Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2019

Comunidad autónoma de

Galicia

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: MARÍA DOLORES VÁZQUEZ TORRÓN

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

XUNTA DE GALICIA CiUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2018–2019** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el estudiante deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.
Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.
CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.
Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.
TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Problema A.1: (3 puntos)

Consideramos las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcular la matriz $B^t \cdot A \cdot B$

b) Calcular la inversa de la matriz A-I, en donde I es la matriz identidad de orden 2.

c) Despejar la matriz X en la ecuación matricial A · X - B = X y calcúlala.

Problema A.2: (3 puntos)

El número de espectadores de una serie (N), en millones, en función del tiempo (t), en años, sigue un modelo dado por la función: $N(t) = K + \frac{8t}{1+t^2}$

a) Calcula el valor de K si se sabe que al final del segundo año el número de espectadores era de 4.2 millones. **b)** Estudia el crecimiento, el decrecimiento y el momento y valor máximo de la audiencia.

Problema A.3: (2 puntos)

Los videojuegos que se consumen en Galicia se juegan el 45% en consola y el resto en el móvil. De los que se juegan en consola, el 70% son de acción, el 10% de estrategia y el resto de otras categorías.

a) ¿Qué porcentaje de los videojuegos consumidos en Galicia son de acción?

b) Se elige al azar un jugador que está jugando a un juego de estrategia: ¿cuál es la probabilidad de que lo esté haciendo a través del móvil?

Problema A.4: (2 puntos)

Un estudio electoral con una muestra de 400 electores obtiene un intervalo para la proporción de votantes de un partido de [0.23; 0.31] **a)** ¿Cuánto vale la proporción muestral? **b)** ¿Cuál es el nivel de confianza con el que se estableció el intervalo? **c)** ¿Cuál es el error máximo cometido con el intervalo anterior?

Autora: Dolores Vázquez Torrón
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

XUNTA DE GALICIA / CiUG	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2018–2019** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el estudiante deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.
Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.
CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.
Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.
TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN B

Problema B.1: (3 puntos)

Una tienda deportiva desea liquidar 2000 camisetas y 1000 chándales de la temporada anterior. Para ello lanza dos ofertas, 1 y 2. La oferta 1 consiste en un lote de una camiseta y un chándal, que se vende a 30€; la oferta 2 consiste en un lote de tres camisetas y un chándal, que se vende a 50€. No se desea ofrecer menos de 200 lotes de la oferta 1 ni menos de 100 de la oferta 2.

a) Plantea el problema que permite determinar cuántos lotes de cada tipo debe vender para maximizar los ingresos. **b)** representa la región factible **c)** ¿Cuántos lotes ha de vender de cada tipo para maximizar los ingresos? ¿A cuánto ascienden dichos ingresos?

Problema B.2: (3 puntos)

Dada la función $f(x)= x^2 - 6x +8$ **a)** Realiza su representación gráfica estudiando sus puntos de corte con los ejes, monotonía y extremos relativos. **b)** Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función y los ejes de coordenadas

Problema B.3: (2puntos)

En una población, de cada 100 consumidores de agua mineral 30 consumen la marca A, 25 la marca B y el resto la marca C. Además, el 30% de consumidores de A, el 20% de los consumidores de B y el 40% de consumidores de C son mujeres. **a**) Se selecciona al azar un consumidor de agua mineral de esa población: ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer? **b)** Si se ha seleccionado al azar una mujer, halla la probabilidad de que consuma la marca B

Problema B.4: (2puntos)

Después de años de utilizarlo se sabe que la puntuación de un test de uso habitual en cierta rama industrial sigue una distribución normal de media 74 y desviación típica 16. En una empresa se decide realizarlo a 100 de sus empleados. **a)** ¿Cuál es la probabilidad de que se obtenga una media muestral superior a 78 puntos, de seguirse la pauta genera? **b)** ¿Y la probabilidad de que la media muestral sea inferior a 74 puntos?

Autora: Dolores Vázquez Torrón
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

SOLUCIONES OPCIÓN A DE LA CONVOCATORIA ORDINARIA

Problema A.1:

Consideramos las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcular la matriz $B^t \cdot A \cdot B$

b) Calcular la inversa de la matriz A-I, en donde I es la matriz identidad de orden 2.

c) Despejar la matriz X en la ecuación matricial $A{\cdot}X - B = X$ y calcúlala.

Solución:

a) $B^t \cdot A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{B^t \cdot A \cdot B = \begin{pmatrix} 13 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

b) Calculamos la inversa por adjuntos.

$$(A - I)^{-1} = \frac{(Adj(A - I))^t}{|A - I|}$$

$A - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad |A - I| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1 \neq 0$

$Adj(A - I) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$(Adj(A - I))^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$(A - I)^{-1} = \dfrac{(Adj(A - I))^t}{|A - I|} = \dfrac{1}{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{(A - I)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

c) Calcular y despejar X en la ecuación matricial $A{\cdot}X - B = X$

$AX - X = B$ *sacamos factor común X por la derecha*

$(A - I)X = B$ multiplicamos por $(A - I)^{-1}$ por la izquierda

$(A - I)^{-1}(A - I)X = (A - I)^{-1}B \Rightarrow X = (A - I)^{-1}B$

$X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Problema A.2:

El número de espectadores de una serie (N), en millones, en función del tiempo (t), en años, sigue un modelo dado por la función: $N(t) = K + \frac{8t}{1+t^2}$

a) Calcula el valor de K si se sabe que al final del segundo año el número de espectadores era de 4.2 millones.

b) Estudia el crecimiento, el decrecimiento y el momento y valor máximo de la audiencia.

