

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II Selectividad 2019

Comunidad autónoma de La Rioja

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Cristina Vidal Brazales

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo



Textos Marea Verde



Prueba de Evaluación de Bachillerato para el
Acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2018 – 2019
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSS II

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. Es necesario justificar las respuestas.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

Tiempo: Una hora y media.

PROPUESTA A:

A1. Responde a cada una de las tres preguntas que se plantean a continuación.

A1.1.- Si $A = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & 2 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$

- (I) Calcula el determinante de A . (0.5 puntos)
- (II) ¿Para qué valores de a tiene inversa la matriz A . (0.5 puntos)
- (III) La matriz A es la matriz de un sistema homogéneo (los términos independientes son todos 0) de tres ecuaciones con tres incógnitas (x, y, z) . Resuélvelo en el caso en el que $a = 0$. (1 punto)

A1.2.- Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ x^2 + a & 1 \leq x < 2 \\ b(-x + 4) & 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

- (I) ¿Para qué valores de a y b es continua la función? (0.5 puntos)
- (II) Utilizando los valores $a = 0$ y $b = 2$, esboza una representación gráfica de la función $f(x)$. (1 punto)
- (III) Con los valores a y b del apartado (II), calcula el área limitada por el eje OX y la gráfica de la función. (0.5 puntos)

A1.3.— El 65 % de los empleados de una empresa manejan un nuevo programa informático, de ellos, un 40 % además hablan inglés. Por otra parte, la cuarta parte de los que no manejan el nuevo programa también hablan inglés. Se elige un empleado al azar.

- (I) Calcula la probabilidad de que hable inglés y maneje el nuevo programa. (0.5 puntos)
- (II) Calcula la probabilidad de que hable inglés. (0.5 puntos)
- (III) Si el empleado habla inglés, calcula la probabilidad de que maneje el nuevo programa. (1 punto)

A2. Responde a dos de las tres preguntas que se plantean a continuación.

A2.1.— Alba, Blanca y Naia deben repartirse una herencia. Alba debe recibir la media de lo que reciban Blanca y Naia más 3.000 euros; Blanca debe recibir la media de lo que reciban Alba y Naia, y Naia debe recibir la media de lo que reciban Alba y Blanca menos 3.000 euros.

- (I) ¿Cuánto dinero debe recibir Alba más que Blanca? (1 punto)
- (II) Si la herencia fuese de 99.000 euros, ¿Cuánto dinero debe recibir cada una? (1 punto)

A2.2.— El efecto (e) de un medicamento viene dado por la parte positiva de la función $e(t) = 100t(12-t)$, en la que t es el tiempo, expresado en meses, transcurrido desde que se toma el medicamento.

- (I) ¿Cuándo es máximo el efecto que produce el medicamento? (1 punto)
- (II) ¿En qué periodos aumenta y disminuye el efecto? (1 punto)

A2.3.— Una cadena de supermercados compra naranjas en contenedores cada uno de los cuales contiene 400 bolsas cuyo peso medio es 6 kg con una desviación típica de 550 gr.

- (I) Se toma al azar un contenedor, ¿cuál es la probabilidad de que la media de los pesos de las bolsas de ese contenedor sea menor que 5 kg y 950 gr? (1 punto)
- (II) Pedro no conoce el peso medio de las bolsas pero sabe que la desviación típica es 550 gr. Ha pesado todas las bolsas de un contenedor (400) y ha obtenido un peso medio de 6 kg y 30 gr. Con esos datos ha calculado para el peso medio de las bolsas un intervalo de confianza del 90 % ¿Cuál es el intervalo calculado por Pedro? (1 punto)



Prueba de Evaluación de Bachillerato para el
Acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2018 – 2019
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSS II

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. Es necesario justificar las respuestas.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

Tiempo: Una hora y media.

PROPUESTA B:

B1. Responde a cada una de las tres preguntas que se plantean a continuación.

B1.1.- Si $A = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & 2 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$

- (I) Calcula el determinante de A . (0.5 puntos)
- (II) ¿Para qué valores de a tiene inversa la matriz A . (0.5 puntos)
- (III) La matriz A es la matriz de un sistema homogéneo (los términos independientes son todos 0) de tres ecuaciones con tres incógnitas (x, y, z) . Resuélvelo en el caso en el que $a = 0$. (1 punto)

B1.2.- Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ x^2 + a & 1 \leq x < 2 \\ b(-x + 4) & 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

- (I) ¿Para qué valores de a y b es continua la función? (0.5 puntos)
- (II) Utilizando los valores $a = 0$ y $b = 2$, esboza una representación gráfica de la función $f(x)$. (1 punto)
- (III) Con los valores a y b del apartado (II), calcula el área limitada por el eje OX y la gráfica de la función. (0.5 puntos)

B1.3.— El 65 % de los empleados de una empresa manejan un nuevo programa informático, de ellos, un 40 % además hablan inglés. Por otra parte, la cuarta parte de los que no manejan el nuevo programa también hablan inglés. Se elige un empleado al azar.

- (I) Calcula la probabilidad de que hable inglés y maneje el nuevo programa. (0.5 puntos)
- (II) Calcula la probabilidad de que hable inglés. (0.5 puntos)
- (III) Si el empleado habla inglés, calcula la probabilidad de que maneje el nuevo programa. (1 punto)

B2. Responde a dos de las tres preguntas que se plantean a continuación.

B2.1.— Las restricciones de una problema de programación lineal son las siguientes:

$$x - y \geq 0; \quad y + 2x \leq 9; \quad 2y + x \geq 3; \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

- (I) Dibuja en el plano la región factible que represente estas restricciones. (1 punto)
- (II) Los ingresos de una empresa vienen dados por la función $f(x, y) = 2y - 2x + 7$ sujeta a las restricciones anteriores. ¿Para qué valores de x e y obtiene la empresa los máximos ingresos? (1 punto)

B2.2.— Se considera la función

$$f(x) = \frac{a(x+1)}{(x-1)^2}$$

- (I) Determina el valor de a para que la tangente en $x = 0$ sea paralela a la recta $y = x + 3$. (1 punto)
- (II) Para $a = 1$, determina las asíntotas de la función y esboza una representación gráfica para ella. (1 punto)

B2.3.— Un balón de baloncesto debe pesar entre 567 y 650 gr. Se han fabricado los balones con los que se jugará en China a finales de verano la Copa del Mundo. El peso de los balones fabricados sigue una distribución normal de desviación típica 25 gr. Se distribuyen en cajones de 100 unidades.

- (I) Si el peso medio de los balones fuese 605 gr, ¿cuál sería la probabilidad de que el peso medio de los balones de un cajón superase los 603 gr? (1 punto)
- (II) El peso medio de una muestra de 4 cajones (400 balones) es de 610 gr, determina un intervalo de confianza del 95 % para la media de la producción. (1 punto)

Tabla simplificada de la distribución normal tipificada

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817

CONVOCATORIA
ORDINARIA DE
JUNIO



Prueba de Evaluación de Bachillerato para el
Acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2018 – 2019
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICA-
DAS A LAS CCSS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

- (1) Se sugiere un tipo de corrección positivo, es decir, partiendo de cero y sumando puntos por los aciertos que el alumno vaya obteniendo.
- (2) Como excepción al apartado anterior, los errores muy graves, que muestren un desconocimiento profundo de propiedades y funciones básicas (errores repetidos en la manipulación de igualdades y desigualdades o en operaciones con fracciones, errores graves al desarrollar cuadrados o en la resolución de ecuaciones de segundo grado, etc.), penalizarán especialmente y pueden suponer un cero en el apartado en el que se hayan cometido.
- (3) Se deberá valorar la exposición lógica y la coherencia de las respuestas, tanto en cuestiones teóricas como prácticas. Algunos ejemplos:
 - (a) Si al resolver un sistema de ecuaciones, el alumno comete un error **numérico**, y el desarrollo posterior es coherente con dicho error, no se prestará especial atención siempre y cuando el problema no haya quedado reducido a uno trivial.
 - (b) En la representación gráfica de funciones, se valorará la coherencia del dibujo con los datos obtenidos previamente por el alumno. (Vale aquí la misma excepción que en el párrafo anterior.)
- (4) La puntuación máxima de cada pregunta figurará en su enunciado. En los casos en los que la pregunta contenga apartados, lo que aparecerá es el valor de cada uno de ellos.
- (5) Si un alumno da una respuesta acertada a un problema escribiendo solo los resultados, sin aportar el desarrollo que le ha permitido obtener dicha solución, la puntuación en este apartado no podrá ser superior al 50 % de la nota máxima prevista. Como excepción, se será flexible en las respuestas a cuestiones de estadística y probabilidad.

