# Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

# EBAU 2019

# Comunidad autónoma de

# Extremadura



LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Cristina Vidal Brazales

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

CONVOCATORIA ORDINARIA

# Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad de Extremadura

Curso 2018-2019

Materia: Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Tiempo máximo de la prueba: 1h 30 min

**Elegir una opción entre las dos que se proponen a continuación.**

Calificación máxima de la prueba: 10 puntos.

Problema 1: de 0 a 3.5 puntos; Problema 2: de 0 a 3 puntos; Problema 3: de 0 a 3.5 puntos.

## OPCIÓN A

### PROBLEMA 1

Una tienda de electrodomésticos desea adquirir, para su venta posterior, dos tipos de cocinas: vitrocerámicas y de inducción, disponiendo para ello de 3000 euros. Cada cocina vitrocerámica le cuesta 100 euros y cada cocina de inducción 200 euros. El almacén solo tiene espacio para un total de 20 cocinas. El beneficio obtenido por cada vitrocerámica es del 30 % de su precio de coste y el beneficio de cada cocina de inducción es del 25 % también sobre su precio de coste. Además, por razones de mercado el número de cocinas de inducción no puede ser superior a 12. Se pide determinar, justificando las respuestas:

(a) ¿Cuántas cocinas de cada tipo debe comprar para obtener el máximo beneficio? **(3 puntos)**

(b) ¿Cuál es el valor de dicho beneficio máximo? **(0.5 puntos)**

### PROBLEMA 2

Durante la crecida de un río, la Confederación Hidrográfica del Tajo ha estimado que el caudal (en $m^3/s$) ha variado durante las primeras 6 horas de acuerdo con la función:

$$C(t) = 2t^3 - 21t^2 + 60t + 20 \quad (0 \le t \le 6)$$

Se pide, justificando las respuestas:

(a) Determinar las horas de máximo y mínimo caudal. **(1.5 puntos)**

(b) Calcular dichos valores máximo y mínimo. **(0.5 puntos)**

(c) Hallar el valor del área encerrada por la función $C(t)$ y el eje OX entre los valores $t = 3$ y $t = 5$. **(1 punto)**

### PROBLEMA 3

En un bosque hay 50 abetos, 30 cipreses y 120 pinos. Una enfermedad provocada por una oruga afecta a 25 abetos, 9 cipreses y 48 pinos. Se pide, justificando las respuestas:

(a) Calcular la probabilidad de que un pino elegido al azar esté infectado por la oruga. **(1 punto)**

(b) Calcular la probabilidad de que un árbol elegido al azar esté infectado por la oruga. **(1 punto)**

(c) Si se selecciona un árbol al azar y está infectado por la oruga, ¿cuál es la probabilidad de que sea un pino? **(1.5 puntos)**





Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

# Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad de Extremadura

Curso 2018-2019

Materia: Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II — Tiempo máximo de la prueba: 1h 30 min

## OPCIÓN B

### PROBLEMA 1

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}$$

se pide, justificando las respuestas:

(a) Determinar para qué valor del parámetro $x$ no existe $(A \cdot B)^{-1}$. **(2 puntos)**

(b) Hallar la matriz inversa de $A \cdot B$ para $x = 1$. **(1.5 puntos)**

### PROBLEMA 2

El precio de cada acción de una determinada empresa oscila entre 2 y 8 euros. La facturación de dicha empresa en bolsa depende del precio de la acción y viene dada por la función:

$$F(x) = \begin{cases} 3 + Ax & \text{si } 2 \le x \le 5 \\ 53 + 2x + Bx^2 & \text{si } 5 < x \le 8 \end{cases}$$

siendo $F(x)$ la facturación de la empresa en bolsa (en miles de euros) y $x$ el precio de la acción (en euros). Se sabe que para un precio de la acción de 5 euros la facturación es de 13 mil euros y que la función es continua. Se pide, justificando las respuestas:

(a) Determinar las constantes $A$ y $B$. **(2 puntos)**

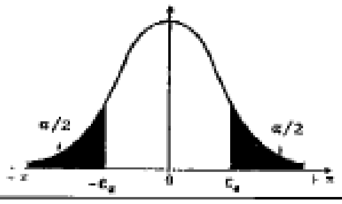
(b) Calcular las asíntotas verticales de la función $F(x)/(x^2 - 3x - 4)$ en el intervalo $[2, 5]$. **(1 punto)**

### PROBLEMA 3

El tiempo, en horas, que tarda cierta compañía telefónica en hacer efectiva la portabilidad de un número de teléfono sigue una distribución normal con desviación típica 24 horas. Se pregunta a 100 clientes por el tiempo invertido en la portabilidad, obteniéndose una media de 36 horas. Se pide, justificando las respuestas:

(a) Calcular el intervalo de confianza al 95 % para la media de tiempo que tarda dicha compañía en hacer efectiva la portabilidad. **(2.5 puntos)**

(b) ¿Cuál debe ser el tamaño muestral para que el intervalo tenga una longitud de 5? **(1 punto)**




| α | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | ∞ | 2.576 | 2.326 | 2.170 | 2.054 | 1.960 | 1.881 | 1.812 | 1.751 | 1.695 |
| 0.1 | 1.645 | 1.598 | 1.555 | 1.514 | 1.476 | 1.440 | 1.405 | 1.372 | 1.341 | 1.311 |
| 0.2 | 1.282 | 1.254 | 1.227 | 1.200 | 1.175 | 1.150 | 1.126 | 1.103 | 1.080 | 1.058 |
| 0.3 | 1.036 | 1.015 | 0.994 | 0.974 | 0.954 | 0.935 | 0.915 | 0.096 | 0.878 | 0.860 |
| 0.4 | 0.842 | 0.824 | 0.806 | 0.789 | 0.772 | 0.755 | 0.739 | 0.722 | 0.706 | 0.690 |



Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

# SOLUCIONES OPCIÓN A

CONVOCATORIA ORDINARIA

***Problema A.1:***

Una tienda de electrodomésticos desea adquirir, para su venta posterior, dos tipos de cocinas: vitrocerámicas y de inducción, disponiendo para ello de 3000 euros. Cada cocina vitrocerámica cuesta 100 euros y cada cocina de inducción 200 euros. El almacén solo tiene espacio para un total de 20 cocinas. El beneficio obtenido por cada vitrocerámica es del 30% de su precio de coste y el beneficio de cada cocina de inducción es del 25% también sobre su precio de coste. Además, por razones de mercado el número de cocinas de inducción no puede ser superior a 12. Se pide determinar, justificando las respuestas:

(a) ¿Cuántas cocinas de cada tipo debe comprar para obtener el máximo beneficio?

