Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II
Selectividad 2019
Comunidad autónoma del
País Vasco

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: ALEX AGINAGALDE
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Textos Marea Verde

Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea	UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA	EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
	2019ko EKAINA	JUNIO 2019
	GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II	MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

OPCIÓN A

Problema A.1:

(3 puntos) **Una pastelería fabrica dos tipos de tartas. La tarta tipo A se elabora con 1 kg de masa y 1.5 kg de chocolate, y se vende a 24 euros. La de tipo B se vende a 30 euros y se elabora con 1.5 kg de masa, 1 kg de chocolate, tal como aparece en la siguiente tabla:**

	Masa	Chocolate
A	1	1.5
B	1.5	1

Si la pastelería solo dispone de 300 kg de cada ingrediente, ¿cuántas tartas ha de fabricar de cada tipo para obtener el máximo ingreso? Calcula el valor de dicho ingreso.

Problema A.2:

(3 puntos) **Se considera la curva $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.**

a) **Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.**
b) **Determinar los máximos y mínimos relativos, y los puntos de inflexión**
c) **Encontrar los puntos de corte con el eje OX. Realizar la representación grafica de la función.**
d) **Calcular el área del recinto finito delimitado por la curva y el eje abscisas OX.**

Problema A.3:

(2 puntos) **Sean A y B dos sucesos tales que $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, y la probabilidad de la unión de ambos sucesos es $\frac{3}{4}$. Calcular:**

a) **La probabilidad de que ocurra el suceso A, condicionada a que se ha producido el suceso B.**
b) **La probabilidad de que no ocurra ninguno de los sucesos.**
c) **La probabilidad de que ocurra el suceso A y no ocurra el suceso B.**
d) **La probabilidad de que ocurra solo uno de los dos sucesos.**

Problema A.4:

(2 puntos) **En una población se toma una muestra aleatoria de 500 personas y se les pregunta si son aficionadas al deporte o no. De ellas 350 respondieron que si son aficionadas al deporte y el resto que no. Con esta información se pide:**

a) **Estimar, con un nivel de confianza del 95 %, el porcentaje de personas de la población que son aficionadas al deporte. Calcular, además, el error máximo para dicho nivel de confianza.**
b) **Interpretar los resultados obtenidos.**

Universidad del País Vasco | Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA	EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
2019ko EKAINA	JUNIO 2019
GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II	MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

OPCIÓN B

Problema B.1:

(3 puntos) **Sean las matrices** $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ **y** $C = \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

a) **Determina la matriz inversa de la matriz $I + B$, siendo I la matriz identidad de orden 2.**

b) **Calcula las matrices X e Y que verifican que:**

$$\begin{cases} AX + BY = C \\ AX = Y \end{cases}$$

Problema B.2: (3 puntos)

a) **Hallar la función polinómica de segundo grado cuyo gráfico pasa por el punto (0, 0) y tiene un máximo en el punto (1, 1)**

b) **Hallar el área del recinto finito delimitado por la curva obtenido y el eje de abscisas OX**

Problema B.3: (2 puntos)

a) **Se dispone de dos urnas diferentes: A y B. La urna A contiene 3 bolas blancas y 5 bolas negras, mientras que la urna B contiene 10 bolas negras.**

b) **Se toma al azar una bola de cada una de las urnas al mismo tiempo y se intercambian (es decir, la bola extraída de la urna A se introduce en la urna B y la bola extraída de la urna B se introduce en la urna A). Si a continuación se extrae una bola de la urna A, ¿cuál es la probabilidad de que sea negra?**

Problema B.4:

(2 puntos) **En una determinada ciudad el gasto anual en transporte publico realizado por las familias sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 75 euros.**

Se toma una muestra aleatoria de 100 familias, de las que se obtiene un gasto medio de 250 euros.

a) **Calcular entre qué valores estará el gasto medio de la población con el nivel de confianza del 99 %.**

b) **¿Qué tamaño debería tener la muestra para que el error máximo sea de 10 euros con un nivel de confianza del 99 %?**

SOLUCIONES OPCIÓN A

Problema A.1:

Una pastelería fabrica dos tipos de tartas. La tarta tipo A se elabora con 1 kg de masa y 1.5 kg de chocolate, y se vende a 24 euros. La de tipo B se vende a 30 euros y se elabora con 1.5 kg de masa, 1 kg de chocolate, tal como aparece en la siguiente tabla:

	Masa	Chocolate
A	1	1.5
B	1.5	1

Si la pastelería solo dispone de 300 kg de cada ingrediente, ¿cuántas tartas ha de fabricar de cada tipo para obtener el máximo ingreso? Calcula el valor de dicho ingreso.

Solución:

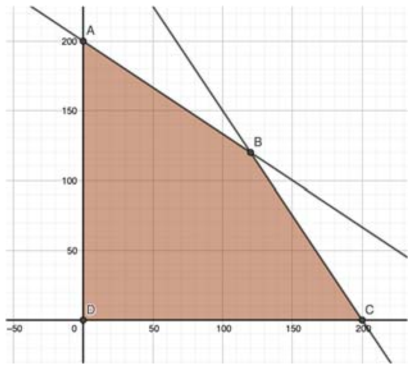
Se trata de un problema de programación lineal con dos variables.

Completemos la tabla:

Tipo de tarta	Masa (kg)	Chocolate (kg)	Precio (€)
A (x unidades)	1	1.5	24
B (y unidades)	1.5	1	30
¿De cuanto disponemos?	300	300	

Si traducimos a ecuaciones dichas restricciones obtenemos este sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq \\ 1x + 1.5y \leq 300 \\ 1.5x + 1y \leq 300 \end{cases}$$



Por otro lado, la función objetivo es la siguiente: $f(x, y) = 24x + 30y$

Representamos la región que define es sistema de ecuaciones:

Si representamos la región perfectamente vemos que los vértices de la región son (0, 0), (0, 200), (120, 120) y (200, 0).

Pero en caso de no disponer de un dibujo adecuado tendríamos que resolver cuatro sistemas de ecuaciones:

1) $\begin{cases} y = 0 \\ 1.5x + y = 300 \end{cases} \Longrightarrow (200, 0)$

2) $\begin{cases} x = 0 \\ 1.5x + y = 300 \end{cases} \Longrightarrow (0, 200)$

3) $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Longrightarrow (0, 0)$

4) $\begin{cases} x + 1{,}5y = 300 \\ 1.5x + y = 300 \end{cases} \Longrightarrow (120, 120)$

Calculemos para cada vértice el valor de la ganancia:

- $f(0, 0) = 24 \cdot 0 + 30 \cdot 0 = 0$
- $f(200, 0) = 24 \cdot 200 + 30 \cdot 0 = 4800$
- $f(0, 200) = 24 \cdot 0 + 30 \cdot 200 = 6000$
- $f(120, 120) = 24 \cdot 120 + 30 \cdot 120 = 6480$

$$\boxed{Por\ tanto, la\ ganancia\ máxima\ se\ da\ en\ si\ se\ fabrican\ 120\ tartas\ de\ cada\ tipo.}$$

Problema A.2:

Se considera la curva $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.