SOLUCIONES PROPUESTA A

Problema A.1:

A1. Responde a cada una de las tres preguntas que se plantean a continuación.

A1.1.- Si $A = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & 2 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$

- (I) Calcula el determinante de A . (0.5 puntos)
- (II) ¿Para qué valores de a tiene inversa la matriz A . (0.5 puntos)
- (III) La matriz A es la matriz de un sistema homogéneo (los términos independientes son todos 0) de tres ecuaciones con tres incógnitas (x, y, z) . Resuélvelo en el caso en el que $a = 0$. (1 punto)

Solución:

- i. Calculamos el determinante de la matriz A :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a+1 & 2 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = a - 2a + (a+1) - (2 - 1 + a^2(a+1)) = 1 - (1 + a^3 + a^2) = a^2(a+1)$$

$$|A| = a^2(a+1)$$

- ii. La matriz A tiene inversa si su determinante es distinto de cero, es decir, si $a \neq 0$ o si $a \neq -1$.

$$\text{Si } a \neq 0 \text{ o si } a \neq -1$$

- iii. Para el caso en que $a = 0$, el sistema homogéneo queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ y + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Como para $a = 0$, el determinante es distinto de cero, el sistema homogéneo tiene solución distinta de la trivial.

De la segunda ecuación obtenemos $z = -y$. De la tercera, $x = y$. Luego la solución es:

$$\begin{cases} x = y = \alpha \\ y = \alpha \\ z = -\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = -\alpha \end{cases}$$

A1.2.- Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ x^2 + a & 1 \leq x < 2 \\ b(-x + 4) & 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

- (I) ¿Para qué valores de a y b es continua la función? (0.5 puntos)
- (II) Utilizando los valores $a = 0$ y $b = 2$, esboza una representación gráfica de la función $f(x)$. (1 punto)
- (III) Con los valores a y b del apartado (II), calcula el área limitada por el eje OX y la gráfica de la función. (0.5 puntos)

Solución:

- i. La función está formada por funciones polinómicas y está definida a trozos. Su dominio es el intervalo cerrado: $[0, 4]$. Sólo puede dejar de ser continua en los puntos de unión de los trozos.

Para valores menores de $x = 1$ la función toma el valor 1. Para $x = 1$, $(1)^2 + a$. Para que sea continua en dicho punto debe ser, por tanto, $1 + a = 1$, luego debe ser $a = 0$.

Para valores próximos a 2 pero menores que 2, debe ser $(2)^2 + a = 4 + a$.

Y para el valor $x = 2$, $b(-2 + 4) = 2b$. Luego $4 + a = 2b$.

Como ya hemos obtenido que $a = 0$, entonces $4 = 2b$, $b = 2$.

Para $a = 0$ y $b = 2$, la función es continua en todo su dominio de definición.

- ii. En $[0, 1)$ es un segmento horizontal de $y = 1$, en $[1, 2)$ es un trozo de la parábola $y = x^2$, y en $[2, 4]$ es un segmento de la recta $y = -2x + 8$, de pendiente -2 , y ordenada en el origen 8.



- iii. El área pedida habrá que calcularla en los tres trozos en que está definida la función:

El primer trozo es un cuadrado de área 1. Toda la función está encima del eje de abscisas luego su área es positiva (no necesitamos escribir valores absolutos):

$$\begin{aligned} \text{Área} &= 1 + \int_1^2 x^2 dx + \int_2^4 (-2x + 8) dx = \\ &= 1 + \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^2 + \left[-\frac{2x^2}{2} + 8x \right]_2^4 = \\ &= 1 + \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3} \right) + ((-16 + 32) - (-4 + 16)) = 5 + \frac{7}{3} = \frac{22}{3} \end{aligned}$$

$$\text{Área} = \frac{22}{3} \text{ u}^2.$$

A1.3.— El 65 % de los empleados de una empresa manejan un nuevo programa informático, de ellos, un 40 % además hablan inglés. Por otra parte, la cuarta parte de los que no manejan el nuevo programa también hablan inglés. Se elige un empleado al azar.

- (I) Calcula la probabilidad de que hable inglés y maneje el nuevo programa. (0.5 puntos)
- (II) Calcula la probabilidad de que hable inglés. (0.5 puntos)
- (III) Si el empleado habla inglés, calcula la probabilidad de que maneje el nuevo programa. (1 punto)

Solución:

- i. Llamamos PI al suceso manejar el nuevo programa informático, I al suceso hablar inglés. Los datos que nos dan son: $P(PI) = 0.65$; $P(I/PI) = 0.4$. $P(I/\overline{PI}) = 0.25$

Nos piden $P(I \cap PI)$, que sabemos que es igual a $P(PI) \cdot P(I/PI)$

$$P(I \cap PI) = P(PI) \cdot P(I/PI) = 0.65 \cdot 0.4 = 0.26.$$

La probabilidad de que hable inglés y maneje el nuevo programa es **0.26**.

- ii. Para calcular la probabilidad de que hable inglés utilizamos el teorema de la probabilidad total. Debemos calcular $P(\overline{PI})$ para lo que usamos el teorema del suceso contrario: $P(\overline{PI}) = 1 - 0.65 = 0.35$.

$$\begin{aligned} P(I) &= P(PI \cap I) + P(\overline{PI} \cap I) = P(PI) \cdot P(I/PI) + P(\overline{PI}) \cdot P(I/\overline{PI}) = \\ &0.65 \cdot 0.4 + 0.35 \cdot 0.25 = 0.26 + 0.0875 = 0.3475. \end{aligned}$$

La probabilidad de que hable inglés es de **0.3475**.

- iii. Si sabemos que habla inglés y queremos calcular la probabilidad de que maneje el nuevo programa debemos calcular: $P(PI/I)$, para lo que usamos el teorema de Bayes:

$$P(PI/I) = \frac{P(PI \cap I)}{P(I)} = \frac{P(PI) \cdot P(I/PI)}{P(I)} = \frac{0.26}{0.3475} = 0.7482.$$

La probabilidad de que hable inglés sabiendo que maneja el nuevo programa es de **0.7482**.

Problema A.2:

A2. Responde a dos de las tres preguntas que se plantean a continuación.

A2.1.— Alba, Blanca y Naia deben repartirse una herencia. Alba debe recibir la media de lo que reciban Blanca y Naia más 3.000 euros; Blanca debe recibir la media de lo que reciban Alba y Naia, y Naia debe recibir la media de lo que reciban Alba y Blanca menos 3.000 euros.

(I) ¿Cuánto dinero debe recibir Alba más que Blanca? (1 punto)

(II) Si la herencia fuese de 99.000 euros, ¿Cuánto dinero debe recibir cada una? (1 punto)

Solución:

- i. Llamamos A al dinero que debe recibir Alba, B al que debe recibir Blanca, y N al que debe recibir Naia.

Nos dicen que $A = (B + N)/2 + 3\,000$; $B = (A + N)/2$; $N = (A + B)/2 - 3\,000$.

Planteamos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{cases} 2A = B + N + 6000 \\ B = (A + N)/2 \\ 2N = A + B - 6000 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2A - (A + N)/2 - N = 6000 \\ 2(A + N)/2 - A - N = 0 \\ 2N - A - (A + N)/2 = -6000 \end{cases}$$

Observamos que la segunda ecuación nos queda $0 = 0$, luego nos quedan sólo dos ecuaciones:

$$\begin{cases} 2A - (A + N)/2 - N = 6000 \\ 2N - A - (A + N)/2 = -6000 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4A - (A + N) - 2N = 12000 \\ 4N - 2A - (A + N) = -12000 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3A - 3N = 12000 \\ 3N - 3A = -12000 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} A - N = 4000 \\ N - A = -4000 \end{cases}$$

Las dos ecuaciones son la misma. Dejamos todo en función de un parámetro: N .

$$\begin{cases} A = 4000 + N \\ B = (A + N)/2 = (4000 + N + N)/2 = 2000 + N \\ N = N \end{cases}$$

Alba recibe **4 000** euros más que Naia, y Blanca **2 000** euros más que Naia.

