Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2019

Comunidad autónoma de

Cantabria

Textos Marea Verde

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: José Gallegos Fernández

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

UC UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
LOMCE – JUNIO 2019

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INDICACIONES

Elija una de las dos opciones.
No se admitirá ningún resultado si no está debidamente razonado.
No se permiten calculadoras gráficas, ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a internet.

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

Ejercicio 1 [3,5 puntos]

A. [3 puntos] Una empresa que fabrica grapadoras debe satisfacer un pedido de 325 unidades que empaqueta en cajas de diferentes tamaños. Hay tres modelos de cajas, A, B y C, en los que caben, respectivamente, 5, 10 y 15 unidades. Se dispone de un total de 35 cajas. Además, el total de cajas de los modelos A y B es seis veces el número de cajas del modelo C.

A1. [1 punto] Plantear el sistema de ecuaciones que permite calcular el número de cajas de cada modelo que se pueden utilizar para enviar el pedido.

A2. [1 punto] Analizar la compatibilidad de dicho sistema.

A3. [0,5 puntos] Resolverlo.

A4. [0,5 puntos] ¿A cuánto ha ascendido la factura de compra de las cajas, sabiendo que una unidad del modelo A cuesta 4,5 euros; una del modelo B, 8 euros; y una del C, 12 euros?

B. [0,5 puntos] Despejar la incógnita X de la siguiente ecuación matricial: $B\,X\,B = B\,(X+A)$

Ejercicio 2 [3,5 puntos] Dada la función: $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-4}$

A. [0,2 puntos] Su dominio y los puntos de corte con los ejes OX y OY.
B. [0,6 puntos] Las asíntotas.
C. [1,1 puntos] Los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.
D. [1,1 puntos] Determinar los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión que existan.
E. [0,5 puntos] Finalmente, con los datos obtenidos en los apartados anteriores, dibujar su gráfica.

Ejercicio 3 [3 puntos]

De los 360 alumnos de nuevo ingreso de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, conocemos el número de matriculados en el Centro de Idiomas de la Universidad. Los datos completos aparecen en la siguiente tabla:

	Matriculados en C. de Idiomas	No matriculados en C. de Idiomas	Total
G. Económicas	57	63	120
G. Adm. y D. Empresas	106	134	240
Total	163	197	360

Elegido un alumno al azar,
A. [1 punto] ¿Calcular la probabilidad de que no esté matriculado en el Centro de Idiomas?
B. [1 punto] Si sabemos que el alumno pertenece al Grado en Económicas, ¿cuál es la probabilidad de que esté inscrito en el Centro de Idiomas?
C. [1 punto] Calcular la probabilidad de que sea del Grado en Administración y D. de Empresas y no esté inscrito en el Centro de Idiomas.

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

Ejercicio 1 [3,5 puntos]

A. [3 puntos] Dado el siguiente sistema: $$\begin{cases} -x & +4y & = 6 \\ 2x & +3y & = \dfrac{5a}{2} \\ 5x & +2y & = a^2 \end{cases}$$

A1. [2,5 puntos] Determinar, según los valores del parámetro a, los casos en los que tiene o no tiene solución y si esta es única o no.

A2. [0,5 puntos] Resolver los casos compatibles.

B. [0,5 puntos] A, B y C son tres matrices cuadradas de dimensión 3. Sus determinantes son: $|A|=3$, $|B|=-2$ y $|C|=6$. Calcular:

B1. [0,2 puntos] $|A^t B^{-1}|$

B2. [0,1 puntos] $|D|$ siendo D la matriz resultante de multiplicar por 2 los elementos de la segunda columna de C.

B3. [0,2 puntos] $|B^2 E|$ siendo E la matriz resultante de intercambiar la primera y segunda filas de A.

Ejercicio 2 [3,5 puntos]

A. [1,75 puntos]

Una empresa juguetera puede vender *x* unidades al mes de un determinado modelo de tren eléctrico, al precio de $518-x^2$ euros por unidad. Por otra parte, el fabricante tiene gastos mensuales: unos fijos de 225 euros y otros de $275x$ euros que dependen del número *x* de unidades.

Hallar el número de unidades que maximizan el beneficio mensual. ¿A cuánto ascienden los ingresos?

B. [1,75 puntos] Dada la función $f(x) = -2x^3 - 4x^2 + 6x$

B1. [0,1 puntos] Los puntos de corte con los ejes OX y OY.

B2. [0,4 puntos] Los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.

B3. [0,4 puntos] Determinar los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión que existan.

B4. [0,25 puntos] Con los datos obtenidos en los apartados anteriores, dibujar su gráfica.

B5. [0,6 puntos] Calcular el área de la región delimitada por la curva y el eje OX.

Ejercicio 3 [3 puntos]

El gasto mensual en alquiler de los inquilinos de la zona centro de determinada ciudad, sigue una distribución normal con desviación típica 73 euros. Una muestra aleatoria de 350 inquilinos da como resultado una renta media de 689,3 euros.

A. [1,5 puntos] Obtener el intervalo de confianza del 93% para la renta media.

B. [1,5 puntos] ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el error cometido al estimar la media con un nivel de confianza del 91% sea un tercio del obtenido en el apartado anterior?

OPCIÓN DE EXAMEN 1

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Problema 1.1:

Ejercicio 1 [3,5 puntos]

A. [3 puntos] Una empresa que fabrica grapadoras debe satisfacer un pedido de 325 unidades que empaqueta en cajas de diferentes tamaños. Hay tres modelos de cajas, A, B y C, en los que caben, respectivamente, 5, 10 y 15 unidades. Se dispone de un total de 35 cajas. Además, el total de cajas de los modelos A y B es seis veces el número de cajas del modelo C.

A1. [1 punto] Plantear el sistema de ecuaciones que permite calcular el número de cajas de cada modelo que se pueden utilizar para enviar el pedido.

A2. [1 punto] Analizar la compatibilidad de dicho sistema.

A3. [0,5 puntos] Resolverlo.

A4. [0,5 puntos] ¿A cuánto ha ascendido la factura de compra de las cajas, sabiendo que una unidad del modelo A cuesta 4,5 euros; una del modelo B, 8 euros; y una del C, 12 euros?

B. [0,5 puntos] Despejar la incógnita X de la siguiente ecuación matricial: B X B = B (X+A)

Solución:

A) Llamamos A al número de cajas del tipo A, B al número de cajas del tipo B y C al número de cajas del tipo C. Entonces:

A1) $$\left.\begin{array}{r} A+B+C=35 \\ 5A+10B+15C=325 \\ A+B=6C \end{array}\right\}$$

A2) $$\left.\begin{array}{r} A+B+C=35 \\ A+2B+3C=65 \\ A+B-6C=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 35 \\ 1 & 2 & 3 & 65 \\ 1 & 1 & -6 & 0 \end{array}\right) \underset{3^aF\leftrightarrow 1^aF-3^aF}{\overset{2^aF\leftrightarrow 2^aF-1^aF}{\Rightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 35 \\ 0 & 1 & 2 & 30 \\ 0 & 0 & 7 & 35 \end{array}\right) \overset{3^aF\leftrightarrow 3^aF/7}{\Rightarrow}$$

$$\overset{3^aF\leftrightarrow 3^aF/7}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{r} A+B+C=35 \\ B+2C=30 \\ C=5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \boxed{C=5} \\ B+10=30 \Rightarrow \boxed{B=20} \\ A+20+5=35 \Rightarrow \boxed{A=10} \end{array}\right\}$$

Luego el sistema es compatible determinado, de solución $A = 10$, $B = 20$ y $C = 50$.

A3) La solución del sistema es $\{(10, 20, 5)\}$, es decir, necesita 10 cajas de tipo A, 20 de tipo B y 5 de tipo C para enviar el pedido.

A4) El precio total del pedido se calcula multiplicando el precio de cada caja por la cantidad de cajas que se necesitan de dicho tipo y sumando dichas cantidades: $10\cdot 4,5+20\cdot 8+5\cdot 12=45+160+60=265$.