(b) ¿Cuál es el valor de dicho beneficio máximo?

***Solución:***

Se trata de un problema de programación lineal con dos variables.

Completemos la tabla:

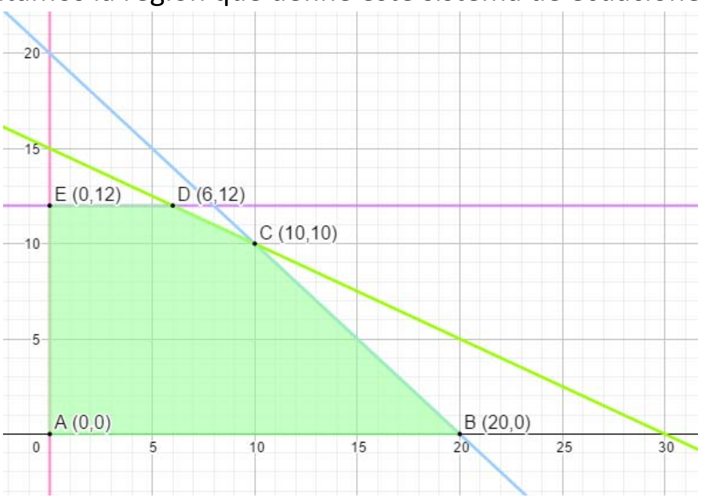
| Tipo de cocina | Coste (€) | Almacén | Beneficio (€) |
|---|---|---|---|
| Vitrocerámica (x unidades) | 100 | - | 30% de 100 = 30 |
| Inducción (y unidades) | 200 | $\leq 12$ | 25% de 200 = 50 |
| ¿De cuánto disponemos? | 3000 | 20 | - |

Si traducimos a ecuaciones dichas restricciones obtenemos este sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x \geq 0 \quad y \geq 0 \\ y \leq 12 \\ x + y \leq 20 \\ 100x + 200y \leq 3000 \quad (x + 2y \leq 30) \end{cases}$$

Por otro lado, la función objetivo es la siguiente: Beneficio: $30x + 50y = B(x, y)$

Representamos la región que define este sistema de ecuaciones:



Para obtener los vértices resolvemos los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \to \mathrm{A}(0,\ 0) \qquad \mathrm{B)}\ \begin{cases} x + y = 20 \\ \quad y = 0 \end{cases} \to \mathrm{B}(20,\ 0) \qquad \mathrm{C)}\ \begin{cases} x + y = 20 \\ x + 2y = 30 \end{cases} \to \mathrm{C}(10,\ 10)$$

$$D \begin{cases} x + 2y = 30 \\ \quad y = 12 \end{cases} \to \mathrm{D}(6,\ 12) \qquad \mathrm{E)}\ \begin{cases} x = 0 \\ y = 12 \end{cases} \to \mathrm{E}(0,\ 12)$$

Los vértices de la región son: A(0, 0), B(20, 0), C(10, 10), D(6, 12) y E(0, 12).

Calculemos para cada vértice el valor de la ganancia: $\boldsymbol{B(x, y) = 30x + 50y}$

- $B(0, 0) = 30 \cdot 0 + 50 \cdot 0 = 0$
- $B(20, 0) = 30 \cdot 20 + 50 \cdot 0 = 600$
- $B(10, 10) = 30 \cdot 10 + 50 \cdot 10 = 800$
- $B(6, 12) = 30 \cdot 6 + 50 \cdot 12 = 780$
- $B(0, 12) = 30 \cdot 0 + 50 \cdot 12 = 600$

a) Por tanto, para obtener el máximo beneficio deberá adquirir **10 cocinas vitrocerámicas y 10 cocinas de inducción.**

b) El beneficio máximo tiene un valor de **800 euros.**

***Problema A.2:***

Durante la crecida de un río, la Confederación Hidrográfica del Tajo ha estimado que el caudal (en $m^3/s$) ha variado durante las primeras 6 horas de acuerdo con la función:

$$C(t) = 2t^3 - 21t^2 + 60t + 20 \qquad (0 \le t \le 6)$$

Se pide, justificando las respuestas:

(a) Determinar las horas de máximo y mínimo caudal.

(b) Calcular dichos valores máximo y mínimo.

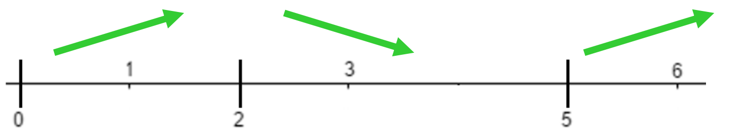
(c) Hallar el valor del área encerrada por la función $C(t)$ y el eje $OX$ entre los valores $t = 3$ y $t = 5$.

***Solución:***

Vamos a estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función igualando su derivada a 0:

$$C'(t) = 0 = 6t^2 - 42t + 60 \Leftrightarrow t^2 - 7t + 10 = 0$$

Resolviendo dicha ecuación obtenemos los valores críticos $t = 5$ y $t = 2$. Representamos estos valores en la recta real y vemos qué ocurre con el crecimiento y decrecimiento de la función para los tres intervalos que surgen:




$C'(1) > 0$ $\qquad$ $C'(3) < 0$ $\qquad$ $C'(6) > 0$

Por tanto, podemos afirmar que para $t = 2$ la función presenta un máximo relativo y para $t = 5$ la función presenta un mínimo relativo. Podemos verlo con el estudio de la segunda derivada de la función.

$$C''(t) = 12t - 42$$

Veamos qué signo toman los puntos críticos $t = 2$ y $t = 5$ en la segunda derivada:

- $C''(2) = 12 \cdot 2 - 42 < 0$, es decir, hay un máximo relativo en $t = 2$.
- $C''(5) = 12 \cdot 5 - 42 > 0$, es decir, hay un mínimo relativo en $t = 5$.

