

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

EBAU 2019

Comunidad autónoma de

Murcia



LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Cristina Vidal Brazales

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo





EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
207 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES JUNIO 2019

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá elegir una opción A o B y responder a todas las cuestiones de esa opción. Nunca podrá mezclar cuestiones de la opción A con cuestiones de la opción B. En cada cuestión se indica su puntuación. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

OPCIÓN A

CUESTIÓN A1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

- Calcule A^{-1} . (1 punto)
- Calcule el valor del parámetro a para que $B + C = A^{-1}$. (1 punto)
- Calcule el valor del parámetro a para que $A + B + C = 3I$, donde I es la matriz identidad de orden 2. (1 punto)

CUESTIÓN A2. Una empresa, que vende un cierto artículo al precio unitario de 40 euros, tiene por función de coste, $C(x) = 2x^2 + 4x + 98$, donde x es el número de unidades producidas del artículo. Calcular el número de unidades que debe vender para que el beneficio de la empresa sea máximo. Obtener el beneficio (ingresos menos los costes) máximo obtenido. (2 puntos)

CUESTIÓN A3. Dada la función $f(x) = \begin{cases} x + a & \text{si } x < 1 \\ x^2 - 2 & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ x + b & \text{si } x > 3 \end{cases}$

- Determinar a y b para que la función sea continua en todo $\mathbf{R}$. (1 punto)
- Hallar $\int_1^3 f(x) dx$. (1 punto)

CUESTIÓN A4. En el coro universitario el 65% de sus componentes son mujeres. El 30% de las mujeres y el 25% de los hombres son bilingües. Si elegimos al azar a un componente del coro:

- ¿Cuál es la probabilidad que sea bilingüe? (0,75 puntos)
- Sabiendo que es bilingüe, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer? (0,75 puntos)

CUESTIÓN A5. El tiempo, en años, de renovación de un ordenador portátil se puede aproximar mediante una distribución normal con desviación típica de 0,9 años. Si tomamos al azar a 900 usuarios, se obtiene una media muestral de 3,5 años. Hallar el intervalo de confianza al 95% para el tiempo medio de renovación de un ordenador portátil. (1,5 puntos)

OPCIÓN B

CUESTIÓN B1. En un obrador se elaboran dos tipos de dulces distintos: A y B, siendo sus precios unitarios de 15 euros y 12 euros, respectivamente. Para elaborar un dulce del tipo A se necesitan $\frac{1}{2}$ kilo de azúcar y 8 huevos, mientras que para los del tipo B se requieren 1 kilo de azúcar y 6 huevos. En el obrador solo tienen 10 kilos de azúcar y 120 huevos. ¿Cuántos dulce deben elaborar de cada tipo para que el ingreso obtenido sea máximo? Razone la respuesta. (3 puntos).

CUESTIÓN B2.

- Sea la función $f(x) = ax^3 + bx$, calcular los valores de a y b para que la gráfica de la función pase por el punto (1,1) y que en este punto la pendiente de la recta tangente vale -3. (1 punto)
- Si en la función anterior $a=1$ y $b=-12$, determinar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus puntos extremos. (1 punto)

CUESTIÓN B3. Representar gráficamente el recinto del plano limitado por las rectas $y = 6 - 2x$ y la parábola $y = -x^2 + 2x + 3$. Calcular su área. (2 puntos)

CUESTIÓN B4. Dados dos sucesos A y B de un experimento aleatorio, se sabe que $P(A)=0,3$, $P(B)=0,2$ y $P(A/B)=0,5$. Calcular $P(A \cap B)$ y $P(A \cup B)$. (1,5 puntos)

CUESTIÓN B5. El tiempo en minutos de conexión a Internet de los estudiantes de un centro de secundaria, sigue una distribución normal con una desviación típica de 10 minutos. Para poder estimar la media del tiempo de conexión, se construye un intervalo de confianza con un error menor o igual a 5 minutos, con un nivel de confianza del 95%. Determine cuál es el tamaño mínimo de la muestra que es necesario observar. (1,5 puntos)



**EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
207 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES JUNIO 2019**

CRITERIOS DE VALORACIÓN

CRITERIOS GENERALES

Cada error de cálculo trivial se penalizará con 0,1 puntos y cada error de cálculo no trivial con 0,2 puntos.

Los errores ortográficos graves se tendrán en cuenta en la calificación total del ejercicio.

CRITERIOS ESPECÍFICOS (OPCIÓN A)

CUESTIÓN A1 (3 puntos)

- Resolución correcta de cada apartado: 1 punto.

CUESTIÓN A2 (2 puntos)

- Resolución correcta: 2 puntos.

CUESTIÓN A3 (2 puntos)

- Resolución correcta de cada apartado: 1 punto.

CUESTIÓN A4 (1,5 puntos)

- Resolución correcta de cada apartado: 0,75 puntos.

CUESTIÓN A5 (1,5 puntos)

- Dar la expresión general del intervalo: 0,75 puntos.
- Sustituir bien los valores: 0,75 puntos.

CRITERIOS ESPECÍFICOS (OPCIÓN B)

CUESTIÓN B1 (3 puntos)

- Resolución correcta: 3 puntos.

CUESTIÓN B2 (2 puntos)

- Resolución correcta de cada apartado: 1 punto.

CUESTIÓN B3 (2 puntos)

- Resolución correcta: 2 puntos.

CUESTIÓN B4 (1,5 puntos)

- Resolución correcta: 1,5 puntos.

CUESTIÓN B5 (1,5 puntos)

- Resolución correcta: 1,5 puntos.

EBAU2019



EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
207 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES JUNIO 2019

CORRESPONDENCIA CON EL PROGRAMA OFICIAL

OPCIÓN A

CUESTIÓN A1: NÚMEROS Y ÁLGEBRA. Cálculo matricial y sistema de ecuaciones.

CUESTIÓN A2: ANÁLISIS. Optimización de funciones.

CUESTIÓN A3: ANÁLISIS. Continuidad e Integrales.

