MATEMÁTICAS II

Selectividad 2019

Comunidad autónoma de

Valencia

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Ignasi Clausell Martin

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

CC BY NC SA

GENERALITAT VALENCIANA

COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT

COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

SISTEMA UNIVERSITARI VALENCIÀ
SISTEMA UNIVERSITARIO VALENCIANO

PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT	PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATÒRIA: JUNY 2019	CONVOCATORIA: JUNIO 2019
Assignatura: MATEMÀTIQUES II	Asignatura: MATEMÁTICAS II

BAREM DE L'EXAMEN:
Cal elegir sols UNA de les dues OPCIONS, A o B, i s'han de fer els tres problemes d'aquesta opció.
Cada problema puntua fins a 10 punts.
La qualificació de l'exercici és la suma de les qualificacions de cada problema dividida entre 3, i aproximada a les centèsimes.
Es permet l'ús de calculadores sempre que no siguen gràfiques o programables, i que no puguen realitzar càlcul simbòlic ni emmagatzemar text o fórmules en memòria. S'use o no la calculadora, els resultats analítics, numèrics i gràfics han d'estar sempre degudament justificats.

BAREMO DEL EXAMEN:
Se elegirá solamente UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.
Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.
Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓ A

Problema A.1. Es donen la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & a+1 & 2 \\ -3 & a-1 & a \end{pmatrix}$, que depèn del paràmetre real a, i una matriu quadrada B d'ordre 3 tal que $B^2 = \frac{1}{3} I - 2B$, sent I la matriu identitat d'ordre 3.

Obtingueu **raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:**

a) El rang de la matriu A en funció del paràmetre real a i el determinant de la matriu $2A^{-1}$ quan $a = 1$. (2 + 2 *punts*)

b) Totes les solucions del sistema d'equacions $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ quan $a = -1$. (3 *punts*)

c) La comprovació que B és invertible, trobant m i n tals que $B^{-1} = mB + nI$. (3 *punts*)

Problema A.2. Considerem en l'espai les rectes r: $\begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{cases}$ i $s: x = y + 1 = \frac{z-2}{2}$.

Obtingueu **raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:**

a) L'equació del pla que conté les rectes r i s. (3 *punts*)

b) La recta que passa per $P = (0, -1, 2)$ i talla perpendicularment la recta r. (4 *punts*)

c) El valor que han de tenir els paràmetres reals a i b perquè la recta s estiga continguda en el pla $\pi: x - 2y + az = b$. (3 *punts*)

Problema A.3. Es considera la funció $f(x) = xe^{-x^2}$.

Obtingueu **raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:**

a) Les asímptotes, els intervals de creixement i de decreixement, així com els màxims i mínims relatius de la funció $f(x)$. (3 *punts*)

b) La representació gràfica de la corba $y = f(x)$. (2 *punts*)

c) El valor del paràmetre real a perquè es puga aplicar el teorema de Rolle en l'interval $[0,1]$ a la funció $g(x) = f(x) + ax$. (1 *punt*)

d) El valor de les integrals indefinides $\int f(x)\,dx$, $\int xe^{-x}\,dx$. (4 *punts*)

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

OPCIÓ B

Problema B.1. Es dona el sistema $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 3x + 4y + 5z = 5 \\ 7x + 9y + 11z = \alpha \end{cases}$, on α és un paràmetre real.

Obtingueu **raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:**

a) Els valors de α per als quals el sistema és compatible i els valors de α per als quals el sistema és incompatible. (4 *punts*)

b) Totes les solucions del sistema quan siga compatible. (4 *punts*)

c) La discussió de la compatibilitat i determinació del nou sistema deduït de l'anterior en canviar el coeficient 11 per qualsevol altre número diferent. (2 *punts*)

Problema B.2. Siga π el pla d'equació $9x + 12y + 20z = 180$.

Obtingueu **raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:**

a) Les equacions dels dos plans paral·lels a π que disten 4 unitats de π. (4 *punts*)

b) Els punts A, B i C, intersecció del pla π amb els eixos OX, OY i OZ i l'angle que formen els vectors $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$. (4 *punts*)

c) El volum del tetraedre els vèrtexs del qual són l'origen O de coordenades i els punts A, B i C. (2 *punts*)

Problema B.3. Les coordenades inicials dels mòbils A i B són (0, 0) i (250, 0), respectivament, i 1 km és la distància des de l'origen de coordenades fins a cadascun dels punts (1, 0) i (0, 1).

El mòbil A es desplaça sobre l'eix OY des de la posició inicial fins al punt $\left(0, \frac{375}{2}\right)$ amb una velocitat de 30 km/h i, simultàniament, el mòbil B es desplaça sobre l'eix OX des de la seua posició inicial fins a l'origen de coordenades amb una velocitat de 40 km/h.

Obtingueu **raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:**

a) La distancia $f(t)$ entre els mòbils A i B durant el desplaçament, en funció del temps t en hores des que van començar a desplaçar-se. (2 *punts*)

b) El temps T que tarden els mòbils en desplaçar-se des de la seua posició inicial a la seua posició final, i els intervals de creixement i de decreixement de la funció f al llarg del trajecte. (4 *punts*)

c) Els valors de t per als quals la distància dels mòbils és màxima i mínima durant el desplaçament, i aquestes distàncies màxima i mínima. (4 *punts*)

CC BY NC SA

Autor: Ignasi Clausell Martin
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
LibrosMareaVerde.tk

OPCIÓN A

Problema A.1. Se dan la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & a+1 & 2 \\ -3 & a-1 & a \end{pmatrix}$, que depende del parámetro real a, y una matriz cuadrada B de orden 3 tal que $B^2 = \frac{1}{3} I - 2B$, siendo I la matriz identidad de orden 3.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) El rango de la matriz A en función del parámetro a y el determinante de la matriz $2A^{-1}$ cuando $a = 1$. (2+2 *puntos*)

b) Todas las soluciones del sistema de ecuaciones $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ cuando $a = -1$. (3 *puntos*)

c) La comprobación de que B es invertible, encontrando m y n tales que $B^{-1} = mB + nI$. (3 *puntos*)

Problema A.2. Consideramos en el espacio las rectas r: $\begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{cases}$ y $s: x = y + 1 = \frac{z-2}{2}$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La ecuación del plano que contiene las rectas r y s. (3 *puntos*)

b) La recta que pasa por $P = (0, -1, 2)$ y corta perpendicularmente a la recta r. (4 *puntos*)

c) El valor que deben tener los parámetros reales a y b para que la recta s esté contenida en el plano $\pi: x - 2y + az = b$. (3 *puntos*)

Problema A.3. Se considera la función $f(x) = xe^{-x^2}$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Las asíntotas, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, así como los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$. (3 *puntos*)

b) La representación gráfica de la curva $y = f(x)$. (2 *puntos*)

c) El valor del parámetro a para que se pueda aplicar el teorema de Rolle en el intervalo $[0,1]$ a la función $g(x) = f(x) + ax$. (1 *punto*)

d) El valor de las integrales indefinidas $\int f(x)\,dx$, $\int xe^{-x}\,dx$. (4 *puntos*)

OPCIÓN B

Problema B.1. Se da el sistema $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 3x + 4y + 5z = 5 \\ 7x + 9y + 11z = \alpha \end{cases}$, donde α es un parámetro real.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Los valores de α para los que el sistema es compatible y los valores de α para los que el sistema es incompatible. (4 *puntos*)

b) Todas las soluciones del sistema cuando sea compatible. (4 *puntos*)

c) La discusión de la compatibilidad y determinación del nuevo sistema deducido del anterior al cambiar el coeficiente 11 por cualquier otro número diferente. (2 *puntos*)

Problema B.2. Sea π el plano de ecuación $9x + 12y + 20z = 180$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Las ecuaciones de los dos planos paralelos a π que distan 4 unidades de π. (4 *puntos*)

b) Los puntos A, B y C intersección del plano π con los ejes OX, OY y OZ y el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. (4 *puntos*)

c) El volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen O de coordenadas y los puntos A, B y C. (2 *puntos*)

Problema B.3. Las coordenadas iniciales de los móviles A y B son (0, 0) y (250, 0), respectivamente, siendo 1km la distancia del origen de coordenadas a cada uno de los puntos (1, 0) y (0, 1).

El móvil A se desplaza sobre el eje OY desde su posición inicial hasta el punto $\left(0, \frac{375}{2}\right)$ con velocidad de 30 km/h y, simultáneamente, el móvil B se desplaza sobre el eje OX desde su posición inicial hasta el origen de coordenadas con velocidad de 40 km/h.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La distancia $f(t)$ entre los móviles A y B durante el desplazamiento, en función del tiempo t en horas desde que comenzaron a desplazarse. (2 *puntos*)

b) El tiempo T que tardan los móviles en desplazarse desde su posición inicial a su posición final, y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función f a lo largo del trayecto. (4 *puntos*)

c) Los valores de t para los que la distancia de los móviles es máxima y mínima durante su desplazamiento y dichas distancias máxima y mínima. (4 *puntos*)

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

OPCIÓ A. OPCIÓN A

Problema A.1:

Problema A.1. Se dan la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & a+1 & 2 \\ -3 & a-1 & a \end{pmatrix}$, que depende del parámetro real a, y una matriz cuadrada B de orden 3 tal que $B^2 = \frac{1}{3} I - 2B$, siendo I la matriz identidad de orden 3.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) El rango de la matriz A en función del parámetro a y el determinante de la matriz $2A^{-1}$ cuando $a = 1$.

b) Todas las soluciones del sistema de ecuaciones $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ cuando $a = -1$.

c) La comprobación de que B es invertible, encontrando m y n tales que $B^{-1} = mB + nI$.

Problema A.1. Es donen la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & a+1 & 2 \\ -3 & a-1 & a \end{pmatrix}$, que depèn del paràmetre real a, i una matriu quadrada B d'ordre 3 tal que $B^2 = \frac{1}{3} I - 2B$, sent I la matriu identitat d'ordre 3.

Obtingueu **raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:**

a) El rang de la matriu A en funció del paràmetre real a i el determinant de la matriu $2A^{-1}$ quan $a = 1$.

b) Totes les solucions del sistema d'equacions $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ quan $a = -1$.

c) La comprovació que B és invertible, trobant m i n tals que $B^{-1} = mB + nI$.

Solución:

a) $A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \boldsymbol{a} \\ \mathbf{-2} & \boldsymbol{a+1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-3} & \boldsymbol{a-1} & \boldsymbol{a} \end{pmatrix}$ $\det(A) = \mathbf{2a^2 + 4a + 2} = 0$ si $a = -1$ solución doble por tanto si $a \neq \mathbf{-1}$ el $\det(A) \neq \mathbf{0}$ por tanto el $\text{rg}(A) = 3$. Por otro lado, si $a = -1$ el $\det(A) = 0$ por tanto el $\text{rg}(A) < 3$. Buscamos en la matriz A un determinante orden 2 que no sea nulo y encontramos el $\det\begin{pmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{-2} \end{pmatrix} = 4 \neq 0$

Por tanto, tenemos $\text{rg}(A) = 2$.

Si $a = 1$ tenemos $\det(A) = 2a^2 + 4a + 2 = 8$ y el $\det(2\boldsymbol{A^{-1}}) = \mathbf{2^3}\det(\boldsymbol{A^{-1}}) = 8\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{det(A)}} = 1$.

$\det(2\boldsymbol{A^{-1}}) = 1$

b) $A\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ si $a = -1$, $\det(A) = 0$ y el $\det\begin{pmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{-2} \end{pmatrix} = 4 \neq \mathbf{0}$ por tanto $\text{rg}(A) = 2$ si definimos la matriz ampliada $A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{-2} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \end{array}\right)$ todos los determinantes tomando la columna ampliada junto con dos columnas de la matriz A son 0 por tanto como el rango de A/B no puede ser más pequeño que el de A y en este caso tampoco podrá ser mayor tendrá que ser igual, por tanto el rango de A y de A/B serán iguales y aplicando el teorema de Rouché el sistema es compatible indeterminado.

Tendremos por tanto el sistema $\left.\begin{matrix} \mathbf{-2x + 2z = 2} \\ \mathbf{-3x - 2y - z = 0} \end{matrix}\right\}$ $-x + z = 1$ e $y = \frac{\mathbf{-3x-z}}{\mathbf{2}}$ llamando a $x = \mu$ tenemos:

$x = \mu$ que $z = 1 + \mu$ e $y = -1/2 - 2\mu$ para todo μ número real.

c) Una matriz B es invertible si existe una matriz a la que llamaremos inversa de B, B^{-1}; que verifique que $BB^{-1} = I$. $B^2 = \frac{1}{3}I - 2B \rightarrow B^2 + 2B = \frac{1}{3}I$ sacando factor común $B(B+2I) = \frac{1}{3}I$ despejando la I tendremos que $B(3B+6I) = I$, llamando B^{-1} a $3B + 6I$ tendremos que:

$m = 3$ y $n = 6$.

CC BY NC SA

Autor: Ignasi Clausell Martin
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
LibrosMareaVerde.tk

Problema A.2:

Problema A.2. Consideramos en el espacio las rectas r: $\begin{cases} x-y+3=0 \\ 2x-z+3=0 \end{cases}$ y $s: x = y+1 = \frac{z-2}{2}$.
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La ecuación del plano que contiene las rectas r y s.
b) La recta que pasa por $P = (0,-1,2)$ y corta perpendicularmente a la recta r.
c) El valor que deben tener los parámetros reales a y b para que la recta s esté contenida en el plano $\pi: x - 2y + az = b$.

Problema A.2. Considerem en l'espai les rectes r: $\begin{cases} x-y+3=0 \\ 2x-z+3=0 \end{cases}$ i $s: x = y+1 = \frac{z-2}{2}$.
Obtingueu **raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:**

a) L'equació del pla que conté les rectes r i s.
b) La recta que passa per $P = (0,-1,2)$ i talla perpendicularment la recta r.
c) El valor que han de tenir els paràmetres reals a i b perquè la recta s estiga continguda en el pla π : $x - 2y + az = b$.

Solución:

(a) Escribiendo la recta r en paramétricas, llamando a $x = t$, tendremos que $y = 3 + t$ y $z = 3 + 2t$ por tanto el punto de la recta será $A = (0, 3, 3)$ y el vector director $v = (1, 1, 2)$ desde la recta s sacaremos el punto y el vector $B = (0, -1, 2)$ y $w = (1, -1, -2)$.
Para estudiar la posición relativa de las dos rectas, primero calcularemos el vector $AB = (0, -4, -1)$ Construimos las matrices con los vectores $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ todos los determinantes de orden 2 son cero por tanto el $rg(M)$ será 1. Construimos la matriz con los vectores directores y el vector calculado con los dos puntos $M' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & -1 \end{array}\right)$ donde encontramos un determinante orden 2, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}$, distinto de cero por tanto el $rg(M`)$ será 2 a modo de conclusión r y s son paralelas.
Por tanto el plano que contiene a las dos rectas lo calcularemos multiplicando vectorialmente los vectores AB y el vector director v, $\pi = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-7, -1, 4)$ que nos dará el vector característico del plano, como el plano tiene que contener las dos rectas contendrá los dos puntos de las rectas por tanto tomando el punto A tendremos $\pi = -7x - y + 4z + D = 0$ por tanto tendremos que: $-3 + 12 + D = 0$ por tanto $D = -9$ dejando el plano con la ecuación $-7x - y + 4z - 9 = 0$.

