

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II Selectividad 2019

Comunidad autónoma de Castilla - La Mancha

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Cristina Vidal Brazales

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo





Evaluación para el Acceso a la Universidad
Convocatoria de 2019

Materia:

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B.

Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.

CONVOCATORIA
ORDINARIA DE
JUNIO

Propuesta A

1. Un cliente hace un pedido a una fábrica de harinas que ofrece 3 tamaños distintos de sacos: pequeño, mediano y grande. Ha pedido 20 sacos pequeños, 14 medianos y 6 grandes y el peso total de su pedido es 1800 kilogramos. Si el peso de dos sacos pequeños y tres medianos es el mismo que el de dos sacos grandes y el peso de un saco grande es cuatro veces el peso de un saco pequeño.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar el peso de cada tipo de saco (1.5 pts)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 pts)

2. En el siguiente problema de programación lineal optimiza la función $f(x, y) = 3x + 4y$ sujeta a las siguientes restricciones:
 $x + y \geq 2$; $x \leq y$; $0 \leq y \leq 2$; $x \geq 0$

a) Dibuja la región factible. (1 pto)

b) Determina los vértices de la región factible. (0.25 pts)

c) Indica el máximo y el mínimo y sus respectivos valores. (0.25 pts)

3. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 4x - (3/2) & \text{si } x \leq c \\ (x - 2)^2 + 3/2 & \text{si } x > c \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de c la función $f(x)$ es continua en $x = c$? (0.5 pts)

b) Para $c = 1$, representa gráficamente la función f . (1 pto)

4. La función $v(t) = 48t^2 - 2t^3$ nos da el número de ordenadores afectados por un virus informático, siendo t el tiempo (en horas) desde que se localizó el primer ordenador con virus

a) Averigua, si existe, el momento en el que el virus dejará de propagarse. (0.5 pts)

b) Estudia cuando aumenta y cuando disminuye la propagación del virus. (0.5 pts)

c) ¿En qué momento se produce el número máximo de ordenadores afectados? ¿cuántos ordenadores? (0.5 pts)

5. En un cierto banco el 5 % de los créditos concedidos son para la compra de una casa. De los créditos concedidos para la compra de una casa, el 40 % resultan impagados. Del resto de créditos concedidos que no son para la compra de una casa, se sabe que el 10 % de ellos resultan impagados.

a) Calcula la probabilidad de que elegido un crédito al azar sea de los impagados. (0.75 pts)

b) Sabiendo que un crédito se ha pagado, ¿cuál es la probabilidad de que el crédito fuera para una casa? (0.75 pts)

6. Se ha tomado una muestra aleatoria del contenido en gramos de azúcar en frascos de 500 gramos de ketchup en una muestra de 10 frascos y ha resultado ser: 60, 80, 120, 95, 65, 70, 75, 85, 100 y 90. Suponiendo que el contenido en azúcar en gramos del ketchup se distribuye según una ley normal de desviación típica $\sigma = 10$ gramos, se pide:

a) Halla el intervalo de confianza del 97 % para el contenido medio de azúcar en un frasco de 500 gramos de ketchup. (1 pto)

b) Razona y explica qué se podría hacer para que el intervalo de confianza tuviera menor amplitud con el mismo nivel de confianza (0.5 pts)

c) ¿Crees que la media poblacional μ del contenido en gramos de azúcar es de 85 gramos con una probabilidad del 98.5 %? Razona tu respuesta. (0.5 pts)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857



Evaluación para el Acceso a la Universidad
Convocatoria de 2019

Materia:

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II
El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B.
Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.

CONVOCATORIA
ORDINARIA DE
JUNIO

Propuesta B

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ a & b \end{pmatrix}$, encontrar los valores de los parámetros a y b para que las matrices conmuten. (1.5 pts)
2. Se reparten tres tipos de becas: B_1 por valor de 400 euros, B_2 de 160 euros y B_3 de 200 euros. El dinero total destinado a las becas es de 43400 euros y son 145 personas las que obtienen beca. Cada persona solamente puede obtener una beca. Sabiendo que la cantidad de personas que recibe la beca B_1 es 5 veces mayor que la que obtiene la beca B_2 :
 - a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permite averiguar qué cantidad de personas reciben cada tipo de beca. (1.5 pts)
 - b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 pts)
3. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} |x+2| + t & \text{si } x \leq -1 \\ (x-t)^2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$
 - a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x = -1$? (0.5 pts)
 - b) Para $t = 3$, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(-1, +\infty)$. (0.5 pts)
 - c) Para $t = 3$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(-1, +\infty)$. (0.5 pts)
4. Sea la función $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx + 1$. Sabemos que presenta un punto de inflexión en el punto de abscisa $x = 0$, un máximo en $x = 1$ y la pendiente de la recta tangente en $x = -1$ es 24. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a , b y c . (1.5 pts)
5. En una clase de pintura hay 27 alumnos, 14 son de Albacete, 5 son de Cuenca y 8 de Toledo.
 - a) Se sortean dos entradas entre todos los alumnos, ¿cuál es la probabilidad de que ambas entradas le toquen a alumnos que no son de Albacete? (pueden tocarle al mismo alumno las dos entradas). (0.75 pts)
 - b) Si sorteamos 5 entradas, de una en una, de forma que no participa en el sorteo la persona que ya le haya tocado una entrada, ¿cuál es la probabilidad de que las 5 sean para alumnos de Cuenca? (0.75 pts)
6. El tiempo de atención a un paciente por parte de un centro médico sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 2$ minutos. Se hace un estudio de los tiempos de atención de 10 clientes al azar, siendo estos tiempos: 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 15 y 16 minutos respectivamente.
 - a) Halla un intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo de atención al paciente por parte del centro, con un nivel de confianza del 95 %. (1 pto)
 - b) ¿Cuál deberá ser el tamaño mínimo de la muestra elegida para que, con el mismo nivel de confianza, el error máximo admisible sea menor que 1 minuto? (1 pto)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

SOLUCIONES PROPUESTA A

Problema A.1:

Un cliente hace un pedido a una fábrica de harinas que ofrece tres tamaños distintos de sacos: pequeño, mediano y grande. Ha pedido 20 sacos pequeños, 14 medianos y 6 grandes, y el peso total de su pedido es de 1800 kg. Si el peso de 2 sacos pequeños y 3 medianos es el mismo que el de 2 sacos grandes, y el peso de un saco grande es 4 veces el peso de un saco pequeño.

- Plantea un sistema de ecuaciones que nos permita averiguar el peso de cada tipo de saco.
- Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior.

Solución:

- Llamamos x al peso del saco pequeño, y al mediano y z al del grande.

Con los datos del enunciado obtenemos el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 20x + 14y + 6z = 1800 \\ 2x + 3y = 2z \\ z = 4x \end{array} \right\}$$

- Podemos resolver el sistema de diferentes maneras, pero al estar ya despejada la variable z , una forma sencilla es sustituir esto en las otras dos ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 20x + 14y + 24x = 1800 \\ 2x + 3y = 8x \\ z = 4x \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 44x + 14y = 1800 \\ 3y = 6x \\ z = 4x \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 44x + 28x = 72x = 1800 \\ y = 2x \\ z = 4x \end{array} \right\}$$

De dónde $x = 25$, $y = 50$, $z = 100$.