CUESTIÓN A4: ESTADÍSTICA y PROBABILIDAD. Probabilidad de sucesos.

CUESTIÓN A5: ESTADÍSTICA y PROBABILIDAD. Intervalos de confianza.

OPCIÓN B

CUESTIÓN B1: NÚMEROS Y ÁLGEBRA. Programación Lineal.

CUESTIÓN B2: ANÁLISIS. Derivadas.

CUESTIÓN B3: ANÁLISIS. Representación gráfica e Integrales.

CUESTIÓN B4: ESTADÍSTICA y PROBABILIDAD. Probabilidades de sucesos.

CUESTIÓN B5: ESTADÍSTICA y PROBABILIDAD. Intervalos de confianza.

EBAU2019

SOLUCIONES OPCIÓN A

Cuestión A.1:

Sean las matrices: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

- Calcule A^{-1} .
- Calcule el valor del parámetro a para que $B + C = A^{-1}$.
- Calcule el valor del parámetro a para que $A + B + C = 3I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

Solución:

a) La inversa de la matriz A existe cuando el determinante de esta matriz sea distinto de 0.

Calculamos el determinante de la matriz A :

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1, \text{ distinto de cero, luego existe } A^{-1}$$

$$\text{Como } (A)^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}(A)^t, \quad (A)^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{Adj}(A)^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Y, por tanto, se tiene que la matriz inversa es:

$$(A)^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B + C = A^{-1}; \quad \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a-1 \\ a-1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix};$$

luego $a - 1 = -1$, por tanto, $a = 0$.

$$a = 0$$

$$A + B + C = 3I; \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & a \\ a & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}; \text{ de donde } a = 0.$$

$$a = 0$$

Cuestión A.2:

Una empresa, que vende un cierto artículo al precio unitario de 40 euros, tiene por función de coste, $C(x) = 2x^2 + 4x + 98$, donde x es el número de unidades producidas del artículo. Calcular el número de unidades que debe vender para que el beneficio de la empresa sea máximo. Obtener el beneficio (ingresos menos los costes) máximo obtenido.

Solución:

Los ingresos obtenidos son $I(x) = 40x$.

Los beneficios serán $B(x) = I(x) - C(x) = 40x - (2x^2 + 4x + 98) = -2x^2 + 36x - 98$

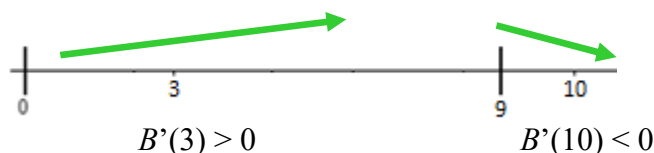
Vamos a estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función igualando su derivada a 0:

$$B'(x) = -4x + 36;$$

$$-4x + 36 = 0;$$

$$x = 9$$

Representamos este valor en la recta real y vemos qué ocurre con el crecimiento y decrecimiento de la función para los dos intervalos que surgen:



Por tanto, podemos afirmar que para $x = 9$ la función presenta un máximo relativo. Podemos verlo con el estudio de la segunda derivada de la función.

$$B''(x) = -4 < 0$$

Luego en $x = 9$ hay un máximo relativo.

Es decir, debe vender 9 unidades para que el beneficio sea máximo.

Sustituimos el valor 9 en la expresión de la función para obtener el beneficio máximo:

$$B(9) = -2 \cdot 9^2 + 36 \cdot 9 - 98 = 64$$

El beneficio máximo será de **64** euros.

Cuestión A.3:

Dada la función $f(x) = \begin{cases} x + a & \text{si } x < 1 \\ x^2 - 2 & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ x + b & \text{si } x > 3 \end{cases}$

a) Determinar a y b para que la función sea continua en todo $\mathbb{R}$.

b) Hallar $\int_1^3 f(x)dx$.

Solución:

Para $x < 1$, $1 < x < 3$ y $x > 3$, $f(x)$ es continua por ser funciones polinómicas, debemos hallar a y b para que sea continua en $x = 1$ y $x = 3$ respectivamente.

Continuidad en $x = 1$

$$f(1) = 1^2 - 2 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + a) = 1 + a \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 2) = -1 \end{cases}$$

Para que exista el límite, los límites laterales han de ser iguales, por tanto,

$$1 + a = -1, \text{ de donde } a = -2$$

Continuidad en $x = 3$

$$f(3) = 3^2 - 2 = 7$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x + b) = 3 + b \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x^2 - 2) = 7 \end{cases}$$

Para que exista el límite, los límites laterales han de ser iguales, por tanto,

$$3 + b = 7, \text{ de donde } b = 4$$

Los valores de a y b que hacen que la función sea continua en todo $\mathbb{R}$ son $a = -2$ y $b = 4$.

Entre 1 y 3 $f(x) = x^2 - 2$, luego

$$\int_1^3 f(x)dx = \int_1^3 (x^2 - 2)dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2x \right]_1^3 = \left(\frac{3^3}{3} - 2 \cdot 3 \right) - \left(\frac{1^3}{3} - 2 \cdot 1 \right) = \frac{14}{3}$$

$$\int_1^3 f(x)dx = \frac{14}{3}$$

Cuestión A.4:

En el coro universitario el 65% de sus componentes son mujeres. El 30% de las mujeres y el 25% de los hombres son bilingües. Si elegimos al azar a un componente del coro:

- ¿Cuál es la probabilidad de que sea bilingüe?
- Sabiendo que es bilingüe, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

Solución:

Nombramos los sucesos: M = Elegir mujer, H = Elegir hombre, B = Elegir bilingüe.