- ii. Si la herencia fuese de 99 000 euros, sabemos que $A + B + N = 99\,000$. Entonces:

$$\begin{cases} A = 4\,000 + N \\ B = 2\,000 + N \\ A + B + N = 99\,000 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 4\,000 + N \\ B = 2\,000 + N \\ 4\,000 + N + 2\,000 + N = 99\,000 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 4\,000 + N \\ B = 2\,000 + N \\ 6\,000 + 3N = 99\,000 \end{cases}$$

De donde $N = (99\,000 - 6\,000)/3 = 93\,000/3 = 31\,000$, y por tanto:

$A = 4\,000 + 31\,000 = 35\,000$, y $B = 2\,000 + 31\,000 = 33\,000$.

Alba recibe **35 000** euros, Blanca recibe **33 000** euros y Naia recibe **31 000** euros.

A2.2.— El efecto (e) de un medicamento viene dado por la parte positiva de la función $e(t) = 100t(12-t)$, en la que t es el tiempo, expresado en meses, transcurrido desde que se toma el medicamento.

(I) ¿Cuándo es máximo el efecto que produce el medicamento? (1 punto)

(II) ¿En qué periodos aumenta y disminuye el efecto? (1 punto)

Solución:

- i. Para calcular cuando es máximo el efecto, calculamos la derivada de la función e igualamos a cero.

$$e(t) = 100t(12 - t) = 1200t - 100t^2 \rightarrow e'(t) = 1200 - 200t = 0 \rightarrow t = 1200/200 = 6.$$

Calculamos la derivada segunda:

$$e''(t) = -200 < 0$$

Luego la función alcanza un máximo relativo para $t = 6$, $e(6) = 3\,600$.

El efecto es máximo a los **6** meses.

- ii. Estudiamos el crecimiento y decrecimiento de la función con el signo de la derivada primera:

$$e'(t) = 1200 - 200t \rightarrow t < 6 \text{ entonces } e'(t) > 0, \text{ y la función es creciente.}$$

$$e'(t) = 1200 - 200t \rightarrow t > 6 \text{ entonces } e'(t) < 0, \text{ y la función es decreciente.}$$

El efecto aumenta antes de los 6 meses y disminuye después de los 6 meses.

A2.3.— Una cadena de supermercados compra naranjas en contenedores cada uno de los cuales contiene 400 bolsas cuyo peso medio es 6 kg con una desviación típica de 550 gr.

- (I) Se toma al azar un contenedor, ¿cuál es la probabilidad de que la media de los pesos de las bolsas de ese contenedor sea menor que 5 kg y 950 gr? (1 punto)
- (II) Pedro no conoce el peso medio de las bolsas pero sabe que la desviación típica es 550 gr. Ha pesado todas las bolsas de un contenedor (400) y ha obtenido un peso medio de 6 kg y 30 gr. Con esos datos ha calculado para el peso medio de las bolsas un intervalo de confianza del 90 % ¿Cuál es el intervalo calculado por Pedro? (1 punto)

Solución:

- i. Llamamos X al peso de una bolsa de naranjas. Nos dicen que la media vale 6 kg y la desviación típica $550 \text{ g} = 0.55 \text{ kg}$. Suponemos que X se ajusta a una distribución normal: $N(6, 0.55)$.

El enunciado nos dice que $n = 400$. La distribución de las medias es:

$$\bar{X} = N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(6, \frac{0.55}{\sqrt{400}}\right) = N\left(6, \frac{0.55}{20}\right) = N(6, 0.0275)$$

Nos piden calcular: $P(\bar{X} < 5.95)$.

Tipificamos:

$$P(\bar{Z} < \frac{5.95 - 6}{0.0275}) = P(\bar{Z} < -1.818181) = 1 - P(\bar{Z} < 1.818181) = 1 - 0.9656 = 0.0344.$$

La probabilidad de que la media de los pesos de 400 bolsas sea menor que 5.95 es muy pequeña. Es de **0.0344**.

- ii. Ahora no se conoce la media poblacional, pero se ha calculado la media muestral, 6.03 kg. El intervalo de confianza al 90 % es de:

El intervalo de confianza para la media muestral viene dado por la expresión:

$$\left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

En el enunciado, $\bar{x} = 6.03$, $\sigma = 0.55$, $n = 400$. Calculamos $Z_{\frac{\alpha}{2}}$.

$$1 - \alpha = 0.9 \rightarrow \alpha = 0.1 \rightarrow \alpha/2 = 0.05 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.95 \rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{1.64 + 1.65}{2} = 1.645.$$

$$\begin{aligned} \left(6.03 - 1.645 \cdot \frac{0.55}{\sqrt{400}}, 6.03 + 1.645 \cdot \frac{0.55}{\sqrt{400}} \right) &= (6.03 - 1.645 \cdot 0.0275, 6.03 + 1.645 \cdot 0.0275) \\ &= (6.03 - 0.045, 6.03 + 0.045) = (5.9847, 6.0752) \end{aligned}$$

El intervalo calculado es de: **(5.985, 6.075)**.

SOLUCIONES PROPUESTA B

CONVOCATORIA
ORDINARIA DE
JUNIO

Problema B.1:

B1. Responde a cada una de las tres preguntas que se plantean a continuación.

B1.1.- Si $A = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & 2 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$

- (I) Calcula el determinante de A . (0.5 puntos)
- (II) ¿Para qué valores de a tiene inversa la matriz A . (0.5 puntos)
- (III) La matriz A es la matriz de un sistema homogéneo (los términos independientes son todos 0) de tres ecuaciones con tres incógnitas (x, y, z) . Resuélvelo en el caso en el que $a = 0$. (1 punto)

Solución: Igual en A.1.

- i. Calculamos el determinante de la matriz A :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a+1 & 2 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = a - 2a + (a+1) - (2 - 1 + a^2(a+1)) = 1 - (1 + a^3 + a^2) = a^2(a+1)$$

$$|A| = a^2(a+1)$$

- ii. La matriz A tiene inversa si su determinante es distinto de cero, es decir, si $a \neq 0$ o si $a \neq -1$.

La matriz tiene inversa si $a \neq 0$ o si $a \neq -1$

- iii. Para el caso en que $a = 0$, el sistema homogéneo queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ y + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Como para $a = 0$, el determinante es distinto de cero, el sistema homogéneo tiene solución distinta de la trivial.

De la segunda ecuación obtenemos $z = -y$. De la tercera, $x = y$. Luego la solución es:

$$\begin{cases} x = y = \alpha \\ y = \alpha \\ z = -\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = -\alpha \end{cases}$$

B1.2.— Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ x^2 + a & 1 \leq x < 2 \\ b(-x + 4) & 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

- (I) ¿Para qué valores de a y b es continua la función? (0.5 puntos)
- (II) Utilizando los valores $a = 0$ y $b = 2$, esboza una representación gráfica de la función $f(x)$. (1 punto)
- (III) Con los valores a y b del apartado (II), calcula el área limitada por el eje OX y la gráfica de la función. (0.5 puntos)

Solución: Igual en A.2.

- i. La función está formada por funciones polinómicas y está definida a trozos. Su dominio es el intervalo cerrado: $[0, 4]$. Sólo puede dejar de ser continua en los puntos de unión de los trozos.

Para valores menores de $x = 1$ la función toma el valor 1. Para $x = 1$, $(1)^2 + a$. Para que sea continua en dicho punto debe ser, por tanto, $1 + a = 1$, luego debe ser $a = 0$.

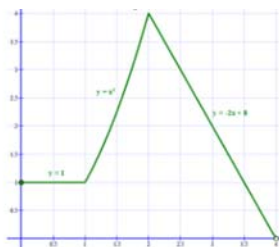
Para valores próximos a 2 pero menores que 2, debe ser $(2)^2 + a = 4 + a$.

Y para el valor $x = 2$, $b(-2 + 4) = 2b$. Luego $4 + a = 2b$.

Como ya hemos obtenido que $a = 0$, entonces $4 = 2b$, $b = 2$.

Para $a = 0$ y $b = 2$, la función es continua en todo su dominio de definición.