Comprobamos como siempre los resultados.

Los sacos pesan: $x = 25$, $y = 50$, $z = 100$ kilogramos

Problema A.2:

En el siguiente problema de programación lineal optimiza la función $f(x, y) = 3x + 4y$ sujeta a las siguientes restricciones: $x + y \geq 2$; $x \leq y$; $0 \leq y \leq 2$; $x \geq 0$.

- Dibuja la región factible.
- Determina los vértices de la región factible.
- Indica el máximo y el mínimo y sus respectivos valores.

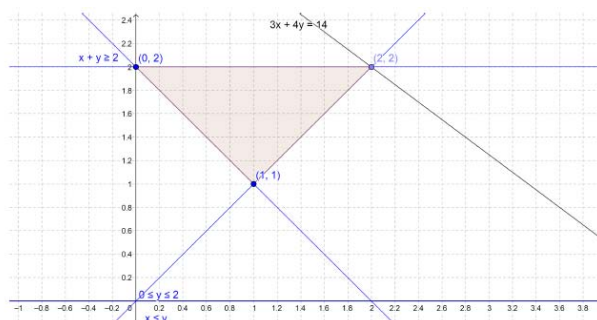
Solución:

Con las restricciones obtenemos este sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x \geq 0, & x \leq y \\ x + y \geq 2 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

Por otro lado, la **función objetivo** es la siguiente: $f(x, y) = 3x + 4y$.

- Representamos la región factible que define este sistema de inecuaciones:



- Los vértices de la región factible observados en la figura son: $A(1, 1)$; $B(2, 2)$; $C(0, 2)$.
- Calculemos para cada vértice el valor de la función objetivo: $f(x, y) = 3x + 4y$.
 - $f(1, 1) = 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 7$
 - $f(2, 2) = 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2 = 14$
 - $f(0, 2) = 3 \cdot 0 + 4 \cdot 2 = 8$

Por tanto, el valor mínimo, 7, se alcanza en el punto $A(1, 1)$; y el valor máximo, 14, se alcanza en el punto $B(2, 2)$.

Los vértices son: $A(1, 1)$ en el que se alcanza el valor mínimo; $B(2, 2)$ en el que se alcanza el valor máximo; y $C(0, 2)$.

Problema A.3:

Se considera la función: $f(x) = \begin{cases} 4x - 3/2 & \text{si } x \leq c \\ (x-2)^2 + 3/2 & \text{si } x > c \end{cases}$

- ¿Para qué valor de c la función es continua en $x = c$?
- Para $c = 1$, representa la función f .

Solución:

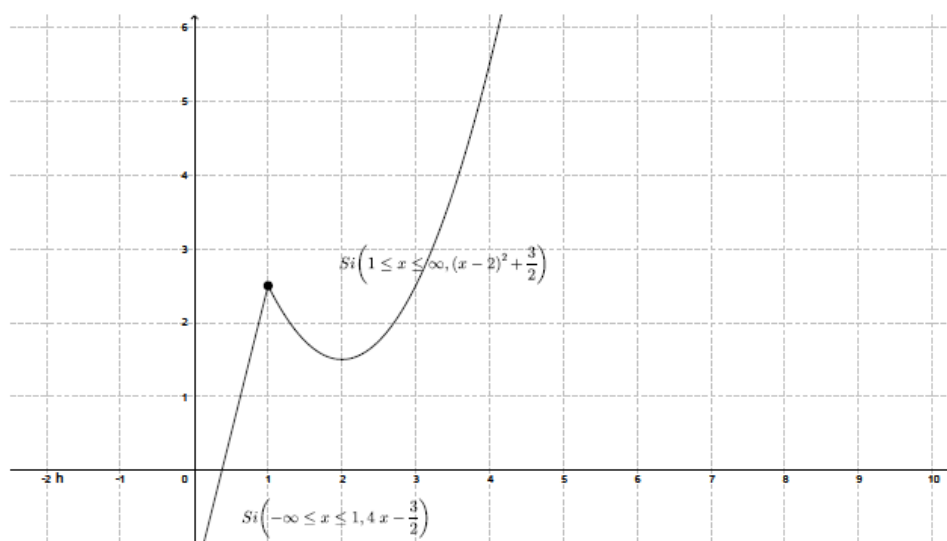
- La función está definida a trozos por dos funciones polinómicas, una recta y una parábola, que, por tanto, son continuas en toda la recta real. El único punto dudoso es el punto c de unión. Buscamos el valor que debe tener c para que sea continua.

$$\text{Debe ser } 4c - 3/2 = (c-2)^2 + 3/2 \Rightarrow (c-2)^2 - 4c = -3/2 - 3/2 = -3 \Rightarrow c^2 - 4c + 4 - 4c + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$c^2 - 8c + 7 = 0, \text{ de raíces } c = 1 \text{ y } c = 7.$$

Para $c = 1$ y para $c = 7$ la función es continua.

- Representamos la recta, de pendiente 4 y ordenada en el origen $3/2$. Representamos la parábola de vértice $(2, 3/2)$. Ambas funciones se cortan en $(1, 5/2)$.



Problema A.4:

La función $v(t) = 48t^2 - 2t^3$ nos da el número de ordenadores afectados por un virus informático, siendo t el tiempo (en horas) desde que se localizó el primer ordenador con virus:

- Averigua, si existe, el momento en el que el virus dejará de propagarse.
- Estudia cuando aumenta y cuando disminuye la propagación del virus.
- ¿En qué momento se produce el máximo número de ordenadores afectados? ¿Cuántos ordenadores?

Solución:

- La función $v(t) = 48t^2 - 2t^3$ nos da el número de ordenadores afectados por el virus informático. Calculamos cuando se anula: $48t^2 - 2t^3 = 2t^2(24 - t) = 0$.

Se anula para $t = 0$ y $t = 24$. Por tanto, dejará de propagarse al cabo de 24 horas.

El virus dejará de propagarse al cabo de **24** horas.

- Calculamos la derivada: $v'(t) = 96t - 6t^2$ y la igualamos a cero: $v'(t) = 0 = 6t(16 - t)$. Se anula para $t = 0$ y $t = 16$. $v''(t) = 96 - 12t$. $v''(t) > 0$ si $0 \leq t < 16$. $v''(t) < 0$ si $t > 16$. Por tanto, aumenta la propagación del virus en $(0, 16)$ y disminuye si $t > 16$.

La propagación aumenta de 0 a 16 horas y disminuye a partir de las 16 horas.

- La función alcanza un máximo para $t = 16$, con $v(16) = 4\,096$. Luego a las 16 horas se produce el máximo de ordenadores infectados, que es de 4 096 ordenadores.

El máximo de ordenadores infectados se produce a las **16** horas, siendo de **4 096** ordenadores.

Problema A.5:

En un cierto banco el 5 % de los créditos concedidos son para la compra de una casa. De los créditos concedidos para la compra de una casa, el 40 % de ellos resultan impagados. Del resto de créditos concedidos que no son para la compra de una casa se sabe que el 10 % de ellos resultan impagados.

- Calcula la probabilidad de que elegido un crédito al azar sea de los impagados.
- Sabiendo que un crédito se ha pagado, ¿cuál es la probabilidad de que el crédito sea para una casa?

Solución:

Nombramos los sucesos: C = Crédito concedido para la compra de una casa, I = Crédito impagado, P = Crédito pagado.