Solución:

a) $N(t) = K + \frac{8t}{1+t^2}$ K / al final del 2º año el número de espectadores es de 4.2 $\Rightarrow N(2) = 4.2$

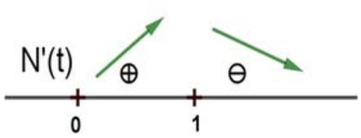
$N(2) = k + \dfrac{8 \cdot 2}{1 + 2^2} = 4.2 \Rightarrow K = 1$

$$\boldsymbol{K = 1}$$

b) Crecimiento y decrecimiento

$$N'(t) = \frac{8(-t^2 + 1)}{(1 + t^2)^2}$$

$N'(t) = 0 \Leftrightarrow -t^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1(-1 \notin Dominio\ nº\ de\ espectadores)$



La función es creciente en el intervalo (0, 1) y decreciente en (1, ∞), es decir el nº de espectadores aumenta durante el primer año y desciende a partir del primero.

Extremos:

Por ser la función continua y estar definida en (0, ∞) la función tiene un máximo absoluto en x = 1

También se puede estudiar utilizando la segunda derivada:

$N''(t) = \frac{16t(t^2-3)}{(1+t^2)^3}$ $N''(1) < 0 \Rightarrow x$ = 1 es un máximo absoluto

$N(t) = 1 + \frac{8t}{1+t^2} \to N(1) = 5$

Solución: A finales del primer año se produce el máximo de audiencia que será de **5 millones** de espectadores.

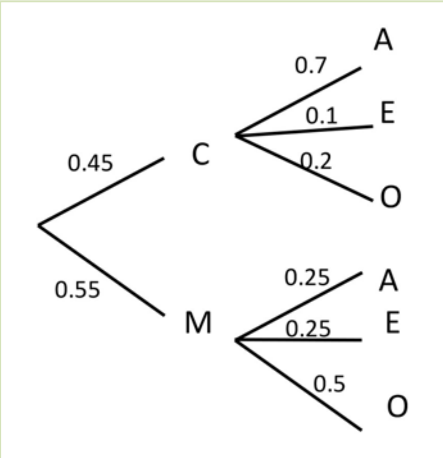
Problema A.3:

Los videojuegos que se consumen en Galicia se juegan el 45 % en consola y el resto en el móvil. De los que se juegan en consola, el 70 % son de acción, el 10 % de estrategia y el resto de otras categorías.

a) ¿Qué porcentaje de los videojuegos consumidos en Galicia son de acción?

b) Se elige al azar un jugador que está jugando a un juego de estrategia: ¿cuál es la probabilidad de que lo esté haciendo a través del móvil?

Solución:



Suceso:

C consola	$P(C)$ = 0.45	
M móvil	$P(M)$ = 0.55	
A acción	$P(A/C)$ = 0.7	$P(A/M)$ = 0.25
E estrategia	$P(E/C)$ = 0.1	$P(E/M)$ = 0.25
O otras	$P(O/C)$ = 0.2	$P(O/M)$ = 0.5

a) $P(A) = P(A/C)\cdot P(C) + P(A/M)\cdot P(M) = 0.7\cdot 0.45 + 0.25\cdot 0.55 = 0.4525 \Rightarrow$

El **45.25 %** de los videojuegos consumidos en Galicia son de acción

b) $P(M/E) = \frac{P(E\cap M)}{P(E)} = \frac{0.55\cdot 0.25}{0.55\cdot 0.25+0.45\cdot 0.1} = \frac{0.1375}{0.1825} = 0.7534$

La probabilidad de que un jugador elegido al azar que está jugando a un juego de estrategia lo esté haciendo a través del móvil es del **75.34%**

Autora: Dolores Vázquez Torrón
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

Problema A.4:

Un estudio electoral con una muestra de 400 electores obtiene un intervalo para la proporción de votantes de un partido de [0.23, 0.31]

a) ¿Cuánto vale la proporción muestral?

b) ¿Cuál es el nivel de confianza con el que se estableció el intervalo?

c) ¿Cuál es el error máximo cometido con el intervalo anterior?

Solución:

a) n = 400 IC [0.23; 0.31] intervalo centrado en la proporción muestral:

$$\hat{p} = \frac{0.23 + 0.31}{2} = \mathbf{0.27}$$

b) *N*ivel de confianza de construcción del intervalo

El radio del intervalo $\frac{0.31-0.23}{2} = 0.04 = z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{0.27\cdot 0.73}{400}} \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.801$

$P[Z < 1.801] = 1 - \alpha/2 \Rightarrow \alpha = 0.0708 \Rightarrow 1 - \alpha = 0.9292$

El nivel de confianza con el que se construyó el intervalo es **92.92%**

c) Error máximo cometido $E = z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = radio\ del\ intervalo \Rightarrow E$ ***= 0.04***

Error máximo: $\mathbf{E = 0.04 \Rightarrow 4\ \%}$

Autora: Dolores Vázquez Torrón
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

SOLUCIONES OPCIÓN B DE LA CONVOCATORIA ORDINARIA

Problema B.1:

Una tienda deportiva desea liquidar 2000 camisetas y 1000 chándales de la temporada anterior. Para ello lanza dos ofertas, 1 y 2. La oferta 1 consiste en un lote de una camiseta y un chándal, que se vende a 30€; la oferta 2 consiste en un lote de tres camisetas y un chándal, que se vende a 50€. No se desea ofrecer menos de 200 lotes de la oferta 1 ni menos de 100 de la oferta 2.

a) Plantea el problema que permite determinar cuántos lotes de cada tipo debe vender para maximizar los ingresos. **b)** representa la región factible **c)** ¿Cuántos lotes ha de vender de cada tipo para maximizar los ingresos? ¿A cuánto ascienden dichos ingresos?