- ii. En $[0, 1)$ es un segmento horizontal de $y = 1$, en $[1, 2)$ es un trozo de la parábola $y = x^2$, y en $[2, 4]$ es un segmento de la recta $y = -2x + 8$, de pendiente -2 , y ordenada en el origen 8.



- iii. El área pedida habrá que calcularla en los tres trozos en que está definida la función:

El primer trozo es un cuadrado de área 1. Toda la función está encima del eje de abscisas luego su área es positiva (no necesitamos escribir valores absolutos):

$$\begin{aligned} \text{Área} &= 1 + \int_1^2 x^2 dx + \int_2^4 (-2x + 8) dx = \\ &= 1 + \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^2 + \left[-\frac{2x^2}{2} + 8x \right]_2^4 = \\ &= 1 + \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3} \right) + ((-16 + 32) - (-4 + 16)) = 5 + \frac{7}{3} = \frac{22}{3} \end{aligned}$$

$$\text{Área} = \frac{22}{3} \text{ u}^2.$$

B1.3.— El 65 % de los empleados de una empresa manejan un nuevo programa informático, de ellos, un 40 % además hablan inglés. Por otra parte, la cuarta parte de los que no manejan el nuevo programa también hablan inglés. Se elige un empleado al azar.

- (I) Calcula la probabilidad de que hable inglés y maneje el nuevo programa. (0.5 puntos)
- (II) Calcula la probabilidad de que hable inglés. (0.5 puntos)
- (III) Si el empleado habla inglés, calcula la probabilidad de que maneje el nuevo programa. (1 punto)

Solución: Igual a A.3.

Solución:

- i. Llamamos PI al suceso manejar el nuevo programa informático, I al suceso hablar inglés. Los datos que nos dan son: $P(PI) = 0.65$; $P(I/PI) = 0.4$. $P(I/\overline{PI}) = 0.25$

Nos piden $P(I \cap PI)$, que sabemos que es igual a $P(PI) \cdot P(I/PI)$

$$P(I \cap PI) = P(PI) \cdot P(I/PI) = 0.65 \cdot 0.4 = 0.26.$$

La probabilidad de que hable inglés y maneje el nuevo programa es **0.26**.

- ii. Para calcular la probabilidad de que hable inglés utilizamos el teorema de la probabilidad total. Debemos calcular $P(\overline{PI})$ para lo que usamos el teorema del suceso contrario:

$$P(\overline{PI}) = 1 - 0.65 = 0.35.$$

$$P(I) = P(PI \cap I) + P(\overline{PI} \cap I) = P(PI) \cdot P(I/PI) + P(\overline{PI}) \cdot P(I/\overline{PI}) = \\ 0.65 \cdot 0.4 + 0.35 \cdot 0.25 = 0.26 + 0.0875 = 0.3475.$$

La probabilidad de que hable inglés es de **0.3475**.

- iii. Si sabemos que habla inglés y queremos calcular la probabilidad de que maneje el nuevo programa debemos calcular: $P(PI/I)$, para lo que usamos el teorema de Bayes:

$$P(PI/I) = \frac{P(PI \cap I)}{P(I)} = \frac{P(PI) \cdot P(I/PI)}{P(I)} = \frac{0.26}{0.3475} = 0.7482.$$

La probabilidad de que hable inglés sabiendo que maneja el nuevo programa es de **0.7482**.

Problema B.2:

B2. Responde a dos de las tres preguntas que se plantean a continuación.

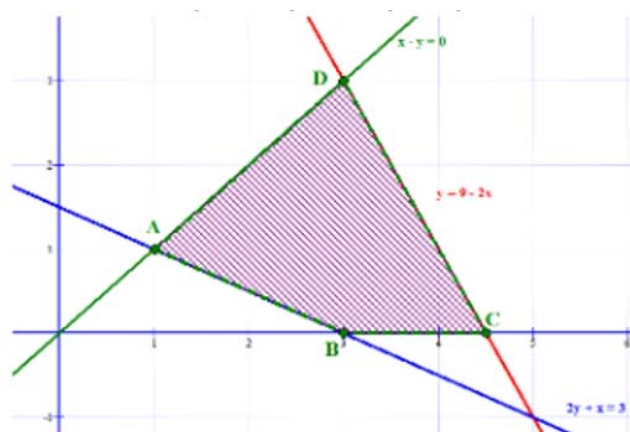
B2.1.— Las restricciones de una problema de programación lineal son las siguientes:

$$x - y \geq 0; \quad y + 2x \leq 9; \quad 2y + x \geq 3; \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

- (I) Dibuja en el plano la región factible que represente estas restricciones. (1 punto)
- (II) Los ingresos de una empresa vienen dados por la función $f(x, y) = 2y - 2x + 7$ sujeta a las restricciones anteriores. ¿Para qué valores de x e y obtiene la empresa los máximos ingresos? (1 punto)

Solución:

- i. Las ecuaciones de las rectas son: $y = x$; $y + 2x = 9$; $2y + x = 3$; $x = 0$; $y = 0$. Calculamos los puntos de intersección: $A(1, 1)$; $B(3, 0)$; $C(9/2, 0)$; $D(3, 3)$; $(0, 9)$; $(0, 3/2)$; $(0, 0)$; $(5, -1)$. Analizamos que puntos cumplen las restricciones y dibujamos la región factible:



- ii. Ingresos de la empresa: $f(x, y) = 2y - 2x + 7$. Calculamos los ingresos para los vértices de la región factible:

$$A(1, 1) \rightarrow f(1, 1) = 2(1) - 2(1) + 7 = 7$$

$$B(3, 0) \rightarrow f(3, 0) = 2(0) - 2(3) + 7 = 1$$

$$C(9/2, 0) \rightarrow f(9/2, 0) = 2(0) - 2(9/2) + 7 = -2$$

$$D(3, 3) \rightarrow f(3, 3) = 2(3) - 2(3) + 7 = 7$$

Obtenemos que los ingresos son máximos en los puntos $A(1, 1)$ y $D(3, 3)$, lo que significa que lo son para cualquier punto del segmento AD , es decir: (x, x) ; $1 \leq x \leq 3$.

Los ingresos son máximos en $A(1, 1)$, $D(3, 3)$ y en $\{(x, x); 1 \leq x \leq 3\}$.

B2.2.– Se considera la función

$$f(x) = \frac{a(x+1)}{(x-1)^2}$$

- (I) Determina el valor de a para que la tangente en $x = 0$ sea paralela a la recta $y = x + 3$. (1 punto)
- (II) Para $a = 1$, determina las asíntotas de la función y esboza una representación gráfica para ella. (1 punto)

Solución:

- i. Para que la tangente sea paralela a $y = x + 3$ en $x = 0$, debe ser la derivada primera en ese punto igual a 1.

$$f(x) = \frac{a(x+1)}{(x-1)^2} \rightarrow f'(x) = \frac{a(x-1)^2 - a(x+1)2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{a(x-1) - 2a(x+1)}{(x-1)^3} = \frac{-ax - 3a}{(x-1)^3} \rightarrow f'(0) = 1 = \frac{-3a}{-1} = 3a.$$

Luego a debe valer $1/3$.

Para $a = 1/3$ la tangente en $x = 0$ es paralela a $y = x + 3$.

- ii. Para $a = 1$, la función es: $f(x) = \frac{x+1}{(x-1)^2}$.

La función no está definida en $x = 1$, pero es continua en el resto de los puntos.

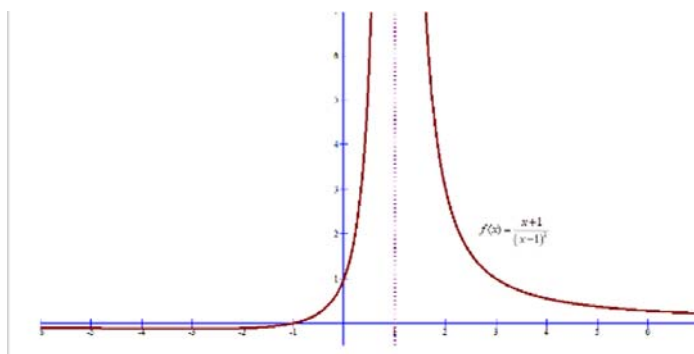
Puntos de corte con los ejes: Para $x = 0$, $f(0) = 1$; $(0, 1)$. Para $y = 0$, $x = -1$, $(-1, 0)$.

Asíntotas y comportamiento en el infinito: Tiene una asíntota vertical (doble) para $x = 1$.