Los datos que nos dan son:

$$P(C) = 0.05, \quad P(I/C) = 0.4, \quad P(I/\bar{C}) = 0.1,$$

Con estos datos podemos deducir:

$$P(C \cap I) = P(C) \cdot P(I/C) = 0.05 \cdot 0.4 = 0.02.$$

$$P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 1 - 0.05 = 0.95.$$

$$P(\bar{C} \cap I) = P(\bar{C}) \cdot P(I/\bar{C}) = 0.95 \cdot 0.1 = 0.095.$$

Hacemos la tabla de contingencia:

	Casa (C)	No casa ($\bar{C}$)	Total
Impagado (I)	0.02	0.095	0.115
Pagado (P)	0.03	0.855	0.885
Total	0.05	0.95	1

De la que deducimos que:

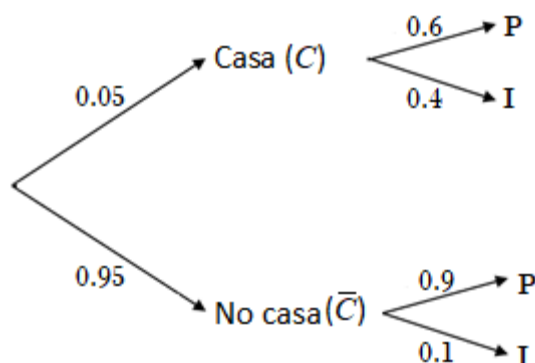
$$P(I) = P(C \cap I) + P(\bar{C} \cap I) = 0.02 + 0.095 = 0.115.$$

$$P(C \cap P) = P(C) - P(C \cap I) = 0.05 - 0.02 = 0.03.$$

$$P(\bar{C} \cap P) = P(\bar{C}) - P(\bar{C} \cap I) = 0.95 - 0.095 = 0.855.$$

$$P(P) = P(C \cap P) + P(\bar{C} \cap P) = 0.03 + 0.855 = 0.885.$$

Con los datos del enunciado también podemos construir el siguiente diagrama de árbol:



Y ahora respondemos a todas las preguntas:

$$a) P(I) = P(C \cap I) + P(\bar{C} \cap I) = 0.02 + 0.095 = 0.115.$$

$$b) P(C/P) = P(C \cap P)/P(P) = 0.03/0.885 = 0.03389831.$$

La probabilidad de que elegido un crédito al azar sea de los impagados es de **0.115**.

Sabiendo que un crédito se ha pagado, la probabilidad de que el crédito sea para una casa es aproximadamente de **0.034**.

a) También se podría haber utilizado el Teorema de la Probabilidad Total:

$$P(I) = P(C \cap I) + P(\bar{C} \cap I) = P(C) \cdot P(I/C) + P(\bar{C}) \cdot P(I/\bar{C}) = 0.05 \cdot 0.4 + 0.95 \cdot 0.1 = 0.02 + 0.095 = 0.115$$

b) O haber utilizado el Teorema de Bayes:

$$P(C/P) = \frac{P(C \cap P)}{P(P)} = \frac{P(C) \cdot P(P/C)}{P(P)} = \frac{0.05 \cdot 0.6}{0.885} = 0.03389831$$

Problema A.6:

Se ha tomado una muestra aleatoria del contenido en gramos de azúcar en frascos de 500 gramos de ketchup en una muestra de 10 frascos y ha resultado ser: 60, 80, 120, 95, 65, 70, 75, 85, 100 y 90. Suponiendo que el contenido en azúcar se distribuye según una ley normal de desviación típica $\sigma = 10$, se pide:

- Hallar el intervalo de confianza el 97 % para el contenido medio de azúcar en un frasco de 500 gramos de ketchup.
- Razona y explica qué se podría hacer para que el intervalo de confianza tuviera menor amplitud con el mismo nivel de confianza.
- ¿Crees que la media poblacional μ del contenido en gramos de azúcar es de 85 gramos con una probabilidad del 98.5 %? Razona tu respuesta.

Solución:

- El intervalo de confianza para la media muestral viene dado por la expresión:

$$\left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

Nos dan los siguientes datos: $\sigma = 10, 1 - \alpha = 0.97, n = 10$.

Calculamos la media muestral:

$$\bar{x} = \frac{60+80+120+95+65+70+75+85+100+90}{10} = 84.$$

Buscamos en la tabla: $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.17$.

Y sustituimos en la expresión del intervalo de confianza:

$$\begin{aligned} \left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) &= \left(84 - 2.17 \frac{10}{\sqrt{10}}, 84 + 2.17 \frac{10}{\sqrt{10}} \right) \\ &= (77.1378575, 90.8621425) \end{aligned}$$

a) Intervalo de confianza: (77.1378575, 90.8621425).

- Si se quiere que el intervalo de confianza tenga menor amplitud sin modificar el nivel de confianza, se puede aumentar el tamaño de la muestra.

b) Aumentar el tamaño de la muestra.

- Si la probabilidad fuese del 98.5 % > 97 %, el intervalo de confianza tendría mayor amplitud, por lo que el valor de la media muestral de 85 estaría en dicho intervalo.

c) La media muestral de 85 si puede estar en ese intervalo.

SOLUCIONES PROPUESTA B

Problema B.1:

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ a & b \end{pmatrix}$, encontrar los valores de los parámetros a y b para que las matrices conmuten.

Solución:

Imponemos que las matrices conmuten:

$$A \cdot B = B \cdot A \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1+3a & 5+3b \\ 3+a & 15+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 8 \\ a+3b & 3a+b \end{pmatrix}$$

Igualamos:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1+3a = 16 \\ 5+3b = 8 \\ 3+a = a+b \\ 15+b = 3a+b \end{array} \right\}, \text{ de donde } a = 5 \text{ y } b = 1, \text{ que verifican las cuatro ecuaciones.}$$

$$a = 5, b = 1.$$

Problema B.2:

Se reparten tres tipos de becas: B_1 por valor de 400 euros, B_2 de 160 euros y B_3 de 200 euros. El dinero total destinado a las becas es de 43 400 euros, y son 145 personas las que obtienen beca. Cada persona sólo puede obtener una beca. Sabiendo que la cantidad de personas que reciben la beca B_1 es cinco veces mayor que la que recibe la beca B_2 :

- Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar qué cantidad de personas reciben cada tipo de beca.
- Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior.

Solución:

- Llamamos x a número de personas que reciben la beca B_1 , y al número que recibe la B_2 , y z al número de las que reciben la beca B_3 .

El sistema es:

$$\begin{cases} x + y + z = 145 \\ 400x + 160y + 200z = 43400 \\ x = 5y \end{cases}$$

- Sustituimos la tercera ecuación en las dos primeras

$$\begin{cases} 5y + y + z = 145 \\ 2000y + 160y + 200z = 43400 \\ x = 5y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6y + z = 145 \\ 2160y + 200z = 43400 \\ x = 5y \end{cases}$$

Sustituimos la primera ecuación en la segunda:

$$\begin{cases} z = 145 - 6y \\ 2160y + 200z = 43400 \\ x = 5y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = 145 - 6y \\ 960y = 14400 \\ x = 5y \end{cases} \rightarrow y = 15$$

Y sustituyendo:

$$\begin{cases} z = 55 \\ y = 15 \\ x = 75 \end{cases}$$

La solución es: $x = 75$, $y = 15$, $z = 55$.