Solución:

	Camiseta	chándal	Precio venta (€)	
X n.º lotes tipo 1	1	1	30	Mínimo 200 lotes
Y n.º lotes tipo 2	3	1	50	Mínimo 100 lotes
	Máximo 2000	Máximo 1000		

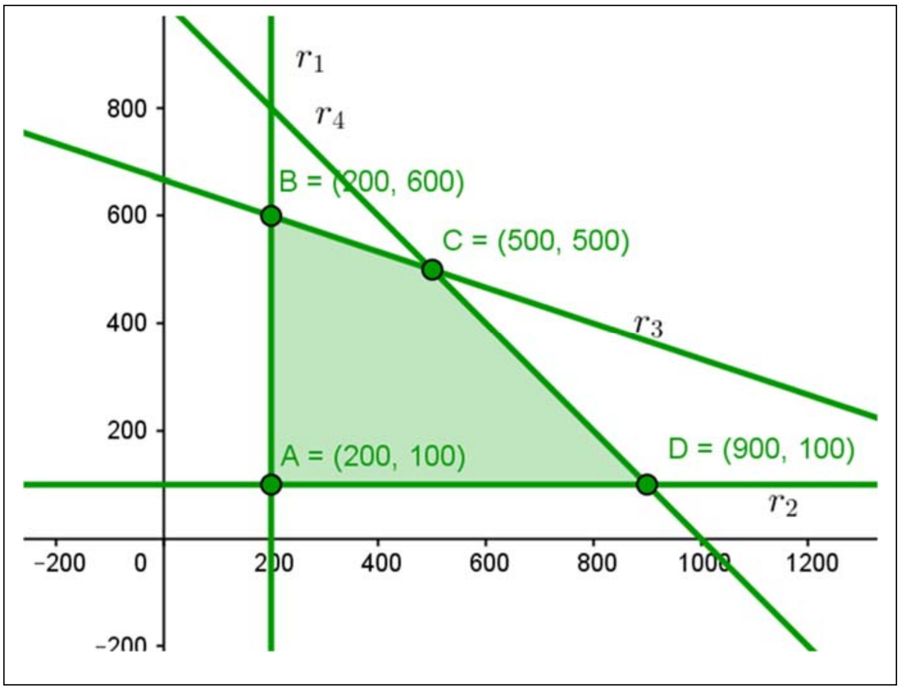
a) Maximizar $z = f(x, y) = 30x + 50y$ sujeto a:

$$\left.\begin{array}{r} r_1: x \geq 200 \\ r_2: y \geq 100 \\ r_3: x + 3y \leq 2000 \\ r_4: x + y \leq 1000 \end{array}\right\}$$

no son necesarias

(redundantes) $(x \geq 0;\ y \geq 0)$

b) Región factible



Autora: Dolores Vázquez Torrón
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

Calculamos los vértices de la región factible resolviendo los sistemas de ecuaciones correspondientes

$$A: r_1 \cap r_2 \quad A(200, 100)$$
$$B: r: 1 \cap r_3 B(200, 600)$$
$$C: r_3 \cap r_4 \quad C(500, 500)$$
$$D: r_2 \cap r_4 \quad D(900, 100)$$

c) Maximizar la función objetivo $f(x, y) = 30x + 50y$

$f(200, 100) = 11\,000$ €

$f(200, 600) = 36\,000$ €

$f(500, 500) = 40\,000$ €

$f(900, 100) = 32\,000$ €

Los ingresos máximos se obtienen vendiendo **500** lotes tipo 1 y **500** lotes tipo 2.

Estos ingresos ascienden a **40 000€**

Autora: Dolores Vázquez Torrón
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

Problema B.2:

Dada la función $f(x)= x^2 - 6x +8$ **a)** Realiza su representación gráfica estudiando sus puntos de corte con los ejes, monotonía y extremos relativos. **b)** Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función y los ejes de coordenadas

Solución:

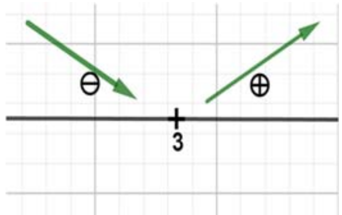
a) $f(x) = x^2 - 6x + 8$

- Puntos de corte con eje OX ($y = 0$) $x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x = 4 \Rightarrow (4, 0) \\ x = 2 \Rightarrow (2, 0) \end{matrix}$

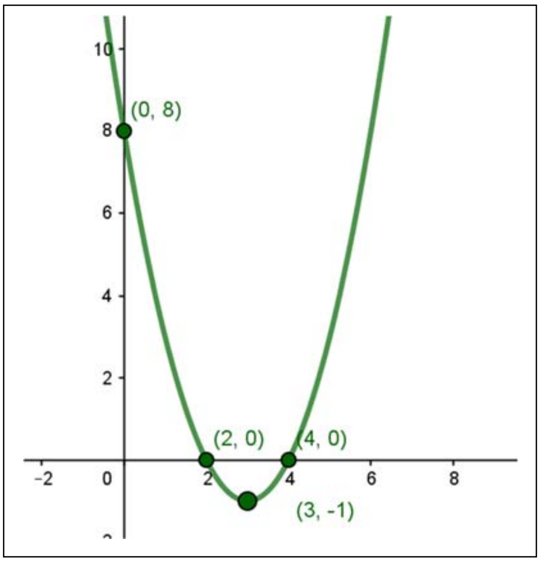
- Puntos de corte con el eje OY ($x = 0$) $\Rightarrow y = 8 \Rightarrow (0, 8)$

- Extremos relativos: $f'(x) = 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$

$f''(x) = 2 > 0 \Rightarrow x = 3, y = -1 \Rightarrow$ mínimo relativo (3, −1).



