MATEMÁTICAS II

Selectividad 2019

Comunidad autónoma del

País Vasco

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Alex Aginagalde

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Universidad del País Vasco — Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA	*EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD*
2019ko EKAINA	*JUNIO 2019*
MATEMATIKA II	***MATEMÁTICAS II***

OPCIÓN A

Problema A.1:

Discutir, en función de m, el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} (m+3)x & +mx & +mz & = & m-1 \\ 3x & & +mz & = & m-2 \\ & -y & z & = & m-3 \end{cases}$$

Resolver en los casos de indeterminación, suponiendo que existan.

Problema A.2:

Sean la recta $r \equiv \begin{cases} 4x-3y+4z=1 \\ 3x-2y+z=0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x-y+Az=0$

a) ¿Existe algún valor de A para que el plano sea paralelo a r?
b) Encontrar el plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto $(0,0,0)$.

Problema A.3:

c) Dada la función $f(x)=x^2+64$ y el punto exterior a su grafica *P(6, 0)*, encontrar la recta o rectas tangente a *f* que pasen por P.

Problema A.4:

Calcula $\int xe^{-4x}dx$, explicando el proceso utilizado para dicho cálculo.

Problema A.5:

Sobre una mesa tengo tres cajas con botones; la primera caja tiene 3 botones, la segunda 5 y la tercera 4. Cada una de las cajas contiene un solo botón rojo. Si elijo al azar una caja y saco de ella un botón al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea un botón rojo?
b) Si he sacado un botón rojo, ¿cuál es la probabilidad de pertenecer a la primera caja?

Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA	*EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD*
2019ko EKAINA	*JUNIO 2019*
MATEMATIKA II	***MATEMÁTICAS II***

OPCIÓN B

Problema B.1:

Dada la matriz $A(a)$

$$A(a) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcular, razonadamente, el valor de a para que el determinante de $A(a)^2$ valga 4.

Problema B.2:

Se consideran los tres puntos $A(0,0,1)$, $B(1,1,1)$ y $C(-1,-1,2)$. ¿Están alineados? En caso afirmativo hallar la ecuación de la recta que los contiene. En caso negativo calcular el plano que los contiene.

Problema B.3:

Sea f la función $f(x) = x^2e^{-4x}$. Calcular la primera y la segunda derivada de f. Hallar los máximos y mínimos de f.

Problema B.4:

Representar el recinto finito del plano limitado por la recta $y = x + 2$ y por la parábola $y = x^2$. Calcular su área.

Problema B.5:

Lanzamos un dado de seis caras 6 000 veces. Calcular la probabilidad de que el número de veces que salga el 5

a) sea superior a 1 500.
b) esté comprendido entre 1 000 y 1 100.

eman ta zabal zazu
Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN
ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN.

1. El examen se valorará con una puntuación entre 0 y 10 puntos.
2. Todos los problemas tienen el mismo valor: hasta 2 puntos.
3. Se valorará el planteamiento correcto, tanto global como de cada una de las partes, si las hubiere.
4. No se tomarán en consideración errores numéricos, de cálculo, etc, siempre que no sean de tipo conceptual.
5. Las ideas, gráficos, presentaciones, esquemas, etc, que ayuden a visualizar mejor el problema y su solución se valorarán positivamente.
6. Se valorará la buena presentación del examen.

Criterios particulares de cada uno de los problemas

OPCIÓN A

A.1.

• Cálculo del determinante de la matriz y discusión para los casos que no anulan el determinante $(0,75$ puntos).

• Discusión en los casos de $m = 0$ y $m = 3$ $(0,75$ puntos).

• Resolución para el caso $m = 3$ $(0,5$ puntos).

A.2.

• Planteamiento del problema: obtención del vector director de la recta, vector normal al plano y el valor de A $(1$ punto).

• Obtención del plano perpendicular a r y que pase por $(0,0,0)$ $(1$ punto) .

A.3.

• Obtención de la ecuación de las rectas que pasa por el punto $(6,0)$ y son tangentes a la parábola dada. $(1$ punto).

• Obtención de las ecuaciones de las rectas tangentes a la parábola para $a = 16$ $(0,5$ puntos) y $a = -4$ $(0,5$ puntos).

SOLUCIONES OPCIÓN A

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Problema A.1:

Discutir, en función de m, el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} (m+3)x & +mx & +mz & = & m-1 \\ 3x & & +mz & = & m-2 \\ & -y & z & = & m-3 \end{cases}$$

Resolver en los casos de indeterminación, suponiendo que existan.

Solución:

Escribimos el sistema en modo de ecuación matricial para obtener de esta forma obtener la matriz de coeficientes, que será la matriz con la que obtendremos los valores de m que nos servirán para la discusión del sistema.

$$\begin{bmatrix} m+3 & m & m \\ 3 & 0 & m \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m-1 \\ m-2 \\ m-3 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} A = \begin{bmatrix} m+3 & m & m \\ 3 & 0 & m \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ A' = \begin{bmatrix} m+3 & m & m & m-1 \\ 3 & 0 & m & m-2 \\ 0 & -1 & 1 & m-3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes e igualamos a 0:

$$det(A) = \begin{vmatrix} m+3 & m & m \\ 3 & 0 & m \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow [(m+3)\cdot 0 \cdot 1 + 3\cdot(-1)\cdot m + 0\cdot m\cdot m] - [m\cdot 0\cdot 0 + (m+3)\cdot(-1)\cdot m + m\cdot 3\cdot 1] = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow [-3m] - [-(m+3)m + 3m] = 0 \Longleftrightarrow -3m + m^2 + 3m - 3m = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow -3m + m^2 = 0 \Longleftrightarrow m(m-3) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 3 \end{cases}$$

Por tanto, cuando m =0 y $m = 3$ el determinante de la matriz de coeficientes es 0; lo cual hace que el rango de dicha matriz no sea 3. De manera que estudiaremos los tres casos posibles y utilizaremos el Teorema de Rouché-Frobenious para decidir qué tipo de sistema es cada uno:

- $0 \neq m \neq 3$

$$\left.\begin{array}{r} \text{rango(A)} = 3 \;\text{ por ser }\; \det(\text{A}) \neq 0 \\ rango(A') = 3 \;\text{ por ser }\; rango(A) = 3 \\ n = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$$

$$(existe\ una\ unica\ solucion\ para\ cada\ m \neq \{0, 3\}$$

- $m = 3$

  o $A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ $rango(A) \geq 2$, pues L_3 y L_2 son linealmente independientes. Veamos por si L_1 se puede escribir como combinación líneal de L_3 y L_2

$$\left.\begin{array}{r} 6 = 3\alpha \\ 3 = -\beta \\ 3 = 3\alpha + \beta \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha = 2\ y\ \beta = -3$$ cual hace que el se cumpla la tercera ecuación. Por tanto, $rango(A) = 2$

- $A' = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ como $rango(A) = 2$, $rango(A') \geq 2$. Veamos que valor coge, para ello estudiaremos como en el caso de A, cual es la combinación lineal posible de L_1 con respecto a L_3 y L_2

$$\left.\begin{matrix} 6 = 3\alpha \\ 3 = -\beta \\ 3 = 3\alpha + \beta \\ 2 = \alpha \end{matrix}\right\} \Longrightarrow de\ las\ dos\ primeras\ ecuaciones\ \alpha = 2\ y\ \beta = -1$$ comprobando en la tercera y cuarta se ve que se cumple, por tanto, $rango(A') = 2$

Luego:

$$\left.\begin{matrix} \text{rango(A)} = 2 \\ rango(A') = 2 \\ n = 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado (existen infinitas soluciones)}$$

- Resolución:

$$\begin{cases} 6x & +3x & +3z & = & 2 \\ 3x & & +3z & = & 1 \\ & -y & z & = & 0 \end{cases}$$

La segunda y tercera ecuaciones tienen en ambas la incógnita z, por tanto despejaremos en las dos las otras dos incógnitas, y llamaremos a $z = \lambda \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\begin{matrix} \boldsymbol{x = \dfrac{1 - 3\lambda}{3}} & \\ \boldsymbol{y = \lambda} & \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R} \\ \boldsymbol{z = \lambda} & \end{matrix}}$$

- $m = 0$
  - $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ $rango(A) = 2$ pues la primera y la segunda fila son idénticas pero la tercera es independiente a ellas.
  - $A' = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ $rango(A') = 3$ pues L_1 y L_2 son independientes y no hay manera de conseguir L_3 mediante combinación lineal de L_1 y L_2. $\left.\begin{matrix} 0 = 3\alpha + 3\beta \\ -1 = 0 \\ 1 = 0 \\ -3 = -\alpha - 2\beta \end{matrix}\right\} \Longrightarrow$ tenemos dos ecuaciones absurdas

Por tanto:

$$\left.\begin{matrix} \text{rango(A)} = 2 \\ rango(A') = 3 \\ n = 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{Sistema Incompatible (no existe solución posible)}$$

Problema A.2:

Sean la recta $r \equiv \begin{cases} 4x - 3y + 4z = 1 \\ 3x - 2y + z = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x - y + Az = 0$

d) ¿Existe algún valor de A para que el plano sea paralelo a r?

e) Encontrar el plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto $(0, 0, 0)$.

Solución:

a) Primeramente obtendremos la información que nos aporta la recta r y el plano π:

- $\pi \Longrightarrow \begin{cases} \vec{n} = (1, -1, A) \\ P(0,0,0) \;\; no\ lo\ utilizaremos \end{cases}$
- $r \Longrightarrow \begin{Bmatrix} \vec{d}_1 = (4, -3, 4) \\ \vec{d}_2 = (3, -2, 1) \end{Bmatrix} \Longrightarrow \vec{d}_r = \vec{d}_1 \times \vec{d}_2 = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (-3i - 8k + 12j) - (-9k + 4j - 8i) =$

$$= (-3\hat{\imath} - 8\hat{k} + 12\hat{\jmath}) - (-9\hat{k} + 4\hat{\jmath} - 8\hat{\imath}) = 5\hat{\imath} + 8\hat{\jmath} + \hat{k} \Longrightarrow \vec{d}_r = (5, 8, 1)$$

Para que el plano π sea paralelo a r, $\pi \parallel r$, se tiene que cumplir que $\vec{d}_r \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{d}_r \cdot \vec{n} = 0$.

$(5, 8, 1) \cdot (1, -1, A) = 0 \Leftrightarrow 5 - 8 + A = 0 \Leftrightarrow A = 3$

Por tanto, cuando $A = 3$ el plano π es paralelo a la recta r.

b) Para crear un plano necesitamos un punto y el vector normal al mismo.

- Como el plano que buscamos tiene que ser perpendicular a la recta r, el vector director de la recta r será el vector normal del plano: $\vec{d}_r = (5, 8, 1)$.
- Por otro lado, el punto por donde pasa el plano ya lo tenemos el punto $(0, 0, 0)$

$$5(x - 0) + 8(y - 0) + 1(z - 0) = 0 \Leftrightarrow 5x + 8y + z = 0$$

Por tanto, el plano buscado es: $5x + 8y + z = 0$

Problema A.3:

Dada la función $f(x) = x^2 + 64$ y el punto exterior a su grafica *P(6, 0)*, encontrar la recta o rectas tangente a *f* que pasen por P.

Solución:

La ecuación de una recta cualquiera viene dada por esta formula: $y = mx + n$ donde $m = f'(a)$ para un valor $x = a$, luego, $f'(a) = 2a$.

Para un valor $x = a$ tenemos que su imagen es el punto $(a, a^2 + 64)$.

Sustituyendo todo esto en la ecuación general de la recta tenemos que:

$$a^2 + 64 = 2a \cdot a + n$$

Además, sabemos que la(s) recta(s) que buscamos pasan por el punto $P(6, 0)$, por tanto, $0 = 2a \cdot 6 + n$

Resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{matrix} a^2 + 64 = 2a^2 + n \\ 0 = 12a + n \end{matrix}\right\} \Longrightarrow a^2 + 64 = 2a^2 - 12a \Leftrightarrow a^2 - 12a - 64 = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow a = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-64)}}{2 \cdot 1} = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-64)}}{2 \cdot 1} = \frac{12 \pm \sqrt{400}}{2} = \frac{12 \pm 20}{2} = \begin{cases} a_1 = 16 \\ a_2 = -4 \end{cases}$$

Sustituyendo estos valores en la recta tangente general $y = 2ax - 12a$

Tenemos que, cuando:

$a = 16$, la recta tangente es $y = 32x - 192$

$a = -4$, la recta tangente es $y = -8x + 48$

Problema A.4:

Calcula $\int xe^{-4x}dx$, explicando el proceso utilizado para dicho cálculo.