Problema B.3:

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} |x+2| + t, & \text{si } x \leq -1 \\ (x-t)^2, & \text{si } x > -1 \end{cases}$

- ¿Para qué valores de t la función $f(x)$ es continua en $x = -1$?
- Para $t = 3$, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(-1, +\infty)$.
- Para $t = 3$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(-1, +\infty)$.

Solución:

- a)** La función $f(x) = \begin{cases} |x+2| + t, & \text{si } x \leq -1 \\ (x-t)^2, & \text{si } x > -1 \end{cases}$ está formada por funciones siempre continuas, ya que está formada por función valor absoluto y función polinómica. El único punto dudoso es dónde se unen las dos ramas. Imponemos que en $x = -1$ ambas ramas tomen el mismo valor.

$$|-1+2| + t = (-1-t)^2 \rightarrow 1+t = t^2 + 2t + 1 \rightarrow t^2 + t = 0 = t(t+1)$$

Luego si $t = 0$ o si $t = -1$ la función es continua en toda la recta real.

La función es continua en $x = -1$ si $t = 0$ o si $t = -1$.

- b)** Para $t = 3$, la función $f(x) = \begin{cases} |x+2| + 3, & \text{si } x \leq -1 \\ (x-3)^2, & \text{si } x > -1 \end{cases}$ no es continua en $x = -1$. Calculamos los extremos relativos en la segunda rama. Derivamos e igualamos a cero: $f'(x) = 2(x-3) = 0$.

Se anula en $x = 3$. Calculamos la derivada segunda: $f''(x) = 2 > 0$, luego es un mínimo. (No hacía falta hacerlo pues se trata de una parábola de la que sabemos que su vértice es un mínimo). El mínimo relativo es $(3, 0)$, que es un mínimo absoluto. Tiene un extremo relativo en $x = -1$, dónde se juntan las dos ramas, que es un máximo relativo: $(-1, 4)$. La otra rama tiene un mínimo relativo en $x = -2$, en $(-2, 3)$.

Para $t = 3$ alcanza un mínimo absoluto en $(3, 0)$.

- c)** La función derivada es negativa para $x < 3$, luego la función es decreciente en $(-1, 3)$. La función derivada es positiva para $x > 3$, luego la función es creciente.

La función es **decreciente en $(-1, 3)$ y creciente si $x > 3$** .

Problema B.4:

Sea la función $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx + 1$. Sabemos que presenta un punto de inflexión en el punto de abscisa $x = 0$, un máximo en $x = 1$ y la pendiente de la recta tangente en $x = -1$ es 24. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a , b y c . (1,5 punto).

Solución:

Calculamos las derivadas sucesivas de la función:

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx + 1.$$

$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + c.$$

$$f''(x) = 12ax^2 + 6bx.$$

Sabemos que tiene un punto de inflexión en $x = 0$. Como $f''(0) = 0$ siempre no nos da información de los parámetros.

Un máximo en $x = 1$, supone que se anula la derivada primera: $f'(1) = 4a + 3b + c = 0$.

Si la pendiente de la recta tangente en $x = -1$ es 24, supone que la derivada primera en ese punto vale 24: $f'(-1) = -4a + 3b + c = 24$.

Tenemos dos ecuaciones y tres incógnitas:

$$\begin{cases} 4a + 3b + c = 0 \\ -4a + 3b + c = 24. \end{cases}$$

Las restamos y las sumamos:

$$\begin{cases} 6b + 2c = 24 \\ 8a = -24. \end{cases}$$

Luego $a = -3$, $c = 12 - 3b$. Por tanto, el máximo es: $(1, 4a + 3b + c) = (1, 4(-3) + 3b + 12 - 3b) = (1, 0)$, con derivada segunda $f''(1) = 12a + 6b = 12(-3) + 6b = -36 + 6b < 0$. Luego si $b < 6$ la derivada segunda es negativa y el punto es un máximo, pero si es $b > 6$, entonces es un mínimo.

Los parámetros deben valer: **$a = -3$, $c = 12 - 3b$** , con **$b < 6$** .

Problema B.5:

En una clase de pintura hay 27 alumnos, 14 son de Albacete, 5 de Cuenca y 8 de Toledo.

- Se sortean dos entradas entre todos los alumnos, ¿cuál es la probabilidad de que ambas entradas le toquen a alumnos que no son de Albacete? (pueden tocarle al mismo alumno las dos entradas)
- Si sorteamos 5 entradas, de una en una, de forma que no participa en el sorteo la persona que ya le haya tocado una entrada, ¿cuál es la probabilidad de que los 5 sean alumnos de Cuenca?

Solución:

Nombramos los sucesos: A = Ser de Albacete, C = Ser de Cuenca, T = Ser de Toledo, noA = No ser de Albacete.

Los datos que nos dan son:

$$P(A) = 14/27 \quad P(C) = 5/27 \quad P(T) = 8/27 \quad P(\bar{A}) = 13/27.$$

- Se supone que le pueden tocar las dos entradas al mismo alumno:

$$P(\bar{A} \cap \bar{A}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{A}) = 13/27 \cdot 13/27 = 0.23182442.$$

La probabilidad de que ambas no toquen a alguien de Albacete es **0.2318**.

- Ahora se elimina la persona a la que ya le haya tocado:

$$P(5C) = P(C) \cdot P(2C/C) \cdot P(3C/2C) \cdot P(4C/3C) \cdot P(5C/4C) = 5/27 \cdot 4/26 \cdot 3/25 \cdot 2/24 \cdot 1/23 = 120/9687600 = 0.000012387.$$

La probabilidad de que las 5 toquen a alguien de Cuenca es **0.000012387**.

Problema B.6:

El tiempo de atención a un paciente por parte de un centro médico sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 2$ minutos. Se hace un estudio de los tiempos de atención de 10 clientes al azar, siendo estos tiempos: 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 15 y 16 minutos respectivamente.

- Halla un intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo de atención al paciente, por parte del centro, con un nivel de confianza del 95 %.
- ¿Cuál será el tamaño mínimo de la muestra elegida para que, con el mismo nivel de confianza, el error máximo admisible sea menor que 1 minuto?

Solución:

El intervalo de confianza para la media muestral viene dado por la expresión:

$$\left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

Considerando X = tiempo de atención a un paciente.

Calculamos la media muestral:

$$\bar{x} = \frac{5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 11 + 12 + 14 + 15 + 16}{10} = 10.3$$

En el enunciado nos dicen que, $\sigma = 2$, $n = 10$, $1 - \alpha = 0.95$, $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$, sustituyendo, tenemos

$$\left(10.3 - 1.96 \cdot \frac{2}{\sqrt{10}}, 10.3 + 1.96 \cdot \frac{2}{\sqrt{10}} \right) = (9.060387, 11.5396128)$$

El tiempo de atención a un paciente está entre **9.06** y **11.54** minutos con una confianza del 95 %.

El error máximo admisible viene dado por: $E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Por tanto, para $E = 1$, $1 = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}}$, luego, $\sqrt{n} = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma = 1.96 \cdot 2$, y $n = 15.3664$.

Para que el error máximo admisible sea inferior a un minuto, el tamaño de la muestra debe ser igual o mayor que **16**.