Otro método calculando el vértice de la parábola:

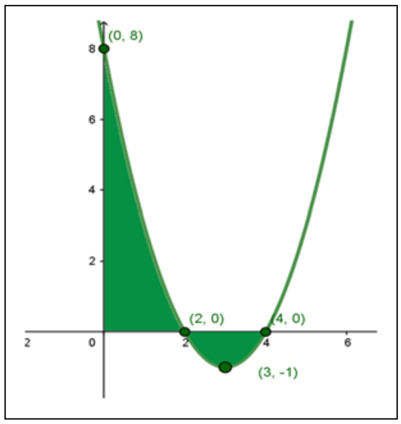


$x_v = \frac{-b}{2a} = 3 \Rightarrow v(3, -1)$ es un mínimo por ser una parábola de coeficiente principal positivo y por lo tanto convexa.

- Monotonía

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow$ decreciente en $(-\infty, 3)$ y creciente en $(3, \infty)$

A la misma conclusión se llega por ser una función continua en R con un mínimo en $x = 3$



b) Área determinada por la función y los ejes de coordenadas

$$A = \int_0^2 (x^2 - 6x + 8)\,dx + \left|\int_2^4 (x^2 - 6x + 8)\,dx\right| = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{6x^2}{3} + 8x\right]_0^2 + \left|\left[\frac{x^3}{3} - \frac{6x^2}{3} + 8x\right]_2^4\right|$$

$$= \frac{20}{3} + \left|\frac{-4}{3}\right| = 8u^2$$

Área = 8 u².

Problema B.3:

En una población, de cada 100 consumidores de agua mineral 30 consumen la marca A, 25 la marca B y el resto la marca C. Además, el 30 % de consumidores de A, el 20 % de los consumidores de B y el 40 % de consumidores de C son mujeres. **a)** Se selecciona al azar un consumidor de agua mineral de esa población: ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer? **b)** Si se ha seleccionado al azar una mujer, halla la probabilidad de que consuma la marca B.

Solución:

	A	B	C	
H (hombre)	21	20	27	68
M (mujer)	9 (30 % de 30)	5 (20 % de 45)	18 (40 % de 45)	32
	30	25	45	100

a) $P(M) = \frac{32}{100} = 0.32$ probabilidad de ser mujer que se obtiene directamente de la tabla

$$\boldsymbol{P(M) = 0.32.}$$

b) $P(B/M) = \frac{P(B \cap M)}{P(M)} = \frac{\frac{5}{100}}{\frac{32}{100}} = 0.15625$

$$\boldsymbol{P(B/M) = 0.15625.}$$

Problema B.4:

Después de años de utilizarlo se sabe que la puntuación de un test de uso habitual en cierta rama industrial sigue una distribución normal de media 74 y desviación típica 16. En una empresa se decide realizarlo a 100 de sus empleados. **a)** ¿Cuál es la probabilidad de que se obtenga una media muestral superior a 78 puntos, de seguirse la pauta genera? **b)** ¿Y la probabilidad de que la media muestral sea inferior a 74 puntos?

Solución:

X puntuación del test

$X \sim N(\mu, \sigma) = N(74, 16) \Rightarrow \bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = N(74, \frac{16}{\sqrt{100}}) \Rightarrow Z = \frac{\bar{X}-74}{1.6} \sim N(0,1)$

a)

$$P(\bar{X} > 78) = P(Z \geq \frac{78-74}{1.6}) = P(Z \geq 2.5)1 - P(z \leq 2.5) = 1 - 0.9938 = 0.0062$$

$$\boldsymbol{P(\bar{X} > 78) = 0.0062}$$

b)

$P(\bar{X} < 74) = P(Z \leq \frac{74-74}{1.6}) = P(Z \leq 0) = 0.5$

$$\boldsymbol{P(\bar{X} < 74) = 0.5}$$

Podría sacarse esta conclusión directamente indicando que la distribución normal es simétrica respecto a la media (74) dejando una probabilidad de 0.5 tanto a su izquierda como a su derecha.

XUNTA DE GALICIA CiUG	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2018–2019** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA de Julio

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el estudiante deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.
Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.
CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.
Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.
TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Problema A.1:(3 puntos)

En una caja hay billetes de 5, 10 y 20 por un valor de 400 €. Se sabe que el número de billetes de 20 € es la tercera parte del total y que el número de billetes de 5 € es inferior en 4 unidades al resto. **a)** Escribe un sistema de ecuaciones que represente el problema. **b)** Escríbelo en forma matricial. **c)** Calcula la matriz inversa de la matriz de coeficientes y resuelve el sistema.

Problema A.2: (3 puntos)

El precio de venta de un electrodoméstico en un centro comercial (en cientos de euros) viene dado por la función $P(t) = \frac{44}{t^2-4t+16} + 2$siendo t el tiempo transcurrido en años desde el momento en que se puso a la venta.

a) Calcula el precio de lanzamiento del producto. ¿En qué momento el precio del electrodoméstico vuelve a ser el mismo que el precio de lanzamiento?

b) Determina los períodos en los que el precio del electrodoméstico ha aumentado y ha disminuido. ¿Cuál ha sido el precio de venta máximo? ¿En qué momento se ha producido?

c) Estudia la tendencia del precio de venta del electrodoméstico con el paso del tiempo.

Problema A.3: (2 puntos)

En una ciudad, el 20 % de las personas que acceden a un centro comercial proceden del centro de la ciudad el 45 % de barrios periféricos y el resto, de pueblos cercanos. Efectúan compras el 60 %, el 75 % y el 50 % respectivamente. **a)** Si un determinado día visitan el centro comercial 2000 personas, ¿cuál es el número esperado que no realiza compras? **b)** Si elegimos al azar una persona que ha realizado alguna compra en este centro comercial, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de un pueblo cercano?