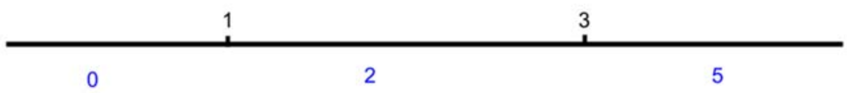
- **e) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.**
- **f) Determinar los máximos y mínimos relativos, y los puntos de inflexión**
- **g) Encontrar los puntos de corte con el eje OX. Realizar la representación grafica de la función.**
- **h) Calcular el área del recinto finito delimitado por la curva y el eje abscisas OX.**

Solución:

a) Para estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función tenemos que derivar la función e igualarla a 0:

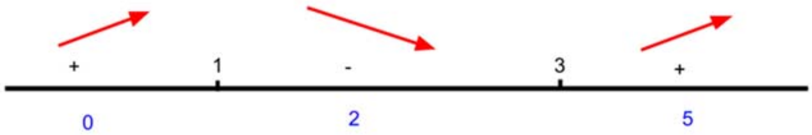
$$f'(x) = 0 = 3x^2 - 12x + 9$$

Resolviendo dicha ecuación obtenemos los valores críticos $x = 1$ y $x = 3$. Los sustituimos en la recta real y vemos que pasa con el crecimiento y decrecimiento para los tres intervalos que aparecen:



Estudiaremos lo que pasa en los puntos 0, 2 y 5 y podemos generalizar para los intervalos $(-\infty, 1)$, $(1, 3)$ y $(3, +\infty)$.

- $f'(0) = 9 > 0$ por tanto es creciente en ese intervalo
- $f'(2) = -3 < 0$ por tanto es decreciente en ese intervalo
- $f'(5) = 74 < 0$ por tanto es decreciente en ese intervalo



$$\boxed{Por\ tanto\ la\ función\ es\ creciente\ en\ (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)\ y\ decreciente\ en\ (1, 3)}$$

b) Con la información del apartado (a) podemos afirmar que en el punto $x = 1$ hay un máximo y que en el punto $x = 3$ hay un mínimo. Aun así, veamos con el uso de la segunda derivada que es así.

$$f''(x) = 6x \quad - 12$$

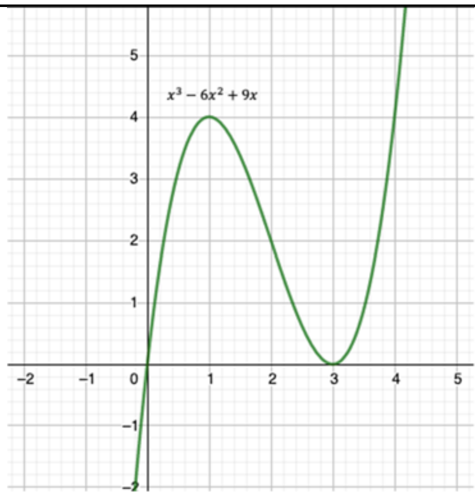
Igualando a 0 la segunda derivada obtenemos el punto $x = 2$, un posible punto de inflexión.
Veamos que signo toman los puntos críticos $x = 1$, $x = 2$ y $x = 3$ en la segunda derivada:

- $f''(1) = 6 - 12 = -6 \quad < 0$, es decir, hay un máximo en (1, 4)
- $f''(2) = 0$, es decir, hay un punto de inflexión en (2, 2) puesto que $f'''(2) = 6 \neq 0$
- $f''(3) = 18 - 12 = 6 \quad < 0$, es decir hay un mínimo en (3, 0)

c) Los cortes con la recta OX se calculan cuando igualamos el valor de y a 0, es decir cuando calculamos $f(x) = 0$

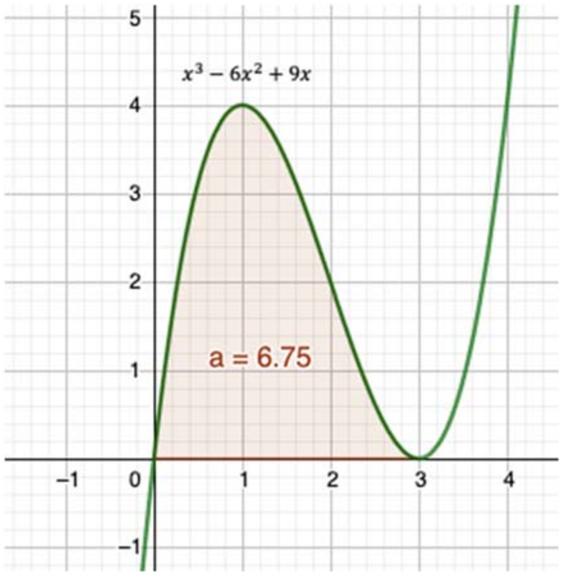
$$f(x) = 0 = x^3 - 6x^2 + 9x = x(x^2 - 6x \quad + 9) = x(x-3)^2 \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

$\boxed{\textit{Es decir la curva corta al eje OX en los puntos } (0,0) \text{ y } (3,0)}$



d) El área del recinto finito delimitado por la curva y el eje abscisas OX es el área que esta debajo de la curva y la recta $y = 0$, entre los puntos 0 y 3.

$$\boxed{A =} \int_0^3 (x^3 - 6x^2 + 9x)dx = \left[\frac{x^4}{4} - 6\frac{x^3}{3} + 9\frac{x^2}{2} + K\right]_0^3 = \boxed{\frac{27}{4}u^2}$$



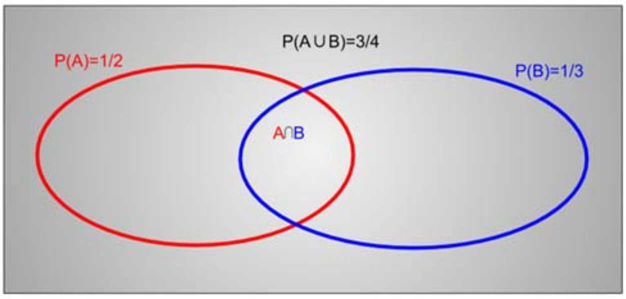
Problema A.3:

Sean A y B dos sucesos tales que $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, y la probabilidad de la unión de ambos sucesos es $\frac{3}{4}$. Calcular:

a) La probabilidad de que ocurra el suceso A, condicionada a que se ha producido el suceso B.
b) La probabilidad de que no ocurra ninguno de los sucesos.
c) La probabilidad de que ocurra el suceso A y no ocurra el suceso B.
d) La probabilidad de que ocurra solo uno de los dos sucesos.