Los datos que nos dan son:

$$P(M) = 0.65, \quad P(H) = 0.35$$

$$P(M \cap B) = P(M) \cdot P(B/M) = 0.65 \cdot 0.30 = 0.195$$

$$P(H \cap B) = P(H) \cdot P(B/H) = 0.35 \cdot 0.25 = 0.0875$$

Hacemos la tabla de contingencia:

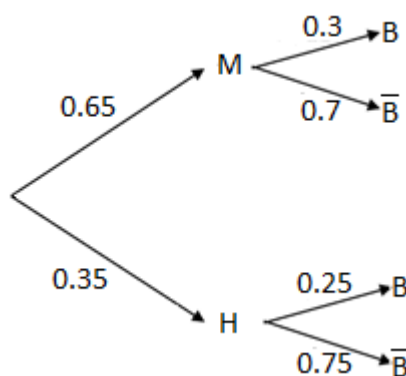
	Hombres (H)	Mujeres (M)	Total
Bilingües (B)	0.0875	0.195	0.2825
No bilingües	0.2625	0.455	0.7175
Total	0.35	0.65	1

- a) $P(B) = 0.2825$, es decir, un **28.25%** de probabilidad de que sea bilingüe

La probabilidad de que sea bilingüe es del **0.2825**.

- b) $P(M/B) = \frac{P(M \cap B)}{P(B)} = \frac{0.195}{0.2825} = \mathbf{0.69}$, es decir hay una probabilidad del **69%** de que sea mujer si es bilingüe.

Sabiendo que es bilingüe, la probabilidad de que sea mujer es del **0.69**.



Utilizando un diagrama de árbol:

- a) Mediante el teorema de la probabilidad total:

$$P(B) = P(M \cap B) + P(H \cap B) = P(M) \cdot P(B/M) + P(H) \cdot P(B/H) = 0.65 \cdot 0.30 + 0.35 \cdot 0.25 = 0.195 + 0.0875 = \mathbf{0.2825}.$$

Mediante el teorema de Bayes: $P(M/B) = \frac{P(M \cap B)}{P(B)} = \frac{P(M) \cdot P(B/M)}{P(B)} = \frac{0.195}{0.2825} = \mathbf{0.69}.$

Cuestión A.5:

El tiempo, en años, de renovación de un ordenador portátil se puede aproximar mediante una distribución normal con desviación típica de 0.9 años. Si tomamos al azar a 900 usuarios, se obtiene una media muestral de 3.5 años. Hallar el intervalo de confianza al 95% para el tiempo medio de renovación de un ordenador portátil.

Solución:

El intervalo de confianza para la media muestral viene dado por la expresión:

$$\left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

Considerando X = tiempo de renovación del portátil

En el ejercicio, $\bar{x} = 3.5$, $\sigma = 0.9$, $n = 900$, y $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$, sustituyendo, tenemos

$$\left(3.5 - 1.96 \cdot \frac{0.9}{\sqrt{900}}, 3.5 + 1.96 \cdot \frac{0.9}{\sqrt{900}} \right) = (3.441, 3.559)$$

Es decir, el tiempo medio de renovación de un portátil se encuentra entre **3.441** y **3.559** años con una confianza del 95%.

SOLUCIONES OPCIÓN B

Cuestión B.1:

En un obrador se elaboran dos tipos de dulces distintos: A y B , siendo sus precios unitarios de 15 euros y 12 euros, respectivamente. Para elaborar un dulce del tipo A se necesita $1/2$ kilo de azúcar y 8 huevos, mientras que para los del tipo B se requiere 1 kilo de azúcar y 6 huevos. En el obrador solo tienen 10 kilos de azúcar y 120 huevos. ¿cuántos dulces deben elaborar de cada tipo para que el ingreso obtenido sea máximo? Razone la respuesta. (3 puntos).

Solución:

Se trata de un problema de programación lineal con dos variables.

Completemos la tabla:

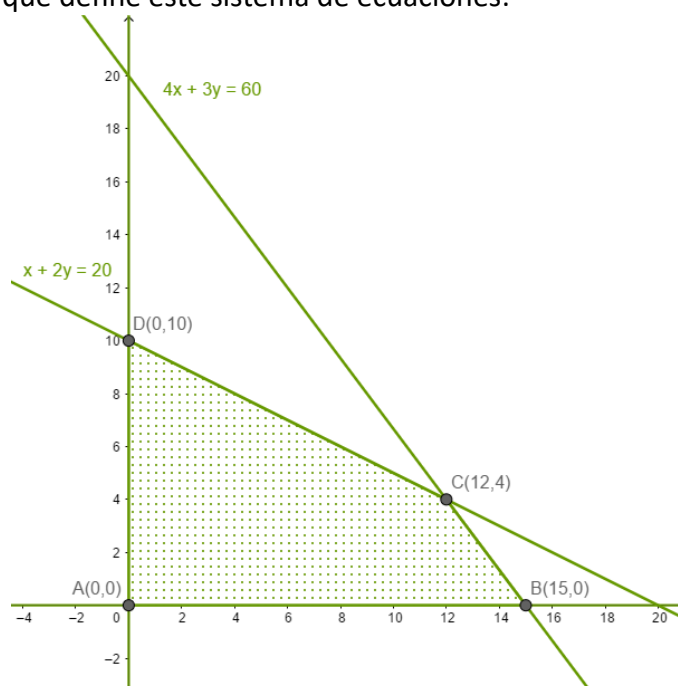
Tipo de dulce	Azúcar (kg)	Huevos	Precio (€)
A (x unidades)	$1/2$	8	15
B (y unidades)	1	6	12
¿De cuánto disponemos?	10	120	1

Si traducimos a ecuaciones dichas restricciones obtenemos este sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x \geq 0, & y \geq 0 \\ \frac{1}{2}x + y \leq 10 \\ 8x + 6y \leq 120 \end{cases} \quad \text{simplificando} \quad \begin{cases} x \geq 0, & y \geq 0 \\ x + 2y \leq 20 \\ 4x + 3y \leq 60 \end{cases}$$

Por otro lado, la **función objetivo** es la siguiente: $15x + 12y = I(x, y)$

Representamos la región que define este sistema de ecuaciones:



Para obtener los vértices resolvemos los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$A) \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow A(0, 0)$$

$$B) \begin{cases} 4x + 3y = 60 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow B(15, 0)$$

$$C) \begin{cases} x + 2y = 20 \\ 4x + 3y = 60 \end{cases} \rightarrow C(12, 4)$$

$$D) \begin{cases} x + 2y = 20 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow D(0, 10)$$

Los vértices de la región son: $A(0, 0)$, $B(15, 0)$, $C(12, 4)$ y $D(0, 10)$.