Sustituimos los valores 2, 5 y los extremos 0 y 6 en la expresión de la función para obtener el caudal máximo y mínimo y sus valores:

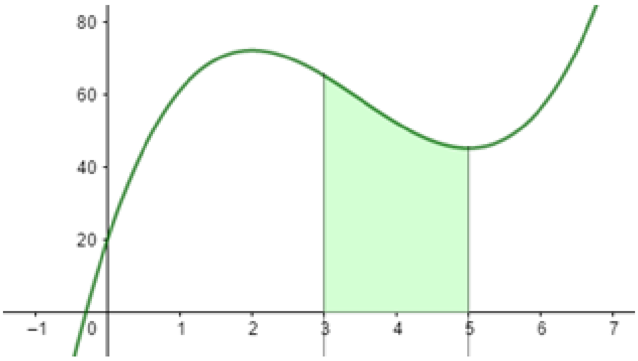
- $C(0) = 2 \cdot 0^3 - 21 \cdot 0^2 + 60 \cdot 0 + 20 = 20\ m^3/s$
- $C(2) = 2 \cdot 2^3 - 21 \cdot 2^2 + 60 \cdot 2 + 20 = 72\ m^3/s$
- $C(5) = 2 \cdot 5^3 - 21 \cdot 5^2 + 60 \cdot 5 + 20 = 45\ m^3/s$
- $C(6) = 2 \cdot 6^3 - 21 \cdot 6^2 + 60 \cdot 6 + 20 = 56\ m^3/s$

(a) **El mínimo caudal es para $t = 0$ y el máximo para $t = 2$**

(b) El mínimo caudal es de **$20\ m^3/s$** y el máximo es de **$72\ m^3/s$**

(c) El área del recinto delimitado por la curva, el eje de abscisas $OX$ y las rectas $x = 3$ y $x = 5$ viene dado por el valor de la siguiente integral:

$$A = \int_3^5 (2t^3 - 21t^2 + 60t + 20)dt = \left[\frac{1}{2}t^4 - 7t^3 + 30t^2 + 20t\right]_3^5 = \boxed{106\ u^2}$$




**Área = 106 u².**

***Problema A.3:***

En un bosque hay 50 abetos, 30 cipreses y 120 pinos. Una enfermedad provocada por una oruga afecta a 25 abetos, 9 cipreses y 48 pinos. Se pide, justificando las respuestas:

(a) Calcular la probabilidad de que un pino elegido al azar esté infectado por la oruga.

(b) Calcular la probabilidad de que un árbol elegido al azar esté infectado por la oruga.

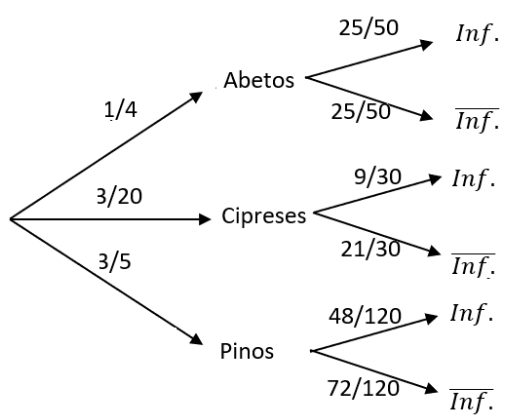
(c) Si se seleccionan un árbol al azar y está infectado por la oruga, ¿cuál es la probabilidad de que sea un pino?

***Solución:***

Construimos un diagrama en árbol y posteriormente responderemos las preguntas:

El total de árboles es de 200, luego:

$P(\text{abeto}) = \frac{50}{200} = \frac{1}{4}$  $P(\text{ciprés}) = \frac{30}{200} = \frac{3}{20}$  $P(\text{pino}) = \frac{120}{200} = \frac{3}{5}$




a) $P(Infectado/Pino) = \frac{48}{120} = \mathbf{0.4}$

b) Aplicamos el Teorema de la Probabilidad Total:

$$P(Infectado) = P(Ab)\cdot P(Inf./Ab) + P(Cip)\cdot P(Inf./Cip) + P(Pino)\cdot P(Inf./Pino) =$$

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{25}{50} + \frac{3}{20}\cdot\frac{9}{30} + \frac{3}{5}\cdot\frac{48}{120} = \frac{72}{200} = \mathbf{0.36}$$

La probabilidad de que un carbol esté infectado es de 0.36.

Aplicando el Teorema de Bayes:

$$P(Pino/Inf.) = \frac{P(Pino)\cdot P(Inf./Pino)}{P(Infectado)} = \frac{\frac{3}{5}\cdot\frac{48}{120}}{\frac{72}{200}} = \frac{48}{72} \cong \mathbf{0.67}$$

$P(Pino/Inf.) \cong \mathbf{0.67}$


Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

# SOLUCIONES OPCIÓN B

CONVOCATORIA ORDINARIA

***Problema B.1:***

Dadas las matrices:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{x} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

se pide, justificando las respuestas:

(a) Determinar para qué valor del parámetro $x$ no existe $(A{\cdot}B)^{-1}$.

(b) Hallar la matriz inversa de $A \cdot B$ para $x = 1$.

***Solución:***

La inversa de la matriz $(\mathrm{A{\cdot}B})$ no existe cuando el determinante de esta matriz sea igual a 0.

Calculamos los elementos de la matriz $\mathrm{A{\cdot}B}$:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-1 & 3 \\ -x & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante de la matriz $\mathrm{A{\cdot}B}$:

$$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} 2x-1 & 3 \\ -x & 1 \end{vmatrix} = 2x - 1 + 3x = 5x - 1$$

Luego $|A \cdot B| = 0 \leftrightarrow 5x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}$

No existe $(A{\cdot}B)^{-1}$ para $\boldsymbol{x} = 1/5$.