Evaluación para el Acceso a la Universidad
Convocatoria de 2019

Materia:

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B.
Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.

Propuesta A

1. En una tienda de comida a granel tienen a la venta tres tipos de judías secas: blancas, canela y pintas. Estas se venden a 2.75, 3 y 2.50 euros el kilogramo, respectivamente. Ayer se vendieron 40 kilos en total por un valor de 111.5 euros. La suma de los kilogramos de judías blancas y canela vendidas fueron el triple de las pintas.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántos kilogramos de judías de cada tipo se vendieron. (1.5 pts)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 pts)

2. En un taller se confeccionan prendas vaqueras con dos tipos de tejidos de distinta calidad (T_1 , T_2). Disponen de 160 m² del tejido T_1 y 240 m² del tejido T_2 . Hacen dos conjuntos: Uno con chaqueta y falda y otro con cazadora y pantalón. El primero utiliza 2 m² de T_1 y 2 m² de T_2 , el conjunto del pantalón utiliza 1 m² de T_1 y 3 m² de T_2 . El conjunto con falda cuesta 250 euros y el del pantalón 350 euros.

a) Expresa la función objetivo. (0.25 pts)

b) Escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. (1 pts)

c) Calcula el número de conjuntos de cada tipo que deben hacer para obtener máximas ganancias. (0.25 pts)

3. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} x + t & \text{si } x \leq -3 \\ 4 & \text{si } -3 < x < 3 \\ (x - 4)^2 - 5 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

a) Halla el valor de t para que f sea continua en $x = -3$. (0.5 pts)

b) Para $t = 3$, representa gráficamente la función f . (1 pts)

4. Sabemos que la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiene un mínimo en el punto (1,1) y corta al eje de ordenadas en 4. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a , b y c . (1.5 pts)

5. En una universidad el 40 % de los estudiantes son aficionados a la lectura, el 50 % al cine, y al 70 % les gusta el cine o la lectura o ambas cosas.

a) Se elige un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que le guste la lectura y el cine? (0.75 pts)

b) Si elegimos un estudiante al azar y le gusta la lectura, ¿cuál es la probabilidad de que le guste el cine? (0.75 pts)

6. El tiempo de uso de móvil por día de los alumnos de un instituto sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 20$ minutos. Se eligió una muestra aleatoria de 36 alumnos y se observó que la media de tiempo usando el móvil para esa muestra era de 2 horas.

a) Halla un intervalo de confianza para la media de tiempo de uso de móvil por día con un nivel de confianza del 95 %. (0.75 pts)

b) ¿Se puede admitir que la media poblacional sea $\mu = 2.3$ horas con un nivel de confianza del 95 %? Explica razonadamente cómo se podría aumentar o disminuir la amplitud del intervalo. Razona tus respuestas. (0.5 pts)

c) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 100 y un nivel de confianza del 94.64 %? (0.75 pts)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Propuesta B

- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$
 - Calcula $A \cdot B - C^T$. (0.75 pts)
 - Comprueba que la matriz C no tiene inversa y explica la razón por la que el producto $D^2 \cdot B$ no puede ser realizado. (0.75 pts)
- Los precios de un gimnasio son diferentes según la franja horaria dispuesta en tres turnos: mañana, mediodía y tarde. Este mes han acudido 150 personas por la mañana, 30 en la franja del mediodía y 270 por la tarde y el gimnasio ha ingresado un total de 15900 euros. La diferencia entre el precio de la tarde y la mañana equivale a la mitad del precio para el mediodía y al sumar los precios del mediodía y la tarde obtenemos el doble del precio de la mañana.
 - Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuál es el precio de cada franja horaria. (1.5 pts)
 - Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 pts)
- Se considera la función $f(x) = \begin{cases} -x-4 & \text{si } x < c \\ -3 & \text{si } c \leq x \leq 0 \\ x^2 - 10x & \text{si } x > 0 \end{cases}$
 - ¿Para qué valor de c la función $f(x)$ es continua en $x = c$? (0.5 pts)
 - Calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(0, +\infty)$. (0.5 pts)
 - Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(0, +\infty)$. (0.5 pts)
- Los costes de fabricación de un modelo de vehículo $C(x) = -x^3 + 45x^2 - 243x + 500$ (en miles de euros) en función del número de vehículos (en cientos) fabricados ($1 \leq x \leq 27$)
 - Determina la cantidad de vehículos que dan el coste máximo y mínimo. (1 pto)
 - ¿A qué valor ascienden ambos? (0.5 pts)
- El 5 % de los estudiantes matriculados en una determinada asignatura de bachillerato son deportistas aficionados. El 0.5 % de estos alumnos deportistas aficionados obtienen una calificación de suspenso en dicha asignatura. Mientras que el 15 % de los alumnos no deportistas aficionados obtienen una calificación de suspenso.
 - Elegido un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya obtenido un suspenso en la citada asignatura? (0.75 pts)
 - Sabiendo que un alumno elegido al azar ha obtenido un suspenso, ¿cuál es la probabilidad de que sea deportista aficionado? (0.75 pts)
- El contenido en grasas saturadas por litro de leche sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 0.1$ g/l. Se tomó una muestra aleatoria de 100 litros de leche obteniéndose el intervalo de confianza (0.682, 0.718) para el contenido medio de grasas saturadas en la muestra.
 - Calcula el contenido medio de grasas saturadas para los 100 litros de leche de la muestra. (0.25 pts)
 - Calcula el nivel de confianza con el que se ha obtenido dicho intervalo. (0.75 pts)
 - Halla un intervalo de confianza para la el contenido medio de grasas saturadas con un nivel de confianza del 95 %. (0.5 pts)
 - ¿Cuál deberá ser el tamaño mínimo de la muestra para que, con un nivel de confianza del 95 %, el error máximo admisible sea menor que 0.01 g/l? (0.5 pts)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

SOLUCIONES PROPUESTA A

Problema A.1:

1. En una tienda de comida a granel tienen a la venta tres tipos de judías secas: blancas, canela y pintas. Estas se venden a 2.75, 3 y 2.50 euros el kilogramo, respectivamente. Ayer se vendieron 40 kilos en total por un valor de 111.5 euros. La suma de los kilogramos de judías blancas y canela vendidas fueron el triple de las pintas.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántos kilogramos de judías de cada tipo se vendieron. (1.5 pts)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 pts)

Solución:

Llamamos B a los kilogramos de judías blancas que se vendieron, C a los de judías canela, y P a los de judías pintas.

a) El sistema es:

$$\begin{cases} B + C + P = 40 \\ 2.75B + 3C + 2.5P = 111.5 \\ B + C = 3P \end{cases}$$

b) Restamos a la primera ecuación, la tercera: $P = 40 - 3P$, de dónde $P = 10$ kilogramos. Sustituimos en las ecuaciones segunda y tercera;

$$\begin{cases} P = 10 \\ 2.75B + 3C + 25 = 111.5 \\ B + C = 30 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P = 10 \\ 2.75B + 3C = 86.5 \\ B + C = 30 \end{cases}$$

Multiplicamos por 3 la tercera ecuación y le restamos la segunda:

$$\begin{cases} P = 10 \\ 0.25B = 3.5 \\ B + C = 30 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P = 10 \\ 0.25B = 3.5 \\ B + C = 30 \end{cases} \rightarrow B = \frac{3.5}{0.25} = 14$$

Y sustituyendo:

$$\begin{cases} P = 10 \\ B = 14 \\ C = 16 \end{cases}$$

Se vendieron **14** kilogramos de judías blancas, **16** de judías canela y **10** de judías pintas.