Solución:

Integraremos por partes, para ello llamaremos a $u = x$ pues de esta manera conseguiremos bajar un grado su potencia:

$$\int xe^{-4x}dx = \left\{\begin{matrix} u = x & \rightarrow & du = 1dx \\ dv = e^{-4x}dx & \rightarrow & v = \dfrac{e^{-4x}}{-4} \end{matrix}\right\} = x\frac{e^{-4x}}{-4} - \int \frac{e^{-4x}}{-4}1dx = -\frac{xe^{-4x}}{4} - \frac{1}{16}e^{-4x} + C =$$

$$\boxed{= -\frac{(4x+1)e^{-4x}}{16} + C}$$

Autor: Alex Aginagalde
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

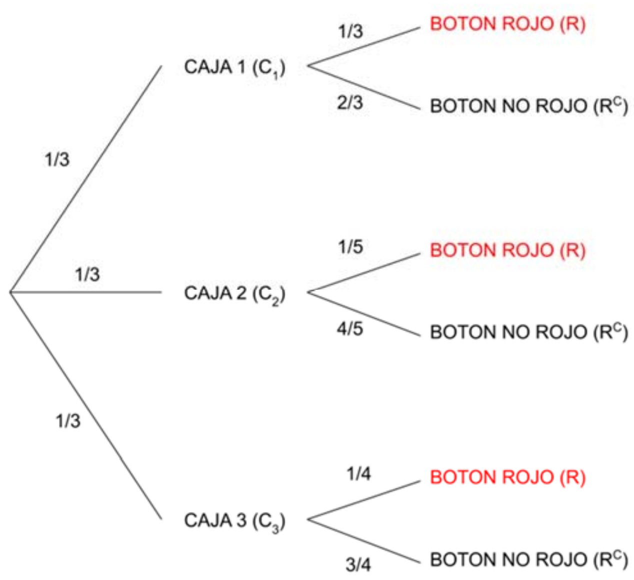
Problema A.5:

Sobre una mesa tengo tres cajas con botones; la primera caja tiene 3 botones, la segunda 5 y la tercera 4. Cada una de las cajas contiene un solo botón rojo. Si elijo al azar una caja y saco de ella un botón al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea un botón rojo?
b) Si he sacado un botón rojo, ¿cuál es la probabilidad de pertenecer a la primera caja?

Solución:

Realizaros un diagrama de árbol para interpretar el problema y así poder responder adecuadamente las preguntas:



a) $P(R) = P(C_1)P(R|C_1) + P(C_2)P(R|C_2) + P(C_3)P(R|C_3) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{47}{180}$

Por tanto, la probabilidad de que el botón elegido sea rojo es de $47/180 \approx 0.26\hat{1} \Leftrightarrow 26.11\%$

b) Para calcular la probabilidad de que el botón sacado sea de la caja 1 sabiendo que es rojo se calcula utilizando el Teorema de Bayes:

$$P(C_1|R) = \frac{P(C_1)P(R|C_1)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{47}{180}} = \frac{20}{47}$$

Por tanto, la probabilidad de que el botón rojo sacado sea de la caja 1 es elegido sea rojo es de $20/47 \approx 0.4255 \Leftrightarrow 42.55\ \%$

Autor: Alex Aginagalde
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

SOLUCIONES OPCIÓN B

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Problema B.1:

Dada la matriz $A(a)$

$$A(a)=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&a&0\\1&1&1\end{bmatrix}$$

Calcular, razonadamente, el valor de a para que el determinante de $A(a)^2$ valga 4.

Solución:

Tenemos que calcular $A(a)^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&a&0\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&a&0\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1+a&a^2&0\\3&1+a&1\end{pmatrix}$

Una vez tenemos el valor de la matriz calcularemos su determinante y lo igualamos a 4:

$$det(A(a)^2)=\begin{vmatrix}1&0&0\\1+a&a^2&0\\3&1+a&1\end{vmatrix}=a^2=4\Longrightarrow a=\pm 2$$

Luego, a tiene que valer 2 y -2

Problema B.2:

Se consideran los tres puntos $A(0,0,1)$, $B(1,1,1)$ y $C(-1,-1,2)$. ¿Están alineados? En caso afirmativo hallar la ecuación de la recta que los contiene. En caso negativo calcular el plano que los contiene.

Solución:

Para ver si tres puntos están alineados hay que ver si los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son paralelos.

Calculemos entonces dichos vectores:

- $\overrightarrow{AB} = (1,1,1) - (0,0,1) = (1,1,0)$
- $\overrightarrow{AC} = (-1,-1,2) - (0,0,1) = (-1,-1,1)$

$\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son paralelos si son proporcionales, y se ve claramente que no lo son.

$$\boxed{\text{Por tanto, los tres puntos no están alineados.}}$$

Calculemos ahora el plano que contiene a dichos puntos.

Para definir un plano hay diferentes modos:

- Un vector normal y un punto
- Dos vectores no paralelos del plano y un punto

La segunda opción es la más fácil en este caso, pues ya tenemos los vectores ($\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$) y el punto (cualquiera de los puntos que se nos da, en nuestro caso elegiremos el punto A).

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 0 + 1\lambda + (-1)\mu \\ y = 0 + 1\lambda + (-1)\mu \\ z = 1 + 0\lambda + 1\mu \end{cases} \Leftrightarrow \pi \equiv \begin{cases} x = \lambda - \mu \\ y = \lambda - \mu \\ z = 1 + \lambda + \mu \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{\text{Por tanto, el plano que contiene a los tres puntos es: } \pi \equiv \begin{cases} x = \lambda - \mu \\ y = \lambda - \mu \\ z = 1 + \lambda + \mu \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}}$$

Autor: Alex Aginagalde
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
LibrosMareaVerde.tk

Problema B.3:

Sea f la función $f(x) = x^2e^{-4x}$. Calcular la primera y la segunda derivada de f. Hallar los máximos y mínimos de f.

Solución:

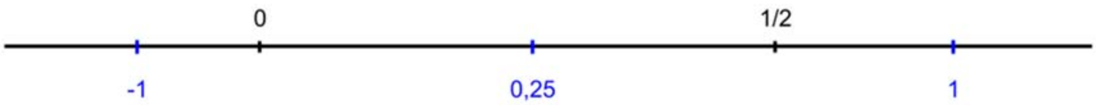
- $\boxed{f'(x)} = 2xe^{-4x} + x^2(-4e^{-4x}) = \boxed{e^{-4x}(2x - 4x^2)}$

- $\boxed{f''(x)} = -4e^{-4x}(2x - 4x^2) + e^{-4x}(2 - 8x) = e^{-4x}(-8x + 16x^2 + 2 - 8x) =$
  $= \boxed{e^{-4x}(16x^2 - 16x + 2)}$

- Para calcular los máximos y mínimos hay que igualar a 0 la primera derivada

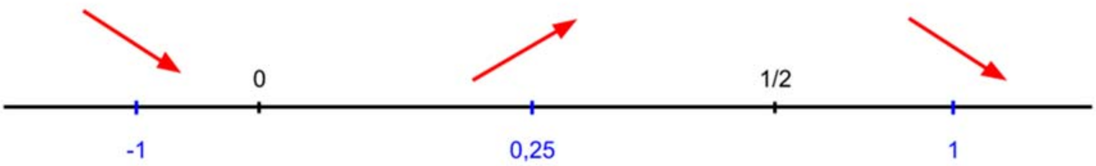
  $$e^{-4x}(2x - 4x^2) = 0 \Leftrightarrow 2x - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow 2x(1 - 2x) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1/2 \end{cases}$$

  Representamos los valores en la recta real y estudiamos que ocurre en los intervalos que aparecen.