Cuando x tiende a infinito, la y tiende a 0, luego tiene una asíntota horizontal, $y = 0$.

Llevamos esta información a unos ejes coordenados y tenemos conocimiento suficiente para un primer esbozo de la gráfica.

Asíntota vertical: $x = 1$; asíntota horizontal: $y = 0$.



Como ya hemos calculado la primera derivada, aunque no es necesario, podemos hacer uso de ella:

$$f'(x) = \frac{-x - 3}{(x-1)^3}$$

En $x = -3$, $(-3, -2/16) = (-3, -1/8)$, tenemos un posible máximo o mínimo. Para $x > 1$, la derivada es negativa luego la función es decreciente, y lo mismo para $x < -3$. Entre -3 y 1 la función es creciente.

B2.3.— Un balón de baloncesto debe pesar entre 567 y 650 gr. Se han fabricado los balones con los que se jugará en China a finales de verano la Copa del Mundo. El peso de los balones fabricados sigue una distribución normal de desviación típica 25 gr. Se distribuyen en cajones de 100 unidades.

- (i) Si el peso medio de los balones fuese 605 gr, ¿cuál sería la probabilidad de que el peso medio de los balones de un cajón superase los 603 gr? (1 punto)
- (ii) El peso medio de una muestra de 4 cajones (400 balones) es de 610 gr, determina un intervalo de confianza del 95 % para la media de la producción. (1 punto)

Solución:

- i. Nos dice el enunciado que el peso de los balones sigue una distribución normal. Si $\mu = 605$, $\sigma = 25$, $n = 100$.

La distribución de las medias es:

$$\bar{X} = N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(605, \frac{25}{\sqrt{100}}\right) = N\left(605, \frac{25}{10}\right) = N(605, 2.5)$$

Nos piden calcular: $P(\bar{X} > 603)$.

Tipificamos:

$$P\left(\bar{Z} > \frac{603 - 605}{2.5}\right) = P(\bar{Z} > -0.8) = P(\bar{Z} < 0.8) = 0.7881.$$

La probabilidad de que el peso medio supere los 603 gr es de **0.79**.

- ii. Ahora $n = 400$, $\bar{x} = 610$, no se conoce la media poblacional. El intervalo de confianza al 95 %.

El intervalo de confianza para la media muestral viene dado por la expresión:

$$\left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

En el enunciado, $\bar{x} = 610$, $\sigma = 25$, $n = 400$. Calculamos $Z_{\frac{\alpha}{2}}$.

$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96.$$

$$\left(610 - 1.96 \cdot \frac{25}{\sqrt{400}}, 610 + 1.96 \cdot \frac{25}{\sqrt{400}}\right) = (610 - 2.45, 610 + 2.45) = (607.55, 612.45).$$

El intervalo de confianza es de **(607.55, 612.45)**



Prueba de Evaluación de Bachillerato para el
Acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2018 – 2019
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSS II

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. **Es necesario justificar las respuestas.**

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

Tiempo: Una hora y media.

PROPUESTA A:

A1. Responde a cada una de las tres preguntas que se plantean a continuación.

A1.1.– Alba, Blanca y Naia son las delanteras titulares de un equipo de fútbol. Entre las tres, en la temporada recién finalizada, han marcado 65 goles. Sabemos que Alba ha marcado 50 % más goles que Blanca, y que Naia ha marcado la mitad de goles que Alba. ¿Cuántos goles ha marcado cada una? **(2 puntos)**

A1.2.– Sea la función $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$.

- (I) Determina la recta tangente en el punto de abscisa $x = 1$. **(0,5 puntos)**
- (II) Determina sus asíntotas. **(1 punto)**
- (III) Calcula el área que encierra el eje X , la tangente a la curva en el punto de abscisa $x = 1$ (calculada en el primer apartado) y la recta $x = 2$. **(0,5 puntos)**

A1.3.– La probabilidad de que Alberto conteste a un mensaje de Whatsapp es 0.1. En los últimos 20 minutos ha recibido 3 mensajes.

- (I) ¿Cuál es la probabilidad de que conteste a los tres? **(0,5 puntos)**
- (II) ¿Cuál es probabilidad de que conteste exactamente a uno? **(0,5 puntos)**
- (III) ¿Cuál es probabilidad de que conteste al menos a uno? **(0,5 puntos)**
- (IV) ¿Cuál es probabilidad de que no conteste a ninguno? **(0,5 puntos)**

A2. Responde a dos de las tres preguntas que se plantean a continuación.

A2.1.- Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

- (I) Calcula A^2 y A^3 . (0.5 puntos)
- (II) Teniendo en cuenta los resultados del apartado anterior, calcula A^{15} . (0.5 puntos)
- (III) ¿Existe alguna matriz X , (distinta de la matriz nula) que verifique $AX = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$? (1 punto)

A2.2.- Sea la función

$$f(x) = \frac{x^3}{2} - 3x^2.$$

- (I) Estudia razonadamente sus intervalos de crecimiento y decrecimiento. (1 punto)
- (II) Calcula sus extremos relativos y esboza una representación gráfica. (1 punto)

A2.3.- Una máquina envasa café en bolsas siguiendo una distribución normal de 500 gr de peso medio y una desviación típica de 30 gr. Las bolsas se empaquetan en cajas de 100 unidades.

- (I) Se toma al azar una caja de 100 bolsas, ¿cuál es la probabilidad de que la media de los pesos de las bolsas de esa caja sea menor que 495 gr? (1 punto)
- (II) Cristina no conoce el peso medio de las bolsas, aunque conoce la desviación típica (30 gr). Ha pesado un paquete de 100 bolsas y ha obtenido un peso medio de 505 gr; con estos datos ha calculado un intervalo de confianza del 95 % para la media. ¿Cuál es el intervalo determinado por Cristina? (1 punto)



Prueba de Evaluación de Bachillerato para el
Acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2018 – 2019
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSS II

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. **Es necesario justificar las respuestas.**

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

Tiempo: Una hora y media.

PROPUESTA B:

B1. Responde a cada una de las tres preguntas que se plantean a continuación.

B1.1.– Alba, Blanca y Naia son las delanteras titulares de un equipo de fútbol. Entre las tres, en la temporada recién finalizada, han marcado 65 goles. Sabemos que Alba ha marcado 50 % más goles que Blanca, y que Naia ha marcado la mitad de goles que Alba. ¿Cuántos goles ha marcado cada una? **(2 puntos)**

B1.2.– Sea la función $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$.

- (i) Determina la recta tangente en el punto de abscisa $x = 1$. **(0,5 puntos)**
- (ii) Determina sus asíntotas. **(1 punto)**
- (iii) Calcula el área que encierra el eje X , la tangente a la curva en el punto de abscisa $x = 1$ (calculada en el primer apartado) y la recta $x = 2$. **(0,5 puntos)**

B1.3.– La probabilidad de que Alberto conteste a un mensaje de Whatsapp es 0.1. En los últimos 20 minutos ha recibido 3 mensajes.

- (i) ¿Cuál es la probabilidad de que conteste a los tres? **(0,5 puntos)**
- (ii) ¿Cuál es probabilidad de que conteste exactamente a uno? **(0,5 puntos)**
- (iii) ¿Cuál es probabilidad de que conteste al menos a uno? **(0,5 puntos)**
- (iv) ¿Cuál es probabilidad de que no conteste a ninguno? **(0,5 puntos)**

B2. Responde a dos de las tres preguntas que se plantean a continuación.

B2.1.— Para fabricar coches y cunas de bebé disponemos de 80 kg de acero y 120 kg de aluminio. Cada coche se venderá a 200 euros y cada cuna a 150 euros. Para fabricar un coche son necesarios 1 kg de acero y 3 kg de aluminio y para fabricar una cuna 2 kg de acero y 2 kg de aluminio.

- (I) Dibuja en el plano la región factible que represente las posibles cantidades de coches y cunas que podemos fabricar (respetando las restricciones del problema). (1 punto)
- (II) Escribe la función que representa los ingresos que se obtienen por las ventas e indica el número de coches y de cunas que se deben fabricar para conseguir los máximos ingresos posibles. (1 punto)

B2.2.— Sea la función

$$f(x) = \frac{2x}{4 - x^2}.$$

- (I) Estudia razonadamente sus intervalos de crecimiento y decrecimiento. (1 punto)
- (II) Calcula sus asíntotas si las tiene y esboza una representación gráfica. (1 punto)

B2.3.— El peso de los estudiantes que ingresan en la Universidad sigue una distribución normal de desviación típica 15 kg.