Problema A.4: (2 puntos)

Se tomó una muestra aleatoria de 100 jóvenes y se les midió el nivel de glucosa en sangre obteniendo una media muestral de 105 mg/cm^3. Se sabe que la desviación típica en la población es de 15 mg/cm$^{3.}$

a) Obtén un intervalo de confianza, al 95 % para el nivel medio de glucosa en sangre de la población.

b) ¿Cuánto vale el error máximo en el intervalo anterior?

c) Qué ocurre con la amplitud del intervalo si el nivel de confianza es del 99 %?

Autora: Dolores Vázquez Torrón
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

XUNTA DE GALICIA CiUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2018–2019** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA de Julio

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el estudiante deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.
Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.
CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.
Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.
TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN B

Problema B.1:(3 puntos)

Una bodega produce vinos blancos y tintos. La producción de ambos tipos de vino no debe superar los 90 millones de litros y la producción de vino blanco no debe superar el doble de la de vino tinto ni ser inferior a su mitad. También se sabe que para atender la demanda se deben producir al menos 45 millones de litros. La bodega comercializa el vino blanco a 8 € el litro y el tinto a 6 € el litro.

a) Plantea y representa gráficamente el problema.

b) ¿A cuánto ascienden los ingresos máximos y como se consiguen?

Problema B.2: (3 puntos)

Considera la función $f(x)=\begin{cases} x^2-4x+3 & 0\le x\le 4 \\ 7-x & 4<x\le 7\end{cases}$

a) Representa la función estudiando sus puntos de corte con los ejes, monotonía y extremos relativos. ¿Para qué valores de x, $f(x)\ge 0$?

b) Calcula el área del recinto limitado por los ejes y la parte de la función tal que $f(x)\ge 0$

Problema B.3: (2 puntos)

Para la construcción de un panel luminoso se dispone de un contenedor de 200 bombillas blancas, 150 bombillas azules y 250 rojas. La probabilidad de que una bombilla del contenedor no funcione es 0.01 si es blanca, 0.02 si es azul y el 0.03 si es roja. Se elige al azar una bombilla del contenedor:

a) Calcula la probabilidad de que la bombilla no funcione.

b) Sabiendo que la bombilla elegida funciona, calcula la probabilidad de que dicha bombilla no sea roja

Problema B.4:(2 puntos)

En una muestra aleatoria de n = 25 estudiantes de bachillerato, el 75 % afirman querer realizar estudios universitarios.

a) Calcula un intervalo de confianza para la proporción de estudiantes de bachillerato que quieren realizar estudios universitarios con un nivel de confianza del 90 %.

b) Si se sabe que 8 de cada 10 estudiantes de bachillerato afirman querer realizar estudios universitarios y tomamos una muestra aleatoria a 100 estudiantes, ¿cuál es la probabilidad de que la proporción de estudiantes de la muestra que quieren realizar universitarios sea superior al 65 %?

Autora: Dolores Vázquez Torrón
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

SOLUCIONES OPCIÓN A DE LA CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema A.1:

En una caja hay billetes de 5, 10 y 20 por un valor de 400 €. Se sabe que el número de billetes de 20 € es la tercera parte del total y que el número de billetes de 5 € es inferior en 4 unidades al resto. **a)** Escribe un sistema de ecuaciones que represente el problema. **b)** Escríbelo en forma matricial. **c)** Calcula la matriz inversa de la matriz de coeficientes y resuelve el sistema.

Solución:

a) Llamamos x al número de billetes de 5 euros, y al número de billetes de 10 euros y z al de 20 euros. Escribimos las condiciones del enunciado obteniendo un sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 5x+10y+20z=400 \\ z=\dfrac{x+y+z}{3} \\ x=y+z-4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 5x+10y+20z=400 \\ x+y-2z=0 \\ x-y-z=-4 \end{array}\right\}$$

b) $AX=B$: $\begin{pmatrix} 5 & 10 & 20 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 400 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

c) A^{-1}; $|A|=-65$

$AdjA=\begin{pmatrix} -3 & -1 & -2 \\ -10 & -25 & 15 \\ -40 & 30 & -5 \end{pmatrix}$; $(AdjA)^t=\begin{pmatrix} -3 & -10 & -40 \\ -1 & -25 & 30 \\ -2 & 15 & -5 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{A^{-1}=\frac{(AdjA)^t}{|A|}=\begin{pmatrix} \frac{3}{65} & \frac{10}{65} & \frac{40}{65} \\ \frac{1}{65} & \frac{25}{65} & \frac{-30}{65} \\ \frac{2}{65} & \frac{-15}{65} & \frac{5}{65} \end{pmatrix}}$$

Para resolver el sistema podemos hacerlo por Gauss o como ya está calculada la inversa de A se puede resolver la ecuación matricial

$AX=B \Rightarrow A^{-1}AX=A^{-1}B \Rightarrow X=A^{-1}B$

$$X=\begin{pmatrix} \frac{3}{65} & \frac{10}{65} & \frac{40}{65} \\ \frac{1}{65} & \frac{25}{65} & \frac{-30}{65} \\ \frac{2}{65} & \frac{-15}{65} & \frac{5}{65} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 400 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Solución: 16 billetes de 5 €, 8 billetes de10 € y 12 billetes de 20 €.