Ecuación del plano: $-7x - y + 4z - 9 = 0$

(b) Calculamos el plano que pasa por el punto P y es perpendicular a la recta r, para ello tomamos el vector de la recta r como el vector característico del plano ya que este vector será perpendicular al plano y el punto P por tanto tendremos el plano de ecuación $x + y + 2z + D = 0$ que sustituyendo el punto P tendremos $-1 + 4 + D = 0$ por tanto $D = -3$ y la ecuación quedará $x + y + z - 3 = 0$. Resolviendo el sistema entre la ecuación de la recta r y la ecuación del plano obtendremos el punto $Q = (-1, 2, 1)$
La recta pedida es la que pasa por los puntos P y Q por tanto con los dos puntos calculamos el vector $(-1, 2, 1) - (0, -1, 2) = (-1, 3, -1)$ que será el vector director de la recta y tomando como punto de la recta el punto P la ecuación de la recta quedará $x = -t; y = -1 + 3t; z = 2 - t$, ecuación paramétrica.
(c) Expresamos la recta s en forma de ecuación implícita de forma que quedará $x = y + 1$, e

Textos Marea Verde

$2y + 2 = z - 2$ quedando $x - y = 1$ e $2y - z = -4$.

Con estas dos ecuaciones y la ecuación del plano construimos las matrices $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -4 \\ 1 & -2 & a & b \end{array}\right)$ la recta s estará contenida en el plano si la matriz y la ampliada tienen el mismo rango y este es igual a 2.

Para ello calculamos el determinante $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & a \end{vmatrix} = 2a - 1 = 0$, por tanto, $a = 1/2$, como con este valor encontramos el determinante $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$ distinto de cero por tanto el rango de la matriz será 2

Para que el rango de la ampliada sea 2 también, tendremos que ver que es nulo el determinante de la ampliada $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 1 & -2 & b \end{vmatrix} = 2b - 6 = 0$ por tanto $b = 3$.

Con lo que podemos concluir que si $a = 1/2$ y $b = 3$ los rangos serán 2 y por tanto la recta estará contenida en el plano.

BY NC SA

Autor: Ignasi Clausell Martin
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
LibrosMareaVerde.tk

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Problema A.3:

Problema A.3. Se considera la función $f(x) = xe^{-x^2}$.
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Las asíntotas, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, así como los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$.
b) La representación gráfica de la curva $y = f(x)$.
c) El valor del parámetro a para que se pueda aplicar el teorema de Rolle en el intervalo $[0,1]$ a la función $g(x) = f(x) + ax$.
d) El valor de las integrales indefinidas $\int f(x)\,dx$, $\int xe^{-x}\,dx$.

Problema A.3. Es considera la funció $f(x) = xe^{-x^2}$.
Obtingueu **raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:**

a) Les asímptotes, els intervals de creixement i de decreixement, així com els màxims i mínims relatius de la funció $f(x)$.
b) La representació gràfica de la corba $y = f(x)$.
c) El valor del paràmetre real a perquè es puga aplicar el teorema de Rolle en l'interval $[0,1]$ a la funció $g(x) = f(x) + ax$.
d) El valor de les integrals indefinides $\int f(x)\,dx$, $\int xe^{-x}\,dx$.

Solución:

La función $f(x) = xe^{-x^2} = \frac{x}{e^{x^2}}$ como el denominador no se anula al ser una función exponencial por tanto el dominio será el conjunto de los números R.

Puntos de corte con los ejes, igualando a cero la función obtenemos que $x = 0$, y sustituyendo en la función tenemos el punto (0, 0).

Asíntotas verticales, no tiene porque la función está definida en todo R.

Asíntotas horizontales, calculamos los limites infinitos de la función. $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = \frac{\infty}{\infty} = 0$ por orden de magnitud del infinito; $\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = \frac{-\infty}{\infty} = 0$ por orden de magnitud del infinito. Por tanto, la recta $y = 0$ es asíntota horizontal y como consecuencia de ello no existen asíntotas oblicuas.

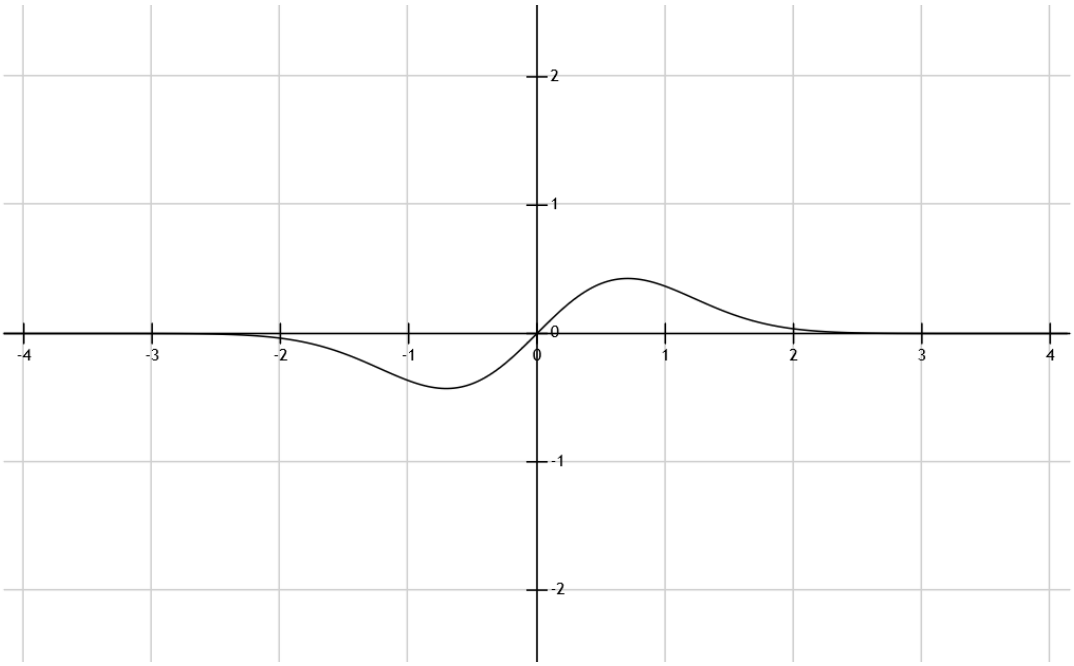
Para calcular los máximos y mínimos de la función tenemos que calcular la primera derivada e igualar a cero $f'(x) = 1e^{-x^2} + xe^{-x^2}(-2x) = 0$. Resolviendo la ecuación obtenemos los puntos $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\frac{\sqrt{2}}{2}$ sustituyendo en la derivada un número menor que $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ nos da negativa y por tanto la función es decreciente, sustituyendo en la derivada un número que encontramos entre $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\frac{\sqrt{2}}{2}$ nos da positivo por tanto la función es creciente y sustituyendo un número mayor que $\frac{\sqrt{2}}{2}$ en la derivada nos da negativo y por tanto la función es decreciente.

Si la función decrece para luego crecer tenemos un mínimo, por tanto, el punto $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ es un mínimo y si la función crece para luego decrecer tendremos un máximo, por tanto, el punto $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ es un máximo.

Textos Marea Verde

Asíntotas verticales, no tiene, y asíntota horizontal: $y = 0$. Mínimo: $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}})$; máximo: $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}})$

(b)



(c) La función $g(x) = f(x) + ax$ es la función $g(x) = \boldsymbol{xe^{-x^2} + ax}$; $g(x)$ es continua y derivable en R y por tanto también lo será en el intervalo $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$. Para poder aplicar el teroma de Rolle solo nos queda verificar que $g(0) = g(1)$, que al sustituir el 0 y el 1 en la función e igualar obtenemos que $0 = \boldsymbol{e^{-1}} + a$; con lo que obtenemos que $a = \frac{-1}{e}$

Si $\boldsymbol{a = \frac{-1}{e}}$ se verifican las condiciones del teorema de Rolle.

(d) $\int f(x)dx = \int xe^{-x^2}\,dx$ = -1/2$\int -2xe^{-x^2}dx$ = -1/2 e^{-x^2} + C

$\int xe^{-x}\,dx$ la resolveremos por partes $\begin{Bmatrix} u = x & du = dx \\ dv = e^{-x} & v = -e^{-x} \end{Bmatrix}$

$\int xe^{-x}\,dx$ = -$xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C$

$$\boldsymbol{\int f(x)dx = -1/2\, e^{-x^2} + C\,;\ \int xe^{-x}\,dx = = -xe^{-x} - e^{-x} + C}$$

PRUEBA B

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Problema B.1:

Problema B.1. Se da el sistema $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 3x + 4y + 5z = 5 \\ 7x + 9y + 11z = \alpha \end{cases}$, donde α es un parámetro real.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Los valores de α para los que el sistema es compatible y los valores de α para los que el sistema es incompatible.
b) Todas las soluciones del sistema cuando sea compatible.
c) La discusión de la compatibilidad y determinación del nuevo sistema deducido del anterior al cambiar el coeficiente 11 por cualquier otro número diferente.

Problema B.1. Es dona el sistema $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 3x + 4y + 5z = 5 \\ 7x + 9y + 11z = \alpha \end{cases}$, on α és un paràmetre real.

Obtingueu **raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:**

a) Els valors de α per als quals el sistema és compatible i els valors de α per als quals el sistema és incompatible.
b) Totes les solucions del sistema quan siga compatible.
c) La discussió de la compatibilitat i determinació del nou sistema deduït de l'anterior en canviar el coeficient 11 per qualsevol altre número diferent.

Solución:

a) Escribiendo la matriz ampliada del sistema $A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 7 & 9 & 11 & a \end{array}\right)$. Calculamos el rango de A viendo el valor de su determinante, $det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & 11 \end{vmatrix} = 0$. Buscamos un determinante orden 2, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$ por tanto el rango de la matriz A es 2.

Calculamos el rango de A/B tomando $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & a \end{vmatrix} = a - 14 = 0 \quad a = 14$

Concluimos que, por el teorema de Rouché, si $a \neq 14$ el $rg(A/B) = 3$ y el $rg(A) = 2$, luego el sistema es incompatible. Si $a = 14$, $rg(A/B) = 2$ y el $rg(A) = 2$, número incógnitas = 3, el sistema es compatible indeterminado.

b) Multiplicando la primera ecuación por -3 obtenemos $-3x - 3y - 3z = -12$ que al sumarla con la segunda ecuación obtenemos $y + 3z = -7$, dando a $z = t$ parámetro, obtenemos que $y = -7 - 3t$ y sustituyendo en la primera ecuación obtenemos $x = 11 + t$, para todo t perteneciente a los números R.

c) Si cambiamos 11 por un número cualquiera k la matriz A/B quedará $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 7 & 9 & k & a \end{array}\right)$

Calculando el determinante de, A $det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & k \end{vmatrix} = k - 11$

El $det\ (A) = 0$ si $k - 11 = 0$, por tanto, si $k = 11$.

Por tanto, tenemos que si $k \neq 11$ el $det\ (A) \neq 0$ y por tanto el $rg(A) = 3$ y como el $rg(A/B)$ no puede ser menos que el $rg(A)$ entonces también será 3 para todo valor de a por tanto, por el teorema de Rouché, el sistema es compatible determinado.

Problema B.2:

Problema B.2. Sea π el plano de ecuación $9x + 12y + 20z = 180$.
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Las ecuaciones de los dos planos paralelos a π que distan 4 unidades de π.
b) Los puntos A, B y C intersección del plano π con los ejes OX, OY y OZ y el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.
c) El volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen O de coordenadas y los puntos A, B y C.

Problema B.2. Siga π el pla d'equació $9x + 12y + 20z = 180$.
Obtingueu **raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:**

a) Les equacions dels dos plans paral·lels a π que disten 4 unitats de π.
b) Els punts A, B i C, intersecció del pla π amb els eixos OX, OY i OZ i l'angle que formen els vectors $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$.
c) El volum del tetraedre els vèrtexs del qual són l'origen O de coordenades i els punts A, B i C.

Solución:

(a) El plano de ecuación $9x + 12y + 20z - 180 = 0$ tiene por vector característico $n = (9, 12, 20)$; los planos que buscamos al ser paralelos tienen el mismo vector característico por tanto tendrán por ecuación $9x + 12y + 20z + D = 0$ y $9x + 12y + 20z + E = 0$. La distancia entre estos dos planos vendrá dada por la ecuación, $d = \frac{|D-(-180)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, igualando a 4 tendremos: $4 = \frac{|D-(-180)|}{\sqrt{9^2+12^2+20^2}}$, por tanto $4 = \frac{|D+180|}{25}$, $D + 180 = \mp 100$, por lo que tendremos $D = -280$ y $D = -80$, por tanto:

Los planos paralelos buscados son: $9x + 12y + 20z = 80$ y $9x + 12y + 20z = 280$.

(b) La intersección del plano $9x + 12y + 20z = 180$ con el eje X la sacaremos resolviendo el sistema entre la ecuación del plano y la ecuación del eje x, $z = y = 0$ obteniendo el punto de corte $A = (20, 0, 0)$. De la misma forma la intersección con el eje Y la calcularemos resolviendo el sistema de la ecuación del plano con la recta que forma el eje y, $x = z = 0$ y obtenemos el punto de corte $B = (0, 15, 0)$. Análogamente resolviendo el sistema entre el plano y la ecuación de la recta del eje z, $x = y = 0$, calcularemos el tercer punto de corte $C = (0, 0, 9)$. Los vectores AB y AC los calcularemos restando los puntos extremo menos origen: $AB = (0, 15, 0) - (20, 0, 0) = (-20, 15, 0)$.
De la misma forma el $AC = (-20, 0, 9)$.
El ángulo entre vectores lo calcularemos utilizando el producto escalar: $\cos a = \frac{AB \cdot AC}{|AB| \cdot |AC|} = \frac{400}{25\sqrt{481}}$.

Por tanto, $a = arccos\left(\frac{16}{\sqrt{481}}\right) = 43.15°$

(c) El volumen del tetraedro lo calcularemos según la fórmula $V = \frac{1}{6}|[OA, OB, OC]|$, siendo:

$OA = (20, 0, 0) - (0, 0, 0) = (20, 0, 0)$. De la misma forma $OB = (0, 15, 0)$ y $OC = (0, 0, 9)$.

$$[OA, OB, OC] = \begin{vmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix}$$

Resolviendo el determinante resulta 2700, por tanto:

El volumen $V = 1/6 \cdot 2700 = 450\ u^3$

BY NC SA

Problema B.3:

Problema B.3. Las coordenadas iniciales de los móviles A y B son (0, 0) y (250, 0), respectivamente, siendo 1km la distancia del origen de coordenadas a cada uno de los puntos (1, 0) y (0, 1).
El móvil A se desplaza sobre el eje OY desde su posición inicial hasta el punto $\left(0, \frac{375}{2}\right)$ con velocidad de 30 km/h y, simultáneamente, el móvil B se desplaza sobre el eje OX desde su posición inicial hasta el origen de coordenadas con velocidad de 40 km/h.
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La distancia $f(t)$ entre los móviles A y B durante el desplazamiento, en función del tiempo t en horas desde que comenzaron a desplazarse.
b) El tiempo T que tardan los móviles en desplazarse desde su posición inicial a su posición final, y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función f a lo largo del trayecto.
c) Los valores de t para los que la distancia de los móviles es máxima y mínima durante su desplazamiento y dichas distancias máxima y mínima.

Problema B.3. Les coordenades inicials dels mòbils A i B són (0, 0) i (250, 0), respectivament, i 1 km és la distància des de l'origen de coordenades fins a cadascun dels punts (1, 0) i (0, 1).
El mòbil A es desplaça sobre l'eix OY des de la posició inicial fins al punt $\left(0, \frac{375}{2}\right)$ amb una velocitat de 30 km/h i, simultàniament, el mòbil B es desplaça sobre l'eix OX des de la seua posició inicial fins a l'origen de coordenades amb una velocitat de 40 km/h.
Obtingueu **raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:**

a) La distancia $f(t)$ entre els mòbils A i B durant el desplaçament, en funció del temps t en hores des que van començar a desplaçar-se.
b) El temps T que tarden els mòbils en desplaçar-se des de la seua posició inicial a la seua posició final, i els intervals de creixement i de decreixement de la funció f al llarg del trajecte.
c) Els valors de t per als quals la distància dels mòbils és màxima i mínima durant el desplaçament, i aquestes distàncies màxima i mínima.

Solución:

(a) Las coordenadas de los puntos A y B las calcularemos en función del tiempo utilizando que el espacio es igual a la velocidad por el tiempo; por tanto, $A = (0, 0 + 30t)$ y $B = (250 - 40t, 0)$ por tanto el vector $\overrightarrow{AB}$ será $(250 - 40t, -30t)$ y la función de la distancia quedaría:

$$f(t) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(250 - 40t)^2 + (30t)^2} = \sqrt{2500t^2 - 2000t + 62500} \text{ Km, } t \text{ en horas.}$$

(b) El tiempo t pedido es el tiempo que tardará en desplazarse $e = v \cdot t$ por tanto $t = 250/40 = 6.25$ horas por tanto la función quedará $f(t) = \sqrt{2500t^2 - 2000t + 62500}$ $0 \leq t \leq 6.25$. Derivando la función tendremos $f'(t) = \frac{5000t - 20000}{2\sqrt{2500t^2 - 2000t + 62500}} = 0$, tendremos $2500t - 10000 = 0$, por tanto, $t = 4$ horas. Sustituyendo en la derivada un número menor que 4 mayor que cero nos dará que la derivada es negativa que significará que la función f crece en el intervalo $[0, 4)$ y sustituyendo en la derivada un número mayor que 4 menor que 6.25 nos dará que la derivada de la función es positiva por tanto la función crece en el intervalo $(4, 6.25]$

(c) La distancia es mínima en $t = 4$ horas siendo dicha distancia:

$$f(4) = \sqrt{2500 \cdot 4^2 - 2000 \cdot 4 + 62500} = 150 \text{ Km}$$

El máximo de la función se alcanzará en los puntos 0 o 6.25, calculando el valor de estos puntos en la función tendremos que $f(0) = 250$ y que $f(6.25) = 187.5$, por tanto la máxima distancia entre los móviles será de 250 Km en el instante inicial $t = 0$ horas.

Textos Marea Verde

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

GENERALITAT VALENCIANA

COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

SISTEMA UNIVERSITARI VALENCIÀ
SISTEMA UNIVERSITARIO VALENCIANO

PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT	PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATÒRIA: JULIOL 2019	CONVOCATORIA: JULIO 2019
Assignatura: MATEMÀTIQUES II	Asignatura: MATEMÁTICAS II

BAREM DE L'EXAMEN:
Cal elegir sols UNA de les dues OPCIONS, A o B, i s'han de fer els tres problemes d'aquesta opció.
Cada problema puntua fins a 10 punts.
La qualificació de l'exercici és la suma de les qualificacions de cada problema dividida entre 3, i aproximada a les centèsimes.
Es permet l'ús de calculadores sempre que no siguen gràfiques o programables, i que no puguen realitzar càlcul simbòlic ni emmagatzemar text o fórmules en memòria. S'use o no la calculadora, els resultats analítics, numèrics i gràfics han d'estar sempre degudament justificats.

BAREMO DEL EXAMEN:
Se elegirá solamente UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.
Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.
Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓ A

Problema A.1. Es dona el sistema d'equacions $\begin{cases} 2x & & +3z = \alpha \\ x & -2y & +2z = 5 \\ 3x & -y & +5z = \alpha + 1 \end{cases}$, en què α és un paràmetre real.

Obtingueu **raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:

a) Els valors de α per als quals el sistema és compatible i determinat. (4 *punts*)
b) La solució del sistema quan $\alpha = -1$. (3 *punts*)
c) El valor de α per tal que el sistema tinga una solució (x, y, z) que verifique $x + y + z = 0$. (3 *punts*)

Problema A.2. Es dona el pla $\pi: 2x + y + 2z = 8$ i el punt $P = (10,\ 0,\ 10)$.

Obtingueu **raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:

a) La distància del punt P al pla π. (3 *punts*)
b) L'àrea del triangle els vèrtexs del qual són els punts A, B i C, obtinguts en trobar la intersecció del pla π amb els eixos de coordenades. (4 *punts*)
c) El volum del tetraedre els vèrtexs del qual són P, A, B i C. (3 *punts*)

Problema A.3. Es dona la funció real h definida per $h(x) = \frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}$.

Obtingueu **raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:

a) El domini de la funció h. Els límits $\lim_{x\to+\infty} h(x)$ i $\lim_{x\to 0} h(x)$. (1 + 2 *punts*)
b) L'asímptota de la corba $y = h(x)$. (2 *punts*)
c) La primitiva de la funció h (és a dir, $\int h(x)dx$) i l'àrea de la superfície tancada entre les rectes $y = 0$, $x = 1$, $x = 5$ i la corba $y = h(x)$. (3 + 2 *punts*)

Textos Marea Verde

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

OPCIÓ B

Problema B.1. Es donen les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$ i $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Obtingueu **raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:

a) Els valors de α per als quals l'equació matricial $AX = \alpha X$ sols admet una solució. (4 *punts*)

b) Totes les solucions de l'equació matricial $AX = 5X$. (3 *punts*)

c) La comprovació que $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ és una solució de l'equació matricial $AX = 2X$ i, sense calcular la matriu A^{100}, el valor de β tal que $A^{100}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. (3 *punts*)

Problema B.2. Es donen en l'espai la recta r: $\frac{x-\alpha}{-1} = \frac{y}{-4} = \frac{z}{\beta}$ i el pla $\pi: x + 2y + 3z = 6$.

Obtingueu **raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:

a) La posició relativa de la recta r i el pla π en funció dels paràmetres reals α i β. (5 *punts*)

b) La distància entre la recta r i el pla π quan $\alpha = 6$ i $\beta = 3$. (3 *punts*)

c) L'equació del pla que passa per $(0, 0, 0)$ i que no talla al pla π. (2 *punts*)

Problema B.3. Un projectil està unit al punt $(0, 2)$ per una corda elàstica i tensa. El projectil recorre la corba $y = 4 - x^2$ d'extrems $(-2,0)$ i $(2,0)$.