Problema A.2:

2. En un taller se confeccionan prendas vaqueras con dos tipos de tejidos de distinta calidad (T_1, T_2). Disponen de 160 m^2 del tejido T_1 y 240 m^2 del tejido T_2 . Hacen dos conjuntos: Uno con chaqueta y falda y otro con cazadora y pantalón. El primero utiliza 2 m^2 de T_1 y 2 m^2 de T_2 , el conjunto del pantalón utiliza 1 m^2 de T_1 y 3 m^2 de T_2 . El conjunto con falda cuesta 250 euros y el del pantalón 350 euros.

- Expresa la función objetivo. (0.25 pts)
- Escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. (1 pto).
- Calcula el número de conjuntos de cada tipo que deben hacer para obtener máximas ganancias. (0.25 pts)

Solución:

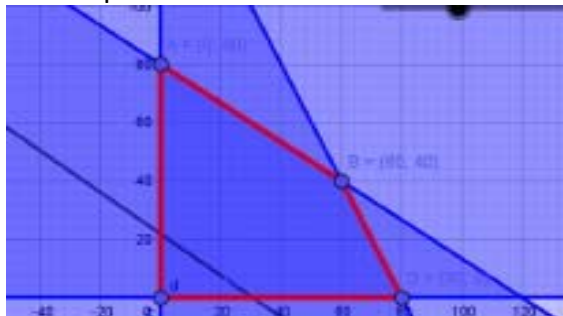
Llamamos x al número de conjuntos de chaqueta y falda confeccionados e y al número de conjuntos de falda y pantalón.

a) La **función objetivo**, que deseamos maximizar, es la siguiente: $f(x, y) = 250x + 350y$.

b) Con las restricciones obtenemos este sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + y \leq 160 \\ 2x + 3y \leq 240 \\ x \geq 0, 0 \leq y \end{cases}$$

Representamos la región factible que define este sistema de ecuaciones:



Los vértices de la región factible observados en la figura son: $O(0, 0)$; $B(60, 40)$; $C(80, 0)$; $D(0, 80)$.

c) Calculemos para cada vértice el valor de la función objetivo: $f(x, y) = 250x + 350y$.

- $f(0, 0) = 0$.
- $f(60, 40) = 250 \cdot 60 + 350 \cdot 40 = 15000 + 14000 = 29\,000$.
- $f(80, 0) = 80 \cdot 250 = 20\,000$.
- $f(0, 80) = 80 \cdot 350 = 28\,000$.

Por tanto, el valor máximo, 29 000, se alcanza en el punto $B(60, 40)$.

Para obtener las máximas ganancias, **29 000** euros, se deben fabricar **60** conjuntos de chaqueta y falda y **40** conjuntos de falda y pantalón.

Problema A.3:

3. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} x+t & \text{si } x \leq -3 \\ 4 & \text{si } -3 < x < 3 \\ (x-4)^2 - 5 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

a) Halla el valor de t para que f sea continua en $x = -3$. (0.5 pts)

b) Para $t = 3$, representa gráficamente la función f . (1 pto)

Solución:

a) La función $f(x) = \begin{cases} x+t, & \text{si } x \leq -3 \\ 4, & \text{si } -3 < x < 3 \\ (x-4)^2 - 5, & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ está formada por funciones polinómicas, siempre

continuas. Los únicos puntos dudosos son dónde se unen dos ramas. Imponemos que en $x = -3$ ambas ramas tomen el mismo valor:

$$-3 + t = 4 \rightarrow t = 7$$

Si $t = 7$, la función es continua en $x = -3$.

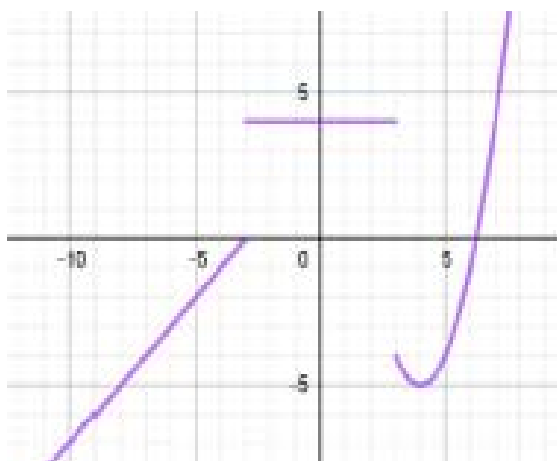
En $x = 3$, la función no es continua, presenta un salto de longitud 8, pues.

$$4 = (x-4)^2 - 5 \rightarrow 4 \neq (-1)^2 - 5 = -4$$

La función es continua en $x = -3$ si $t = 7$.

b) Para $t = 3$, la función es $f(x) = \begin{cases} x+3, & \text{si } x \leq -3 \\ 4, & \text{si } -3 < x < 3 \\ (x-4)^2 - 5, & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$, formada por una semirrecta, de

pendiente 1 y ordenada en el origen 3, un segmento horizontal y la rama de una parábola con vértice en (4, 5).



Problema A.4:

4. Sabemos que la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiene un mínimo en el punto $(1,1)$ y corta al eje de ordenadas en 4. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a, b y c . (1.5 pts)

Solución:

De la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ nos dicen que tiene un mínimo en $(1, 1)$:

Luego $f'(1) = 2a(1) + b = 0 = 2a + b$.

Como pasa por $(1, 1)$: $f(1) = a1^2 + b1 + c = 1 = a + b + c$

Corta al eje de ordenadas en 4: $f(0) = a0^2 + b0 + c = 4 = c$.

Por lo que $c = 4$.
$$\begin{cases} 2a + b = 0 \\ a + b + 4 = 1 \end{cases} \rightarrow a + b = -3$$

Restamos las dos ecuaciones: $a = 3$. Por lo que $b = -6$.

La función pedida es:

$$f(x) = 3x^2 - 6x + 4$$

La función pedida es: $f(x) = 3x^2 - 6x + 4$

Problema A.5:

5. En una universidad el 40 % de los estudiantes son aficionados a la lectura, el 50 % al cine, y al 70 % les gusta el cine o la lectura o ambas cosas.

- a) Se elige un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que le guste la lectura y el cine? (0.75 pts)
b) Si elegimos un estudiante al azar y le gusta la lectura, ¿cuál es la probabilidad de que le guste el cine? (0.75 pts)

Solución:

Nombramos los sucesos: L = Estudiante aficionado a la lectura, C = Aficionado al cine.

Los datos que nos dan son:

$$P(L) = 0.4, \quad P(C) = 0.5, \quad P(L \cup C) = 0.7.$$

- a) La probabilidad de que le guste la lectura y el cine es:

$$P(L \cap C) = P(L) + P(C) - P(L \cup C) = 0.4 + 0.5 - 0.7 = 0.2.$$

La probabilidad de que le guste la lectura y el cine es: **0.2**.