Calculemos para cada vértice el valor de los ingresos: $I(x, y) = 15x + 12y$

- $I(0, 0) = 15 \cdot 0 + 12 \cdot 0 = 0$
- $I(15, 0) = 15 \cdot 15 + 12 \cdot 0 = 225$
- $I(12, 4) = 15 \cdot 12 + 12 \cdot 4 = 228$
- $I(0, 10) = 15 \cdot 0 + 12 \cdot 10 = 120$

Por tanto, para obtener el máximo ingreso deberá elaborar:

12 dulces del tipo A y 4 dulces del tipo B.

Cuestión B.2:

- a) Sea la función $f(x) = ax^3 + bx$, calcular los valores de a y b para que la gráfica de la función pase por el punto $(1, 1)$ y que en este punto la pendiente de la recta tangente vale -3 .
- b) Si en la función anterior $a = 1$ y $b = -12$, determinar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus puntos extremos.

Solución:

- a) Como pasa por el punto $(1, 1)$, $f(1) = 1$, luego, $1 = a \cdot 1^3 + b \cdot 1 = a + b$.

Si la pendiente es -3 , $f'(1) = -3$, calculamos $f'(x) = 3ax^2 + b$, $f'(1) = 3 \cdot a \cdot 1^2 + b = -3$.

Tomando las dos ecuaciones $a + b = 1$

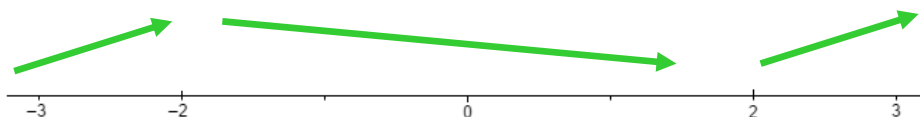
$3a + b = -3$ y resolviendo, tenemos, $a = -2$ y $b = 3$.

$$a = -2 \text{ y } b = 3$$

- b) Tenemos la función $f(x) = x^3 - 12x$, calculamos la función derivada:

$f'(x) = 3x^2 - 12$, igualamos a 0, $3x^2 - 12 = 0$, de donde, $x = -2$ y $x = 2$

Representamos en la recta real y estudiamos el signo de la derivada en los intervalos que resultan:



$$f'(-3) = 3(-3)^2 - 12 > 0$$

creciente en $(-\infty, -2)$

$$f'(0) = 3(0)^2 - 12 < 0$$

decreciente en $(-2, 2)$

$$f'(3) = 3(3)^2 - 12 > 0$$

creciente en $(2, \infty)$

Por tanto, en $x = -2$ hay un **máximo relativo**, $(-2, f(-2)) = (-2, 16)$

y un **mínimo relativo** en $x = 2$, $(2, f(2)) = (2, -16)$.

Cuestión B.3:

Representar gráficamente el recinto del plano limitado por:

la recta $y = 6 - 2x$ y la parábola $y = -x^2 + 2x + 3$. Calcular su área.

Solución:

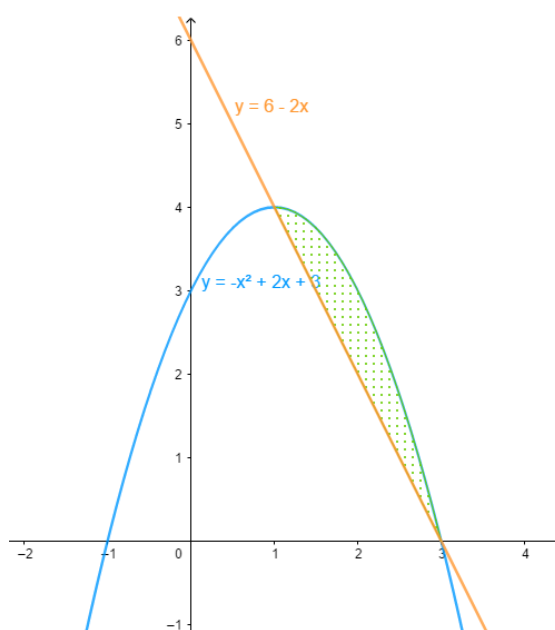
$y = 6 - 2x$: calculamos dos puntos, $x = 0, y = 6, (0, 6)$; $y = 0, x = 3, (3, 0)$.

$y = -x^2 + 2x + 3$: Vértice, $x = \frac{-2}{2(-1)} = 1, y = -1^2 + 2 \cdot 1 + 3 = 4, V(1, 4)$

Corte eje $Y, (0, 3)$

Cortes eje $X, -x^2 + 2x + 3 = 0, x = 1, x = 3, (1, 0)$ y $(3, 0)$.

Representamos las dos gráficas:



Hallamos los puntos de intersección de las gráficas: $-x^2 + 2x + 3 = 6 - 2x$, simplificando: $x^2 - 4x + 3 = 0$

Las soluciones son $x = 1$ y $x = 3$, por tanto, el área pedida es:

$$\int_1^3 (-x^2 + 4x - 3) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x \right]_1^3 = \left(-\frac{3^3}{3} + 2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 \right) - \left(-\frac{1^3}{3} + 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 \right) = \frac{4}{3}.$$

Por tanto, el área pedida es $\frac{4}{3} u^2$

Cuestión B.4:

Dados dos sucesos A y B de un experimento aleatorio, se sabe que $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.2$ y $P(A/B) = 0.5$. Calcular $P(A \cap B)$ y $P(A \cup B)$.