Problema A.2:

El precio de venta de un electrodoméstico en un centro comercial (en cientos de euros) viene dado por la función$P(t) = \frac{44}{t^2-4t+16} + 2$ siendo t el tiempo transcurrido en años desde el momento en que se puso a la venta.

a) Calcula el precio de lanzamiento del producto. ¿En qué momento el precio del electrodoméstico vuelve a ser el mismo que el precio de lanzamiento? b) Determina los períodos en los que el precio del electrodoméstico ha aumentado y ha disminuido. ¿Cuál ha sido el precio de venta máximo? ¿En qué momento se ha producido? c) Estudia la tendencia del precio de venta del electrodoméstico con el paso del tiempo.

Solución:

$$P(t) = \frac{44}{t^2 - 4t + 16} + 2$$

a) $P(0)$ = $P(0) = \frac{44}{16} + 2 = 4.75$

El precio de lanzamiento del producto es de 4.75·100 = 475 €

Momento en que el precio del producto vuelve a coincidir con el precio de lanzamiento:

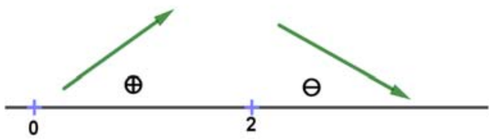
$$\frac{44}{t^2 - 4t + 16} + 2 = 4.75 \Rightarrow 44 = 2.75t^2 - 11t + 44 \;\Rightarrow\; 2.75t^2 - 11t = 0 \Rightarrow\; t(2.75t - 11) = 0$$
$$\Rightarrow t = 0, \qquad t = 4$$

t = 0: año de lanzamiento.

t = 4: El precio de producto vuelva a coincidir con el precio de lanzamiento el cuarto año.

b) Aumento y disminución de precio. Precio máximo

$P'(t) = \frac{-44(2t-4)}{(t^2-4t+16)^2} = 0 \Rightarrow t = 2$



El precio aumenta en los dos primeros años y disminuye a partir del segundo

La función es continua en [0, ∞) por ser racional y $t^2 - 4t + 16 \neq 0, \forall t$ por lo tanto en t = 2, (2º año) se produce el precio máximo de venta. Este precio asciende a la cantidad de 5.66667·100 = 566.67 €

También puede razonarse utilizando la 2ª derivada.

c) Tendencia del precio de venta:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{44}{t^2 - 4t + 16} + 2 = 2$$

La tendencia del precio de venta a lo largo del tiempo es de 2 ·100 = 200 €

Autora: Dolores Vázquez Torrón
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

Problema A.3:

En una ciudad, el 20 % de las personas que acceden a un centro comercial proceden del centro de la ciudad el 45 % de barrios periféricos y el resto, de pueblos cercanos. Efectúan compras el 60 %, el 75 % y el 50 % respectivamente. **a)** Si un determinado día visitan el centro comercial 2000 personas, ¿cuál es el número esperado que no realiza compras? **b)** Si elegimos al azar una persona que ha realizado alguna compra en este centro comercial, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de un pueblo cercano?

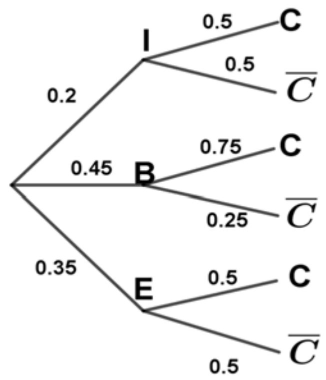
Solución:

I proceden del centro de la ciudad	$P(I)$ = 0.2	$P(C/I)$ = 0.6
B proceden de barrios periféricos	$P(B)$ = 0.45	$P(C/B)$ = 0.45
E proceden de pueblos cercanos	$P(E)$ = 0.35	$P(C/E)$ = 0.5
C realizan compras		

a) $\boldsymbol{P(C)} = P(I)P(C/I) + P(B)P(C/B) + P(E)P(C/E) = 0.2 \cdot 0.6 + 0.45 \cdot 0.75 + 0.35 \cdot 0.5 = 0.6325$

Probabilidad de NO realizar una compra:

$P(\bar{C}) = 1 - 0.6325 = 0.3675$



n = 2000:

np = 2000·0.3675 = 735 personas.

El número esperado de personas que NO realizan compra es de **735** personas.

b) $P(E/C) = \frac{P(E \cap C)}{P(C)} = \frac{0.5 \cdot 0.35}{0.6325} = 0.2767$

La probabilidad de que una persona que realizase una compra proceda de un pueblo cercano es de **0.2767 (27.67 %)**

Problema A.4:

Se tomó una muestra aleatoria de 100 jóvenes y se les midió el nivel de glucosa en sangre obteniendo una media muestral de 105 mg/cm^3. Se sabe que la desviación típica en la población es de 15 mg/cm$^{3.}$

a) Obtén un intervalo de confianza, al 95 % para el nivel medio de glucosa en sangre de la población. **b)** ¿Cuánto vale el error máximo en el intervalo anterior? **c**) Qué ocurre con la amplitud del intervalo si el nivel de confianza es del 99 %?

Solución:

X nivel de glucosa en sangre

x = 105 mg/cm^3 $\quad 1-\alpha = 0.95 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \Rightarrow P(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}})1 - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

σ = 15 mg/cm^3

n = 100

a) $IC_{95\%}\,\mu = (\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = (105 - 1.96 \cdot \frac{15}{\sqrt{100}}, 105 + 1.96 \cdot \frac{15}{\sqrt{100}}) = (102.06; 107.94)$

El intervalo de confianza, al 95 % para el nivel medio de glucosa en sangre de la población es de $\mathbf{(102.06; 107.94)}$

b) Error máximo cometido $z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.94\, mg/cm^3$

Error máximo cometido $\mathbf{2.94\, mg/cm^3}$

c) Si el nivel de confianza aumenta a 0.99 el nivel de significación α disminuye pasando de 0.05 a 0.01 por lo que la probabilidad de equivocarse es menor pero la amplitud de intervalo será mayor y por lo tanto la precisión del estudio sería menor.