- (I) Si el peso medio fuese 70 kg, ¿cuál sería la probabilidad de que el peso medio de 100 estudiantes superase los 72 kg? (1 punto)
- (II) El peso medio de una muestra de 225 alumnos es de 72 kg, determina un intervalo de confianza del 95 % para el peso medio de los estudiantes que ingresan en la Universidad. (1 punto)

SOLUCIONES PROPUESTA A

CONVOCATORIA
EXTRAORDINARIA

Problema A.1:

A1. Responde a cada una de las tres preguntas que se plantean a continuación.

A1.1.— Alba, Blanca y Naia son las delanteras titulares de un equipo de fútbol. Entre las tres, en la temporada recién finalizada, han marcado 65 goles. Sabemos que Alba ha marcado 50 % más goles que Blanca, y que Naia ha marcado la mitad de goles que Alba. ¿Cuántos goles ha marcado cada una? (2 puntos)

Solución:

Llamamos A al número de goles que ha marcado Alba, B a los que ha marcado Blanca y N a los que ha marcado Naia.

Con los datos que nos dan planteamos un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} A + B + N = 65 \\ A = B + \frac{50B}{100} \\ N = \frac{A}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A + B + N = 65 \\ A = B + \frac{B}{2} = \frac{3B}{2} \\ N = \frac{A}{2} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} A + B + N = 65 \\ A = B + \frac{B}{2} = \frac{3B}{2} \\ N = \frac{A}{2} = \frac{3B}{4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{3B}{2} + B + \frac{3B}{4} = \frac{6B + 4B + 3B}{4} = \frac{13B}{4} = 65 \\ A = \frac{3B}{2} \\ N = \frac{3B}{4} \end{cases} \rightarrow$$

Luego:

$$B = \frac{65(4)}{13} = 20; A = \frac{3B}{2} = 30; N = \frac{3B}{4} = 15.$$

Alba ha marcado **30** goles, Blanca **20** goles y Naia **15** goles.

Problema A.1.2:

A1.2.- Sea la función $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$.

- (I) Determina la recta tangente en el punto de abscisa $x = 1$. (0,5 puntos)
- (II) Determina sus asíntotas. (1 punto)
- (III) Calcula el área que encierra el eje X , la tangente a la curva en el punto de abscisa $x = 1$ (calculada en el primer apartado) y la recta $x = 2$. (0,5 puntos)

Solución:

- i. De la recta tangente podemos determinar la pendiente, calculando la derivada de la función en el punto de abscisa 1, y un punto, calculando la ordenada del punto de abscisa 1, en la función:

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} \rightarrow f(1) = 0 \rightarrow f'(x) = \frac{1(x+1) - (x-1)1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2} \rightarrow f'(1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

La ecuación de la recta tangente es:

$$y = f(a) + m(x - a) \rightarrow y = 0 + \frac{1}{2}(x - 1) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$$

La recta tangente es: $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$.

- ii. Asíntotas verticales: La función tiende a infinito cuando x se acerca a -1 . $x = -1$ es una asíntota vertical, la única.

Estudiamos el comportamiento de la función en el infinito. Cuando x tiende a infinito, la función tiende a 1, luego $y = 1$ es una asíntota horizontal.

Asíntota vertical: $x = -1$. Asíntota horizontal: $y = 1$.

- iii. El área pedida es la de un triángulo rectángulo. La y vale 0 para $x = 1$. Para $x = 2$, $y = \frac{2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

La base del triángulo mide 1, y la altura, $\frac{1}{2}$, luego el área es: $\frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$.

También podemos hacerlo con integrales:

$$\int_1^2 \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{2} \right] dx = \left[\frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} \right]_1^2 = \left(\frac{4}{4} - \frac{2}{2} \right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4}$$

Área = $\frac{1}{4} u^2$.

Problema A.1.3:

A1.3.— La probabilidad de que Alberto conteste a un mensaje de Whatsapp es 0.1. En los últimos 20 minutos ha recibido 3 mensajes.

- (I) ¿Cuál es la probabilidad de que conteste a los tres? (0,5 puntos)
- (II) ¿Cuál es probabilidad de que conteste exactamente a uno? (0,5 puntos)
- (III) ¿Cuál es probabilidad de que conteste al menos a uno? (0,5 puntos)
- (IV) ¿Cuál es probabilidad de que no conteste a ninguno? (0,5 puntos)

Solución:

- i. Llamamos W a contestar un mensaje de Whatsapp, y $\bar{W}$ a no contestar el mensaje. Sabemos que $P(W) = 0.1$, y por el suceso contrario $P(\bar{W}) = 0.9$.

$$P(\text{contestar a 3 mensajes}) = P(W) \cdot P(W) \cdot P(W) = 0.1 \cdot 0.1 \cdot 0.1 = 0.001.$$

La probabilidad de que conteste los 3 mensajes es **0.001**.

- ii. La probabilidad de que conteste exactamente a uno es:

$$P(\text{exactamente a uno}) = P(W) \cdot P(\bar{W}) \cdot P(\bar{W}) + P(\bar{W}) \cdot P(W) \cdot P(\bar{W}) + P(\bar{W}) \cdot P(\bar{W}) \cdot P(W) = \\ 0.1 \cdot 0.9 \cdot 0.9 + 0.9 \cdot 0.1 \cdot 0.9 + 0.9 \cdot 0.9 \cdot 0.1 = 0.081 + 0.081 + 0.081 = 0.243.$$

La probabilidad de que conteste exactamente a tres es de **0.243**.

- iii. Contestar al menos a uno, es el suceso contrario de no contestar a ninguno.

$$P(\text{al menos uno}) = 1 - P(\text{ninguno}) = 1 - P(\bar{W}) \cdot P(\bar{W}) \cdot P(\bar{W}) = 1 - 0.9 \cdot 0.9 \cdot 0.9 = 1 - 0.729 = 0.271.$$

La probabilidad de que conteste al menos a un mensaje es de **0.271**.

- iv. La probabilidad de que no conteste a ninguno, ya la hemos calculado:

$$P(\text{ninguno}) = P(\bar{W}) \cdot P(\bar{W}) \cdot P(\bar{W}) = 0.9 \cdot 0.9 \cdot 0.9 = 1 - 0.271 = 0.729.$$

La probabilidad de que no conteste a ninguno es **0.729**.

Problema A.2:

CONVOCATORIA
EXTRAORDINARIA

A2. Responde a dos de las tres preguntas que se plantean a continuación.

A2.1.- Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

- (I) Calcula A^2 y A^3 . (0.5 puntos)
- (II) Teniendo en cuenta los resultados del apartado anterior, calcula A^{15} . (0.5 puntos)
- (III) ¿Existe alguna matriz X , (distinta de la matriz nula) que verifique $AX = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$? (1 punto)

Solución:

$$i. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow A^3 = A^2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

ii. Si seguimos multiplicando por la matriz A , volveremos a obtener lo mismo, luego:

$$A^{15} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

iii. Tendremos que resolver la ecuación: $AX=0 \rightarrow X = A^{-1}0 \rightarrow X = 0$. Pero la matriz A no tiene inversa, ya que: $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 2 = 0$.

Llamamos a $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, e imponemos que:

$$AX = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+c & 2b+d \\ -2a-c & -2b-d \end{pmatrix}$$

Tenemos cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, pero dos de las ecuaciones coinciden con las otras dos, luego tenemos únicamente dos ecuaciones con cuatro incógnitas:

$$\begin{cases} 2a+c=0 \\ 2b+d=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c=-2a \\ d=-2b \end{cases}$$

Hay infinitas matrices X , de la forma: $X = \begin{pmatrix} a & b \\ -2a & -2b \end{pmatrix}$, que verifican que $AX=0$, como por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \dots$$

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ -2a & -2b \end{pmatrix}$$

Problema A.2.2:

A.2.2.— Sea la función

$$f(x) = \frac{x^3}{2} - 3x^2.$$

- (I) Estudia razonadamente sus intervalos de crecimiento y decrecimiento. (1 punto)
- (II) Calcula sus extremos relativos y esboza una representación gráfica. (1 punto)

Solución:

- i. Para estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función calculamos su derivada primera:

$$f(x) = \frac{x^3}{2} - 3x^2 \rightarrow f'(x) = \frac{3x^2}{2} - 6x = 3x\left(\frac{x}{2} - 2\right)$$

La derivada primera se anula si $x = 0$, o si $\frac{x}{2} - 2 = 0 \rightarrow x = 4$.