Solución:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{0.2} = 0.5, \text{ luego, } P(A \cap B) = 0.5 \cdot 0.2 = \mathbf{0.1}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.3 + 0.2 - 0.1 = \mathbf{0.4}.$$

$$\mathbf{P(A \cap B) = 0.1 \text{ y } P(A \cup B) = 0.4}$$

Cuestión B.5:

El tiempo en minutos de conexión a Internet de los estudiantes de un centro de secundaria, sigue una distribución normal con una desviación típica de 10 minutos. Para poder estimar la media del tiempo de conexión, se construye un intervalo de confianza con un error menor o igual a 5 minutos, con un nivel de confianza del 95%. Determine cuál es el tamaño mínimo de la muestra que es necesario observar.

Solución:

El error al calcular un intervalo de confianza viene dado por: $Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

En el ejercicio nos piden que el error sea menor o igual a 5, podemos igualar a la expresión y calcular n .

$$Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 5, \sigma = 10, Z_{\frac{\alpha}{2}} \text{ para un nivel de confianza del 95\% es } = 1.96.$$

$$\text{Sustituyendo, tenemos } 1.96 \cdot \frac{10}{\sqrt{n}} = 5, \text{ despejando } n \text{ obtenemos } n = 3.92^2 = 15.36.$$

Para asegurarnos el error menor o igual a 5 debemos tomar una muestra **16 estudiantes** o más.

El tamaño mínimo de la muestra debe ser de **16** estudiantes.



**EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
207 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES. SEPTIEMBRE 2019**

OBSERVACIONES IMPORTANTES: *El alumno deberá elegir una opción A o B y responder a todas las cuestiones de esa opción. Nunca podrá mezclar cuestiones de la opción A con cuestiones de la opción B. En cada cuestión se indica su puntuación. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.*

OPCIÓN A

CUESTIÓN A1. Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro a :

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y - z = 0 \\ ax - y - z = a - 1 \\ 3x - 2az = a - 1 \end{array} \right\} (2,5 \text{ puntos})$$

Resolverlo para $a=0$. (0,5 puntos).

CUESTIÓN A2. Determine el punto de la gráfica de la función $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 7x + 5$ en la que la pendiente de la recta tangente sea máxima. ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente en ese punto? (2 puntos)

CUESTIÓN A3. Representar gráficamente la región limitada por las funciones $f(x) = 9 - x^2$ y $g(x) = x^2 - 9$. Calcular su área. (2 puntos)

CUESTIÓN A4. En un taller mecánico el 70% de los coches que se reparan son del modelo A y el resto de un modelo B. Después de 6 meses, el 95% de los coches del modelo A no vuelven al taller mientras que del modelo B solo no vuelven el 80%. Si elegimos un coche al azar:

- ¿Cuál es la probabilidad de que vuelva al taller antes de 6 meses? (0,75 puntos)
- Si se observa que antes de los seis meses vuelve al taller, ¿cuál es la probabilidad de que sea del modelo B? (0,75 puntos)

CUESTIÓN A5. Se sabe que la estatura de los individuos de Murcia es una variable aleatoria que sigue una distribución normal con desviación típica de 6 cm. Se toma una muestra aleatoria de 225 individuos y da una media de 176 cm. Obtenga un intervalo de confianza, con un 99% de confianza, para la media de la estatura de la población. (1,5 puntos)

OPCIÓN B

CUESTIÓN B1. Un joven emprendedor quiere montar una empresa informática donde comercializará dos tipos de ordenadores. El tipo A dispondrá de 1 disco duro y 1 una unidad de memoria de pequeña capacidad, mientras que el tipo B tendrá 2 discos duros y su unidad de memoria será de alta capacidad. En total cuenta con 40 unidades de memoria de pequeña capacidad y 30 unidades de memoria de alta capacidad y 80 discos duros. Por cada ordenador del tipo A espera obtener un beneficio de 150 euros y del tipo B de 250 euros.

- ¿Cuál es la mejor decisión sobre el número de ordenadores a montar de cada tipo? (2,5 puntos)
- Con esta producción, ¿habría algún excedente en el material mencionado? (0,5 puntos)

CUESTIÓN B2. Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$. (0,75 puntos)

b) $f(x) = xe^{2x}$. (0,75 puntos)

CUESTIÓN B3. Dada la función $f(x) = 2e^{x+1}$,

- Hallar la ecuación de la recta tangente a la función en el punto $x = 1$. (1 punto)
- Calcular el área de la región del plano limitado por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 1$. (1 punto)

CUESTIÓN B4. En un hospital de la región de Murcia se está probando una nueva terapia para dejar de fumar. De los pacientes que entran en este ensayo el 45% prueba la terapia y el resto no. Después de un año el 70% de los que siguieron la terapia y el 40% de los que no la siguieron han dejado de fumar. Se elige al azar a un paciente fumador de este hospital:

- Calcule la probabilidad de que después de un año haya dejado de fumar. (0,75 puntos)
- Si transcurrido un año el paciente sigue fumando, calcule la probabilidad de que haya seguido la nueva terapia. (0,75 puntos)

CUESTIÓN B5. En un estudio realizado por una empresa se ha obtenido que el intervalo de confianza de una variable, a un nivel de confianza del 95%, es: (6,824 9,176). Hallar la media y el tamaño de la muestra para obtener dicho intervalo conociendo que la varianza de la distribución es de 9. Explique cada uno de los pasos realizados. (2 puntos)

SOLUCIONES OPCIÓN A

CONVOCATORIA
SEPTIEMBRE

Cuestión A.1:

Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro a :

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y - z = 0 \\ ax - y - z = a - 1 \\ 3x - 2az = a - 1 \end{array} \right\} \text{ Resolverlo para } a = 0.$$

Solución:

Consideramos las matrices: $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ a & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -2a \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ a & -1 & -1 & a-1 \\ 3 & 0 & -2a & a-1 \end{pmatrix}$.

Calculamos el determinante de C, $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ a & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -2a \end{vmatrix} = 4a - 3 - 3 + 2a^2 = 2a^2 + 4a - 6$.

Hallamos los valores de a para los que el determinante vale 0:

$2a^2 + 4a - 6 = 0$, $a^2 + 2a - 3 = 0$, obtenemos $a = -3$ y $a = 1$.