$1 - \alpha = 0.99 \Rightarrow\Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.575$

$IC_{99\%}\mu = (105 - 2.575 \cdot \frac{15}{\sqrt{100}}, 105 + 2.575 \cdot \frac{15}{\sqrt{100}}) = (101.1375; 108.8625)$

Amplitud al 95% 5.88

Amplitud al 99 % $\mathbf{7.725}$

SOLUCIONES OPCIÓN B DE LA CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema B.1:

Una bodega produce vinos blancos y tintos. La producción de ambos tipos de vino no debe superar los 90 millones de litros y la producción de vino blanco no debe superar el doble de la de vino tinto ni ser inferior a su mitad. También se sabe que para atender la demanda se deben producir al menos 45 millones de litros. La bodega comercializa el vino blanco a 8 € el litro y el tinto a 6 € el litro. a) Plantea y representa gráficamente el problema b) a cuánto ascienden los ingresos máximos y como se consiguen

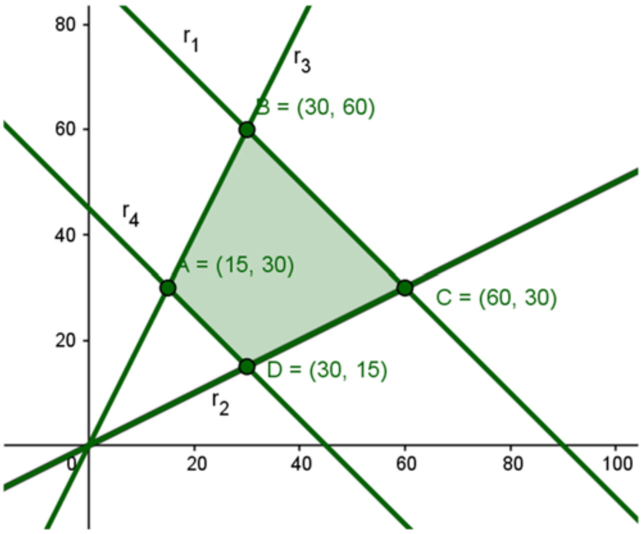
Solución:

x litros de vino blanco (en millones)

y litros de vino tinto (en millones)

maximizar $z = f(x, y) = 8x + 6y$ sujeto a:

$$\left.\begin{array}{r} r_1: x + y \le 90 \\ r_2: x \le 2y \\ r_3: x \ge \frac{y}{2} \\ r_4: x + y \ge 45 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} r_1: x + y \le 90 \\ r_2: x - 2y \le 0 \\ r_3: 2x - y \ge 0 \\ r_4: x + y \ge 45 \\ r_{5.6}: x \ge 0, y \ge 0 \end{array}\right\}$$



Calculamos los vértices de la región factible resolviendo los sistemas correspondientes

	$z = f(x, y) = 8x + 6y$
A(15,30)	f(15,30) = 300
B(30,60)	f(30,60) = 600
C(60,30)	f(60,30) = 660 ← ←←
D(30,15)	f(30,15) = 330

Los ingresos máximos se obtienen vendiendo 60 millones de litros de vino blanco y 30 millones de litros de vino tinto. Los ingresos ascienden a 660 millones de euros.

Problema B.2:

Considera la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & 0 \le x \le 4 \\ 7 - x & 4 < x \le 7 \end{cases}$

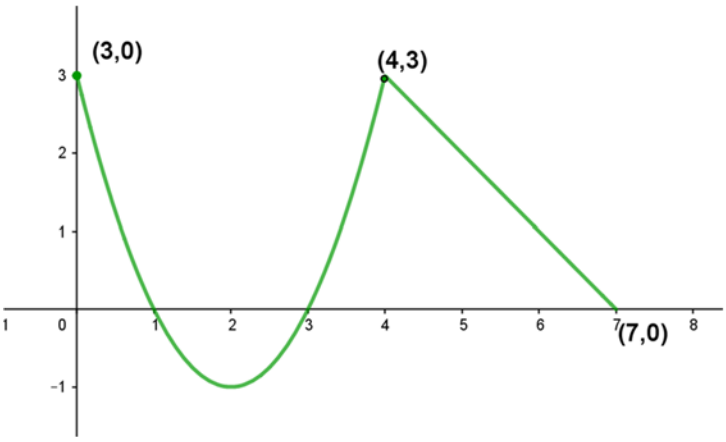
a) Representa la función estudiando sus puntos de corte con los ejes, monotonía y extremos relativos. ¿Para qué valores de x, $f(x) \ge 0$. b) Calcula el área del recinto limitado por los ejes y la parte de la función tal que $f(x) \ge 0$

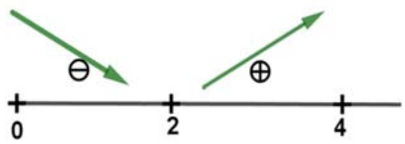
Solución:

a) Representar $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & 0 \le x \le 4 \\ 7 - x & 4 < x \le 7 \end{cases}$

En [0, 4]: Puntos de corte con eje OX (y = 0) $\quad x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x = 1 & (1, 0) \\ x = 3 & (3, 0) \end{matrix}$

Puntos de corte con eje OY (x = 0) $\Rightarrow$ (0, 3)





$f'(x)$ = 2x – 4 = 0 $\Rightarrow x$ = 2

Por ser continua en (0, 4) la función tiene un mínimo en x = 2, y = –1.

También puede razonarse teniendo en cuenta que es el vértice de una parábola convexa (a > 0) o con la derivada 1ª y 2ª.