Estudiamos el signo de la derivada en los intervalos: $(-\infty, 0)$, $(0, 4)$, $(4, +\infty)$.

$$f'(-1) = 3(-1)\left(\frac{-1}{2} - 2\right) > 0$$

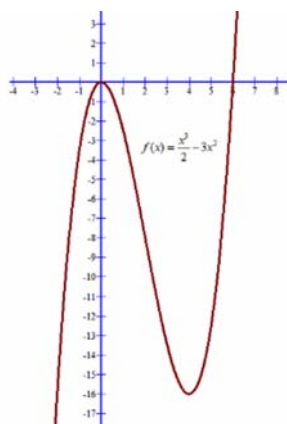
$$f'(2) = 3(2)\left(\frac{2}{2} - 2\right) < 0$$

$$f'(5) = 3(5)\left(\frac{5}{2} - 2\right) > 0$$

La función es **creciente** en el intervalo $(-\infty, 0)$, **decreciente** en $(0, 4)$, y **creciente** en $(4, +\infty)$.

- ii. Al anularse la derivada primera ya sabemos que los posibles extremos relativos son los puntos de abscisa $x = 0$, y $x = 4$. Y con el estudio realizado del crecimiento y decrecimiento, también sabemos que en $x = 0$ hay un máximo y en $x = 4$, un mínimo. Por tanto:

En $(0, 0)$ hay un **máximo** relativo, y en $(4, -12)$ un **mínimo** relativo.



Problema A.2.3:

A2.3.— Una máquina envasa café en bolsas siguiendo una distribución normal de 500 gr de peso medio y una desviación típica de 30 gr. Las bolsas se empaquetan en cajas de 100 unidades.

- (I) Se toma al azar una caja de 100 bolsas, ¿cuál es la probabilidad de que la media de los pesos de las bolsas de esa caja sea menor que 495 gr? (1 punto)
- (II) Cristina no conoce el peso medio de las bolsas, aunque conoce la desviación típica (30 gr). Ha pesado un paquete de 100 bolsas y ha obtenido un peso medio de 505 gr; con estos datos ha calculado un intervalo de confianza del 95 % para la media. ¿Cuál es el intervalo determinado por Cristina? (1 punto)

Solución:

- i. Nos dice el enunciado que se sigue una distribución normal. Si $\mu = 500$, $\sigma = 30$, $n = 100$.

La distribución de las medias es:

$$\bar{X} = N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(500, \frac{30}{\sqrt{100}}\right) = N\left(500, \frac{30}{10}\right) = N(500, 3)$$

Nos piden calcular: $P(\bar{X} < 495)$.

Tipificamos:

$$\begin{aligned} P\left(\bar{Z} < \frac{495 - 500}{3}\right) &= P(\bar{Z} < -1.666) = P(\bar{Z} > -1.666) = 1 - P(\bar{Z} < 1.666) \\ &= 1 - \frac{0.9515 + 0.9525}{2} = 1 - 0.952 = 0.048. \end{aligned}$$

La probabilidad de que el peso medio sea menor que 495 gr es de **0.048**.

- ii. Ahora $n = 400$, $\bar{x} = 505$, $\sigma = 30$, no se conoce la media poblacional. Nos piden el intervalo de confianza al 95 %.

El intervalo de confianza para la media muestral viene dado por la expresión:

$$\left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Calculamos $Z_{\frac{\alpha}{2}}$.

$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96.$$

$$\left(505 - 1.96 \cdot \frac{30}{\sqrt{100}}, 505 + 1.96 \cdot \frac{30}{\sqrt{100}}\right) = (505 - 5.88, 505 + 5.88) = (499.12, 510.88).$$

El intervalo de confianza es de **(499.12, 510.88)**.

SOLUCIONES PROPUESTA B

CONVOCATORIA
EXTRAORDINARIA

Problema B.1:

B1. Responde a cada una de las tres preguntas que se plantean a continuación.

B1.1.- Alba, Blanca y Naia son las delanteras titulares de un equipo de fútbol. Entre las tres, en la temporada recién finalizada, han marcado 65 goles. Sabemos que Alba ha marcado 50 % más goles que Blanca, y que Naia ha marcado la mitad de goles que Alba. ¿Cuántos goles ha marcado cada una? (2 puntos)

Solución: Igual que A.1.1.

Llamamos A al número de goles que ha marcado Alba, B a los que ha marcado Blanca y N a los que ha marcado Naia.

Con los datos que nos dan planteamos un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} A + B + N = 65 \\ A = B + \frac{50B}{100} \\ N = \frac{A}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A + B + N = 65 \\ A = B + \frac{B}{2} = \frac{3B}{2} \\ N = \frac{A}{2} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} A + B + N = 65 \\ A = B + \frac{B}{2} = \frac{3B}{2} \\ N = \frac{A}{2} = \frac{3B}{4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{3B}{2} + B + \frac{3B}{4} = \frac{6B + 4B + 3B}{4} = \frac{13B}{4} = 65 \\ A = \frac{3B}{2} \\ N = \frac{3B}{4} \end{cases} \rightarrow$$

Luego:

$$B = \frac{65(4)}{13} = 20; A = \frac{3B}{2} = 30; N = \frac{3B}{4} = 15.$$

Alba ha marcado **30** goles, Blanca **20** goles y Naia **15** goles.

Problema B.1.2:

B1.2.- Sea la función $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$.

- (I) Determina la recta tangente en el punto de abscisa $x = 1$. (0,5 puntos)
- (II) Determina sus asíntotas. (1 punto)
- (III) Calcula el área que encierra el eje X , la tangente a la curva en el punto de abscisa $x = 1$ (calculada en el primer apartado) y la recta $x = 2$. (0,5 puntos)

Solución: Igual que A.1.2.

- i. De la recta tangente podemos determinar la pendiente, calculando la derivada de la función en el punto de abscisa 1, y un punto, calculando la ordenada del punto de abscisa 1, en la función:

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} \rightarrow f(1) = 0 \rightarrow f'(x) = \frac{1(x+1) - (x-1)1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2} \rightarrow f'(1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

La ecuación de la recta tangente es:

$$y = f(a) + m(x - a) \rightarrow y = 0 + \frac{1}{2}(x - 1) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$$

La recta tangente es: $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$.

- ii. Asíntotas verticales: La función tiende a infinito cuando x se acerca a -1 . $x = -1$ es una asíntota vertical, la única.

Estudiamos el comportamiento de la función en el infinito. Cuando x tiende a infinito, la función tiende a 1, luego $y = 1$ es una asíntota horizontal.

Asíntota vertical: $x = -1$. Asíntota horizontal: $y = 1$.

- iii. El área pedida es la de un triángulo rectángulo. La y vale 0 para $x = 1$. Para $x = 2$, $y = \frac{2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

La base del triángulo mide 1, y la altura, $\frac{1}{2}$, luego el área es: $\frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$.

También podemos hacerlo con integrales:

$$\int_1^2 \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{2} \right] dx = \left[\frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} \right]_1^2 = \left(\frac{4}{4} - \frac{2}{2} \right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4}$$

Área = $\frac{1}{4} u^2$.

Problema B.1.3:

B1.3.- La probabilidad de que Alberto conteste a un mensaje de Whatsapp es 0.1. En los últimos 20 minutos ha recibido 3 mensajes.

- (i) ¿Cuál es la probabilidad de que conteste a los tres? (0,5 puntos)
- (ii) ¿Cuál es probabilidad de que conteste exactamente a uno? (0,5 puntos)
- (iii) ¿Cuál es probabilidad de que conteste al menos a uno? (0,5 puntos)
- (iv) ¿Cuál es probabilidad de que no conteste a ninguno? (0,5 puntos)

Solución: Igual que A.1.3.