Precio total: **265 €**.

B) $$B\cdot X\cdot B=B\cdot(X+A) \Rightarrow B^{-1}\cdot B\cdot X\cdot B=B^{-1}\cdot B\cdot(X+A) \Rightarrow X\cdot B=X+A \Rightarrow$$
$$\Rightarrow X\cdot B-X=A \Rightarrow X\cdot(B-I)=A \Rightarrow X=A\cdot(B-I)^{-1}$$

suponiendo que tanto B como $(B-I)$ son matrices invertibles.

Problema 1.2:

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Ejercicio 2 [3,5 puntos] Dada la función : $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-4}$

A. [0,2 puntos] Su dominio y los puntos de corte con los ejes OX y OY.
B. [0,6 puntos] Las asíntotas.
C. [1,1 puntos] Los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.
D. [1,1 puntos] Determinar los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión que existan.
E. [0,5 puntos] Finalmente, con los datos obtenidos en los apartados anteriores, dibujar su gráfica.

Solución:

A) El dominio vendrá dado por los puntos que tienen imagen, es decir, todos aquellos valores de x que no anulen al denominador:

$Dom\ f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 4 \neq 0\} = \boxed{\mathbb{R} - \{-2; 2\}}$ ya que $x^2 - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 2$

El punto de corte con el eje de ordenadas vendrá dado por el valor $x = 0$ (que está en el dominio y, por tanto, proporciona un punto de corte) y su imagen: $f(0) = \dfrac{1}{-4} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\left(0, \dfrac{-1}{4}\right)}$

Los puntos de corte con el eje de abscisas se obtienen al resolver la ecuación $f(x) = 0$:

$\dfrac{x^2+1}{x^2-4} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 1 = 0$ que no tiene soluciones en el conjunto de los números reales. Por tanto, <u>no hay puntos de corte con el eje de abscisas</u>.

Dominio = $\mathbb{R} - \{-2; 2\}$. El único punto de corte con los ejes es (0, –1/4)

B1) Las posibles asíntotas verticales se encontrarán en los puntos que no pertenecen al dominio:

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2+1}{x^2-4} = \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to -2^-} \frac{x^2+1}{x^2-4} = \left(\frac{3}{0^+}\right) = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to -2^+} \frac{x^2+1}{x^2-4} = \left(\frac{3}{0^-}\right) = -\infty \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = -2} \text{ A.V.}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+1}{x^2-4} = \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2+1}{x^2-4} = \left(\frac{3}{0^-}\right) = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+1}{x^2-4} = \left(\frac{3}{0^+}\right) = +\infty \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 2} \text{ A.V.}$$

B2) Como $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2+1}{x^2-4} = 1$ (grado numerador = grado denominador) $\Rightarrow$ $\boxed{y = 1}$ A.H.

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+1}{x^2-4} = 1 \quad \text{(función par)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = 1} \text{ A.H.}$$

B3) Como consecuencia de que hay una asíntota horizontal, no existen asíntotas oblicuas.

Las asíntotas verticales son $\boldsymbol{x = -2}$ y $\boldsymbol{x = 2}$. Hay asíntota horizontal: $\boldsymbol{y = 1}$.

Autor: José Gallegos Fernández
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

C1) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-4} \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\dfrac{2x\cdot(x^2-4)-(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2-4)^2}=\dfrac{-10x}{(x^2-4)^2}$

Por tanto:

f es creciente cuando *f'* sea positiva, es decir, si $x<0$.

f es decreciente cuando *f'* sea negativa, es decir, si $x>0$.

C2) Así pues, el único punto donde cambia la monotonía es en $x=0$, que está en el dominio tanto de *f* como de *f '*, y donde la función es continua y derivable. Por tanto, es un extremo relativo. Al cambiar la monotonía de creciente a decreciente, es un máximo relativo.

f creciente	$]-\infty,0[$	$\left(0,\dfrac{-1}{4}\right)$ máximo relativo
f decreciente	$]0,\infty[$	

D1) $f'(x)=\dfrac{-10x}{(x^2-4)^2} \quad\Rightarrow\quad f''(x)=\dfrac{-10\cdot(x^2-4)^{\cancel{2}}+10x\cdot 2\cdot\cancel{(x^2-4)}\cdot 2x}{(x^2-4)^{\cancel{4}\,3}}=\dfrac{30x^2+40}{(x^2-4)^3}$

Por tanto, ya que el numerador no se anula nunca y es siempre positivo, el signo de la segunda derivada es el mismo que el del denominador:

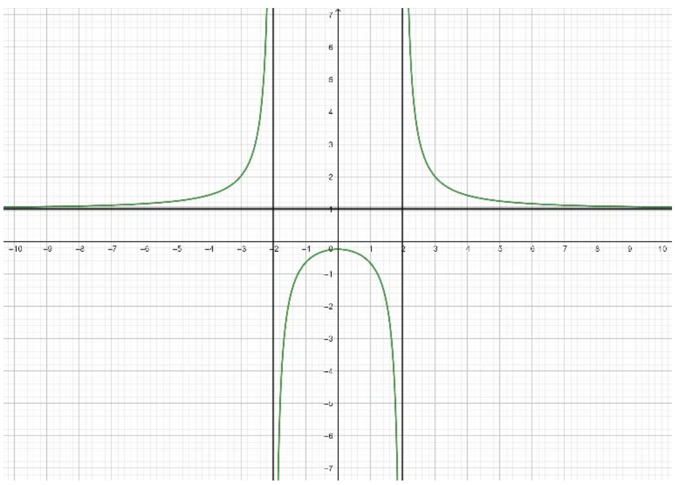
f es cóncava cuando *f''* es negativa, es decir, si $-2<x<2$ (entre las raíces el signo es el contrario al coeficiente líder 1).

f es convexa cuando *f''* es positiva, es decir, si $x<-2$ o $x>2$ (en los otros intervalos los signos se alternan con el anterior).

D.2.) Así pues, los únicos puntos donde cambia la curvatura no están en el dominio de definición de la función y, por tanto, no pueden ser puntos de inflexión. Dicho de otra forma: como la segunda derivada no se anula, no hay puntos de inflexión.

f cóncava $(\cap)$	$]-2,2[$	No hay puntos de inflexión
f convexa $(\cup)$	$]-\infty,-2[\cup]2,\infty[$	

E.)



Problema 1.3:

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Ejercicio 3 [3 puntos]

De los 360 alumnos de nuevo ingreso de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, conocemos el número de matriculados en el Centro de Idiomas de la Universidad. Los datos completos aparecen en la siguiente tabla:

	Matriculados en C. de Idiomas	No matriculados en C. de Idiomas	Total
G. Económicas	57	63	120
G. Adm. y D. Empresas	106	134	240
Total	163	197	360

Elegido un alumno al azar,

A. [1 punto] ¿Calcular la probabilidad de que no esté matriculado en el Centro de Idiomas?

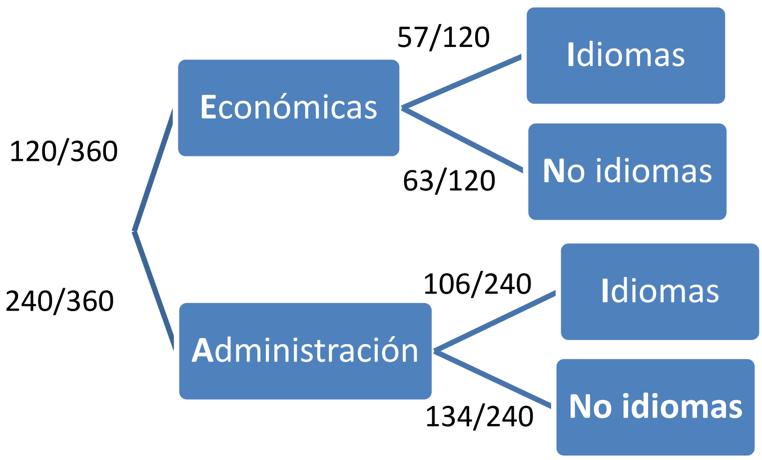
B. [1 punto] Si sabemos que el alumno pertenece al Grado en Económicas, ¿cuál es la probabilidad de que esté inscrito en el Centro de Idiomas?