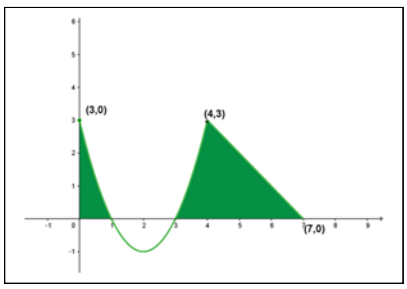
En [4, 7] $\quad y = 7 - x$

Puntos de corte con eje OX (y = 0), 7 - x = 0 $\Rightarrow$ x = 7 $\Rightarrow$ (7, 0)

Puntos de corte con el eje OY (x = 0) $\Rightarrow$(0, 7)

Recta de pendiente negativa $\Rightarrow$ decreciente

$f(x) \ge 0$ en [0,1] U [3,7]



b)

$$A = \int_0^1 (x^2 - 4x + 3)\,dx + \int_3^4 (x^2 - 4x + 3)\,dx + \int_4^7 (7 - x)\,dx =$$

$$\left[\frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 3x\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 3x\right]_3^4 + \left[7x - \frac{x^2}{2}\right]_4^7 = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{9}{2} = \boldsymbol{\frac{43}{6}u^2}$$

Autora: Dolores Vázquez Torrón
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

Problema B.3:

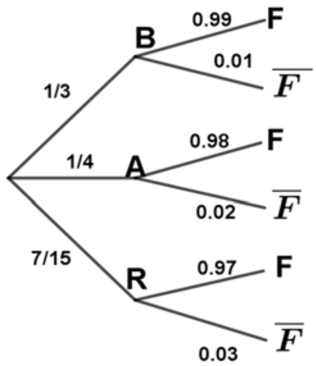
Para la construcción de un panel luminoso se dispone de un contenedor de 200 bombillas blancas, 150 bombillas azules y 250 rojas. La probabilidad de que una bombilla del contenedor no funcione es 0.01 si es blanca, 0.02 si es azul y el 0.03 si es roja. Se elige al azar una bombilla del contenedor: a) Calcula la probabilidad de que la bombilla no funcione. b) Sabiendo que la bombilla elegida funciona, calcula la probabilidad de que dicha bombilla no sea roja

Solución:

200 bombillas blancas $P(B)=\frac{200}{600}=\frac{1}{3}$ $\quad P(\bar{F}/B)=0.01$

150 bombillas azules $P(A)=\frac{150}{600}=\frac{1}{4}$ $\quad P(\bar{F}/A)=0.02$

250 bombillas rojas $P(R)=\frac{250}{600}=\frac{5}{12}$ $\quad P(\bar{F}/R)=0.03$



a) Probabilidad de que no funcione

$$P(\bar{F})=P(B)P(\bar{F}/B)+P(A)P(\bar{F}/A)+P(R)P(\bar{F}/R)=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot 0.01+\frac{1}{4}\cdot 0.02+\frac{5}{12}\cdot 0.03=0.0208$$

Probabilidad de que no funcione es igual a $\mathbf{0.0208}$.

b) Probabilidad de que una bombilla no sea roja, sabiendo que la bombilla elegida funciona:

$$P(\bar{R}/F)=\frac{P(B\cap F)+P(A\cap F)}{P(F)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot 0.99+\frac{1}{4}\cdot 0.98}{1-0.0208}=\frac{0.575}{0.9792}=0.587\ .$$

$$\boldsymbol{P(\bar{R}/F)=0.587}\ .$$

Autora: Dolores Vázquez Torrón
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

Problema B.4:

En una muestra aleatoria de n = 25 estudiantes de bachillerato, el 75 % afirman querer realizar estudios universitarios. **a)** Calcula un intervalo de confianza para la proporción de estudiantes de bachillerato que quieren realizar estudios universitarios con un nivel de confianza del 90 %. **b)** Si se sabe que 8 de cada 10 estudiantes de bachillerato afirman querer realizar estudios universitarios y tomamos una muestra aleatoria a 100 estudiantes, ¿cuál es la probabilidad de que la proporción de estudiantes de la muestra que quieren realizar universitarios sea superior al 65 %?

Solución:

a) $\hat{p} = 0.75 \qquad 1 - \alpha = 0.90 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.05 \Rightarrow P(Z \le z_{\frac{\alpha}{2}}) = 0.95 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.645$

$$IC_{90\%}p = \left(\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}.\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}.\hat{q}}{n}}\right) = \left(0.75 - 1.645\sqrt{\frac{0.75 \cdot 0.25}{25}}, 0.75 + 1.645\sqrt{\frac{0.75 \cdot 0.25}{25}}\right) =$$

$$= (0.6075, 0.8925)$$

El intervalo de confianza para la proporción de estudiantes de bachillerato que quieren realizar estudios universitarios con un nivel de confianza del 90 % es de $(0.6075, 0.8925)$

b) p = 8/10 = 0.8

n = 100 $\quad \hat{p} \sim N\left(p, \sqrt{\frac{pq}{n}}\right) = N\left(0.8; \sqrt{\frac{0.8 \cdot 0.2}{100}}\right) = N(0.8; 0.04) \Rightarrow Z = \frac{\hat{p} - 08}{0.04} \sim N(0, 1)$

$P(\hat{p} \ge 0.65) = P\left(z \ge \frac{0.65 - 0.8}{0.04}\right) = P(z \ge -3.75) = P(z \le 3.75) = 0.9999$ es la probabilidad de que la proporción de estudiantes de la muestra que quieren realizar universitarios sea superior al 65 %.

La probabilidad de que la proporción de estudiantes de la muestra que quieren realizar universitarios sea superior al 65 % es del $\mathbf{0.9999}$.

Autora: Dolores Vázquez Torrón
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo