 1 \\ x = 4 \end{cases}$$

Entonces el punto es P ***(4, 1, 1)***.

P ***(4, 1, 1)***.

Autor: Andrés García Mirantes
www.apuntesmareaverde.org.es
Textos Marea Verde

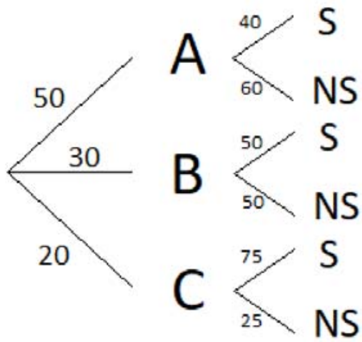
Bloque 4.A.

En un curso de un instituto hay tres clases: la clase A con 50 alumnos, la clase B con 30 y la clase C con 20. Cada clase tiene un profesor distinto de matemáticas. Con el profesor de la clase A aprueban el 40 % de los alumnos, con el de la clase B el 50 % y con el de la clase C el 75 % de los alumnos. Se coge al azar un alumno del curso. Calcula:

a) La probabilidad de que el alumno haya aprobado matemáticas.

b) Sabiendo que ha aprobado, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la clase B?

Solución:



Sean los sucesos:

- A: "ser de la clase A"
- B: "ser de la clase B"
- C: "ser de la clase C"
- S: "aprobar matemáticas"
- NS: "no aprobar matemáticas"

$$P(A)=\frac{50}{100}\rightarrow P(B)=\frac{30}{100}\rightarrow P(C)=\frac{20}{100}\rightarrow P(S|A)=\frac{40}{100}$$

a) La probabilidad de que el alumno haya aprobado matemáticas.

$$P(S|B)=\frac{50}{100}\rightarrow P(S|C)=\frac{75}{100}\rightarrow$$

La probabilidad total es:

$$S=S\cap A+S\cap B+S\cap C$$

Según la definición de probabilidad condicionada: $P(R|N)=\frac{P(R\cap N)}{P(N)}$

Por tanto,

$$P(S)=P(S|A)\cdot P(A)+P(S|B)\cdot P(B)+P(S|C)\cdot P(C)=$$

$$=\frac{40}{100}\cdot\frac{50}{100}+\frac{50}{100}\cdot\frac{30}{100}+\frac{75}{100}\cdot\frac{20}{100}=\frac{20+15+15}{100}=\frac{50}{100}=\frac{1}{2}=0.5$$

$$P(S)=\frac{1}{2}=\mathbf{0.5}$$

b) *Nos piden ahora:* $P(B|S)=\frac{P(S\cap B)}{P(S)}=\frac{P(S|B)\cdot P(B)}{P(S)}=\frac{\frac{50}{100}\cdot\frac{30}{100}}{\frac{50}{100}}=\frac{30}{100}=\frac{3}{10}.$

Sabiendo que ha aprobado, la probabilidad de que sea de la clase B es **3/10**.

Textos Marea Verde

Bloque 4.B.

En una pumarada la producción en kilogramos de cada manzano sigue una distribución normal de media $\mu = 50$ y desviación típica $\sigma = 10$. Calcula:

$a)$ La proporción de árboles que dan entre 30 y 60 kilogramos.

$b)$ El número de kilogramos por árbol a los que no llegan o igualan el 60 % de los árboles.

Solución:

$a)$ Nos dice que: $\mu = 50$; $\sigma = 10$.

La proporción de árboles sigue una distribución normal:

$X \to N(\mu;\ \sigma) = N(50, 10)$. Tipificando la variable: $Z = \frac{X-50}{10}$.

$$P = P(30 \le X \le 60) = P\left(\frac{30-50}{10} \le Z \le \frac{60-50}{10}\right) = P\left(\frac{20}{10} \le Z \le \frac{-10}{10}\right) = P(2 \le Z \le -1) =$$

$P(Z \le 2) - [1 - P(Z \le 1)] = P(Z \le 2) - 1 + P(Z \le 1) = 0.9772 - 1 + 0.8413 = 1.8185 - 1 = 0.8185.$

La proporción de árboles que dan entre 30 y 60 kilogramos es del **81.85 %**

$b)$ Se debe hallar γ tal que: $P = P(X \le \gamma) = 0.60 \Rightarrow P\left(Z \le \frac{\gamma-50}{10}\right) = 0.60.$

Mirando de forma inversa en la tabla $N(0,1)$ a 0.60 le corresponde, aproximadamente, 0.253:

$\frac{\gamma-50}{10} = 0.253;\ \gamma - 50 = 2.53;\ \ \gamma = 50 + 2.53 = 52.53.$

El 60 % de los manzanos no superan una producción de **52.53** kilogramos.

Textos Marea Verde