C. [1 punto] Calcular la probabilidad de que sea del Grado en Administración y D. de Empresas y no esté inscrito en el Centro de Idiomas.

Solución:

Consideremos los siguientes sucesos:

E = "estudiar Económicas", A = "estudiar Administración", I = "estar matriculado en el Centro de Idiomas" y N = "no estar matriculado en el Centro de Idiomas"



A) $P(N) \overset{T^{\text{ma}}\ \text{total Prob.}}{=} P(A)\cdot P(N/A) + P(E)\cdot P(N/E) = \frac{\boxed{240}}{360}\cdot\frac{134}{\boxed{240}} + \frac{\boxed{120}}{360}\cdot\frac{63}{\boxed{120}} = \frac{197}{360} = 0.5472$

B) $P(I/E) = \frac{57}{120} = 0.475$

C) $P(A\cap N) = P(N/A)\cdot P(A) = \frac{134}{\boxed{240}}\cdot\frac{\boxed{240}}{360} = \frac{134}{360} = 0.372$

A) $P(N) = \mathbf{0.5472}$; B) $P(I/E) = \mathbf{0.475}$; C) $P(A\cap N) = \mathbf{0.372}$

OPCIÓN DE EXAMEN 2

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Problema 2.1:

Ejercicio 1 [3,5 puntos]

A. [3 puntos] Dado el siguiente sistema: $\begin{cases} -x & +4y & =6 \\ 2x & +3y & =\dfrac{5a}{2} \\ 5x & +2y & =a^2 \end{cases}$

A1. [2,5 puntos] Determinar, según los valores del parámetro a, los casos en los que tiene o no tiene solución y si esta es única o no.

A2. [0,5 puntos] Resolver los casos compatibles.

B. [0,5 puntos] A, B y C son tres matrices cuadradas de dimensión 3. Sus determinantes son: $|A|=3$, $|B|=-2$ y $|C|=6$. Calcular:

B1. [0,2 puntos] $|A^t B^{-1}|$

B2. [0,1 puntos] $|D|$ siendo D la matriz resultante de multiplicar por 2 los elementos de la segunda columna de C.

B3. [0,2 puntos] $|B^2 E|$ siendo E la matriz resultante de intercambiar la primera y segunda filas de A.

Solución:

A) Las matrices asociadas al sistema son $A=\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ y $(A|b)=\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 5a/2 \\ 5 & 2 & a^2 \end{array}\right)$.

Estudiemos sus rangos:

A1) $\operatorname{rango}(A)=2$ ya que hay un menor de orden 2 no nulo: $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=-3-8=-11\neq 0$.

$$|A|b|=\begin{vmatrix} -1 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 5a/2 \\ 5 & 2 & a^2 \end{vmatrix}=-3a^2+50a+24-90-8a^2+5a=-11a^2+55a-66=0$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2-5a+6=0 \quad \Rightarrow \quad a=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm 1}{2}=\begin{cases} a_1=2 \\ a_2=3 \end{cases}$$

Por tanto:

Si $a\neq 2$ y $a\neq 3$, $\operatorname{rango}(A|b)=3\neq\operatorname{rango}(A)=2$ y, como consecuencia, el sistema es incompatible (sin solución).

Si $a=2$ o $a=3$, $\operatorname{rango}(A|b)=2=\operatorname{rango}(A)=\text{nº incógnitas}$ y, como consecuencia, el sistema es compatible determinado (solución única).

Autor: José Gallegos Fernández
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

A2) Si $a = \mathbf{2}$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & 4 \end{array}\right) \underset{2^aF\leftrightarrow 2\cdot 1^aF+2^aF}{\overset{3^aF\leftrightarrow 5\cdot 1^aF+3^aF}{\Rightarrow}} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 4 & 6 \\ 0 & 11 & 17 \\ 0 & 22 & 34 \end{array}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -x+4y=6 \\ 11y=17 \end{array}\right\} \Rightarrow Sol = \left\{\left(\frac{2}{11}, \frac{17}{11}\right)\right\}$$

Si $a = \mathbf{3}$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & \frac{15}{2} \\ 5 & 2 & 9 \end{array}\right) \underset{2^aF\leftrightarrow 2\cdot 1^aF+2^aF}{\overset{3^aF\leftrightarrow 5\cdot 1^aF+3^aF}{\Rightarrow}} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 4 & 6 \\ 0 & 11 & \frac{39}{2} \\ 0 & 22 & 39 \end{array}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -x+4y=6 \\ 22y=39 \end{array}\right\} \Rightarrow Sol = \left\{\left(\frac{12}{11}, \frac{39}{22}\right)\right\}$$

Si $a \neq \mathbf{2}$ y $a \neq \mathbf{3}$	$\text{rango}(A\,|\,b) = \mathbf{3} \neq \text{rango}(A) = \mathbf{2}$	Compatible incompatible	
Si $a = \mathbf{2}$ o $a = \mathbf{3}$	$\text{rango}(A\,|\,b) = \mathbf{2} = \text{rango}(A) = \text{n}^{\text{o}}$ incógnitas	Compatible determinado	
Si $a = \mathbf{2}$	$Sol = \left\{\left(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{11}}, \frac{\mathbf{17}}{\mathbf{11}}\right)\right\}$	Si $a = \mathbf{3}$	$Sol = \left\{\left(\frac{\mathbf{12}}{\mathbf{11}}, \frac{\mathbf{39}}{\mathbf{22}}\right)\right\}$

B1) $\left|A^t \cdot B^{-1}\right| = \left|A^t\right| \cdot \left|B^{-1}\right| = \frac{|A|}{|B|} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{-2}} = \boxed{\frac{\mathbf{-3}}{\mathbf{2}}}$

Ya que el determinante de una matriz y la de su traspuesta son iguales y el determinante de una matriz y la de su inversa, caso de existir, también son inversos.

B2) $|D| = \mathbf{2} \cdot |C| = \mathbf{2} \cdot \mathbf{6} = \boxed{\mathbf{12}}$

Ya que, al multiplicar toda una columna por un número, el determinante queda multiplicado por dicho número.

B3) $\left|B^2 \cdot E\right| = |B \cdot B \cdot E| = |B| \cdot |B| \cdot |A| \cdot (-\mathbf{1}) = |B|^2 \cdot |A| \cdot (-\mathbf{1}) = (-\mathbf{2})^2 \cdot \mathbf{3} \cdot (-\mathbf{1}) = \mathbf{4} \cdot \mathbf{3} \cdot (-\mathbf{1}) = \boxed{\mathbf{-12}}$

Ya que, al intercambiar dos filas de orden, el determinante cambia de signo.

B1) $|A^t \cdot B^{-1}| = \frac{-\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$; B2) $|D| = \mathbf{12}$; B3.) $|B^2 \cdot E| = \mathbf{-12}$.

Problema 2.2:

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Ejercicio 2 [3,5 puntos]

A. [1,75 puntos]

Una empresa juguetera puede vender x unidades al mes de un determinado modelo de tren eléctrico, al precio de $518-x^2$ euros por unidad. Por otra parte, el fabricante tiene gastos mensuales: unos fijos de 225 euros y otros de $275x$ euros que dependen del número x de unidades.

Hallar el número de unidades que maximizan el beneficio mensual. ¿A cuánto ascienden los ingresos?

B. [1,75 puntos] Dada la función $f(x) = -2x^3 - 4x^2 + 6x$

B1. [0,1 puntos] Los puntos de corte con los ejes OX y OY.

B2. [0,4 puntos] Los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.

B3. [0,4 puntos] Determinar los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión que existan.

B4. [0,25 puntos] Con los datos obtenidos en los apartados anteriores, dibujar su gráfica.

B5. [0,6 puntos] Calcular el área de la región delimitada por la curva y el eje OX.

Solución:

A) El beneficio mensual se obtendrá al restarle a los ingresos por las ventas, $f(x)=\left(518-x^2\right)\cdot x=-x^3+518x$, los gastos totales, $g(x)=275x+225$.

Por tanto, la función que queremos maximizar es $B(x)=-x^3+243x-225$, donde x es el número de unidades que se han vendido en un mes.

Así pues: $B'(x)=-3x^2+243=0 \overset{:3}{\Leftrightarrow} -x^2+81=0 \Leftrightarrow x^2=81 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-9 \\ x_2=9 \end{cases}$

$$B''(x)=-6x \Rightarrow \begin{cases} B''(-9)=54>0 \Rightarrow \text{mínimo en } x=-9 \\ B''(9)=-54<0 \Rightarrow \text{máximo en } x=9 \quad \left[B(9)=-729+2187-225=1233\right] \end{cases}$$

Como conclusión, se tienen que fabricar 9 unidades al mes y el beneficio será de 1233 €.

B) $f(x)=-2x^3-4x^2+6x$

B1) $f(0)=0 \Rightarrow \boxed{(0,0)}$ es el punto de corte con el eje de ordenadas

$$f(x)=-2x^3-4x^2+6x=0 \Rightarrow x\cdot\left(x^2+2x-3\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2+2x-3=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ x=1 \end{cases} \end{cases}$$

Luego $\boxed{(-3,0);(0,0);(1,0)}$ son los puntos de corte con el eje de abscisas.

Autor: José Gallegos Fernández
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

B2) $f'(x) = -6x^2 - 8x + 6 = 0 \overset{:(-2)}{\Leftrightarrow} 3x^2 + 4x - 3 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{52}}{6} = \dfrac{-4 \pm 2\sqrt{13}}{6} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{13}}{3}$

Luego, como el signo entre las raíces es el contrario al coeficiente líder (-6) y se alternan:

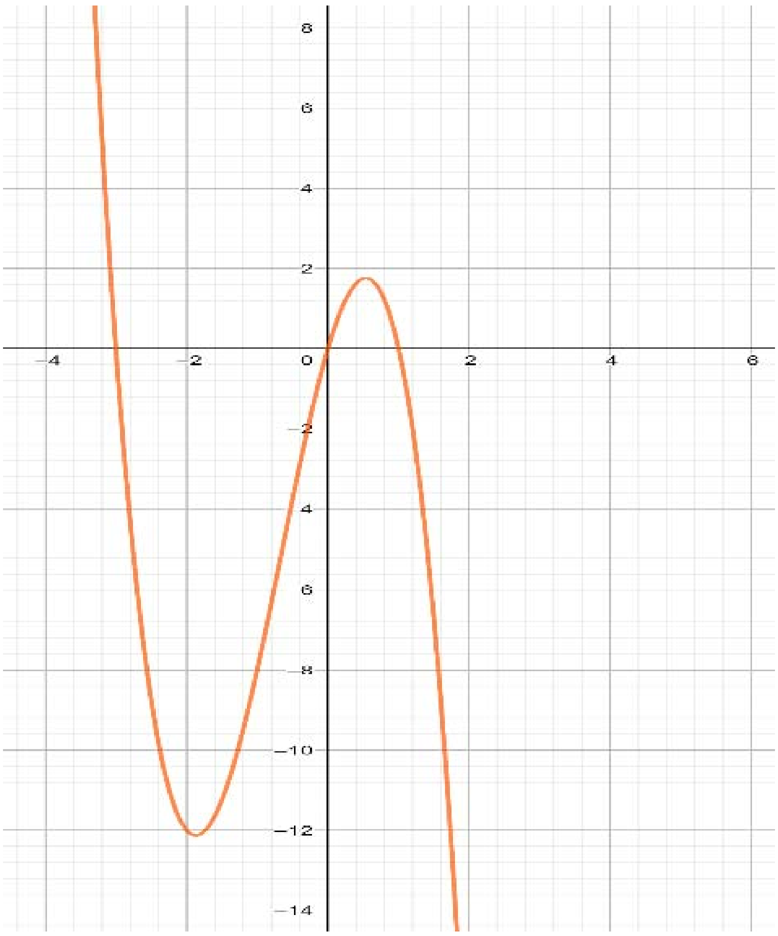
f decreciente	$\left]-\infty, \dfrac{-2-\sqrt{13}}{3}\right[\cup \left]\dfrac{-2+\sqrt{13}}{3}, \infty\right[$	$(-1.86852, -12.129)$ mínimo relativo
f creciente	$\left]\dfrac{-2-\sqrt{13}}{3}, \dfrac{-2+\sqrt{13}}{3}\right[$	$(0.535184, 1.7588)$ máximo relativo

B3) $f''(x) = -12x - 8 = 0 \overset{:(-4)}{\Leftrightarrow} 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-2}{3}$

Luego:

f cóncava $(\cap \text{ o } f''<0)$	$\left]\dfrac{-2}{3}, \infty\right[$	$\left(\dfrac{-2}{3}, \dfrac{-140}{27}\right)$ punto de inflexión
f convexa $(\cup \text{ o } f''>0)$	$\left]-\infty, \dfrac{-2}{3}\right[$	

B4)



Autor: José Gallegos Fernández
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

B5) El área limitada por la curva y el eje OX se calcula mediante:

$$\left|\int_{-3}^{0} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{0}^{1} f(x)\,dx\right| = \left|\frac{-45}{2}\right| + \left|\frac{7}{6}\right| = \frac{135+7}{6} = \frac{142}{6} = \boxed{\frac{71}{3}\ u^2}$$

$$\int \left(-2x^3 - 4x^2 + 6x\right) dx = \frac{-x^4}{2} - \frac{4x^3}{3} + 3x^2$$

$$\left[\frac{-x^4}{2} - \frac{4x^3}{3} + 3x^2\right]_{x=-3}^{x=0} = 0 - \left[\frac{-81}{2} + 36 + 27\right] = \frac{81}{2} - 63 = \frac{81-126}{2} = \frac{-45}{2}$$

$$\left[\frac{-x^4}{2} - \frac{4x^3}{3} + 3x^2\right]_{x=0}^{x=1} = \left[\frac{-1}{2} - \frac{4}{3} + 3\right] - 0 = \frac{-3-8+18}{6} = \frac{7}{6}$$

$$\left|\int_{-3}^{0} f(x)dx\right| + \left|\int_{0}^{1} f(x)dx\right| = \left|\frac{-135}{6}\right| + \left|\frac{7}{6}\right| = \frac{135+7}{6} = \frac{142}{6} = \boxed{\frac{71}{3}}$$

Autor: José Gallegos Fernández
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema 2.3:

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Ejercicio 3 [3 puntos]

El gasto mensual en alquiler de los inquilinos de la zona centro de determinada ciudad, sigue una distribución normal con desviación típica 73 euros. Una muestra aleatoria de 350 inquilinos da como resultado una renta media de 689,3 euros.

A. [1,5 puntos] Obtener el intervalo de confianza del 93% para la renta media.

B. [1,5 puntos] ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el error cometido al estimar la media con un nivel de confianza del 91% sea un tercio del obtenido en el apartado anterior?

Solución:

A) X = gasto mensual en alquiler $\sim N(\mu, 73)$

M = muestra de **350** > 30 inquilinos $\sim N\left(689.3; \frac{73}{\sqrt{350}}\right) = N(689.3; 3.9)$

Nivel de confianza: $1-\alpha = 0.93 \Rightarrow \alpha = 0.07 \Rightarrow \quad 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.965 = P\left[Z \le z_{\frac{\alpha}{2}}\right] \quad \Rightarrow \quad z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.815$

Error de estimación: $E_\alpha = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.815 \cdot 3.9 = 7.0785$

Intervalo de confianza al 93 % para la media poblacional: $I_\alpha =]689.3 - 7.0785; 689.3 + 7.0785[$

Intervalo de confianza al 93 % para la media poblacional: $\boxed{I_\alpha =]682.2215; 696.3785[}$

B) Nivel de confianza: $1-\alpha = 0.91 \Rightarrow \alpha = 0.09 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.955 = P\left[Z \le z_{\frac{\alpha}{2}}\right] \quad \Rightarrow \quad z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.695$

Error de estimación: $E_\alpha = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.695 \cdot \frac{73}{\sqrt{n}} = 2.3595 \Rightarrow 52.44 \simeq \frac{123.735}{2.3595} = \sqrt{n} \Rightarrow n \simeq 2749.95$

El tamaño mínimo de la muestra para que se cumplan las condiciones del enunciado debe ser: $\boxed{\mathbf{2750} \text{ personas}}$

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

LOMCE – JULIO 2019

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INDICACIONES

Elija una de las dos opciones.
No se admitirá ningún resultado si no está debidamente razonado.
No se permiten calculadoras gráficas, ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a internet.

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

Ejercicio 1 [3,5 PUNTOS]

A. [3 PUNTOS] Una empresa que fabrica bombillas debe satisfacer un pedido de 450 unidades que empaqueta en cajas de tamaños distintos. Hay dos modelos de cajas, A y B, en los que caben respectivamente 15 y 20 unidades. Se dispone de un total de k cajas. Además, el número de cajas del modelo A coincide con las dos terceras partes del total de cajas del modelo B. El sistema de ecuaciones lineales que permite calcular el número de cajas de cada modelo a utilizar para enviar el pedido, es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} 15x + 20y = 450 \\ x + y = k \\ 3x - 2y = 0 \end{array}\right\}$$

Determinar, según el número total de cajas disponibles, (según los valores del parámetro k), los casos en los que el sistema tiene o no tiene solución, y si esta es única o no. Resolver el sistema cuando tenga solución.

B. [0,5 PUNTOS] Sean A y B dos matrices cuadradas de dimensión 3. Sus determinantes tienen como valor -3 y 10 respectivamente. Con estos datos, calcular:

B1. [0,25 PUNTOS] $|A^{-1}B^2|$

B2. [0,25 PUNTOS] $|CB^t|$, siendo C la matriz resultante de multiplicar la tercera fila de A por 6, y B^t la matriz traspuesta de B.

Ejercicio 2 [3,5 PUNTOS]

A. [2,9 PUNTOS] Dada la función $f(x) = -x^2 + 3x + 5$

A1. [0,1 PUNTOS] Obtener los puntos de corte con los ejes OX y OY.

A2. [0,6 PUNTOS] Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.

A3. [0,5 PUNTOS] Dibujar la región delimitada por la curva anterior y la recta $y = x-3$.

A4. [1,7 PUNTOS] Calcular el área de la región anterior.

B. [0,6 PUNTOS] Sea ahora la función $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 12}{x^2 - 2x - 15}$. ¿En qué puntos es discontinua? ¿Se puede definir de nuevo esta función para evitar alguna discontinuidad?

Ejercicio 3 [3 PUNTOS]

La edad de los asistentes a un concierto de música clásica celebrado recientemente en la ciudad, sigue una distribución normal con desviación típica de 3 años. Una muestra aleatoria de 350 espectadores ha dado como resultado una edad media de 64,3 años.

A. [1,5 PUNTOS] Obtener el intervalo de confianza del 92 % para la edad media de los asistentes.

B. [1,5 PUNTOS] ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener la muestra si deseamos que el error cometido al estimar la media con un nivel de confianza del 98 % sea de 0,7?

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE JULIO

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

Ejercicio 1 [3,5 PUNTOS]

Una empresa textil confecciona dos estampados diferentes: A y B. Debe satisfacer una demanda de al menos 50 rollos de tela del estampado A; y de al menos 50 rollos del estampado B. Los ingresos obtenidos por rollo de tela son de 30 euros para el estampado A y de 20 euros para el B. Por otro lado, el número de rollos del B no debe ser inferior a la mitad de rollos del estampado A. Además, la capacidad del almacén es de 375 rollos. ¿Cuántos rollos de tela de cada tipo de estampado debe producir para obtener unos ingresos máximos?

Ejercicio 2 [3,5 PUNTOS]

A. [1,75 PUNTOS] Dada la función, determinar los valores de a y b para los que la función es continua en $x = -2$ y en $x = 0$.

$$f(x)=\begin{cases} -6x+3, & \text{si} \quad -4<x<-2 \\ x^2+ax+5, & \text{si} \quad -2\le x<0 \\ \dfrac{x+15}{x+b} & \text{si} \quad 0\le x<3 \end{cases}$$

B. [1,75 PUNTOS] Determinar las asíntotas de la función $f(x)=\frac{2x^2+5}{x^2+4x-21}$. Si existen asíntotas verticales, esbozar la posición de la gráfica respecto a las mismas, calculando previamente los límites laterales correspondientes.

Ejercicio 3 [3 PUNTOS]

Se tienen dos urnas. La urna I tiene 2 bolas negras, 3 rojas y 5 amarillas. La urna II contiene 3 bolas negras, 4 rojas y 3 amarillas. Se lanza un dado. Si sale 1, 3 o 5, se extrae una bola de la urna I. Si sale 2, 4 o 6, se extrae una bola de la urna II.

A. [1 PUNTO] Calcular la probabilidad que tenemos de extraer una bola amarilla.

B. [1 PUNTO] Si hemos extraído una bola roja, ¿cuál es la probabilidad de que se haya extraído de la urna I?

C. [1 PUNTO] ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola amarilla de la urna II?

OPCIÓN DE EXAMEN 1

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE JULIO

Problema 1.1:

Ejercicio 1 [3,5 PUNTOS]

A. [3 PUNTOS] Una empresa que fabrica bombillas debe satisfacer un pedido de 450 unidades que empaqueta en cajas de tamaños distintos. Hay dos modelos de cajas, A y B, en los que caben respectivamente 15 y 20 unidades. Se dispone de un total de k cajas. Además, el número de cajas del modelo A coincide con las dos terceras partes del total de cajas del modelo B. El sistema de ecuaciones lineales que permite calcular el número de cajas de cada modelo a utilizar para enviar el pedido, es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} 15x+20y=450 \\ x+y=k \\ 3x-2y=0 \end{array}\right\}$$

Determinar, según el número total de cajas disponibles, (según los valores del parámetro k), los casos en los que el sistema tiene o no tiene solución, y si esta es única o no. Resolver el sistema cuando tenga solución.

B. [0,5 PUNTOS] Sean A y B dos matrices cuadradas de dimensión 3. Sus determinantes tienen como valor -3 y 10 respectivamente. Con estos datos, calcular:

B1. [0,25 PUNTOS] $|A^{-1}B^2|$

B2. [0,25 PUNTOS] $|CB^t|$, siendo C la matriz resultante de multiplicar la tercera fila de A por 6, y B^t la matriz traspuesta de B.

Solución:

A) Discutamos el sistema $\left.\begin{array}{l} 15x+20y=450 \\ x+y=k \\ 3x-2y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x+4y=90 \\ x+y=k \\ 3x-2y=0 \end{array}\right\}$ en función de los valores de k:

La matriz del sistema es $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ y tiene rango 2 ya que $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=3-4=-1\neq 0$

La matriz ampliada del sistema es $(A|b)=\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 90 \\ 1 & 1 & k \\ 3 & -2 & 0 \end{array}\right)$ con determinante:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 90 \\ 1 & 1 & k \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}=12k-180-270+6k=18k-450=0 \quad\Leftrightarrow\quad k=25$$. Por tanto:

Si $k\neq 25$, $rango(A|b)=3\neq 2=rango(A)$ y el sistema es **incompatible** (sin solución).

Si $k=25$, $rango(A|b)=2=rango(A)=$ número de incógnitas y el sistema es **compatible determinado** (con solución única).