(a) Para $x = 1$ tenemos la siguiente matriz $A{\cdot}B$:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

Como $(A \cdot B)^{-1} = \frac{1}{|\mathrm{A \cdot B}|} \cdot \ \mathrm{Adj}(A \cdot B)^t$,

$$(A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \mathrm{Adj}(A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 3 = 4$$

Y, por tanto, se tiene que la matriz inversa es:

$$(A \cdot B)^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} & -\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}} \\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} \end{pmatrix}$$

### *Problema B.2:*

El precio de cada acción de una determinada empresa oscila entre 2 y 8 euros. La facturación de dicha empresa en bolsa depende del precio de la acción y viene dada por la función:

$$\boldsymbol{F(x)} = \begin{cases} \boldsymbol{3 + Ax} & \boldsymbol{si\ 2 \le x \le 5} \\ \boldsymbol{53 + 2x + Bx^2} & \boldsymbol{si\ 5 \le x \le 8} \end{cases}$$

Siendo $F(x)$ la facturación de la empresa en bolsa (en miles de euros) y $\boldsymbol{x}$ el precio de la acción (en euros). Se sabe que para un precio de la acción de 5 euros la facturación es de 13 mil euros y que la función es continua. Se pide, justificando las respuestas:

(a) Determinar las constantes $A$ y $B$.

(b) Calcular las asíntotas verticales de la función $F(x)/(x^2 - 3x - 4)$ en el intervalo $[2, 5]$.

### *Solución:*

(a) Como $F$ es continua, los límites laterales en $x = 5$ deben coincidir y ser iguales al valor de la función en dicho punto. El valor de la función cuando $x = 5$ es (de acuerdo con el enunciado): $F(5) = 13$.

Por tanto:
$F(5) = 3 + 5A = 13$. Despejando tenemos que $\boldsymbol{A = 2}$

Por otro lado:

$$\lim_{x\to 5^-} F(x) = \lim_{x\to 5^+} F(x)$$

$$\lim_{x\to 5^-} F(x) = \lim_{x\to 5^-} (3 + Ax) = 3 + 5A = 3 + 5 \cdot 2 = 13$$

$$\lim_{x\to 5^+} F(x) = \lim_{x\to 5^+} (53 + 2x + Bx^2) = 63 + 25B$$

Igualamos los límites laterales y obtenemos:

$63 + 25B = 13$. Despejando tenemos que $\boldsymbol{B = -2}$

Las constantes deben valer $A = 2$ y $B = -2$.

(b) La función en $[2, 5]$ es $G(x) = \frac{3+2x}{x^2-3x-4}$

Calculamos los valores de $x$ que igualan el denominador a $0$:

$x^2 - 3x - 4 = 0 \rightarrow x_1 = 4$ y $x_2 = -1 \notin [2, 5]$

Por tanto, la asíntota vertical es $\boldsymbol{x = 4}$.

La única asíntota vertical del intervalo es $x = 4$.

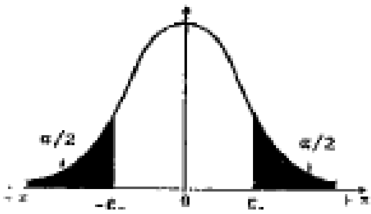

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

***Problema B.3:***

El tiempo, en horas, que tarda cierta compañía telefónica en hacer efectiva la portabilidad de un número de teléfono, sigue una distribución normal con desviación típica 24 horas. Se pregunta a 100 clientes por el tiempo invertido en la portabilidad, obteniéndose una media de 36 horas. Se pide, justificando las respuestas:

(a) Calcular el intervalo de confianza al 95% para la media de tiempo que tarda dicha compañía en hacer efectiva la portabilidad.

(b) ¿Cuál debe ser el tamaño muestral para que el intervalo tenga una longitud de 5?




| α | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | ∞ | 2.576 | 2.326 | 2.170 | 2.054 | 1.960 | 1.881 | 1.012 | 1.751 | 1.695 |
| 0.1 | 1.645 | 1.598 | 1.555 | 1.514 | 1.476 | 1.440 | 1.405 | 1.372 | 1.341 | 1.311 |
| 0.2 | 1.282 | 1.254 | 1.227 | 1.200 | 1.175 | 1.150 | 1.126 | 1.103 | 1.080 | 1.058 |
| 0.3 | 1.036 | 1.015 | 0.994 | 0.974 | 0.954 | 0.935 | 0.915 | 0.096 | 0.878 | 0.860 |
| 0.4 | 0.842 | 0.824 | 0.806 | 0.789 | 0.772 | 0.755 | 0.739 | 0.722 | 0.706 | 0.690 |

***Solución:***

Se trata de un problema de cálculo de un intervalo de confianza de la media para una población con distribución normal conociendo el tamaño de la muestra ($n$ = 100) y el tiempo medio ($\bar{x}$ = 36).

Sea $X$: tiempo en hacer la portabilidad
Disponemos de esta información:

- Tamaño de la muestra $n$ = 100
- Desviación típica $\sigma$ = 24
- Media de la muestra $\bar{x}$ = 36

$X: N\left(\bar{x}, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N(36, 2.4)$ tras normalizar, $z = \frac{x-\bar{x}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ tenemos $Z: N(0,1)$

(a) Se nos pide que calculemos $P(-a \le z \le a) = 0.95$, es decir, $P(z \le a) = 0.975 \Rightarrow a$ = 3.3
De manera que $P(-3.3 \le z \le 3.3) = 0.95$

Destipificando,

$$P\left(-3.3 \le \frac{x-\bar{x}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le 3.3\right) = 0.95 \Leftrightarrow P\left(\bar{x} - 3.3 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le x \le \bar{x} + 3.3 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0.95$$

Por tanto, el intervalo de tiempo medio en que se hace efectiva la portabilidad al 95 % de confianza es:

$$\left(\bar{x} - 3.3 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ;\ \bar{x} + 3.3 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(36 - 3.3 \cdot \frac{24}{\sqrt{100}}\ ;\ 36 + 3.3 \cdot \frac{24}{\sqrt{100}}\right) = \mathbf{(28.08,\ 43.92)}$$

(b) Para que el intervalo tenga una amplitud de longitud 5, $3.3 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ deberá ser igual a 2.5.

De donde despejando $n$ tenemos el tamaño de muestra buscado:

$n = \left(\frac{3.3 \cdot 24}{2.5}\right)^2 \cong \mathbf{1004}$ El tamaño muestral debe ser de 1004 personas.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

# Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad de Extremadura

Curso 2018-2019

Materia: Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II — Tiempo máximo de la prueba: 1h 30 min

**Elegir una opción entre las dos que se proponen a continuación.**

Calificación máxima de la prueba: 10 puntos.