Obtingueu **raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:**

a) La funció de la variable x que expressa la distància entre un punt qualsevol $(x, 4 - x^2)$ de la corba $y = 4 - x^2$ i el punt $(0, 2)$. (2 *punts*)

b) Els punts de la corba $y = 4 - x^2$ a major distància absoluta del punt $(0,2)$ per a $-2 \leq x \leq 2$. (2 *punts*)

c) Els punts de la corba $y = 4 - x^2$ a menor distància absoluta del punt $(0,2)$ per a $-2 \leq x \leq 2$. (2 *punts*)

d) L'àrea de la superfície per la que s'ha mogut la corda elàstica, és a dir, l'àrea compresa entre les corbes $y = 4 - x^2$ i $y = 2 - |x|$ quan $-2 \leq x \leq 2$. (4 *punts*)

BY NC SA

Autor: Ignasi Clausell Martin
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
LibrosMareaVerde.tk

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

OPCIÓN A

Problema A.1. Se da el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x & & +3z = \alpha \\ x & -2y & +2z = 5 \\ 3x & -y & +5z = \alpha + 1 \end{cases}$, donde α es un parámetro real.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los valores de α para los que el sistema es compatible y determinado. (4 *puntos*)

b) La solución del sistema cuando $\alpha = -1$. (3 *puntos*)

c) El valor de α para que el sistema tenga una solución (x, y, z) que verifique $x + y + z = 0$. (3 *puntos*)

Problema A.2. Se da el plano $\pi : 2x + y + 2z = 8$ y el punto $P = (10, 0, 10)$.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La distancia del punto P al plano π. (3 *puntos*)

b) El área del triángulo cuyos vértices son los puntos A, B y C, obtenidos al hallar la intersección del plano π con los ejes de coordenadas. (4 *puntos*)

c) El volumen del tetraedro cuyos vértices son P, A, B y C. (3 *puntos*)

Problema A.3. Se da la función real h definida por $h(x) = \frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}$.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El dominio de la función h. Los límites $\lim_{x\to+\infty} h(x)$ y $\lim_{x\to 0} h(x)$. (1 + 2 *puntos*)

b) La asíntota de la curva $y = h(x)$. (2 *puntos*)

c) La primitiva de la función h (es decir, $\int h(x)dx$) y el área de la superficie encerrada entre las rectas $y = 0$, $x = 1$, $x = 5$ y la curva $y = h(x)$. (3 + 2 *puntos*)

BY NC SA

OPCIÓN B

Problema B.1. Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los valores de α para los que la ecuación matricial $AX = \alpha X$ solo admite una solución. (4 *puntos*)

b) Todas las soluciones de la ecuación matricial $AX = 5X$. (3 *puntos*)

c) Comprobar que $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ es una solución de la ecuación matricial $AX = 2X$ y, sin calcular la matriz A^{100}, obtener el valor β tal que $A^{100}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. (3 *puntos*)

Problema B.2. Se dan en el espacio la recta r: $\frac{x-\alpha}{-1} = \frac{y}{-4} = \frac{z}{\beta}$ y el plano $\pi : x + 2y + 3z = 6$.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La posición relativa de la recta r y el plano π en función de los parámetros reales α y β. (5 *puntos*)

b) La distancia entre la recta r y el plano π cuando $\alpha = 6$ y $\beta = 3$. (3 *puntos*)

c) La ecuación del plano que pasa por $(0,0,0)$ y que no corta al plano π. (2 *puntos*)

Problema B.3. Un proyectil está unido al punto $(0, 2)$ por una cuerda elástica y tensa. El proyectil recorre la curva $y = 4 - x^2$ de extremos $(-2,0)$ y $(2,0)$.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La función de la variable x que expresa la distancia entre un punto cualquiera $(x, 4 - x^2)$ de la curva $y = 4 - x^2$ y el punto $(0, 2)$. (2 *puntos*)

b) Los puntos de la curva $y = 4 - x^2$ a mayor distancia absoluta del punto $(0,2)$ para $-2 \leq x \leq 2$. (2 *puntos*)

c) Los puntos de la curva $y = 4 - x^2$ a menor distancia absoluta del punto $(0, 2)$ para $-2 \leq x \leq 2$. (2 *puntos*)

d) El área de la superficie por la que se ha movido la cuerda elástica, es decir, el área comprendida entre las curvas $y = 4 - x^2$ e $y = 2 - |x|$ cuando $-2 \leq x \leq 2$. (4 *puntos*)

Textos Marea Verde

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

OPCIÓ A - OPCIÓN A

Problema A.1:

Problema A.1. Se da el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x & & +3z = a \\ x & -2y & +2z = 5 \\ 3x & -y & +5z = a+1 \end{cases}$, donde a es un parámetro real.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los valores de a para los que el sistema es compatible y determinado. (4 *puntos*)
b) La solución del sistema cuando $a = -1$. (3 *puntos*)
c) El valor de a para que el sistema tenga una solución (x, y, z) que verifique $x + y + z = 0$. (3 *puntos*)

Problema A.1. Es dona el sistema d'equacions $\begin{cases} 2x & & +3z = a \\ x & -2y & +2z = 5 \\ 3x & -y & +5z = a+1 \end{cases}$, en què a és un paràmetre real.

Obtingueu **raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:

a) Els valors de a per als quals el sistema és compatible i determinat. (4 *punts*)
b) La solució del sistema quan $a = -1$. (3 *punts*)
c) El valor de a per tal que el sistema tinga una solució (x, y, z) que verifique $x + y + z = 0$. (3 *punts*)

Solución:

(a) Escribimos la matriz del sistema $A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & a \\ 1 & -2 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 5 & a+1 \end{array}\right)$

El *det (A)* $= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -1$ y como es diferente de cero el *rg(A)* = 3, como es lo máximo que puede ser el *rg(A/B)* también será 3 para todo valor de a número real.

Por el teorema de Rouché el sistema es compatible determinado para todo valor de a número real.

La solución única la calcularemos utilizando la regla de Cramer

$x = \dfrac{\begin{vmatrix} a & 0 & 3 \\ 5 & -2 & 2 \\ a+1 & -1 & 5 \end{vmatrix}}{-1} = \dfrac{-2a-9}{-1} = 2a+9$ $\quad y = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & a & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & a+1 & 5 \end{vmatrix}}{-1} = \dfrac{4}{-1} = -4$ $\quad z = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & a \\ 1 & -2 & 5 \\ 3 & -1 & a+1 \end{vmatrix}}{-1} = \dfrac{a+6}{-1} = -a-6$

(b) Como acabamos de calcular la solución en función del parámetro a, bastará con sustituir por $a = -1$

Así:

$(x, y, z) = (2a + 9, -4, -a - 6)$, sustituyendo tendremos $(x, y, z) = (7, -4, -5)$.

$(x, y, z) = (7, -4, -5)$.

(c) Si $x + y + z = 0$ se tendrá: $2a + 9 + (-4) + (-a - 6) = 0$, $a - 1 = 0$, por tanto, $a = 1$.

$a = 1$.

CC BY NC SA

Problema A.2:

Problema A.2. Se da el plano $\pi : 2x + y + 2z = 8$ y el punto $P = (10, 0, 10)$.
Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:
a) La distancia del punto P al plano π. (3 *puntos*)
b) El área del triángulo cuyos vértices son los puntos A, B y C, obtenidos al hallar la intersección del plano π con los ejes de coordenadas. (4 *puntos*)
c) El volumen del tetraedro cuyos vértices son P, A, B y C. (3 *puntos*)

Problema A.2. Es dona el pla $\pi : 2x + y + 2z = 8$ i el punt $P = (10, 0, 10)$.
Obtingueu **raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:
a) La distància del punt P al pla π. (3 *punts*)
b) L'àrea del triangle els vèrtexs del qual són els punts A, B i C, obtinguts en trobar la intersecció del pla π amb els eixos de coordenades. (4 *punts*)
c) El volum del tetraedre els vèrtexs del qual són P, A, B i C. (3 *punts*)

Solución:

(a) $d(P, \pi) = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ siendo $P = (x_0, y_0, z_0)$ y el plano $\pi = Ax + By + Cz + D = 0$.

En nuestro caso P = (10, 0, 10) y π = 2x + y + 2z = 8 y por tanto la solución es inmediata:

$d(P, \pi) = \frac{|2\cdot10+1\cdot0+2\cdot10-8|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}$ = 32/3 u

$d(P, \pi)$ = 32/3 u

(b) Para calcular el punto A resolveremos el sistema entre el plano 2x + y + 2z = 8 y la ecuación del eje X: $y = z = 0$ obteniendo x = 4 y por tanto el punto A = (4, 0, 0).
Para calcular el punto B resolveremos el sistema entre el plano 2x + y + 2z = 8 y la ecuación del eje Y: $x = z = 0$ obteniendo y = 8 y por tanto el punto B = (0, 8, 0).
Para calcular el punto C resolveremos el sistema entre el plano 2x + y + 2z = 8 y la ecuación del eje Z: $x = y = 0$ obteniendo z = 4 y por tanto el punto C = (0, 0, 4).
Calculamos los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AB}$ = (0, 8, 0) – (4, 0, 0) = (–4, 8, 0),
y el vector $\overrightarrow{AC}$ = (0, 0, 4) – (4, 0, 0) = (–4, 0, 4).