Caso 1. Si $a \notin \{-3, 1\}$, el sistema es Compatible Determinado pues el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero, luego su rango es 3, igual al de la matriz ampliada e igual al número de incógnitas.

Caso 2. Si $a = -3$, $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$, por tanto, $\text{rg}(C) = 2$.

Veamos el rango de la matriz A, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & -1 & -4 \\ 3 & 0 & 6 & -4 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -4 \\ 0 & 6 & -4 \end{vmatrix} = 4 + 24 + 4 = 32 \neq 0$, luego, $\text{rg}(A) = 3$, Sistema Incompatible

Caso 3. Si $a = 1$, $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$, por tanto $\text{rg}(C) = 2$

Veamos el rango de la matriz A, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ como la cuarta columna es de ceros, $\text{rg}(A) = \text{rg}(C) = 2 < 3 = \text{número de incógnitas}$, por tanto, el sistema es Compatible Indeterminado

Si $a \notin \{-3, 1\}$	$\text{rg}(A) = \text{rg}(C) = 3 = \text{número de incógnitas}$	Compatible Determinado
Si $a = -3$	$\text{rg}(C) = 2$, $\text{rg}(A) = 3$	Sistema Incompatible
Si $a = 1$,	$\text{rg}(A) = \text{rg}(C) = 2 < 3 = \text{número de incógnitas}$	Compatible Indeterminado

Resolvemos para $a = 0$, sustituimos en el sistema y nos queda:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y - z = 0 \\ -y - z = -1 \\ 3x = -1 \end{array} \right\} \text{ de donde } x = -1/3, \text{ sumando } 1^{\text{a}} \text{ y } 2^{\text{a}} \text{ ecuación, } -2/3 - 2z = -1, \text{ de donde } z = 1/6, \text{ de la } 2^{\text{a}} \text{ ecuación, } -y - 1/6 = -1, \text{ luego } y = 5/6.$$

La solución es: $x = -\frac{1}{3}$, $y = \frac{5}{6}$, $z = \frac{1}{6}$.

Cuestión A.2:

Determine el punto de la gráfica de la función $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 7x + 5$ en la que la pendiente de la recta tangente sea máxima. ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente en ese punto?

Solución:

La derivada de la función nos da la pendiente de la recta tangente en cada valor de x ,

$f'(x) = -3x^2 + 12x - 7$, como queremos hallar el máximo de esta función, derivamos de nuevo:

$f''(x) = -6x + 12$, igualamos a cero y resolvemos, $-6x + 12 = 0$, $x = 2$.

representamos en la recta real y estudiamos el signo:



$f''(0) = -6 \cdot 0 + 12 = 12 > 0$, creciente

$f''(3) = -6 \cdot 3 + 12 = -6 < 0$, decreciente, luego:

Para $x = 2$ la pendiente es máxima

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto $x = a$ es:

$y = f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$, $a = 2$, $f(2) = -2^3 + 6 \cdot 2^2 - 7 \cdot 2 + 5 = 7$, y $f'(2) = -3 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 - 7 = 5$, sustituyendo:

$$y = 7 + 5 \cdot (x - 2), y = 5x - 3.$$

Por tanto, la ecuación de la recta tangente es: $y = 5x - 3$

Cuestión A.3:

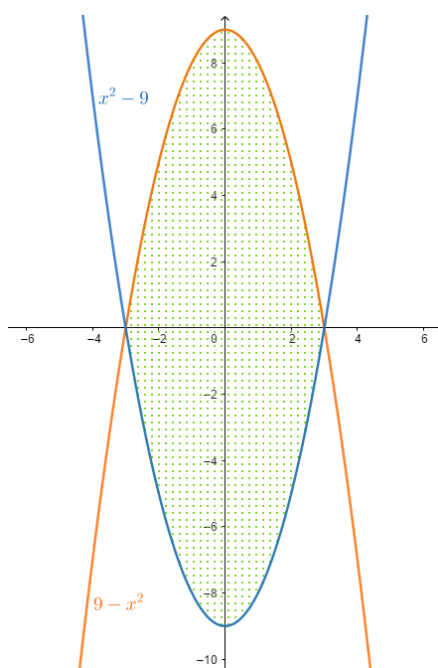
Representar gráficamente la región limitada por las funciones $f(x) = 9 - x^2$ y $g(x) = x^2 - 9$. Calcular su área.

Solución:

La gráfica de la función $f(x) = 9 - x^2$ es una parábola abierta hacia abajo con vértice en $(0, 9)$ y cortes con el eje X , $(-3, 0)$ y $(3, 0)$.

La gráfica de la función $g(x) = x^2 - 9$ es una parábola abierta hacia arriba con vértice en $(0, -9)$ y cortes con el eje X , $(-3, 0)$ y $(3, 0)$.

Por tanto, las gráficas de las funciones son:



El área pedida la calculamos con la integral definida:

$$\begin{aligned} \int_{-3}^3 [(9 - x^2) - (x^2 - 9)] dx &= \int_{-3}^3 (18 - 2x^2) dx = \left[-\frac{2x^3}{3} + 18x \right]_{-3}^3 = \\ &= \left(-\frac{2 \cdot 3^3}{3} + 18 \cdot 3 \right) - \left(-\frac{2 \cdot (-3)^3}{3} + 18 \cdot (-3) \right) = 72 \end{aligned}$$

El área pedida es de **72 u²**

Cuestión A.4:

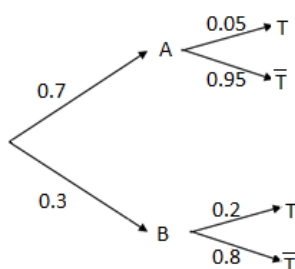
En un taller mecánico el 70% de los coches que se reparan son del modelo A y el resto de un modelo B . Después de 6 meses, el 95% de los coches del modelo A no vuelven al taller mientras que del modelo B solo no vuelven el 80%. Si elegimos un coche al azar:

- ¿Cuál es la probabilidad de que vuelva al taller antes de 6 meses?
- Si se observa que antes de los seis meses vuelve al taller, ¿cuál es la probabilidad de que sea del modelo B ?

Solución:

Sean los sucesos, A = elegir coche del modelo A , B = elegir coche del modelo B , T = volver al taller.

Hacemos el diagrama de árbol:



- Por el teorema de la probabilidad total:

$$P(T) = P(A \cap T) + P(B \cap T) = P(A) \cdot P(T/A) + P(B) \cdot P(T/B) = 0.7 \cdot 0.05 + 0.3 \cdot 0.2 = \mathbf{0.095}.$$

La probabilidad de que vuelva al taller antes de 6 meses es del **0.095**.

- Por el teorema de Bayes: $P(B/T) = \frac{P(B \cap T)}{P(T)} = \frac{P(B) \cdot P(T/B)}{P(T)} = \frac{0.3 \cdot 0.2}{0.095} = \mathbf{0.631}$

Si se observa que antes de los seis meses vuelve al taller, la probabilidad de que sea del modelo B , es del **0.631**.

Cuestión A.5:

Se sabe que la estatura de los individuos de Murcia es una variable aleatoria que sigue una distribución normal con desviación típica de 6cm. Se toma una muestra aleatoria de 225 individuos y da una media de 176 cm. Obtenga un intervalo de confianza, con un 99% de confianza, para la media de la estatura de la población.

Solución:

El intervalo de confianza para la media muestral viene dado por la expresión:

$$\left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

Considerando X = estatura de los individuos

En el ejercicio nos dicen que: $\bar{x} = 176$, $\sigma = 6$, $n = 225$, y $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.58$, sustituyendo, tenemos:

$$\left(176 - 2.58 \cdot \frac{6}{\sqrt{225}}, 176 + 2.58 \cdot \frac{6}{\sqrt{225}} \right) = (174.97, 177.03)$$

Es decir, la estatura media de la población se encuentra entre **174.97 cm** y **177.03 cm** con una confianza del 99%

SOLUCIONES OPCIÓN B

Cuestión B.1:

Un joven emprendedor quiere montar una empresa informática donde comercializará dos tipos de ordenadores. El tipo *A* dispondrá de un disco duro y una unidad de memoria de pequeña capacidad, mientras que el tipo *B* tendrá 2 discos duros y su unidad de memoria será de alta capacidad. En total cuenta con 40 unidades de memoria de pequeña capacidad, 30 unidades de memoria de alta capacidad y 80 discos duros. Por cada ordenador del tipo *A* espera obtener un beneficio de 150 euros y del tipo *B* de 250 euros.

- ¿Cuál es la mejor decisión sobre el número de ordenadores a montar de cada tipo?
- Con esta producción, ¿habría algún excedente en el material mencionado?

Solución:

- Se trata de un problema de programación lineal con dos variables.

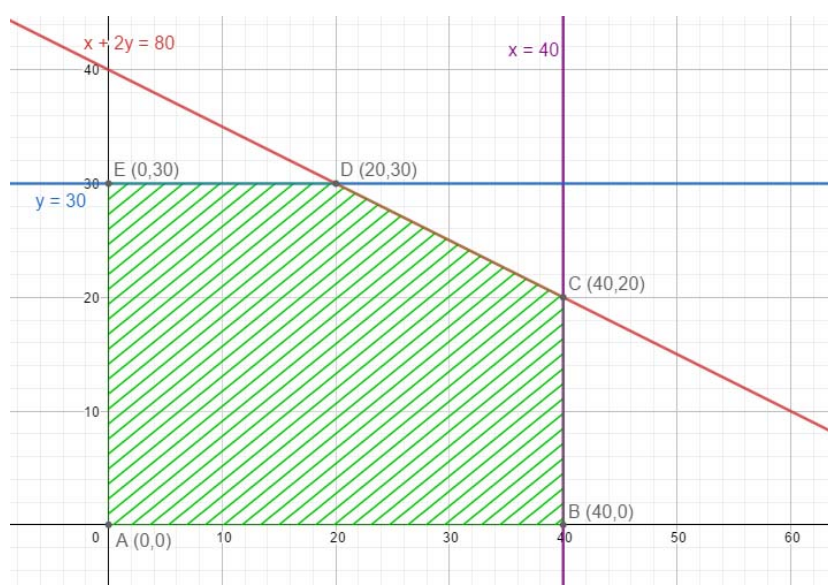
Completemos la tabla:

Tipo de ordenador	Memoria pequeña	Memoria alta	Disco duro	Beneficio (€)
<i>A</i> (<i>x</i> unidades)	1	0	1	150
<i>B</i> (<i>y</i> unidades)	0	1	2	250
¿De cuánto disponemos?	40	30	80	

Si traducimos a ecuaciones dichas **restricciones** obtenemos este sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ x \leq 40, y \leq 30 \\ x + 2y \leq 80 \end{cases}$$

Representamos la región que define este sistema de ecuaciones:



Para obtener los vértices resolvemos los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$A) \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow A(0, 0)$$

$$B) \begin{cases} x = 40 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow B(40, 0)$$

$$C) \begin{cases} x = 40 \\ x + 2y = 80 \end{cases} \rightarrow C(40, 20)$$

$$D) \begin{cases} x + 2y = 80 \\ y = 30 \end{cases} \rightarrow D(20, 30)$$

$$E) \begin{cases} x = 0 \\ y = 30 \end{cases} \rightarrow E(0, 30)$$

Los **vértices** de la región son: $A(0, 0)$, $B(40, 0)$, $C(40, 20)$, $D(20, 30)$ y $E(0, 30)$

Por otra parte, la **función objetivo** es la siguiente: $150x + 250y = B(x, y)$.

Calculemos para cada vértice el valor de los ingresos: $B(x, y) = 150x + 250y$:

- $B(0, 0) = 150 \cdot 0 + 250 \cdot 0 = 0$
- $B(40, 0) = 150 \cdot 40 + 250 \cdot 0 = 6000$
- $B(40, 20) = 150 \cdot 40 + 250 \cdot 20 = 11000$
- $B(20, 30) = 150 \cdot 20 + 250 \cdot 30 = 10500$
- $B(0, 30) = 150 \cdot 0 + 250 \cdot 30 = 7500$

Por tanto, la mejor decisión es fabricar **40** ordenadores del tipo A y **20** ordenadores del tipo B .

b) $X = 40$, $Y = 20$, Discos duros: $40 + 2 \cdot 20 = 80$, luego no hay excedente.

Memorias pequeña capacidad: $X = 40$, luego no hay excedente.

Memorias alta capacidad: $Y = 20$, luego hay un excedente de **10** memorias.

Hay un excedente de **10** memorias de alta capacidad.

Cuestión B.2:

Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2}.$$

$$f(x) = xe^{2x}.$$

Solución:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x \cdot \ln x}{(x^2)^2} = \frac{x - 2x \ln x}{x^4} = \frac{x \cdot (1 - 2 \ln x)}{x^4} = \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}.$$

$$f'(x) = 1 \cdot e^{2x} + x \cdot 2e^{2x} = e^{2x}(1 + 2x).$$

Cuestión B.3:

Dada la función $f(x) = 2e^{x+1}$

- Hallar la ecuación de la recta tangente a la función en el punto $x = 1$.
- Calcular el área de la región del plano limitada por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

Solución:

- La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en $x = a$, es:

$$y = f(a) + f'(a) \cdot (x - a),$$

en el problema, $a = 1$, $f(1) = 2e^{1+1} = 2e^2$,

$f'(x) = 2e^{x+1}$, $f'(1) = 2e^{1+1} = 2e^2$, sustituyendo, tenemos:

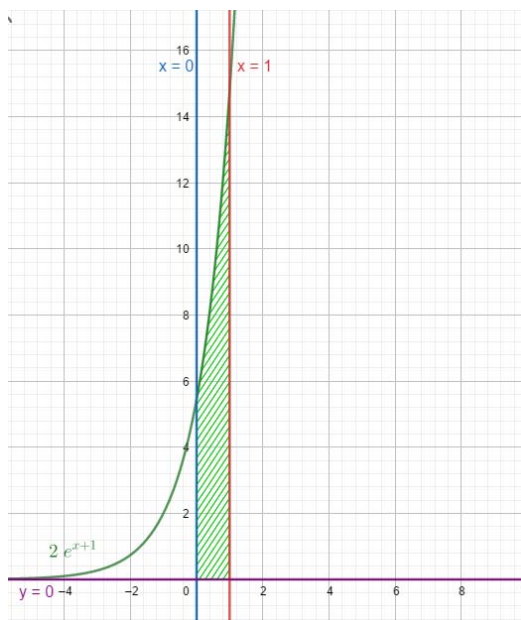
$$y = 2e^2 + 2e^2(x - 1) = 2e^2x, y = 2e^2x.$$

Recta tangente: $y = 2e^2x$.

La función exponencial no corta al eje de abscisas, por tanto, el área viene dada por la integral definida:

$$\int_0^1 2e^{x+1} dx = [2e^{x+1}]_0^1 = 2e^2 - 2e$$

Luego área = $(2e^2 - 2e) u^2$



Cuestión B.4:

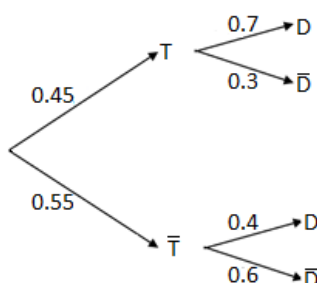
En un hospital de la región de Murcia se está probando una nueva terapia para dejar de fumar. De los pacientes que entran en este ensayo el 45% prueba la terapia y el resto no. Después de un año el 70% de los que siguieron la terapia y el 40% de los que no la siguieron han dejado de fumar. Se elige al azar un paciente fumador de este hospital.

- Calcule la probabilidad de que después de un año haya dejado de fumar.
- Si transcurrido un año el paciente sigue fumando, calcule la probabilidad de que haya seguido la nueva terapia.

Solución:

Sea T el suceso un paciente prueba la terapia y D un paciente deja de fumar,

Hacemos el diagrama de árbol:



- Por el teorema de la probabilidad total:

$$P(D) = P(T) \cdot P(D/T) + P(\bar{T}) \cdot P(D/\bar{T}) = 0.45 \cdot 0.70 + 0.55 \cdot 0.40 = 0.535.$$

La probabilidad de que un paciente fumador haya dejado de fumar es de $P(D) = 0.535$.

- Por el teorema de Bayes:

$$P(T/\bar{D}) = \frac{P(T) \cdot P(\bar{D}/T)}{P(\bar{D})},$$

como $P(D) = 0.535$, $P(\bar{D}) = 0.465$, luego

$$P(T/\bar{D}) = \frac{P(T) \cdot P(\bar{D}/T)}{P(\bar{D})} = \frac{0.45 \cdot 0.30}{0.465} = 0.293$$

La probabilidad de que un paciente que sigue fumando haya seguido la terapia es de $P(T/\bar{D}) = 0.293$.

Cuestión B.5:

En un estudio realizado por una empresa se ha obtenido que el intervalo de confianza de una variable, a un nivel de confianza del 95%, es: (6.824, 9.176). Hallar la media y el tamaño de la muestra para obtener dicho intervalo conociendo que la varianza de la distribución es de 9. Explique cada uno de los pasos realizados.

Solución:

El intervalo de confianza para la media muestral viene dado por la expresión:

$$\left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

Si sumamos los extremos obtenemos $2\bar{x} = 6.824 + 9.176$, de donde $\bar{x} = 8$

El valor de $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ para un nivel de confianza del 95% es 1.96.

Como $\bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 9.176$, tenemos que:

$$8 + 1.96 \frac{3}{\sqrt{n}} = 9.176, \text{ despejando:}$$

$$\sqrt{n} = 5, \text{ por tanto, } n = 25.$$

La media vale: $\bar{x} = 8$, y el tamaño de la muestra: $n = 25$.