Problema 1: de 0 a 3.5 puntos; Problema 2: de 0 a 3 puntos; Problema 3: de 0 a 3.5 puntos.

## OPCIÓN A

### PROBLEMA 1

Un taller industrial fabrica dos clases de motores A y B. Cada motor de clase A requiere 2 horas de montaje y 1 hora de reglaje, con un beneficio de 220 euros y cada motor de clase B, 3 horas de montaje y 1/2 hora de reglaje con un beneficio de 280 euros.

Si solo se dispone cada día de 300 horas para el montaje de motores y de 120 horas para su reglaje y el número de motores de la clase B no puede ser superior a 80, se pide, justificando las respuestas:

(a) ¿Cuántos motores de cada clase se deben fabricar para obtener el máximo beneficio? **(3 puntos)**

(b) ¿Cuál es el valor de dicho beneficio máximo? **(0.5 puntos)**

### PROBLEMA 2

La potencia requerida por la maquinaria eléctrica de una empresa durante las 10 horas de su funcionamiento viene dada por la expresión:

$$P(t) = -t^3 + 15t^2 - 48t + 50 \quad (0 \leq t \leq 10)$$

donde $t$ es el tiempo expresado en horas y $P(t)$ la potencia expresada en kilowatios (kw). Se pide, justificando las respuestas:

(a) Determinar a qué horas se producen el máximo y el mínimo de esta potencia. **(1.5 puntos)**

(b) Calcular dichos valores máximo y mínimo. **(0.5 puntos)**

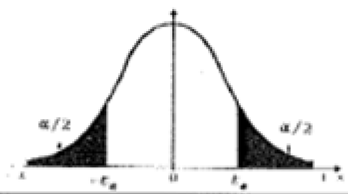
(c) Calcular el área encerrada por la función $P(t)$ y el eje OX entre $t = 1$ y $t = 5$. **(1 punto)**

### PROBLEMA 3

Se realiza un estudio sobre el tiempo de reacción de los conductores ante un imprevisto. Se considera una población de 10000 conductores, de los cuales 5000 tienen una antigüedad superior a 10 años, 3000 tienen una antigüedad entre 3 y 10 años y el resto tienen una antigüedad inferior a 3 años. Se selecciona una muestra de 500 conductores mediante muestreo estratificado con afijación proporcional. Se pide, justificando la respuesta:

(a) ¿Cuántos conductores de cada uno de los estratos mencionados anteriormente se incluirán en la muestra? **(1 punto)**

(b) En los conductores con una antigüedad de menos de 3 años que resultan elegidos en la muestra, se observa que el tiempo medio de reacción es de 1.2 segundos. Supuesta que dicha variable tiene distribución normal con desviación típica 0.3 segundos, proporcionar un intervalo de confianza al 95 % para el tiempo medio de reacción de estos conductores. **(2.5 puntos)**




| α | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | - | 2.576 | 2.326 | 2.170 | 2.054 | 1.960 | 1.881 | 1.812 | 1.751 | 1.695 |
| 0.1 | 1.645 | 1.598 | 1.555 | 1.514 | 1.476 | 1.440 | 1.405 | 1.372 | 1.341 | 1.311 |
| 0.2 | 1.282 | 1.254 | 1.227 | 1.200 | 1.175 | 1.150 | 1.126 | 1.103 | 1.080 | 1.058 |
| 0.3 | 1.036 | 1.015 | 0.994 | 0.974 | 0.954 | 0.935 | 0.915 | 0.896 | 0.878 | 0.860 |
| 0.4 | 0.842 | 0.824 | 0.806 | 0.789 | 0.772 | 0.755 | 0.739 | 0.722 | 0.706 | 0.690 |



Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

# Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad de Extremadura

Curso 2018-2019

Materia: Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II — Tiempo máximo de la prueba: 1h 30 min

## OPCIÓN B

### PROBLEMA 1

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad e \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se pide, justificando las respuestas:

(a) Hallar el valor de $b$ para el que no existe la matriz inversa de $A$. **(1.5 puntos)**

(b) Para $b = 1$, hallar la matriz $X$ que verifique $A.X = A^3 - I$. **(2 puntos)**

### PROBLEMA 2

En un cultivo de bacterias desarrollado durante 6 horas se produce cierta sustancia de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$S(t) = At^3 - 2Bt^2 + 5t, \; 1 \leq t \leq 6$$

donde $S(t)$ es la cantidad de sustancia producida (en ml) y $t$ el tiempo de desarrollo del cultivo. Se sabe que la producción de la sustancia es mínima a las 5 horas, momento en el cual se inhibe la actividad bacteriana y la producción es de 0 ml.

(a) Determinar las constantes $A$ y $B$. Justificar la respuesta. **(2 puntos)**

(b) Calcular las asíntotas de la función $S(t)/(t^2(t-2))$ en el intervalo $(1, \infty)$. **(1 punto)**

### PROBLEMA 3

En una bodega, el 50 % del vino que se fabrica es tinto, el 30 % blanco y el resto rosado. Una vez en las barricas se vuelve agrio el 5 % del vino tinto, el 10 % del vino blanco y el 7 % del vino rosado. mediante muestreo estratificado con afijación proporcional

(a) Calcular la probabilidad de que una barrica elegida al azar contenga vino blanco y que además dicho vino esté agrio. **(1 punto)**

(b) Calcular la probabilidad de que una barrica de vino tinto contenga vino con buen sabor. **(1 punto)**

(c) Si se selecciona al azar una barrica y el vino está agrio, ¿cuál es la probabilidad de que contenga vino tinto? **(1.5 puntos)**

# SOLUCIONES OPCIÓN A

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

***Problema A.1:***

Un taller industrial fabrica dos clases de motores $A$ y $B$. Cada motor de clase $A$ requiere 2 horas de montaje y 1 hora de reglaje, con un beneficio de 220 euros y cada motor de clase $B$, 3 horas de montaje y 1/2 hora de reglaje con un beneficio de 280 euros.
Si solo se dispone cada día de 300 horas para el montaje de motores y de 120 horas para su reglaje y el número de motores de la clase $B$ no puede ser superior a 80, se pide, justificando las respuestas:

(a) ¿Cuántos motores de cada clase se deben fabricar para obtener el máximo beneficio?