$\overrightarrow{AB}x\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & 8 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ = (32, 16, 32).

$|\overrightarrow{AB}x\overrightarrow{AC}| = \sqrt{32^2 + 16^2 + 32^2}$ = 48.

$Area = \frac{1}{2}|ABxAC|$ = 1/2 · 48 = 24 u^2.

$Area$= 24 u^2.

(c) El Volumen V = 1/6 $|[\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]|$
$\overrightarrow{AP}$ = (10, 0, 10) – (4, 0, 0) = (6, 0, 10).

$$[\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 10 \\ -4 & 8 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 512$$

V = 1/6 · (512) = 256/3 u^3.

Textos Marea Verde

Problema A.3:

Problema A.3. Se da la función real h definida por $h(x)=\frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}$.
Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:
a) El dominio de la función h. Los límites $\lim_{x\to+\infty} h(x)$ y $\lim_{x\to 0} h(x)$. (1 + 2 *puntos*)
b) La asíntota de la curva $y = h(x)$. (2 *puntos*)
c) La primitiva de la función h (es decir, $\int h(x)dx$) y el área de la superficie encerrada entre las rectas $y = 0, x = 1, x = 5$ y la curva $y = h(x)$. (3 + 2 *puntos*)

Problema A.3. Es dona la funció real h definida per $h(x)=\frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}$.
Obtingueu **raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:
a) El domini de la funció h. Els límits $\lim_{x\to+\infty} h(x)$ i $\lim_{x\to 0} h(x)$. (1 + 2 *punts*)
b) L'asímptota de la corba $y = h(x)$. (2 *punts*)
c) La primitiva de la funció h (és a dir, $\int h(x)dx$) i l'àrea de la superfície tancada entre les rectes $y = 0, x = 1, x = 5$ i la corba $y = h(x)$. (3 + 2 *punts*)

Solución:

$h(x) = \frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}$

(a) $x^2 + 2x + 5 = 0$ $\quad x = \frac{-2\pm\sqrt{4-20}}{2}$ no pertenece a los números reales por tanto $Dom(f) = R$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to\infty}x=\infty$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}=\frac{-3}{5}.$$

(b) Asíntotas verticales:
No presenta asíntotas verticales por estar definida en todo R

Asíntotas horizontales

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to\infty}x=\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^3+x^2-5x-3}{x^2-2x+5}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^3}{x^2}=\lim_{x\to\infty}-x=-\infty$$
Por tanto, no hay asíntotas horizontales.

Asíntotas oblicuas: $y = mx + n$

$$m=\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2+5x-3}{x^3+2x^2+5x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^3}=1$$
$$n=\lim_{x\to\infty}f(x)-mx=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}-x=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2+5x-3-x^3-2x^2-5x}{x^2+2x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^2-3}{x^2+2x+5}$$
$$=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^2}{x^2}=-1$$
La recta $y = x - 1$ es asíntota oblicua.

(c) $\int\frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}dx$: haciendo la división de polinomios obtenemos el cociente $x - 1$ y el resto $2x + 2$, por tanto la integral queda:

Textos Marea Verde

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int C(x)dx + \frac{R(x)}{Q(x)}dx =$$

$$\int \frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}dx = \int (x-1)dx + \int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}dx = \frac{x^2}{2} - x + \ln|x^2+2x+5| + C$$

Para calcular el área, primero hay que ver si la función *f(x)* corta al eje X en algún punto c entre 1 y 5.

Por tanto

$$A = \left|\int_1^5 \frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}dx\right| = \left|\left[\frac{x^2}{2} - x + \ln|x^2+2x+5|\right]_1^5\right| = 8 + \ln(5)$$

$$A = 8 + \ln(5)$$

BY NC SA

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

OPCIÓN B - OPCIÓN B

Problema B.1:

Problema B.1. Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los valores de α para los que la ecuación matricial $AX = \alpha X$ solo admite una solución. (4 *puntos*)

b) Todas las soluciones de la ecuación matricial $AX = 5X$. (3 *puntos*)

c) Comprobar que $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ es una solución de la ecuación matricial $AX = 2X$ y, sin calcular la matriz A^{100}, obtener el valor β tal que $A^{100}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. (3 *puntos*)

Problema B.1. Es donen les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$ i $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Obtingueu **raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:

a) Els valors de α per als quals l'equació matricial $AX = \alpha X$ sols admet una solució. (4 *punts*)

b) Totes les solucions de l'equació matricial $AX = 5X$. (3 *punts*)

c) La comprovació que $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ és una solució de l'equació matricial $AX = 2X$ i, sense calcular la matriu A^{100}, el valor de β tal que $A^{100}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. (3 *punts*)

Solución:

(a) $AX = aX$ $\quad AX - aX = O \quad (A - aI)X = O$, donde O representa la matriz nula e I la matriz identidad

Para que esta ecuación matricial solo tenga una solución, debe existir la matriz inversa de $A - aI$, y por tanto ser $det(A - aI)$ distinto de cero.

$A - aI = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a & 4 \\ -1 & 6-a \end{pmatrix}$

$Det(A - aI) = \begin{vmatrix} 1-a & 4 \\ -1 & 6-a \end{vmatrix} = (1-a)(6-a) + 4 = a^2 - 7a + 10$

$Det(A - aI) = 0$ si $a^2 - 7a + 10 = 0$ por tanto $a = 2$ y $a = 5$.

La ecuación matricial solo admite una solución cuando a sea distinto de 2 y de 5.

Además, aunque no lo pida el ejercicio, dicha solución es:

$(A - aI)X = O$, $(A - aI)^{-1}(A - aI)X = (A - aI)^{-1}O$ por tanto $X = (A - aI)^{-1}O$

Por tanto, $X = O_{2x2}$.

(b) $AX = 5X$ $\quad AX - 5X = O \quad (A - 5I)X = O$ $\quad A - 5I = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} -4x + 4y = 0 \\ -x + y = 0 \end{matrix}$, por tanto $-x + y = 0$ $\quad x = \mu, y = \mu$, para todo $\mu \in R$

Textos Marea Verde

Autor: Ignasi Clausell Martin
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
LibrosMareaVerde.tk

(c) $AX = 2X$ con $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$2X = 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Efectivamente se comprueba que $AX = 2X$ cuando $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ con lo que podemos asegurar que $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ es una solución de la ecuación matricial $AX = 2X$.

Es decir que $A \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Sabiendo esto, se puede deducir b en la ecuación $A^{100} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ mediante el procedimiento de inducción

$$A^{100} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = A^{99} A \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = A^{99} 2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 2A^{99} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 2A^{98} A \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 2A^{98} 2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 2^2 A^{98} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

y así sucesivamente

$$= 2^{100} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, el valor pedido de $b = 2^{100}$.

Textos Marea Verde

Autor: Ignasi Clausell Martin
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
LibrosMareaVerde.tk

Problema B.2:

Problema B.2. Se dan en el espacio la recta r: $\frac{x-a}{-1}=\frac{y}{-4}=\frac{z}{\beta}$ y el plano $\pi: x+2y+3z=6$.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La posición relativa de la recta r y el plano π en función de los parámetros reales α y β. (5 *puntos*)
b) La distancia entre la recta r y el plano π cuando $\alpha=6$ y $\beta=3$. (3 *puntos*)
c) La ecuación del plano que pasa por $(0,0,0)$ y que no corta al plano π. (2 *puntos*)

Problema B.2. Es donen en l'espai la recta r: $\frac{x-a}{-1}=\frac{y}{-4}=\frac{z}{\beta}$ i el pla $\pi: x+2y+3z=6$.