En este caso:

$$\left.\begin{array}{l} 3x+4y=90 \\ x+y=25 \\ 3x-2y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=25 \\ 3x+4y=90 \\ 3x-2y=0 \end{array}\right\} \underset{3^aF\leftrightarrow 3\cdot 1^aF-3^aF}{\overset{2^aF\leftrightarrow 2^aF-3\cdot 1^aF}{\Rightarrow}} \left.\begin{array}{l} x+y=25 \\ y=15 \\ 5y=75 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+15=25 \quad \Rightarrow \quad x=10 \\ y=15 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{Sol=\{(10,15)\}}$$

Por tanto, si $k=25$, necesitará $\mathbf{10}$ cajas de tipo A y $\mathbf{15}$ de tipo B para satisfacer el pedido.

B)

B1) $\left|A^{-1}\cdot B^2\right|=\left|A^{-1}\right|\cdot\left|B^2\right|=|A|^{-1}\cdot|B|^2=\dfrac{|B|^2}{|A|}=\dfrac{10^2}{-3}=\boxed{\dfrac{-100}{3}}$

Ya que el determinante de una matriz y la de su inversa, caso de existir, también son inversos.

B2) $\left|C\cdot B^t\right|=|C|\cdot\left|B^t\right|=6\cdot|A|\cdot|B|=6\cdot(-3)\cdot 10=\boxed{-180}$

Ya que, al multiplicar toda una fila por un número, el determinante queda multiplicado por dicho número y el determinante de una matriz es igual al de su traspuesta.

$$|A^{-1}\cdot B^2|=\boxed{\frac{-100}{3}};\ |C\cdot B^t|=\boxed{-180}$$

Problema 1.2:

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE JULIO

Ejercicio 2 [3,5 PUNTOS]

A. [2,9 PUNTOS] Dada la función $f(x) = -x^2 + 3x + 5$

A1. [0,1 PUNTOS] Obtener los puntos de corte con los ejes OX y OY.

A2. [0,6 PUNTOS] Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.

A3. [0,5 PUNTOS] Dibujar la región delimitada por la curva anterior y la recta $y = x-3$.

A4. [1,7 PUNTOS] Calcular el área de la región anterior.

B. [0,6 PUNTOS] Sea ahora la función $f(x) = \frac{x^2-2x-12}{x^2-2x-15}$ ¿En qué puntos es discontinua? ¿Se puede definir de nuevo esta función para evitar alguna discontinuidad?

Solución:

A) $f(x) = -x^2 + 3x + 5$

A1) El punto de corte con el eje de ordenadas será $(0, f(0)) = \boxed{(0,5)}$.

Los puntos de corte con el eje de abscisas se obtienen a partir de las soluciones de $f(x) = 0$:

$$x^2 - 3x - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3 \pm \sqrt{9+20}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{29}}{2} \quad \Rightarrow \begin{cases} \boxed{\left(\frac{3-\sqrt{29}}{2}, 0\right)} \equiv (-1.19; 0) \\ \boxed{\left(\frac{3+\sqrt{29}}{2}, 0\right)} \equiv (4.19; 0) \end{cases}$$

Puntos de corte con los ejes: $(\mathbf{0}, \mathbf{5})$; $\left(\frac{3-\sqrt{29}}{2}, 0\right) \equiv (\mathbf{-1.19}, \mathbf{0})$; $\left(\frac{3+\sqrt{29}}{2}, 0\right) \equiv (\mathbf{4.19}, \mathbf{0})$

A2) $f'(x) = -2x + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \begin{cases} f'(x) > 0 \text{ si } x < \frac{3}{2} \\ f'(x) < 0 \text{ si } x > \frac{3}{2} \end{cases}$

El cambio en la monotonía se produce cuando $x = \frac{3}{2}$, que está en el dominio de la función, la función es continua y derivable en él. Por tanto, es un extremo. Al pasar la función de ser creciente a decreciente, es un máximo relativo. Además: $f\left(\frac{3}{2}\right) = -\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) + 5 = -\frac{9}{4} + \frac{9}{2} + 5 = \frac{-9+18+20}{4} = \frac{29}{4}$.

Por tanto:

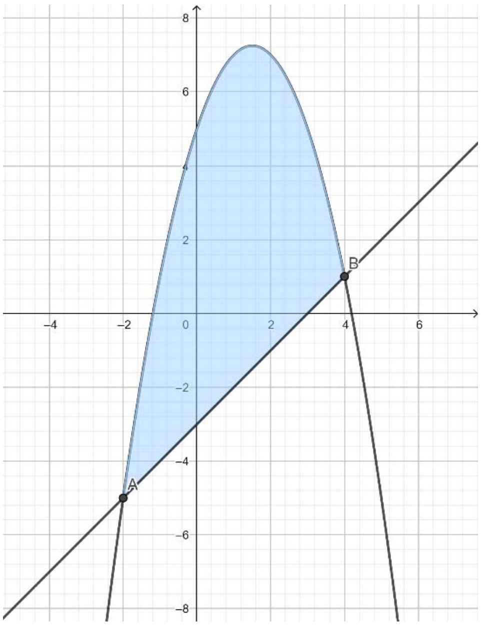
f decreciente	$\left]\frac{3}{2}, \infty\right[$	$\left(\frac{3}{2}, \frac{29}{4}\right)$ máximo relativo
f creciente	$\left]-\infty, \frac{3}{2}\right[$	

Autor: José Gallegos Fernández
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

A3) Averiguamos los puntos de corte de ambas funciones resolviendo la ecuación $f(x)=g(x)$:

$$-x^2+3x+5=x-3 \quad\Rightarrow\quad x^2-2x-8=0 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{2\pm\sqrt{4+32}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{36}}{2}=\frac{2\pm 6}{2}=\begin{cases}x_1=-2\\ x_2=4\end{cases}$$

Así pues, los puntos de corte son: $\begin{cases}A(-2,-5)\\ B(4,1)\end{cases}$



A4) El área de la región anterior se calcula mediante la integral definida de la diferencia de ambas:

$$\int_{-2}^{4}\left[\left(-x^2+3x+5\right)-\left(x-3\right)\right]dx=\int_{-2}^{4}\left(-x^2+2x+8\right)dx=\left[\frac{-x^3}{3}+x^2+8x\right]_{x=-2}^{x=4}=$$

$$=\left[\frac{-64}{3}+16+32\right]-\left[\frac{8}{3}+4-16\right]=-24+60=\boxed{36\ u^2}$$

Área = **36** u^2.

B)

$$f(x)=\frac{x^2-2x-12}{x^2-2x-15}$$

Esta función no será continua en los valores de x que hagan 0 el denominador, los calculamos:
$x^2-2x-15=0$, obtenemos:

$\boldsymbol{x=5}$ y $\boldsymbol{x=-3}$

Calculamos los límites de la función en estos valores:

$$\lim_{x\to-3}\frac{x^2-2x-12}{x^2-2x-15}=\frac{9+6-12}{9+6-15}=\frac{3}{0}=\pm\infty$$

$$\lim_{x\to5}\frac{x^2-2x-12}{x^2-2x-15}=\frac{25-10-12}{25-10-15}=\frac{3}{0}=\pm\infty\ ,$$

por tanto para estos valores la función presenta asíntotas verticales, es decir, la función tiene discontinuidades inevitables de primera especie de salto infinito.

La función es discontinua en $\boldsymbol{x=5}$ y $\boldsymbol{x=-3}$, y no hay forma de definirla para que sea continua en esos puntos.

Autor: José Gallegos Fernández
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema 1.3:

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE JULIO

Ejercicio 3 [3 PUNTOS]

La edad de los asistentes a un concierto de música clásica celebrado recientemente en la ciudad, sigue una distribución normal con desviación típica de 3 años. Una muestra aleatoria de 350 espectadores ha dado como resultado una edad media de 64,3 años.

A. [1,5 PUNTOS] Obtener el intervalo de confianza del 92 % para la edad media de los asistentes.

B. [1,5 PUNTOS] ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener la muestra si deseamos que el error cometido al estimar la media con un nivel de confianza del 98 % sea de 0,7?