(b) ¿Cuál es el valor de dicho beneficio máximo?

***Solución:***

Se trata de un problema de programación lineal con dos variables.

Completamos la siguiente tabla:

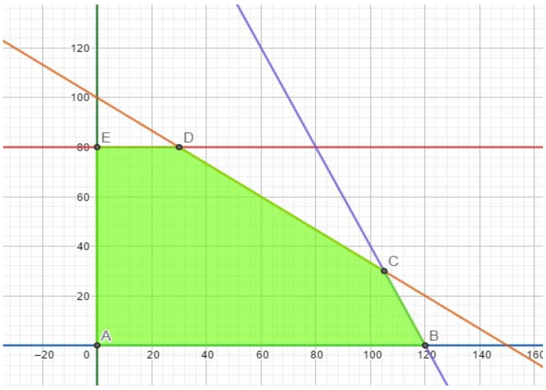
| Tipo de motor | Montaje (horas) | Reglaje (horas) | Beneficio (€) | Unidades |
|---|---|---|---|---|
| A (x unidades) | 2 | 1 | 220 | - |
| B (y unidades) | 3 | 1/2 | 280 | ≤ 80 |
| ¿De cuánto disponemos? | 300 | 120 | - | - |

Si traducimos a ecuaciones dichas restricciones obtenemos este sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x \geq 0 \quad y \geq 0 \\ y \leq 80 \\ 2x + 3y \leq 300 \\ x + \frac{1}{2}y \leq 120 \quad (2x + y \leq 240) \end{cases}$$

Por otro lado, la función objetivo es la siguiente: $B(x, y) = 220x + 280y$

Representamos la región que define el sistema de inecuaciones:




Para obtener los vértices de la región factible resolvemos los siguientes sistemas de ecuaciones:

$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \text{A}(0, 0)$

B) $\begin{cases} x + \frac{1}{2}y = 120 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \text{B}(120, 0)$

C) $\begin{cases} 2x + 3y = 300 \\ x + \frac{1}{2}y = 120 \end{cases} \rightarrow \text{C}(105, 30)$

*D)* $\begin{cases} 2x + 3y = 300 \\ \quad\quad y = 80 \end{cases}$ → *D(30, 80)*

*E)* $\begin{cases} x = 0 \\ y = 80 \end{cases}$ → *E(0, 80)*

Calculemos para cada vértice el valor de la ganancia: $B(x, y) = 220x + 280y$

- $B(0,0) = 280 \cdot 0 + 280 \cdot 0 = 0$
- $B(120, 0) = 220 \cdot 120 + 280 \cdot 0 = 26400$
- $B(105, 30) = 220 \cdot 105 + 280 \cdot 30 = 31500$
- $B(30, 80) = 220 \cdot 30 + 280 \cdot 80 = 29000$
- $B(0, 80) = 220 \cdot 0 + 280 \cdot 80 = 22400$

b) Por tanto, para obtener el máximo beneficio deberá fabricar **105 motores de clase $A$ y 30 motores de clase $B$.**

a) El beneficio máximo tiene un valor de **31 500 euros**.



Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

### *Problema A.2:*

La potencia requerida por la maquinaria eléctrica de una empresa durante las 10 horas de su funcionamiento viene dada por la expresión:

$$P(t) = -t^3 + 15t^2 - 48t + 50 \qquad (0 \leq t \leq 10)$$

donde $t$ es el tiempo expresado en horas y $P(t)$ la potencia expresada en kilovatios (kw). Se pide, justificando las respuestas:

(a) Determinar a qué horas se producen el máximo y el mínimo de esta potencia.

(b) Calcular dichos valores máximo y mínimo.

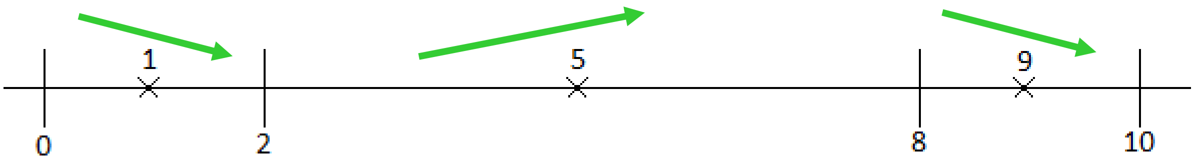
(c) Calcular el área encerrada por la función $P(t)$ y el eje $OX$ entre $t = 1$ y $t = 5$.

### *Solución:*

Estudiamos el crecimiento y decrecimiento de la función. Para ello derivamos la función $P(t)$ y la igualamos a 0:

$$P'(t) = -3t^2 + 30t - 48 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \;\; o \;\; t = 8$$

Resolviendo dicha ecuación obtenemos los valores críticos $t$ = 2 y $t$ = 8. Representamos estos valores en la recta real y vemos qué ocurre con el crecimiento y decrecimiento de la función para los tres intervalos que surgen:




$P'(1) < 0$ $\qquad$ $P'(5) > 0$ $\qquad$ $P'(9) < 0$

Por tanto, podemos afirmar que para $t = 2$ hay un mínimo relativo y para $t = 8$ hay un máximo relativo. Comprobamos con el estudio de la segunda derivada de la función.

$$P''(t) = -6t + 30$$

Veamos qué signo toman los puntos críticos $t = 2$ y $t = 8$ en la segunda derivada:

- $P''(2) = -6 \cdot 2 - 30 > 0$, es decir, hay un mínimo relativo en $t = 2$.
- $P''(8) = -6 \cdot 8 - 42 < 0$, es decir, hay un máximo relativo en $t = 8$.

Sustituimos los valores 2 y 8 y los extremos 0 y 10 en la expresión de la función para obtener los valores del máximo y del mínimo:

- $P(0) = -0^3 + 15 \cdot 0^2 - 48 \cdot 0 + 50 = 50$ kw.
- $P(2) = -2^3 + 15 \cdot 2^2 - 48 \cdot 2 + 50 = 6$ kw.


Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

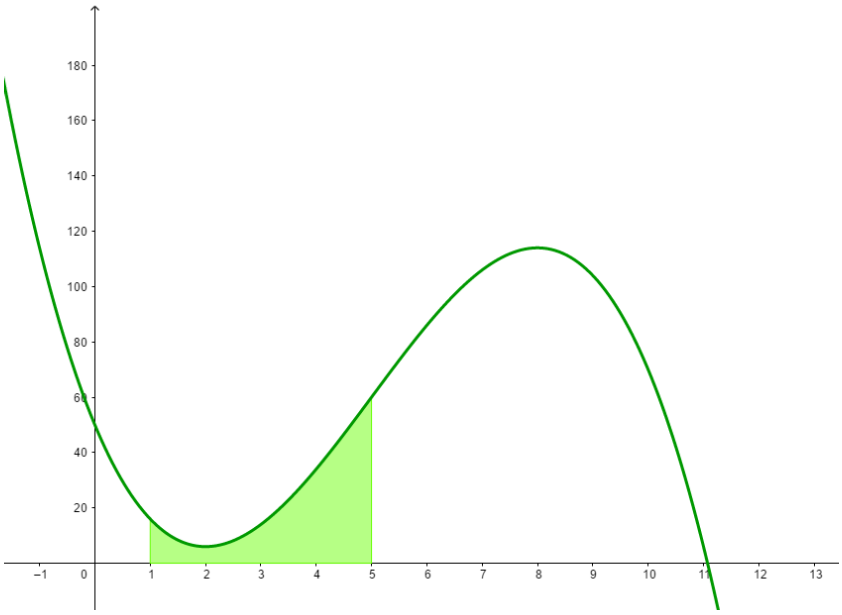
- $P(8) = -8^3 + 15 \cdot 8^2 - 48 \cdot 8 + 50 = 114$ kw.
- $P(10) = -10^3 + 15 \cdot 10^2 - 48 \cdot 10 + 50 = 70$ kw.

La potencia mínima se alcanza a las 2 horas y la potencia máxima a las 8 horas.

La potencia mínima es de **6 kw** y la mínima es de **114 kw**.

***c)*** El área del recinto delimitado por la curva, el eje de abscisas $OX$ y las rectas $t = 1$ y $t = 5$ viene dado por el valor de la siguiente integral:

$$A = \int_1^5 (-t^3 + 15t^2 - 48t + 50)dt = \left[-\frac{1}{4}t^4 + 5t^3 - 24t^2 + 50t\right]_1^5 = 88\ u^2$$




**Área = 88 u².**

***Problema A.3:***

Se realiza un estudio sobre el tiempo de reacción de los conductores ante un imprevisto. Se considera una población de 10 000 conductores, de los cuales 5 000 tienen una antigüedad superior a 10 años, 3 000 tienen una antigüedad entre 3 y 10 años y el resto tienen una antigüedad inferior a 3 años. Se selecciona una muestra de 500 conductores mediante muestreo estratificado con afijación proporcional. Se pide, justificando la respuesta:

(a) ¿Cuántos conductores de cada uno de los estratos mencionados anteriormente se incluirán en la muestra?

(b) En los conductores con una antigüedad de menos de 3 años que resultan elegidos en la muestra, se observa que el tiempo medio de reacción es de 1.2 segundos. Supuesta que dicha variable tiene distribución normal con desviación típica 0.3 segundos, proporcionar un intervalo de confianza al 95 % para el tiempo medio de reacción de estos conductores.

***Solución:***

- A: Conductores cuya antigüedad supera los 10 años. $\frac{5000}{10000} = \frac{1}{2} = 0.5 = 50\ \%$
- B: Conductores con antigüedad entre 3 y 10 años. $\frac{3000}{10000} = \frac{3}{10} = 0.3 = 30\ \%$
- C: Conductores cuya antigüedad es inferior a 3 años. $\frac{2000}{10000} = \frac{1}{5} = 0.2 = 20\ \%$

Como el tamaño de la muestra, $n$, es de 500 personas, de cada estrato se incluirán en la muestra:

- 50 % de 500 = 250 conductores de $A$
- 30 % de 500 = 150 conductores de $B$
- 20 % de 500 = 100 conductores de $C$

b) Sea $X$ la variable "conductores cuya antigüedad es inferior a 3 años", la muestra es de 100 conductores. $X$ sigue una distribución normal de parámetros μ = 1.2 y $\boldsymbol{\sigma}$ = 0.3. Es decir,

$$X \sim N(1.2, 0.3)$$

*Se nos pide que calculemos $P(-a \leq z \leq a) = 0.95$ o lo que es lo mismo*

$$P(z \leq a) = 0.975 \Rightarrow \ a = 1.96$$

De manera que $P(-1.96 \leq z \leq 1.96) = 0.95$

Destipificando, $P\left(-1.96 \leq \frac{x-\bar{x}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq 1.96\right) = 0.95 \Leftrightarrow$

$$P\left(1.2 - 1.96 \cdot \frac{0.3}{\sqrt{100}} \leq x \leq 1.2 + 1.96 \cdot \frac{0.3}{\sqrt{100}}\right) = 0.95$$

Por tanto, el intervalo de confianza para el tiempo medio de reacción de conductores con una antigüedad inferior a 3 años con un 95 % de fiabilidad es: $(1.1412, 1.2588)$

# SOLUCIONES OPCIÓN B

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

### Problema B.1:

Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad y \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se pide, justificando las respuestas:

(a) Hallar el valor de $b$ para el que no existe la matriz inversa de $A$.

(b) Para $b = 1$, hallar la matriz $X$ que verifique $AX = A^3 - I$

### Solución:

(a) Calculamos el determinante de la matriz $A$. A continuación, lo igualamos a 0 para obtener el valor de $b$ para el que dicha matriz no tiene inversa.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2b\,; \quad 3 - 2b = 0 \Leftrightarrow b = \frac{3}{2}$$

Por tanto, si $\boldsymbol{b = \frac{3}{2}}$, $|A| = 0$ y entonces no existe $A^{-1}$.

(b) Como $AX = A^3 - I$, despejando $X$ tenemos $X = A^{-1}(A^3 - I)$

Si $b = 1$, tenemos que:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 11 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 10 & 15 \\ 0 & 1 & 0 \\ 30 & 20 & 41 \end{pmatrix}$$

$$A^3 - I = \begin{pmatrix} 11 & 10 & 15 \\ 0 & 1 & 0 \\ 30 & 20 & 41 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 15 \\ 0 & 0 & 0 \\ 30 & 20 & 40 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz inversa de $A$. Para ello, calculamos su determinante a partir del resultado del apartado anterior; calculamos su matriz traspuesta y la adjunta de esta.

$|A| = 3 - 2 = 1$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\,; \quad Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}\,; \text{como } |A| = 1$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Y, por tanto, } X = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 & 10 & 15 \\ 0 & 0 & 0 \\ 30 & 20 & 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{10} & \mathbf{5} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{10} & \mathbf{0} & \mathbf{10} \end{pmatrix}$$

***Problema B.2:***

En un cultivo de bacterias desarrollado durante 6 horas se produce cierta sustancia de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$S(t) = At^3 - 2Bt^2 + 5t, \qquad 1 \le t \le 6$$

donde *S(t)* es la cantidad de sustancia producida (en ml) y t el tiempo de desarrollo del cultivo. Se sabe que la producción de la sustancia es mínima a las 5 horas, momento en el cual se inhibe la actividad bacteriana y la producción es de 0 ml.

(a) Determinar las constantes $A$ y $B$. Justificar la respuesta.

(b) Calcular las asíntotas de la función $\boldsymbol{S(t)/t^2(t-2)}$) en el intervalo $(\mathbf{1}, \infty)$.

***Solución:***

(a) Sabemos que la función tiene un mínimo para $t$ = 5 siendo la producción de 0 ml.

Por tanto, $S$'(5) = 0 (por tener un mínimo en $t$ =5) y además $S$(5) = 0 (según el enunciado).

Calculamos la primera derivada de *S(t)* y la igualamos a 0:

$S'(t) = 3At^2 - 4Bt + 5$, como $S'(5) = 0$ sustituimos en la expresión y tenemos:

$S'(5) = 3 \cdot 5^2 A - 4 \cdot 5B + 5 = 0 \Leftrightarrow 75A - 20B = 0$

$S(5) = 5^3 A - 2 \cdot 5^2 B + 5 \cdot 5 = 0 \Leftrightarrow 125A - 50B + 25 = 0$

Obtenemos así un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas (A y B):

$$\begin{cases} 75A - 20B + 5 \quad = 0 \\ 125A - 50B + 25 = 0 \end{cases}$$

Resolviendo obtenemos $A = \frac{1}{5}$ y $B = 1$

Las constantes valen: $A$ = 1/5 y $B$ = 1.

(b) Para calcular las asíntotas verticales buscamos los valores de $t$ que hacen que el valor de la expresión del denominador sea igual a 0:

$t^2(t-2) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \notin [1,6]$ o $t = 2$, luego la recta x = 2 es asíntota vertical.

Para calcular las posibles asíntotas horizontales, hallamos el siguiente límite:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\frac{1}{5}t^3 - 2t^2 + 5t}{t^2(t-2)} = \lim_{t \to \infty} \frac{\frac{1}{5}t^2 - 2t + 5}{t(t-2)} = \frac{1}{5},$$ luego la recta $y = \frac{1}{5}$ es asíntota horizontal.

No tiene asíntotas oblicuas.

Las únicas asíntotas en el intervalo $[\mathbf{1}, \mathbf{6}]$ es la asíntota vertical $\boldsymbol{x} = 2$, y la asíntota horizontal $\boldsymbol{y} = 1/5$.

***Problema B.3:***

En una bodega, el 50 % del vino que se fabrica es tinto, el 30 % blanco y el resto rosado. Una vez en las barricas se vuelve agrio el 5% del vino tinto, el 10 % del vino blanco y el 7 % del vino rosado, mediante muestreo estratificado con afijación proporcional.

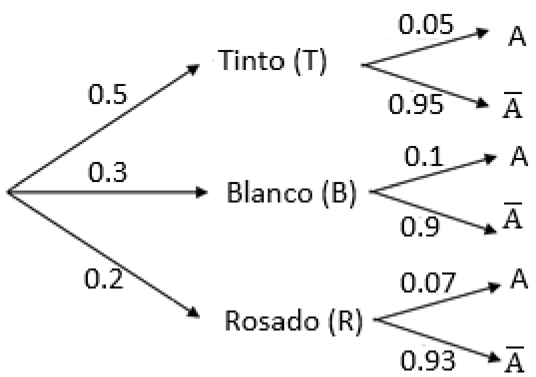
(a) Calcular la probabilidad de que una barrica elegida al azar contenga vino blanco y que además dicho vino esté agrio.

(b) Calcular la probabilidad de que una barrica de vino tinto contenga vino con buen sabor.

(c) Si se selecciona una barrica y el vino está agrio, ¿cuál es la probabilidad de que contenga vino tinto?

***Solución:***

Construimos un diagrama en árbol que recoja la información del enunciado:




$A$ = vino agrio

(a) $P(B \cap A) = P(B) \cdot P(A/B) = 0.3 \cdot 0.1 = \mathbf{0.03}$

(b) $P(\bar{A}/T) = \frac{P(\bar{A} \cap T)}{P(T)} = \frac{0.5 \cdot 0.95}{0.5} = \mathbf{0.95}$

(c) Aplicando el Teorema de Bayes:

$$P(T/\bar{A}) = \frac{P(T \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(T) \cdot P(\bar{A}/T)}{P(\bar{A})} = \frac{0.5 \cdot 0.95}{0.5 \cdot 0.95 + 0.3 \cdot 0.9 + 0.2 \cdot 0.93} = \mathbf{0.512}$$

Obtenemos el valor de $P(\bar{A})$ utilizando el Teorema de la Probabilidad Total:

$P(\bar{A}) = P(T \cap \bar{A}) + P(B \cap \bar{A}) + P(R \cap \bar{A}) =$

$P(T) \cdot P(\bar{A}/T) + P(B) \cdot P(\bar{A}/B) + P(R) \cdot P(\bar{A}/R) = 0.5 \cdot 0.95 + 0.3 \cdot 0.9 + 0.2 \cdot 0.93$

a) La probabilidad de que una barrica elegida al azar contenga vino blanco y que además dicho vino esté agrio es de $0.02$; b) La probabilidad de que una barrica de vino tinto contenga vino con buen sabor es de $0.95$ y c) si se selecciona una barrica y el vino está agrio, la probabilidad de que contenga vino tinto es de $0.512$.