- b) Ahora nos piden una probabilidad condicionada:

$$P(C/L) = \frac{P(C \cap L)}{P(L)} = \frac{0.2}{0.4} = \frac{1}{2} = \mathbf{0.5}.$$

La probabilidad de que le guste el cine sabiendo que le gusta la lectura es **0.5**.

Problema A.6:

6. El tiempo de uso de móvil por día de los alumnos de un instituto sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 20$ minutos. Se eligió una muestra aleatoria de 36 alumnos y se observó que la media de tiempo usando el móvil para esa muestra era de 2 horas.

a) Halla un intervalo de confianza para la media de tiempo de uso de móvil por día con un nivel de confianza del 95 %. (0.75 pts)

b) ¿Se puede admitir que la media poblacional sea $\mu = 2.3$ horas con un nivel de confianza del 95 %? Explica razonadamente cómo se podría aumentar o disminuir la amplitud del intervalo. Razona tus respuestas. (0.5 pts)

c) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 100 y un nivel de confianza del 94.64 %? (0.75 pts)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Solución:

a) El intervalo de confianza para la media muestral viene dado por la expresión:

$$\left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

En el enunciado nos dicen que, $\bar{x} = 2 \text{ horas} = 120 \text{ minutos}$, $\sigma = 20$, $n = 36$, $1 - \alpha = 0.95$, $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$, sustituyendo, tenemos:

$$\left(120 - 1.96 \cdot \frac{20}{\sqrt{36}}, 120 + 1.96 \cdot \frac{20}{\sqrt{36}} \right) = (113.46, 126.53) \text{ en minutos, que en horas es:}$$

$$(1.891, 2.118)$$

El tiempo de uso del móvil se encuentra entre **1.89 y 2.12 horas** con una confianza del 95 %.

b) 2.3 no pertenece al intervalo (1.891, 2.118), luego con ese nivel de confianza del 95 %, no se puede admitir. Es posible, manteniendo el nivel de confianza, ampliar el intervalo, disminuyendo el tamaño de la muestra. Por ejemplo, con una muestra de tamaño 4, el intervalo sería:

$$(1.673, 2.326)$$

pero esa muestra es demasiado pequeña.

c) El error máximo admisible viene dado por: $E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$$\text{Por tanto, } E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{20}{\sqrt{100}}$$

Calculamos $Z_{\frac{\alpha}{2}}$: $1 - \alpha = 0.9464$, $\alpha = 0.0536$, $\alpha/2 = 0.0268$, $1 - \alpha/2 = 0.9732$. luego, $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.93$.

$$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{20}{\sqrt{100}} = 1.93 \cdot \frac{1}{5} = 0.0643.$$

El error máximo admisible es **0.0643 horas = 3.86 minutos**.

SOLUCIONES PROPUESTA B

Problema B.1:

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

a) Calcula $A \cdot B - C^T$. (0.75 pts)

b) Comprueba que la matriz C no tiene inversa y explica la razón por la que el producto $D^2 \cdot B$ no puede ser realizado. (0.75 pts)

Solución:

a) Calculamos la matriz pedida:

$$A \cdot B - C^T = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 15 \\ 4 & 2 & 10 \\ 8 & 4 & 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 15 \\ 4 & 3 & 8 \\ 6 & 6 & 16 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B - C^T = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 15 \\ 4 & 3 & 8 \\ 6 & 6 & 16 \end{pmatrix}$$

b) Para saber si la matriz C tiene inversa, calculamos su determinante:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 0 + 0 - (0 + 4 + 0) = 0.$$

Como se anula su determinante, la matriz C no tiene inversa.

Intentamos calcular:

$$D^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

La matriz D es de orden 2×2 , luego D^2 es también de dimensión 2×2 , y la matriz B es de dimensión 1×3 . No coinciden el número de columnas de D^2 con el de filas de B , luego no se pueden multiplicar.

Problema B.2:

2. Los precios de un gimnasio son diferentes según la franja horaria dispuesta en tres turnos: mañana, mediodía y tarde. Este mes han acudido 150 personas por la mañana, 30 en la franja del mediodía y 270 por la tarde y el gimnasio ha ingresado un total de 15900 euros. La diferencia entre el precio de la tarde y la mañana equivale a la mitad del precio para el mediodía y al sumar los precios del mediodía y la tarde obtenemos el doble del precio de la mañana.

- a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuál es el precio de cada franja horaria. (1.5 pts)
 b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 pts)

Solución:

Llamamos Ma al precio del gimnasio por las mañanas, Me al del mediodía, y T al de por la tarde:

a) El sistema es:

$$\begin{cases} 150Ma + 30Me + 270T = 15900 \\ T - Ma = \frac{Me}{2} \\ Me + T = 2Ma \end{cases}$$

Multiplicamos por 2 la segunda ecuación, pasamos todos los términos al primer miembro:

$$\begin{cases} 150Ma + 30Me + 270T = 15900 \\ 2T - 2Ma - Me = 0 \\ T - 2Ma + Me = 0 \end{cases}$$

Restamos a la segunda ecuación, la tercera:

$$\begin{cases} 150Ma + 30Me + 270T = 15900 \\ 2T - 2Ma - Me = 0 \\ T - 2Me = 0 \rightarrow T/2 = Me \end{cases}$$

Sustituimos el valor de Me :

$$\begin{cases} 150Ma + 285T = 15900 \\ Me = \frac{2Ma}{3} \\ T = 2Me \end{cases}$$

Resolvemos:

$$\begin{cases} Ma = 30 \\ T = 40 \\ Me = 20 \end{cases}$$

El gimnasio cuesta **30** euros por las mañanas, **40** euros por las tardes y **20** euros al mediodía.

Problema B.3:

3. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} -x-4 & \text{si } x < c \\ -3 & \text{si } c \leq x \leq 0 \\ x^2 - 10x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

- a) ¿Para qué valor de c la función $f(x)$ es continua en $x = c$? (0.5 pts)
 b) Calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(0, +\infty)$. (0.5 pts)
 c) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(0, +\infty)$. (0.5 pts)

Solución:

- a) La función $f(x) = \begin{cases} -x-4, & \text{si } x < c \\ -3, & \text{si } c \leq x \leq 0 \\ x^2 - 10x, & \text{si } x > 0 \end{cases}$ está formada por funciones polinómicas, siempre continuas. Los únicos puntos dudosos son dónde se unen dos ramas. Imponemos que en $x = c$ ambas ramas tomen el mismo valor:

$$-3 = -c - 4 \rightarrow c = -1$$

Si $c = -1$, la función es continua en $x = c$.

En $x = 0$, la función no es continua, presenta un salto de longitud 3, pues.

$$-3 \neq 0^2 - 10 \cdot 0 = 0$$

La función es continua en $x = c$ si $c = -1$.

- b) Para $c = -1$, la función es $f(x) = \begin{cases} -x-4, & \text{si } x < -1 \\ -3, & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ x^2 - 10x, & \text{si } x > 0 \end{cases}$, formada por una semirrecta, de pendiente -1 y ordenada en el origen -4 , un segmento horizontal y la rama de una parábola.

Calculamos los máximos y mínimos para $x > 0$. Derivamos e igualamos a cero:

$$f'(x) = 2x - 10 = 0, \text{ luego } x = 5.$$

Hallamos la derivada segunda:

$f''(x) = 2 > 0$, por lo que se trata de un mínimo, que se alcanza en:

$$x^2 - 10x = (5)^2 - 10(5) = 15.$$

Por lo que el vértice de la parábola, que es un mínimo relativo de la función, es el punto $(5, 15)$.