Solución:

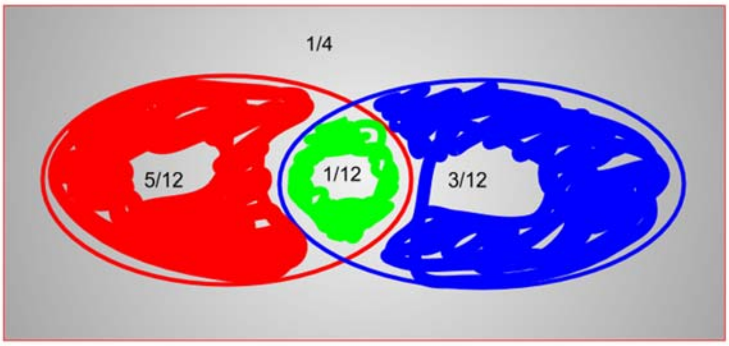
Con la información que disponemos realizamos un diagrama de Venn:



Con esta información podemos calcular el área de cada una de las zonas por separado.

- Si $P(A \cup B) = 3/4$ y $P(\Omega) = 1$, entonces, $P(\overline{A \cup B}) = 1/4$
- En $P(A) + P(B) = 1/2 + 1/3 = 5/6$ hemos contado dos veces $P(A \cap B)$, y como $P(A \cup B) = 3/4$, entonces: $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - (A \cup B) = 5/6 - 3/4 = 1/12$

Haciendo unos pocos cálculos llegamos a este nuevo esquema:



Respondamos ahora a las preguntas planteadas:

a) La probabilidad de que ocurra el suceso A, condicionada a que se ha producido el suceso B.

$$\boxed{P(A|B) =} \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/12}{1/3} \boxed{= 1/4}$$

b) La probabilidad de que no ocurra ninguno de los sucesos.

$$\boxed{P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1/4}$$

c) La probabilidad de que ocurra el suceso A y no ocurra el suceso B.

$$\boxed{P(A \cap \bar{B}) = 5/12}$$

d) La probabilidad de que ocurra solo uno de los dos sucesos.

$$\boxed{P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B)} = 5/12 + 3/12 = 8/12 \boxed{= 2/3}$$

Problema A.4:

En una población se toma una muestra aleatoria de 500 personas y se les pregunta si son aficionadas al deporte o no. De ellas 350 respondieron que si son aficionadas al deporte y el resto que no. Con esta información se pide:

c) **Estimar, con un nivel de confianza del 95 %, el porcentaje de personas de la población que son aficionadas al deporte. Calcular, además, el error máximo para dicho nivel de confianza.**
d) **Interpretar los resultados obtenidos.**

Solución:

Se trata de un problema de probabilidad de una distribución muestral de proporciones.

Tenemos esta información:

- Tamaño de la muestra $n = 500$
- $\hat{p} = \frac{350}{500} = 0{,}7$ es la proporción de aficionados de la muestra.
- $\hat{q} = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$

$X: N\left(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right) = N(0{,}7; 0{,}0205)$ tras normalizar, $z = \frac{x-\hat{p}}{\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}}$ tenemos $Z: N(0{,}1)$

a) **Estimar, con un nivel de confianza del 95 %, el porcentaje de personas de la población que son aficionadas al deporte. Calcular, además, el error máximo para dicho nivel de confianza.**

Se nos pide que calculemos $P(-a \leq z \leq a) = 0{,}95$ o lo que es lo mismo $P(z \leq a) = 0{,}975 \implies a = 1{,}96$

De manera que $P(-1{,}96 \leq z \leq 1{,}96) = 0{,}95$

Des-tipificando, $P\left(-1{,}96 \leq \frac{x-\hat{p}}{\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}} \leq 1{,}96\right) = 0{,}95 \Leftrightarrow P\left(\hat{p} - 1{,}96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \leq x \leq \hat{p} + 1{,}96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right) = 0{,}95$

Por tanto el intervalo de aficionados al deporte con un 95 % de fiabilidad es:

$$(0{,}7 - 1{,}96 \cdot 0{,}0205; 0{,}7 + 1{,}96 \cdot 0{,}0205) = (0{,}65982; 0{,}74018) \approx (0{,}66; 0{,}74)$$

Es decir, el porcentaje de personas de la población aficionadas al deporte está entre el 66 % y el 74 % con un nivel de confianza del 95 %.

El error máximo para la proporción es la mitad de la amplitud del intervalo de confianza, es decir: $1{,}96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 1{,}96 \cdot 0{,}0205 = 0{,}04018 \approx 0{,}04$ esto es el $\boxed{4\ \%}$

b) **Interpretar los resultados obtenidos**

Se puede decir con un nivel de confianza del 95 %, que el porcentaje de la población que es aficionada al deporte en esa población es mayor que el 66% y menor que el 74 %, lo que supone un error máximo del 4%.

SOLUCIONES OPCIÓN B

Problema B.1:

Sean las matrices $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ **y** $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

a) Determina la matriz inversa de la matriz $\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B}$, siendo $\boldsymbol{I}$ la matriz identidad de orden 2.

b) Calcula las matrices $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$ que verifican que:

$$\begin{cases} \boldsymbol{AX}+\boldsymbol{BY}=\boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{AX}=\boldsymbol{Y} \end{cases}$$

Solución:

a) Se pide calcular $(I+B)^{-1}$

$$I+B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = D$$

$$\boxed{(I+B)^{-1}} = D^{-1} = \frac{1}{|D|}(Adj\ D)^t = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^t = \boxed{\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/6 & 1/3 \end{pmatrix}}$$

b) $\begin{cases} AX+BY=C \\ AX=Y \end{cases} \Rightarrow Y+BY=C \Rightarrow (I+B)Y=C \Rightarrow Y=(I+B)^{-1}\cdot C$

Por otro lado, $AX=Y=(I+B)^{-1}\cdot C \Rightarrow X=A^{-1}\cdot(I+B)^{-1}\cdot C = A^{-1}\cdot Y$

Realicemos los cálculos: $\boxed{Y=}\ (I+B)^{-1}\cdot C = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/6 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \boxed{= \begin{pmatrix} 5 & 11/2 \\ -1/3 & 1/2 \end{pmatrix}}$