Solución:

A) X = edad de los asistentes a un concierto de música clásica $\sim N(\mu, 3)$

M = muestra de **350** > 30 asistentes $\sim N\left(64.3; \frac{3}{\sqrt{350}}\right) = N(64.3; 0.16)$

Nivel de confianza: $1-\alpha = 0.92 \Rightarrow \alpha = 0.08 \Rightarrow \quad 1-\dfrac{\alpha}{2} = 0.96 = P\left[Z \le z_{\frac{\alpha}{2}}\right] \quad \Rightarrow \quad z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.75$

Error de estimación: $E_\alpha = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.75 \cdot 0.16 = 0.28$

Intervalo de confianza al 92 % para la media poblacional: $I_\alpha =]64.3 - 0.28; 64.3 + 0.28[$

Intervalo de confianza al 92 % para la media poblacional: $\boxed{I_\alpha =]64.02, 64.58[}$

B) Nivel de confianza: $1-\alpha = 0.98 \Rightarrow \alpha = 0.02 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.99 = P\left[Z \le z_{\frac{\alpha}{2}}\right] \quad \Rightarrow \quad z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.325$

Error de estimación: $E_\alpha = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.325 \cdot \dfrac{3}{\sqrt{n}} = 0.7 \Rightarrow 9.96 \simeq \dfrac{6.975}{0.7} = \sqrt{n} \Rightarrow n \simeq 99.29$

El tamaño mínimo de la muestra para que se cumplan las condiciones del enunciado debe ser: $\boxed{\mathbf{100}\text{ personas}}$

OPCIÓN DE EXAMEN 2

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE JULIO

Problema 2.1:

Ejercicio 1 [3,5 PUNTOS]

Una empresa textil confecciona dos estampados diferentes: A y B. Debe satisfacer una demanda de al menos 50 rollos de tela del estampado A; y de al menos 50 rollos del estampado B. Los ingresos obtenidos por rollo de tela son de 30 euros para el estampado A y de 20 euros para el B. Por otro lado, el número de rollos del B no debe ser inferior a la mitad de rollos del estampado A. Además, la capacidad del almacén es de 375 rollos. ¿Cuántos rollos de tela de cada tipo de estampado debe producir para obtener unos ingresos máximos?

Solución:

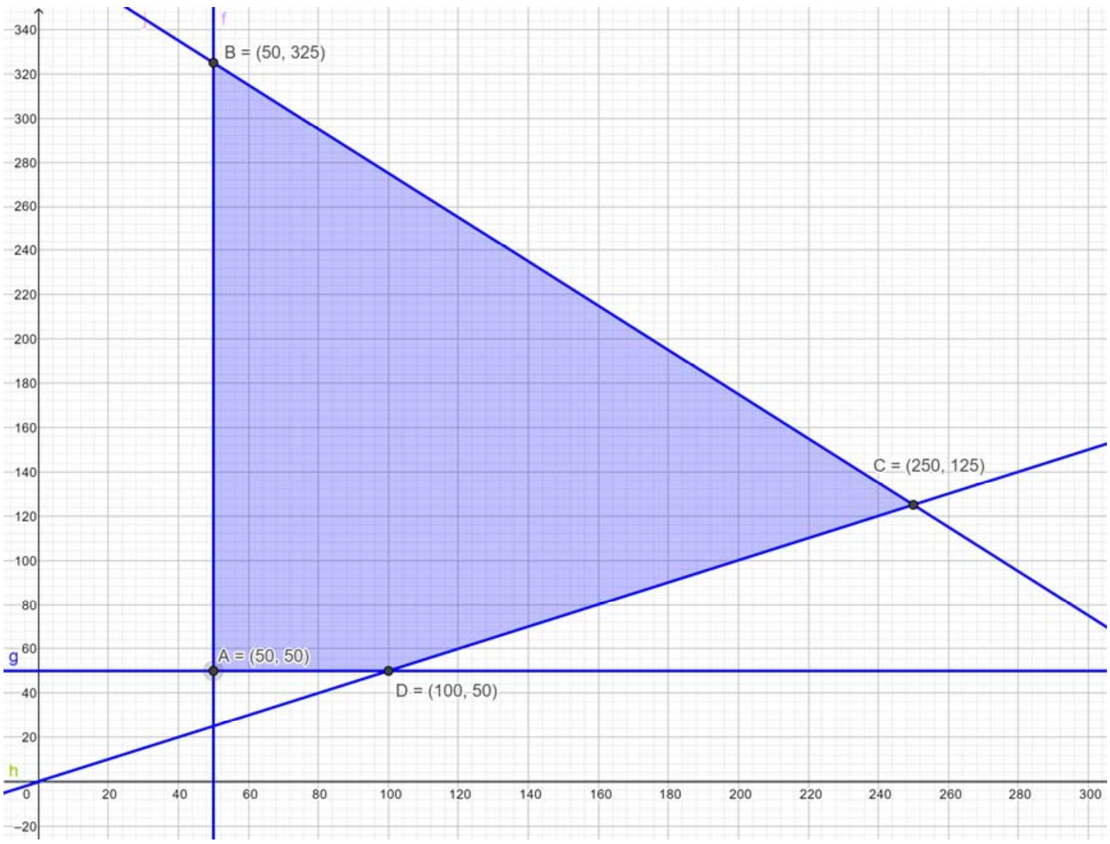
Llamemos x = número de rollos de estampado A e y = número de rollos de estampado B.

Las restricciones del problema quedarían expresadas de la siguiente forma:

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 50 \\ y \geq 50 \\ y \geq \dfrac{x}{2} \\ x+y \leq 375 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \geq 50 \\ y \geq 50 \\ x-2y \leq 0 \\ x+y \leq 375 \end{array}\right\}$$

La función de los ingresos que se quiere maximizar es: $f(x,y) = 30 \cdot x + 20 \cdot y$

Si dibujamos la región que determinan las restricciones obtenemos:



Autor: José Gallegos Fernández
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Los vértices del polígono son:

$$A \equiv \left.\begin{cases} x = 50 \\ y = 50 \end{cases}\right\} \Rightarrow (50,50)$$

$$B \equiv \left.\begin{cases} x = 50 \\ x + y = 375 \quad \Rightarrow \quad 50 + y = 375 \quad \Rightarrow \quad y = 325 \end{cases}\right\} \Rightarrow (50,325)$$

$$C \equiv \left.\begin{cases} x + y = 375 \\ x - 2y = 0 \end{cases}\right\} \overset{\text{reducción de x}}{\Rightarrow} \left.\begin{matrix} 3y = 375 \\ x = 2y \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} y = 125 \\ x = 250 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (250,125)$$

$$D \equiv \left.\begin{cases} x - 2y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2y \quad \Rightarrow \quad x = 100 \\ y = 50 \end{cases}\right\} \Rightarrow (100,50)$$

Así pues, los puntos A(50,50); B(50,325); C(250,125) y D(100,50) son los candidatos a maximizar la función objetivo en dicha región. Veamos cuál es:

$$f(50,50) = [30x + 20y]_{\substack{x=50 \\ y=50}} = 30 \cdot 50 + 20 \cdot 50 = 1500 + 1000 = 2500 \text{ €}$$

$$f(50,325) = [30x + 20y]_{\substack{x=50 \\ y=325}} = 30 \cdot 50 + 20 \cdot 325 = 1500 + 6500 = 8000 \text{ €}$$

$$f(250,125) = [30x + 20y]_{\substack{x=250 \\ y=125}} = 30 \cdot 250 + 20 \cdot 125 = 7500 + 2500 = 10000 \text{ €}$$

$$f(100,50) = [30x + 20y]_{\substack{x=100 \\ y=50}} = 30 \cdot 100 + 20 \cdot 50 = 3000 + 1000 = 4000 \text{ €}$$

Conclusión:

El máximo ingreso se obtiene con **250** rollos de estampado tipo A y **125** rollos de estampado tipo B, siendo dicho ingreso de **10 000 €**.