- i. Llamamos W a contestar un mensaje de Whatsapp, y $\bar{W}$ a no contestar el mensaje. Sabemos que $P(W) = 0.1$, y por el suceso contrario $P(\bar{W}) = 0.9$.

$$P(\text{contestar a 3 mensajes}) = P(W) \cdot P(W) \cdot P(W) = 0.1 \cdot 0.1 \cdot 0.1 = 0.001.$$

La probabilidad de que conteste los 3 mensajes es **0.001**.

- ii. La probabilidad de que conteste exactamente a uno es:

$$P(\text{exactamente a uno}) = P(W) \cdot P(\bar{W}) \cdot P(\bar{W}) + P(\bar{W}) \cdot P(W) \cdot P(\bar{W}) + P(\bar{W}) \cdot P(\bar{W}) \cdot P(W) = \\ 0.1 \cdot 0.9 \cdot 0.9 + 0.9 \cdot 0.1 \cdot 0.9 + 0.9 \cdot 0.9 \cdot 0.1 = 0.081 + 0.081 + 0.081 = 0.243.$$

La probabilidad de que conteste exactamente a tres es de **0.243**.

- iii. Contestar al menos a uno, es el suceso contrario de no contestar a ninguno.

$$P(\text{al menos uno}) = 1 - P(\text{ninguno}) = 1 - P(\bar{W}) \cdot P(\bar{W}) \cdot P(\bar{W}) = 1 - 0.9 \cdot 0.9 \cdot 0.9 = 1 - 0.729 = 0.271.$$

La probabilidad de que conteste al menos a un mensaje es de **0.271**.

- iv. La probabilidad de que no conteste a ninguno, ya la hemos calculado:

$$P(\text{ninguno}) = P(\bar{W}) \cdot P(\bar{W}) \cdot P(\bar{W}) = 0.9 \cdot 0.9 \cdot 0.9 = 1 - 0.271.$$

La probabilidad de que no conteste a ninguno es **0.729**.

Problema B.2:

CONVOCATORIA
EXTRAORDINARIA

B2. Responde a dos de las tres preguntas que se plantean a continuación.

B2.1.— Para fabricar coches y cunas de bebé disponemos de 80 kg de acero y 120 kg de aluminio. Cada coche se venderá a 200 euros y cada cuna a 150 euros. Para fabricar un coche son necesarios 1 kg de acero y 3 kg de aluminio y para fabricar una cuna 2 kg de acero y 2 kg de aluminio.

- (I) Dibuja en el plano la región factible que represente las posibles cantidades de coches y cunas que podemos fabricar (respetando las restricciones del problema). (1 punto)
- (II) Escribe la función que representa los ingresos que se obtienen por las ventas e indica el número de coches y de cunas que se deben fabricar para conseguir los máximos ingresos posibles. (1 punto)

Solución:

- i. Llamamos x al número de coches de bebés que queremos fabricar, e y al número de cunas.

Según el enunciado tenemos las siguientes restricciones:
$$\begin{cases} x \geq 0; y \geq 0 \\ x + 2y \leq 80 \\ 3x + 2y \leq 120 \end{cases}$$

Hallamos los puntos de intersección:

Con $x + 2y = 80$, si $x = 0$ entonces $y = 40$; Si $y = 0$, $x = 80$;

Con $3x + 2y = 120$; $x = 0 \rightarrow y = 60$; $y = 0 \rightarrow x = 40$;

$$\begin{cases} x + 2y = 80 \\ 3x + 2y = 120 \end{cases} \rightarrow x = 20, y = 30;$$

Los puntos de intersección que verifican las restricciones son: $A(0, 0)$; $B(40, 0)$; $C(20, 30)$; $D(0, 40)$.

La región factible:



- ii. La función ingresos es: $I(x, y) = 200x + 150y$. Estudiamos cuándo son máximos:

$$A(0, 0) \rightarrow I(0, 0) = 200(0) + 150(0) = 0;$$

$$B(40, 0) \rightarrow I(40, 0) = 200(40) + 150(0) = 8000;$$

$$C(20, 30) \rightarrow I(20, 30) = 200(20) + 150(30) = 4000 + 4500 = 8500;$$

$$D(0, 40) \rightarrow I(0, 40) = 200(0) + 150(40) = 6000;$$

Los máximos ingresos se obtienen en $C(20, 30)$ y es de 8500 euros.

Se deben fabricar **20** coches y **30** cunas para que se obtenga en máximo beneficio de **8500** euros.

Problema B.2.2:

B2.2.– Sea la función

$$f(x) = \frac{2x}{4 - x^2}.$$

- (I) Estudia razonadamente sus intervalos de crecimiento y decrecimiento. (1 punto)
- (II) Calcula sus asíntotas si las tiene y esboza una representación gráfica. (1 punto)

Solución:

- i. Para estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función utilizamos la derivada primera:

$$f(x) = \frac{2x}{4 - x^2} \rightarrow f'(x) = \frac{2(4 - x^2) - 2x(-2x)}{(4 - x^2)^2} = \frac{8 - 2x^2 + 4x^2}{(4 - x^2)^2} = \frac{8 + 2x^2}{(4 - x^2)^2}$$

La derivada primera no se anula en ningún punto, y siempre tiene signo positivo. Por tanto, la función es siempre creciente.

La función es siempre **creciente**.

- ii. El dominio de definición de la función es toda la recta real excepto en los puntos en que se anula el denominador, 2 y -2.

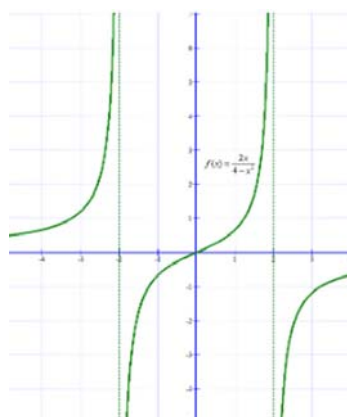
$$f(x) = \frac{2x}{4 - x^2} = \frac{2x}{(2 + x)(2 - x)}$$

Tiene dos asíntotas verticales en $x = 2$ y en $x = -2$.

Estudiamos el comportamiento en el infinito: Cuando x tiende a infinito la función tiende a cero.

Hay una asíntota horizontal $y = 0$.

Puntos de corte con los ejes: Sólo corta a los ejes en $(0, 0)$.



Asíntotas verticales: $x = 2$ y $x = -2$. Asíntota horizontal: $y = 0$.

Problema B.2.3:

B2.3.— El peso de los estudiantes que ingresan en la Universidad sigue una distribución normal de desviación típica 15 kg.

- (I) Si el peso medio fuese 70 kg, ¿cuál sería la probabilidad de que el peso medio de 100 estudiantes superase los 72 kg? (1 punto)
- (II) El peso medio de una muestra de 225 alumnos es de 72 kg, determina un intervalo de confianza del 95 % para el peso medio de los estudiantes que ingresan en la Universidad. (1 punto)

Solución:

- i. Nos dice el enunciado que el peso de los estudiantes sigue una distribución normal de $\sigma = 15$. Si $\mu = 70$, $n = 100$. La distribución de las medias es:

$$\bar{X} = N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(70, \frac{15}{\sqrt{100}}\right) = N\left(70, \frac{15}{10}\right) = N(70, 1.5)$$

Nos piden calcular: $P(\bar{X} > 72)$.

Tipificamos:

$$P\left(\bar{Z} > \frac{72 - 70}{1.5}\right) = P(\bar{Z} > 1.333) = 1 - P(\bar{Z} < 1.333) = 1 - 0.9082 = 0.0918.$$

La probabilidad de que el peso medio sea mayor de 72 kg es de **0.0918**.

- ii. Ahora $n = 225$, $\bar{x} = 72$, $\sigma = 15$, no se conoce la media poblacional. Nos piden el intervalo de confianza al 95 %.

El intervalo de confianza para la media muestral viene dado por la expresión:

$$\left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Calculamos $Z_{\frac{\alpha}{2}}$.

$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96.$$

$$\begin{aligned} \left(72 - 1.96 \cdot \frac{15}{\sqrt{225}}, 72 + 1.96 \cdot \frac{15}{\sqrt{225}}\right) &= \left(72 - 1.96 \cdot \frac{15}{15}, 72 + 1.96 \cdot \frac{15}{15}\right) \\ &= (72 - 1.96, 72 + 1.96) = (70.04, 73.96). \end{aligned}$$

El intervalo de confianza es de **(70.04, 73.96)**.