Para determinar el valor de X, tenemos que calcular A^{-1}.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj\ A)^t = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $\boxed{X=}\ A^{-1}\cdot Y = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 11/2 \\ -1/3 & 1/2 \end{pmatrix} \boxed{= \begin{pmatrix} 5/2 & 11/4 \\ -1/3 & 1/2 \end{pmatrix}}$

Problema B.2:

a) Hallar la función polinómica de segundo grado cuyo gráfico pasa por el punto (0, 0) y tiene un máximo en el punto (1, 1)

b) Hallar el área del recinto finito delimitado por la curva obtenido y el eje de abscisas OX

Solución:

a) Tenemos que encontrar un polinomio de segundo grado, es decir, un polinomio con esta forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Tenemos tres incógnitas $(a, b\ y\ c)$, por tanto necesitamos tres condiciones para que el sistema sea compatible determinado:

1. El gráfico pasa por (0, 0) es equivalente a decir que $f(0) = 0$
2. Tiene un máximo en (1, 1) es equivalente a decir que $f'(1) = 0$ y que además, $f(1) = 1$

- $f(0) = 0 \Leftrightarrow 0 = c$
- $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 0 = 2a + b$
- $f(1) = 1 \Leftrightarrow 1 = a + b + c$

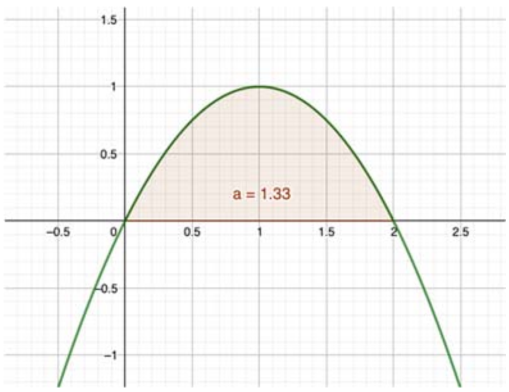
Resolviendo el sistema obtenemos que $a = -1$ y $b = 2$ además de $c = 0$.

Por tanto la función que buscamos es: $f(x) = -x^2 + 2x$

b) La curva es una parábola convexa por tanto corta el eje OX en dos puntos. Calculemos dichos puntos: $-x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(-x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

La parábola queda por encima del eje OX (como se ve en el dibujo), por tanto el área pedida se calcula mediante la siguiente integral definida:

$$\boxed{A =} \int_0^2 (-x^2 + 2x)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + k\right]_0^2 \boxed{= \frac{4}{3}u^2}$$



Problema B.3:

Se dispone de dos urnas diferentes: A y B. La urna A contiene 3 bolas blancas y 5 bolas negras, mientras que la urna B contiene 10 bolas negras.

Se toma al azar una bola de cada una de las urnas al mismo tiempo y se intercambian (es decir, la bola extraída de la urna A se introduce en la urna B y la bola extraída de la urna B se introduce en la urna A). Si a continuación se extrae una bola de la urna A, ¿cuál es la probabilidad de que sea negra?

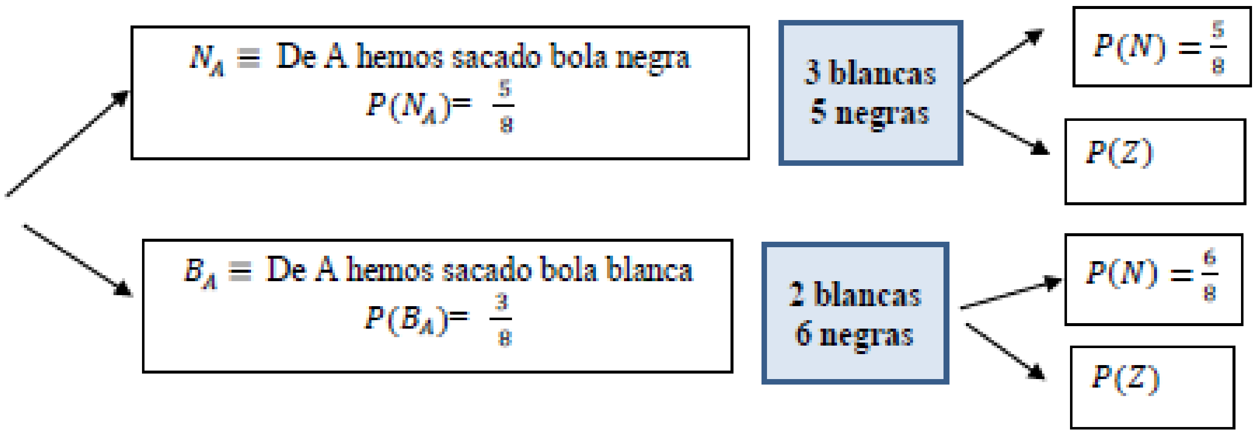
Solución:

Solucionaremos el problema mediante un diagrama de árbol.

Nos interesa el estado de la caja A en la segunda sacada de bolas. Dicho estado dependerá de lo que se saque en la primera sacada de cada urna.

Si de la urna A se saca una bola negra, la situación no variara pues de la urna B se saca siempre una bola negra. Y por tanto en A habrá 3 blancas y 5 negras

Si de la urna A se saca una bola blanca, la situación varia, pues si sacamos de B una bola negra el numero de bolas negras en A aumenta: 2 blancas y 6 negras.



$$P(sacar\ negra \text{ de A}) = \frac{5}{8}\cdot\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cdot\frac{6}{8} = \frac{43}{64} = 0.672 \text{ es decir, } 67.2\ \%$$

Problema B.4:

En una determinada ciudad el gasto anual en transporte publico realizado por las familias sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 75 euros.

Se toma una muestra aleatoria de 100 familias, de las que se obtiene un gasto medio de 250 euros.

a) **Calcular entre qué valores estará el gasto medio de la población con el nivel de confianza del 99 %.**

b) **¿Qué tamaño debería tener la muestra para que el error máximo sea de 10 euros con un nivel de confianza del 99 %?**

Solución:

Se trata de un problema de cálculo del intervalo de confianza de la media para una población con distribución normal conociendo el tamaño de la muestra ($n = 100$) y el gasto medio ($\bar{x} = 250$).

Disponemos de esta información:

- Media de la población μ
- Desviación típica $\sigma = 75$
- Media de la muestra $\bar{x} = 250$

$X: N(\bar{x}, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = N(250; 7{,}5)$ tras normalizar, $z = \frac{x-\bar{x}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ tenemos $Z: N(0,1)$

a) **Calcular entre qué valores estará el gasto medio de la población con el nivel de confianza del 99 %.**

Se nos pide que calculemos $P(-a \leq z \leq a) = 0.99$, es decir, $P(z \leq a) = 0.995 \implies a = 2.575$

De manera que $P(-2.575 \leq z \leq 2.575) = 0.99$

Des-tipificando, $P\left(-2.575 \leq \frac{x-\bar{x}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq 2.575\right) = 0.99 \Leftrightarrow P\left(\bar{x} - 2.575\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq x \leq \bar{x} + 2.575\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0.99$

Por tanto el intervalo de aficionados al deporte con un 99 % de confianza es:

$$(250 - 2.575 \cdot 7.5; 250 - 2.575 \cdot 7.5) = \boxed{(230.6875, 269.3125)}$$

b) **¿Qué tamaño debería tener la muestra para que el error máximo sea de 10 euros con un nivel de confianza del 99 %?**

El error máximo para un nivel de confianza del 99 % viene dado por: $2.575\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y queremos encontrar el tamaño de la muestra para que sea como máximo 10 euros. Por tanto,

$$2.575\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 10 \Leftrightarrow 2.575\frac{75}{\sqrt{n}} \leq 10 \Leftrightarrow 2.575\frac{75}{10} \leq \sqrt{n} \Leftrightarrow (2.575\frac{75}{10})^2 \leq n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 372.9726 \leq n$$

Con un tamaño de 372 no llegamos a tener el 99 % y con un tamaño de 373 nos pasamos, por tanto el tamaño deseado es de $\boxed{373\ familias}$.

Universidad del País Vasco | Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA	EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
2019ko UZTAILA	JULIO 2019
GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II	MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

OPCIÓN A

Problema A.1:

(3 puntos) **Sea la región definida por las inecuaciones:**

$$x + y - 1 \geq 0 \quad ; \quad 0 \leq x \leq 4 \quad ; \quad 0 \leq y \leq 2$$

Determinar los puntos de dicha región en los que la función $F(x, y) = 4x + 2y$ alcanza sus valores máximos y mínimos. Calcular los valores de la función en dichos puntos.

Problema A.2:

(3 puntos) **Sea la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$.**

a) **Encontrar los valores de los parámetros, a, b y c para que la función pase por el punto (0,0) y tenga un extremo relativo en el punto $(2, -4)$.**
b) **Determinar los máximos, mínimos y puntos de inflexión de la función.**
c) **Calcular el área de la región delimitada por el gráfico de la función y el eje de abscisas.**

Problema A.3:

(2 puntos) **En un instituto hay tres grupos de 1º de bachillerato con el mismo número de estudiantes. En el grupo A dos tercios de los/las estudiantes practican algún tipo de deporte, mientras que en los grupos B y C solo lo hacen la mitad de los/las estudiantes.**

Entre todo el alumnado se escoge una persona al azar, y resulta que no practica deporte. ¿Cuál es la probabilidad de que dicha persona pertenezca al grupo A?

Problema A.4:

(3 puntos) **Tras realizar una prueba de cultura general entre los habitantes de cierta población, se observa que las puntuaciones obtenidas siguen una distribución normal, de media 68 y desviación típica 18.**

Se desea clasificar a los habitantes en tres grupos (de baja cultura general, de cultura general aceptable, de cultura general excelente), de manera que el primer grupo abarque un 20 % de la población, el segundo un 65 % y el tercero el 15 % restante.

¿Cuáles son las puntuaciones que marcan el paso de un grupo a otro?

Universidad del País Vasco | Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA
2019ko UZTAILA
GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II

EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
JULIO 2019
MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

OPCIÓN B

Problema B.1:

(3 puntos) **Sean A y B las siguientes matrices:** $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

a) **Hallar la matriz inversa de $A - B$**
b) **Hallar la matriz X tal que $X(A - B) = 2A - 3B$**

Problema B.2:

(3 puntos) **Sean las funciones $f(x) = x^4 - 4$ y $g(x) = 3x^2$**

a) **Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de ambas funciones, así como los extremos relativos y los puntos de inflexión si los hubiera.**
b) **Representa gráficamente ambas funciones sobre el mismo eje de coordenadas.**
c) **Calcula el área de la región delimitada por ambas curvas.**

Problema B.3:

(2 puntos) **En una determinada población, la probabilidad de ser mujer y padecer diabetes es el 6 %, mientras que la de ser hombre y no padecer diabetes es el 37 %. En dicha población hay un 54 % de mujeres.**

Se elige una persona al azar.

a) **¿Cuál es la probabilidad de que la persona elegida padezca diabetes?**
b) **Si la persona elegida es mujer, ¿cuál es la probabilidad de que no padezca diabetes?**
c) **Si la persona elegida resulta tener diabetes, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?**

Problema B.4:

(2 puntos) **La nota de Evaluación para el Acceso a la Universidad el alumnado que se ha preinscrito en la carrera A sigue una distribución normal de media 6.9 y desviación típica 0.6. Por otro lado, la nota de los/las alumnos/as que se han preinscrito en la carrera B sigue una distribución normal de media 7 y desviación típica 0.5.**

Si en ambos casos solo se puede admitir el 25 % del alumnado preinscrito, ¿cuál de las dos carreras requerirá una nota mínima más baja?

SOLUCIONES OPCIÓN A

Problema A.1:

Sea la región definida por las inecuaciones:

$$\boldsymbol{x+y-1\geq 0 \quad ; \quad 0\leq x\leq 4 \quad ; \quad 0\leq y\leq 2}$$

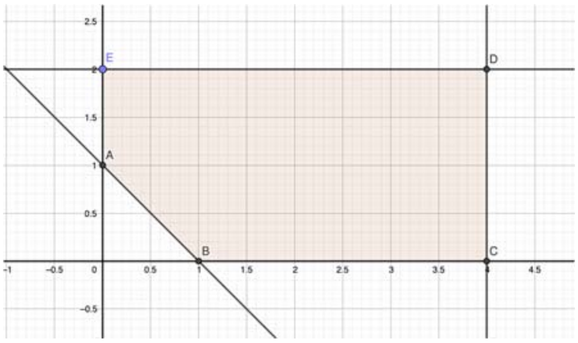
Determinar los puntos de dicha región en los que la función $F(x,y)=4x+2y$ alcanza sus valores máximos y mínimos. Calcular los valores de la función en dichos puntos.

Solución:

Tenemos esta información:

- Restricciones: $\begin{cases} x+y-1\geq 0 \\ 0\leq x\leq 4 \\ 0\leq y\leq 2 \end{cases}$

Representamos cada restricción en el plano cartesiano:



En este caso conseguir los puntos de corte de cada zona es muy sencillo mirando al dibujo. Es decir, los puntos (0, 1), (1, 0), (4, 0), (4, 2) y (0, 2).

Como la función objetivo es $F(x,y)=4x+2y$, solamente nos queda sustituir cada punto en dicha función y ver donde es máximo y donde mínimo. Para ello realizaremos una tabla:

Punto	$F(x,y)=4x+2y$
(0, 1)	2
(1, 0)	4
(4, 0)	16
(4, 2)	20
(0, 2)	4

El valor máximo se da en el punto (4, 0) y es de 20; y el mínimo en el punto (0, 1), siendo de 2

Problema A.2:

Sea la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$.

a) **Encontrar los valores de los parámetros, a, b y c para que la función pase por el punto (0, 0) y tenga un extremo relativo en el punto $(2, -4)$.**
b) **Determinar los máximos, mínimos y puntos de inflexión de la función.**
c) **Calcular el área de la región delimitada por el gráfico de la función y el eje de abscisas.**

Solución:

a) Necesitamos tres condiciones para encontrar los valores de los tres parámetros:

- Pasa por el punto (0, 0), es decir, $f(0) = 0 = c$
- En el punto $(2, -4)$ tiene un extremo relativo, es decir, $\begin{matrix} f(2) = -4 = 8 + 4a + 2b + c \\ f'(2) = 0 = 3(2)^2 + 2a(2) + b \end{matrix}$

Planteemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{matrix} 0 = c \\ -4 = 8 + 4a + 2b + c \\ 0 = 12 + 4a + b \end{matrix}$$

Para resolverlo despejamos el valor de b en la ultima ecuación y la introducimos en la segunda, teniendo en cuenta que $c = 0$:

$$-4 = 8 + 4a + 2(-12 - 4a) \Leftrightarrow -4 = 8 + 4a - 24 - 8a \Leftrightarrow -4a = 12 \Leftrightarrow a = -3$$

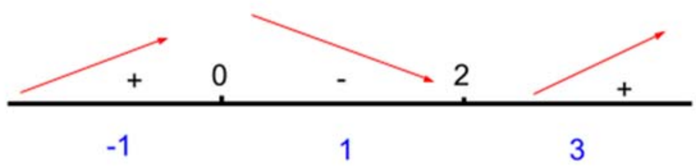
Por tanto, $a = -3$ y $b = 0$, teniendo la siguiente ecuación polinómica: $\boxed{f(x) = x^3 - 3x^2}$

b) Derivemos la función y la igualamos a 0: $f'(x) = 3x^2 - 6x \quad = 0 \Leftrightarrow 0 = 3x(x-2) \Rightarrow \begin{matrix} x = 0 \\ x = 2 \end{matrix}$

Representemos los valores en la recta real y veamos que pasa en cada intervalo:

Calcularemos lo que pasa en los puntos -1, 1 y 3 y así sabremos que ocurre en cada intervalo

- $f'(-1) = 3 + 6 > 0$, es creciente en $(-\infty, 0)$.
- $f'(1) = 3 - 6 < 0$, es decreciente en (0, 2).
- $f'(3) = 27 - 18 > 0$, es creciente en $(2, +\infty)$.



Por tanto, $x = 0$ es un máximo y $x = 2$ es un mínimo.

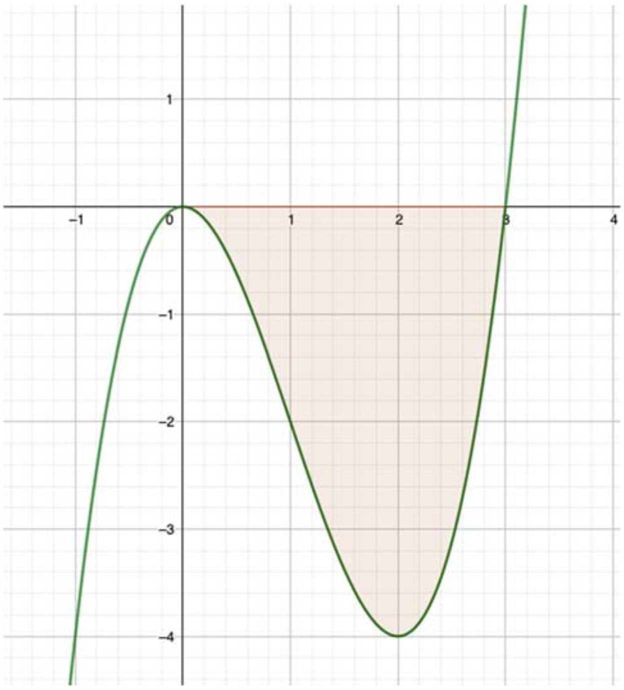
Comprobemos que es así, y además veamos si hay algún punto de inflexión. Para ello utilizaremos la segunda derivada de la función: $f''(x) = 6x \quad - 6 = 0 = 6(x - 1)$

En x = 1 hay un punto de inflexión, puesto que la tercera derivada de la función siempre vale 6 un numero no nulo.

Además en $x = 0$ $f''(0) = -6 < 0$ es decir se confirma que hay un máximo; y en $x = 2$ $f''(2) = 6 > 0$ se confirma que hay un mínimo.

Máximo (0, 0)
Mínimo (2, –4)
Punto de inflexión (1, –2)

c) Para calcular la región definida por la función y el eje de abscisas dibujaremos la grafica de la función:



El eje de abscisas queda por encima de la curva, por tanto, tenemos que calcular la siguiente integral definida:

$$\boxed{A =} \int_0^3 [0 - (x^3 - 3x^2)]dx = \left[-\frac{x^4}{4} + x^3 + K\right]_0^3 \boxed{= \frac{27}{4}u^2}$$

Autor: ALEX AGINAGALDE
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

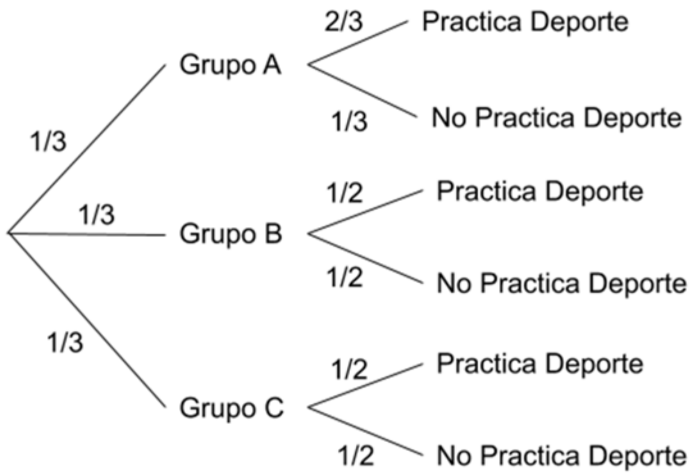
Problema A.3:

En un instituto hay tres grupos de 1º de bachillerato con el mismo número de estudiantes. En el grupo A dos tercios de los/las estudiantes practican algún tipo de deporte, mientras que en los grupos B y C solo lo hacen la mitad de los/las estudiantes.

Entre todo el alumnado se escoge una persona al azar, y resulta que no practica deporte. ¿Cuál es la probabilidad de que dicha persona pertenezca al grupo A?

Solución:

Construiremos un diagrama de árbol y posteriormente responderemos la pregunta utilizando el teorema de Bayes:



$$\boxed{P(Grupo\ A|No\ practica\ deporte) =} \frac{P(Grupo\ A \cap No\ practica\ deporte)}{P(Practica\ deporte)} = \frac{\frac{1}{3}\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\frac{1}{2}} =$$

$$\frac{1/9}{4/9}\boxed{=\frac{1}{4}}$$

Autor: ALEX AGINAGALDE
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema A.4:

Tras realizar una prueba de cultura general entre los habitantes de cierta población, se observa que las puntuaciones obtenidas siguen una distribución normal, de media 68 y desviación típica 18.

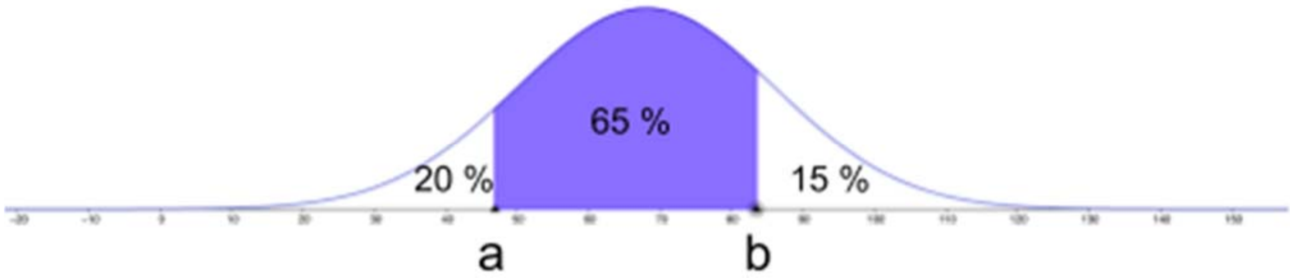
Se desea clasificar a los habitantes en tres grupos (de baja cultura general, de cultura general aceptable, de cultura general excelente), de manera que el primer grupo abarque un 20 % de la población, el segundo un 65 % y el tercero el 15 % restante.

¿Cuáles son las puntuaciones que marcan el paso de un grupo a otro?

Solución:

$X: N(\mu, \sigma) = N(68; 18)$ tras normalizar, $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ tenemos $Z: N(0,1)$

Dividiremos la curva normal en tres partes:



- $P(x \le a) = 0.2 \Leftrightarrow P\left(z \le \frac{a-68}{18}\right) = 0.2 \Leftrightarrow P\left(z \ge -\frac{a-68}{18}\right) = 0.2 \Leftrightarrow P\left(z \le -\frac{a-68}{18}\right) = 0.8 \Rightarrow$

$$\Rightarrow -\frac{a-68}{18} = 0.845 \Leftrightarrow a = 68 - 0.845 \cdot 18 = 52.79$$

- $P(x \ge b) = 0.15 \Leftrightarrow P\left(z \ge \frac{b-68}{18}\right) = 0.15 \Leftrightarrow P\left(z \le \frac{b-68}{18}\right) = 0.85 \Rightarrow \frac{b-68}{18} = 1.0364 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow b = 68 + 1.0364 \cdot 18 = 86.6552$$

En definitiva hemos obtenido tanto a = 52.79 como b = 86.66

Por tanto, las personas que hayan obtenido menos que 52.79 puntos se clasificarán en el primer conjunto (20 % de los encuestados), las personas que hayan obtenido una puntuación entre 52.79 y 86.66 se clasificarán en el segundo conjunto (65 % de los encuestados), y las personas que hayan obtenido una puntuación mayor que 86.66 se clasificarán en el tercer conjunto (15 % de los encuestados).

Autor: ALEX AGINAGALDE
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

SOLUCIONES OPCIÓN B

Problema B.1:

Sean A y B las siguientes matrices: $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

a) Hallar la matriz inversa de $A-B$

b) Hallar la matriz X tal que $X(A-B)=2A-3B$

Solución:

a) Calculemos $A-B=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ y $|A-B|=(2)-(1)=1$

$$\boxed{(\mathrm{A}-\mathrm{B})^{-1}=}\frac{1}{|\mathrm{A}-\mathrm{B}|}(\mathrm{Adj}\ \mathrm{A}-\mathrm{B})^{t}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}^{t}\boxed{=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}}$$

b) $X(A-B)=2A-3B \Leftrightarrow X=(2A-3B)(A-B)^{-1}$

$$\boxed{X=}(2A-3B)(A-B)^{-1}=\left(2\begin{pmatrix}3 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=\left(\begin{pmatrix}6 & -2\\ 0 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & -6\\ -3 & 3\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=$$

$$\boxed{=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 2 & -1\end{pmatrix}}$$

Autor: ALEX AGINAGALDE
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema B.2:

Sean las funciones $f(x) = x^4 - 4$ y $g(x) = 3x^2$

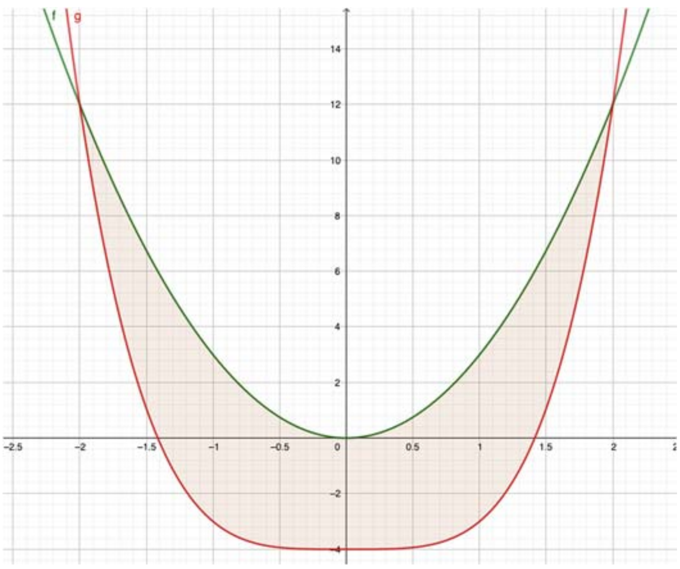
a) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de ambas funciones, así como los extremos relativos y los puntos de inflexión si los hubiera.
b) Representa gráficamente ambas funciones sobre el mismo eje de coordenadas.
c) Calcula el área de la región delimitada por ambas curvas.

Solución:

a) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de ambas funciones, así como los extremos relativos y los puntos de inflexión si los hubiera.

$f'(x) = 4x^3 = 0 \Longrightarrow x = 0$ El intervalo $\boxed{(-\infty, 0) \text{ es decreciente}}$ puesto que para cualquier valor de ese intervalo la derivada siempre será negativa. El intervalo $\boxed{(0, +\infty) \text{ es creciente}}$ puesto que para cualquier valor de ese intervalo la derivada siempre será positiva. $x = 0$ es un posible máximo o mínimo $f'(x) = 4x^3 \Rightarrow f'(0) = 0$ $f''(x) = 12x^2 \Rightarrow f''(0) = 0$ $f'''(x) = 24x \Rightarrow f'''(0) = 0$ $f'^{v}(x) = 24 \Rightarrow f'^{v}(0) = 24$ Por tanto, $\boxed{(0, -4) \text{ es un mínimo}}$, y no existe ningún punto de inflexión.	$g'(x) = 6x \quad = 0 \Longrightarrow x = 0$ El intervalo $\boxed{(-\infty, 0) \text{ es decreciente}}$ puesto que para cualquier valor de ese intervalo la derivada siempre será negativa. El intervalo $\boxed{(0, +\infty) \text{ es creciente}}$ puesto que para cualquier valor de ese intervalo la derivada siempre será positiva. $x = 0$ es un posible máximo o mínimo $g'(x) = 6x \Rightarrow g'(0) = 0$ $f''(x) = 6 \Rightarrow g''(0) = 6$ Por tanto, $\boxed{(0, 0) \text{ es un mínimo}}$, y no existe ningún punto de inflexión.

b) Representa gráficamente ambas funciones sobre el mismo eje de coordenadas.



Encontraremos los valores x donde las dos curvas se cortan, para ello resolveremos esta ecuación:

$$x^4 - 4 = 3x^2 \Longleftrightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = 0$$

Se trata de una ecuación bicuadrática, haremos el cambio de variable $t = x^2$

$$t^2 - 3t \quad - 4 = 0 \Longrightarrow \begin{array}{l} t = 4 \;\Longrightarrow\; x = \pm 2 \\ t = -1 \;\; \text{imposible} \end{array}$$

Por tanto las curvas se cortan en $x = 2$ y $x = -2$

c) Calcula el área de la región delimitada por ambas curvas.

Observando el dibujo vemos que la curva f esta por encima de la curva g en el intervalo $(-2,2)$. Además, vemos que el recinto es simétrico, por tanto podemos calcular el área para el intervalo $(0,2)$ y multiplicarlo por 2.

$$\boxed{A=}\int_{-2}^{2}(f-g)dx=2\int_{0}^{2}(f-g)dx=2\int_{0}^{2}(x^4-4-3x^2)dx=2\left[\frac{x^5}{5}-4x-x^3+K\right]_0^2\boxed{=\frac{96}{5}u^2}$$

Problema B.3:

En una determinada población, la probabilidad de ser mujer y padecer diabetes es el 6 %, mientras que la de ser hombre y no padecer diabetes es el 37 %. En dicha población hay un 54 % de mujeres.

Se elige una persona al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la persona elegida padezca diabetes?
b) Si la persona elegida es mujer, ¿cuál es la probabilidad de que no padezca diabetes?
c) Si la persona elegida resulta tener diabetes, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

Solución:

Construiremos una tabla de contingencia con toda la información que tenemos:

	Diabetes	No Diabetes	Total
Mujer	0.06	0.48	0.54
Hombre	0.09	0.37	0.46
Total	0.15	0.85	1

Los valores en verde los hemos completado nosotros.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la persona elegida padezca diabetes?

$$\boxed{P(Diabetes) = 0.15}$$

b) Si la persona elegida es mujer, ¿cuál es la probabilidad de que no padezca diabetes?

$$\boxed{P(No\ Diabetes|Mujer) =} \frac{P(No\ diabetes\ \cap\ Mujer)}{P(Mujer)} = \frac{0.48}{0.54} \boxed{= 0.89}$$

c) Si la persona elegida resulta tener diabetes, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

$$\boxed{P(Mujer|Diabetes) =} \frac{P(Diabetes\ \cap\ Mujer)}{P(Diabetes)} = \frac{0.06}{0.15} \boxed{= 0.4}$$

Problema B.4:

La nota de Evaluación para el Acceso a la Universidad el alumnado que se ha preinscrito en la carrera A sigue una distribución normal de media 6.9 y desviación típica 0.6. Por otro lado, la nota de los/las alumnos/as que se han preinscrito en la carrera B sigue una distribución normal de media 7 y desviación típica 0.5.

Si en ambos casos solo se puede admitir el 25 % del alumnado preinscrito, ¿cuál de las dos carreras requerirá una nota mínima más baja?

Solución:

Carrera A: $X: N(\mu, \sigma) = N(6.8; 0.6)$ tras normalizar, $z_1 = \frac{x-\mu}{\sigma}$ tenemos $Z_1: N(0,1)$

Carrera B: $X: N(\mu, \sigma) = N(7; 0.5)$ tras normalizar, $z_2 = \frac{x-\mu}{\sigma}$ tenemos $Z_2: N(0,1)$

Necesitamos calcular la nota de corte para que el 25 % del alumnado preinscrito acceda a la carrera, es decir, buscamos un valor a para la distribución X tal que $P(x > a) = 0.25$ y un valor b para la distribución Y tal que $P(y > b) = 0.25$

- Nota mínima para acceder a la carrera A:

$$P(x > a) = 0.25 \Leftrightarrow P(z_1 > \frac{a-6.8}{0.6}) = 0.25 \Leftrightarrow P(z_1 \leq \frac{a-6.8}{0.6}) = 0.75 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{a-6.8}{0.6} = 0.675 \Leftrightarrow a = 6.8 + 0.6 \cdot 0.675 = 7.205$$

- Nota mínima para acceder a la carrera B:

$$P(x > b) = 0.25 \Leftrightarrow P(z_2 > \frac{b-7}{0.5}) = 0.25 \Leftrightarrow P(z_2 \leq \frac{b-7}{0.5}) = 0.75 \Rightarrow \frac{b-7}{0.5} = 0.675 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow b = 67 + 0.5 \cdot 0.675 = 7.3375.$$

Por tanto, acceder a la carrera A requiere una nota más baja (7.205) frente a un 7.3375 de la carrera B