Problema 2.2:

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE JULIO

Ejercicio 2 [3,5 PUNTOS]

A. [1,75 PUNTOS] Dada la función, determinar los valores de a y b para los que la función es continua en $x = -2$ y en $x = 0$.

$$f(x)=\begin{cases} -6x+3, & \text{si} \quad -4<x<-2 \\ x^2+ax+5, & \text{si} \quad -2\le x<0 \\ \dfrac{x+15}{x+b} & \text{si} \quad 0\le x<3 \end{cases}$$

B. [1,75 PUNTOS] Determinar las asíntotas de la función $f(x)=\frac{2x^2+5}{x^2+4x-21}$. Si existen asíntotas verticales, esbozar la posición de la gráfica respecto a las mismas, calculando previamente los límites laterales correspondientes.

Solución:

A) Para que sea continua en x = –2 se debe cumplir que existan y sean iguales la imagen y el límite:

$$\left.\begin{array}{l} f(-2)=(-2)^2+a\cdot(-2)+5=-2a+9 \\ \lim\limits_{x\to -2^-}(-6x+3)=-6\cdot(-2)+3=12+3=15 \\ \lim\limits_{x\to -2^+}(x^2+ax+5)=(-2)^2+a\cdot(-2)+5=-2a+9 \end{array}\right\} \overset{\text{son iguales}}{\Rightarrow} \quad -2a+9=15 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{a=-3}$$

Para que sea continua en x = 0 se debe cumplir que existan y sean iguales la imagen y el límite:

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=\dfrac{0+15}{0+b}=\dfrac{15}{b} \\ \lim\limits_{x\to 0^-}(x^2+ax+5)=0^2+a\cdot 0+5=5 \\ \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{x+15}{x+b}\right)=\dfrac{0+15}{0+b}=\dfrac{15}{b} \end{array}\right\} \overset{\text{son iguales}}{\Rightarrow} \quad 5=\frac{15}{b} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{b=3}$$

Luego, la función será continua en x = –2 y x = 0 cuando $\boldsymbol{a}$ **= –3** y $\boldsymbol{b}$ **= 3**.

B) $f(x)=\frac{2x^2+5}{x^2+4x-21} \quad \Rightarrow \quad Dom\ f=\{x\in\mathbb{R}/x^2+4x-21\neq 0\}=\mathbb{R}-\{-7;3\}$

ya que $x^2+4x-21=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=\dfrac{-4\pm\sqrt{16+84}}{2}=\dfrac{-4\pm\sqrt{100}}{2}=\dfrac{-4\pm 10}{2}=\begin{cases} x_1=-7 \\ x_2=3 \end{cases}$

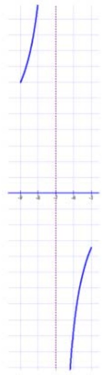
Autor: José Gallegos Fernández
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Por tanto, los únicos puntos donde puede haber asíntota vertical son aquellos que no están en el dominio.

Como el numerador de la fracción nunca se anula y siempre es positivo, el signo de la función será el mismo que el del denominador. Como este es un polinomio de segundo grado con dos raíces diferentes, el signo entre los ceros es el contrario al del coeficiente líder y los otros signos se alternan. Así pues, el signo es negativo entre –7 y 3 y positivo antes de –7 y después de 3.

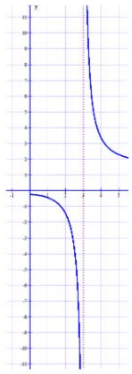
Teniendo en cuenta lo anterior, estudiemos ahora los límites en ambos puntos:

$$x=-7:\ \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -7^-}\dfrac{2x^2+5}{x^2+4x-21}=\left(\dfrac{103}{0^+}\right)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to -7^+}\dfrac{2x^2+5}{x^2+4x-21}=\left(\dfrac{103}{0^-}\right)=-\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{x=-7}\ \text{es una asíntota vertical.}$$



A la izquierda la función tiende a +∞ y a la derecha tiende a -∞.

$$x=3:\ \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{2x^2+5}{x^2+4x-21}=\left(\dfrac{23}{0^-}\right)=-\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{2x^2+5}{x^2+4x-21}=\left(\dfrac{23}{0^+}\right)=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{x=3}\ \text{es una asíntota vertical.}$$



A la izquierda la función tiende a -∞ y a la derecha tiende a +∞.

Las asíntotas verticales son: ***x* = –7** y ***x* = 3**

Autor: José Gallegos Fernández
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Textos Marea Verde

Problema 2.3:

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE JULIO

Ejercicio 3 [3 PUNTOS]

Se tienen dos urnas. La urna I tiene 2 bolas negras, 3 rojas y 5 amarillas. La urna II contiene 3 bolas negras, 4 rojas y 3 amarillas. Se lanza un dado. Si sale 1, 3 o 5, se extrae una bola de la urna I. Si sale 2, 4 o 6, se extrae una bola de la urna II.

A. [1 PUNTO] Calcular la probabilidad que tenemos de extraer una bola amarilla.

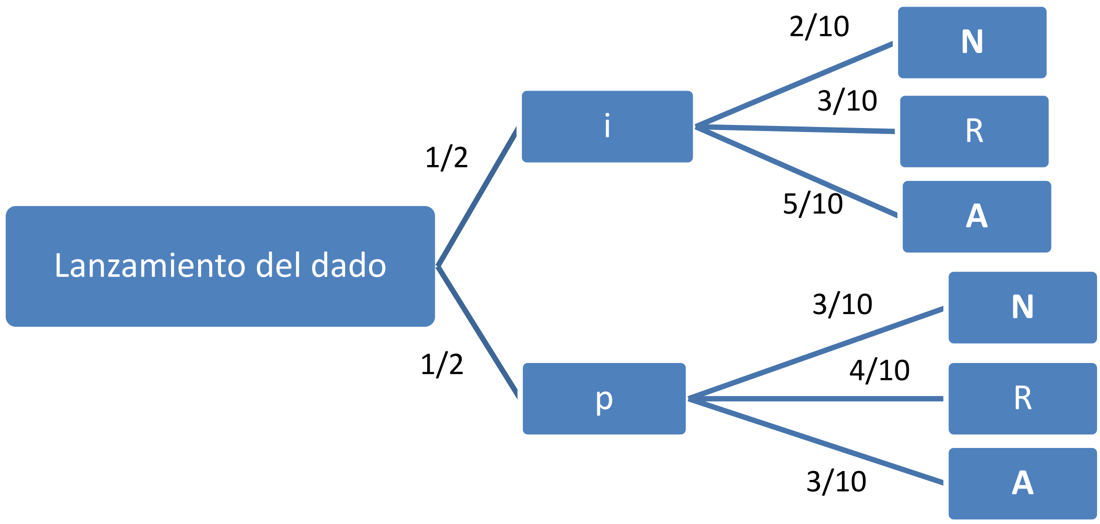
B. [1 PUNTO] Si hemos extraído una bola roja, ¿cuál es la probabilidad de que se haya extraído de la urna I?

C. [1 PUNTO] ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola amarilla de la urna II?

Solución:

Consideremos los siguientes sucesos:

i = "sacar impar en el dado", p = "sacar par en el dado", A = "sacar bola amarilla de la urna", N = "sacar bola negra de la urna" y R = "sacar bola roja de la urna"



A) $P(A) \overset{T^{ma}\text{ Prob. } total}{=} P(i)\cdot P(A/i)+P(p)\cdot P(A/p)=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{10}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{10}=\frac{8}{20}=\frac{40}{100}=0.4 \;=40\,\%$

B) $P(i/R) \overset{T^{ma}\, Bayes}{=} \frac{P(R/i)\cdot P(i)}{P(R)}=\frac{\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{7}{20}}=\frac{3}{7}\approx 0.429$

$$P(R) \overset{T^{ma}\text{ Prob. } total}{=} P(i)\cdot P(R/i)+P(p)\cdot P(R/p)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{10}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{10}=\frac{7}{20}$$

C) $P(A/p)=\frac{3}{10}=0.3\;=30\,\%$.

A) $P(A)\;=\mathbf{0.4}$; B) $P(i/R)\;=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{7}}\approx 0.429$; C) $P(A/p)=\frac{3}{10}=\mathbf{0.3}$.