Obtingueu **raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:

a) La posició relativa de la recta r i el pla π en funció dels paràmetres reals α i β. (5 *punts*)
b) La distància entre la recta r i el pla π quan $\alpha=6$ i $\beta=3$. (3 *punts*)
c) L'equació del pla que passa per $(0,0,0)$ i que no talla al pla π. (2 *punts*)

Solución:

$r=\frac{x-a}{-1}=\frac{y}{-4}=\frac{z}{b}$ $\quad \pi=x+2y+3z=6$, de la recta r extraemos las ecuaciones $\frac{x-a}{-1}=\frac{y}{-4}\ \rightarrow$ $-4x+4a=-y\ \rightarrow 4x-y-4a=0$ y $\frac{y}{-4}=\frac{z}{b}\ \rightarrow by=-4z\rightarrow by+4z=0$

Estudiaremos la posición relativa de r y π en función de los rangos de las matrices A y A/B dadas por

$$A/B=\left(\begin{array}{ccc|c}4 & -1 & 0 & 4a\\ 0 & b & 4 & 0\\ 1 & 2 & 3 & 6\end{array}\right)$$

El rango de A lo calculamos por medio del determinante: $det(A)=\begin{vmatrix}4 & -1 & 0\\ 0 & b & 4\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=12b-36=0\ \rightarrow b=3$

Si $b\neq 3$ entonces del $det(A)\neq 0$ por tanto el rango de A es 3 y el de A/B será 3 por que no puede ser más pequeño que el de A, por tanto la recta r y el plano π son secantes.

Si $b=3$ entonces el $det(A)=0$ por tanto el rango de A será menor que 3, $A/B=\left(\begin{array}{ccc|c}4 & -1 & 0 & 4a\\ 0 & 3 & 4 & 0\\ 1 & 2 & 3 & 6\end{array}\right)$ para calcular el rango de A nos fijamos en el determinante de tamaño 2 de la matriz $\begin{vmatrix}4 & -1\\ 0 & 3\end{vmatrix}=12\neq 0$ por tanto el rango de A será 2; para calcular el rango de la matriz A/B nos fijamos en el determinante de la matriz $\begin{vmatrix}4 & -1 & 4a\\ 0 & 3 & 0\\ 1 & 2 & 6\end{vmatrix}=3(24-4a)=0$, entonces $a=6$.

Si a es distinto de 6 el rango de A/B es 3.

Si a es igual a 6 el rango de A/B es 2.

En resumen:

Si b es distinto de 3 recta y plano son secantes.

Si b es igual a 3 y a igual a 6 la recta está contenida en el plano.

Si b es igual a 3 y a distinto de 6 la recta es paralela al plano.

CC BY NC SA

(b) Como acabamos de ver si a es 6 y b es 3, la recta está contenida en el plano.

Por tanto, la distancia que se nos pide será nula.

c) Si los dos planos no se cortan, es porque son paralelos por tanto tendrán el mismo vector característico, como el plano π tiene por vector característico (1, 2, 3) el plano pedido lo calcularemos utilizando el mismo vector característico por lo que la ecuación del nuevo plano será:

$x + 2y + 3z + D = 0$, como el punto (0, 0, 0) queremos que esté en el plano, cumplirá la ecuación del plano, por tanto· $0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + D = 0$

Con lo cual D = 0 y el plano pedido tendrá por ecuación $x + 2y + 3z = 0$.

$$x + 2y + 3z = 0.$$

Textos Marea Verde

Autor: Ignasi Clausell Martin
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
LibrosMareaVerde.tk

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema B.3:

Problema B.3. Un proyectil está unido al punto $(0,2)$ por una cuerda elástica y tensa. El proyectil recorre la curva $y = 4 - x^2$ de extremos $(-2,0)$ y $(2,0)$.
Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

a) La función de la variable x que expresa la distancia entre un punto cualquiera $(x, 4-x^2)$ de la curva $y = 4 - x^2$ y el punto $(0,2)$. *(2 puntos)*
b) Los puntos de la curva $y = 4 - x^2$ a mayor distancia absoluta del punto $(0,2)$ para $-2 \le x \le 2$. *(2 puntos)*
c) Los puntos de la curva $y = 4 - x^2$ a menor distancia absoluta del punto $(0,2)$ para $-2 \le x \le 2$. *(2 puntos)*
d) El área de la superficie por la que se ha movido la cuerda elástica, es decir, el área comprendida entre las curvas $y = 4 - x^2$ e $y = 2 - |x|$ cuando $-2 \le x \le 2$. *(4 puntos)*

Problema B.3. Un projectil està unit al punt $(0,2)$ per una corda elàstica i tensa. El projectil recorre la corba $y = 4 - x^2$ d'extrems $(-2,0)$ i $(2,0)$.
Obtingueu **raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:**

a) La funció de la variable x que expressa la distància entre un punt qualsevol $(x, 4-x^2)$ de la corba $y = 4 - x^2$ i el punt $(0,2)$. *(2 punts)*
b) Els punts de la corba $y = 4 - x^2$ a major distància absoluta del punt $(0,2)$ per a $-2 \le x \le 2$. *(2 punts)*
c) Els punts de la corba $y = 4 - x^2$ a menor distància absoluta del punt $(0,2)$ per a $-2 \le x \le 2$. *(2 punts)*
d) L'àrea de la superfície per la que s'ha mogut la corda elàstica, és a dir, l'àrea compresa entre les corbes $y = 4 - x^2$ i $y = 2 - |x|$ quan $-2 \le x \le 2$. *(4 punts)*

Solución:

(a) La distancia entre los dos puntos dados será:

$$d(x) = \left|\overrightarrow{AP}\right| = \sqrt{(x-0)^2 + (4-x^2-2)^2} = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4} \quad \text{con } -2 \le x \le 2.$$

(b) y (c) Se trata de encontrar los máximos y los mínimos absolutos de la función distancia en el intervalo $[-2,2]$. Así calculamos la derivada.

$d`(x) = \frac{4x^3-6x}{2\sqrt{x^4-3x^2+4}} = \frac{2x^3-3x}{\sqrt{x^4-3x^2+4}}$ haciendo $d`(x) = 0$ tenemos $2x^3 - 3x = 0$ resolviendo tendremos $x = 0$, $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$, y $x = -\sqrt{\frac{3}{2}}$

Ahora calculamos los valores de la función en los puntos obtenidos anteriormente, llamados puntos críticos y en los extremos del intervalo.

$$\left.\begin{array}{c} d(-2) = \sqrt{(-2)^4 - 3(-2)^2 + 4} = \sqrt{8} \\ d\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \sqrt{(-\sqrt{\frac{3}{2}})^4 - 3(-\sqrt{\frac{3}{2}})^2 + 4} = \sqrt{7}/2 \\ d(0) = \sqrt{4} = 2 \\ d\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = d\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \sqrt{\frac{7}{2}} \\ d(2) = d(-2) = \sqrt{8} \end{array}\right\}$$

La distancia máxima $d = \sqrt{8}$ se alcanza en los puntos (–2, 0) y (2, 0); la distancia mínima $d = \sqrt{\frac{7}{2}}$ se alcanza en los puntos $(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 5/2)$ y $(\sqrt{\frac{3}{2}}, 5/2)$

$(d)\ y = 2 - |x| = \begin{cases} 2 + x & si - 2 \leq x < 0 \\ 2 - x & si \quad 0 \leq x < 2 \end{cases}$

El área pedida es:

$A = \int_{-2}^{0} 4 - x^2 - (2 + x)\ dx + \int_{0}^{2} 4 - x^2 - (2 - x) dx = \int_{-2}^{0} -x^2 - x + 2\ dx + \int_{0}^{2} -x^2 + x + 2\ dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{0} + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{0}^{2} = \frac{20}{3}$ u^2.

$$A = \frac{20}{3}\ \text{u}^2.$$

BY NC SA