Para $x > 0$ la función alcanza un valor mínimo relativo en **$(5, 15)$** .

- b) Para $0 < x < 5$ la derivada primera es negativa, luego la función es decreciente. Para $x > 5$, la derivada primera es positiva, luego la función es creciente.

Problema B.4:

4. Los costes de fabricación de un modelo de vehículo $C(x) = -x^3 + 45x^2 - 243x + 500$ (en miles de euros) en función del número de vehículos (en cientos) fabricados ($1 \leq x \leq 27$)

a) Determina la cantidad de vehículos que dan el coste máximo y mínimo. (1 pto)

b) ¿A qué valor ascienden ambos? (0.5 ptos)

Solución:

Se llama x al número de vehículos fabricados (por cientos) y $C(x) = -x^3 + 45x^2 - 243x + 500$, para $1 \leq x \leq 27$, al coste de fabricación en miles de euros a.

Para determinar los valores máximos y mínimos calculamos la derivada:

$$C'(x) = -3x^2 + 90x - 243,$$

Y la igualamos a cero:

$$C'(x) = -3x^2 + 90x - 243 = 0 \Rightarrow 0 = -x^2 + 30x - 81,$$

Se anula para $x = 3$ y para $x = 27$. Calculamos la derivada segunda:

$$C''(x) = -6x + 90,$$

$C''(3) = -18 + 90 > 0$, luego en $x = 3$ se alcanza un mínimo: $C(3) = -3^3 + 45 \cdot 3^2 - 243 \cdot 3 + 500 = 149$, luego (3, 149) es un mínimo.

$C''(27) = -162 + 90 < 0$, luego en $x = 27$ se alcanza un máximo: $C(27) = 27^3 + 45 \cdot 27^2 - 243 \cdot 27 + 500 = 7061$, luego (27, 7061) es un máximo.

Analizamos también los extremos del intervalo, $x = 1$ y $x = 27$. Para $x = 27$ ya lo hemos hecho. Para $x = 1$:

$C(1) = -1^3 + 45 \cdot 1^2 - 243 \cdot 1 + 500 = -1 + 45 - 243 + 500 = 301$, luego es un máximo relativo menor que el obtenido en 27.

El coste de fabricación es **mínimo** si se fabrican **300 vehículos**, y es de **149 000 euros**. El coste de fabricación es **máximo** si se fabrican **2 700 vehículos**, y dicho coste es de **7 061 000 euros**.

Problema B.5:

5. El 5 % de los estudiantes matriculados en una determinada asignatura de bachillerato son deportistas aficionados. El 0.5 % de estos alumnos deportistas aficionados obtienen una calificación de suspenso en dicha asignatura. Mientras que el 15 % de los alumnos no deportistas aficionados obtienen una calificación de suspenso.

a) Elegido un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya obtenido un suspenso en la citada asignatura? (0.75 ptos)

b) Sabiendo que un alumno elegido al azar ha obtenido un suspenso, ¿cuál es la probabilidad de que sea deportista aficionado? (0.75 ptos)

Solución:

Nombramos los sucesos: S = Estudiante con calificación de suspenso, D = Deportista aficionado.

Los datos que nos dan son:

$$P(D) = 0.05, \quad P(S/D) = 0.005, \quad P(S/\bar{D}) = 0.15.$$

Deducimos que la probabilidad del suceso contrario a ser deportista aficionado es: $P(\bar{D}) = 0.95$

a) La probabilidad de suspenso es:

$$\begin{aligned} P(S) &= P(S \cap D) + P(S \cap \bar{D}) = P(D) \cdot P(S/D) + P(\bar{D}) \cdot P(S/\bar{D}) = \\ &= 0.05 \cdot 0.005 + 0.95 \cdot 0.15 = 0.1425. \end{aligned}$$

La probabilidad de suspenso en esa asignatura es: **0.1425**.

b) Ahora nos piden una probabilidad condicionada:

$$P(D/S) = \frac{P(D \cap S)}{P(S)} = \frac{0.5 \cdot 0.005}{0.1425} = \frac{0.0025}{0.1425} = 0.1754.$$

La probabilidad de que sea deportista sabiendo que ha obtenido un suspenso es **0.1754**.

Problema B.6:

6. El contenido en grasas saturadas por litro de leche sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma=0.1$ g/l. Se tomó una muestra aleatoria de 100 litros de leche obteniéndose el intervalo de confianza (0.682, 0.718) para el contenido medio de grasas saturadas en la muestra.

- Calcula el contenido medio de grasas saturadas para los 100 litros de leche de la muestra. (0.25 pts)
- Calcula el nivel de confianza con el que se ha obtenido dicho intervalo. (0.75 pts)
- Halla un intervalo de confianza para el contenido medio de grasas saturadas con un nivel de confianza del 95 %. (0.5 pts)
- ¿Cuál deberá ser el tamaño mínimo de la muestra para que, con un nivel de confianza del 95 %, el error máximo admisible sea menor que 0.01 g/l? (0.5 pts)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Solución:

El intervalo de confianza para la media muestral viene dado por la expresión:

$$\left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

En el enunciado nos dicen que: $\sigma = 0.1$, $n = 100$, sustituyendo, tenemos

$$\left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{0.1}{\sqrt{100}}, \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{0.1}{\sqrt{100}} \right) = \left(\bar{x} - \frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}}{100}, \bar{x} + \frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}}{100} \right) = (0.682, 0.718)$$

Sumamos y dividimos por dos: $\bar{x} = \frac{0.682+0.718}{2} = 0.7$.

El contenido medio de grasas saturadas para 100 litros de la muestra es de **0.7** g/l.

a) Despejamos $Z_{\frac{\alpha}{2}}$:

$$\bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{0.1}{\sqrt{100}} = 0.718 = 0.7 + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{0.1}{\sqrt{100}} \rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = (0.718 - 0.7)/0.01 = 1.8.$$

A 1.8 le corresponde por la tabla un valor: 0.9641. Por lo que:

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 0.9641 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 1 - 0.9641 = 0.0359 \rightarrow \alpha = 0.0718 \rightarrow 1 - \alpha = 0.9282.$$

El nivel de confianza ha sido del **92.82** %.

b) Calculamos el nuevo intervalo de confianza al 95 %:

$$\left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

Sabemos que, $\bar{x} = 0.7$, $\sigma = 0.1$, $n = 100$, $1 - \alpha = 0.95$, $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$, por lo que:

$$\left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = \left(0.7 - 1.96 \cdot \frac{0.1}{\sqrt{100}}, 0.7 + 1.96 \cdot \frac{0.1}{\sqrt{100}} \right) = (0.6804, 0.7196)$$

El intervalo de confianza al 95 % es de **(0.6804, 0.7196)**.

c) El error máximo admisible viene dado por: $E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Por tanto, para $E = 0.01$, $0.01 = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{0.1}{\sqrt{n}}$, luego:

$$\sqrt{n} \cdot 0.01 > 1.96 \cdot 0.1 \rightarrow \sqrt{n} > 19.6 \rightarrow n > 384.16.$$

Para que el error máximo admisible sea inferior a 0.01, el tamaño de la muestra debe ser igual o mayor que **385**.