Calculamos los valores de la derivada en los puntos –1, 0.25 y 1

  - $f'(-1) = e^4(-2 - 4) < 0$, por tanto, es decreciente
  - $f'(0.25) = e^4(0.5 - 0.25) > 0$, por tanto, es creciente
  - $f'(1) = e^{-4}(2 - 4) < 0$, por tanto, es decreciente.

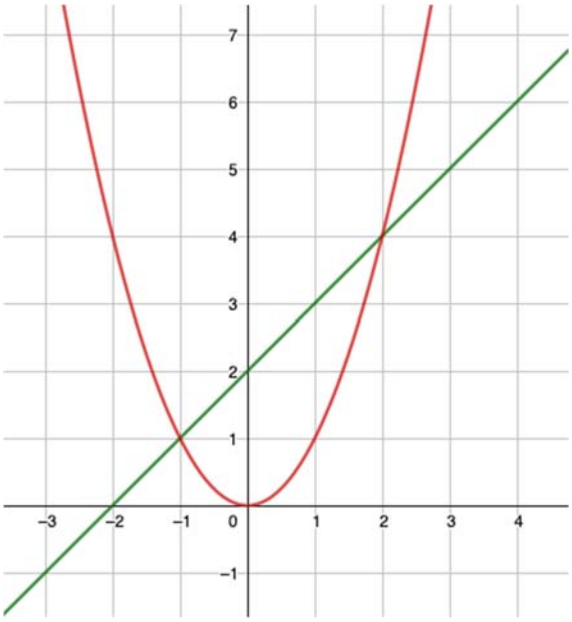


Luego hay un mínimo en $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ y un máximo en $\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4e^2}}\right)$

Problema B.4:

Representar el recinto finito del plano limitado por la recta $y = x + 2$ y por la parábola $y = x^2$. Calcular su área.

Solución:



Calcularemos los puntos de intersección de la recta con la parábola, resolviendo el siguiente sistema: $\begin{cases} y = x + 2 \\ y = x^2 \end{cases} \Longrightarrow x + 2 = x^2 \Longleftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$. Por tanto, los puntos son $(-1, 1)$ y $(2, 4)$

En el intervalo $[-1, 2]$, la recta esta por encima de la parábola, luego para calcular el área que encierran las dos funciones tenemos que calcular lo siguiente:

$$Área = \int_{-1}^{2} [(x+2) - x^2]dx = \int_{-1}^{2} (x + 2 - x^2)dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\Big]_{-1}^{2} = \left[\frac{4}{2} + 4 - \frac{8}{3}\right] - \left[\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3}\right] =$$

$$= 2 + 4 - \frac{8}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{9}{2}\ u^2}$$

$$Área = \boxed{\frac{9}{2}\ u^2}$$

Autor: Alex Aginagalde
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
LibrosMareaVerde.tk

Problema B.5:

Lanzamos un dado de seis caras 6 000 veces. Calcular la probabilidad de que el número de veces que salga el 5

c) sea superior a 1 500.
d) esté comprendido entre 1 000 y 1 100.

Solución:

Se trata de un ejercicio de distribución binomial, donde $\begin{cases} n = 6000 \\ p = 1/6 \\ q = 5/6 \end{cases}$

La distribución binomial se aproxima a la normal de la siguiente manera: $B(n,p) \approx N(np, \sqrt{npq})$.

Por tanto, en nuestro caso: $B(6000, 0.167) \approx N(1000, 28.86)$

a) $\boxed{P(x > 1500)} = P(x > 1500,5) = P\left(z > \frac{1500.5-1000}{28.86}\right) = P(z > 17.3) = \boxed{0}$

$$\boxed{P(x > 1500)} = \boxed{0}$$

b) $\boxed{P(1000 < x < 1100)} = P(1000.5 < x < 1099.5) = P\left(\frac{1000.5-1.000}{28.86} < z < \frac{1099.5-1000}{28.86}\right) =$
$= P(0.02 < z < 3.45) = \boxed{0.4917}$

$$\boxed{P(1000 < x < 1100)} = \boxed{0.4917}$$

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA

2019ko UZTAILA

MATEMATIKA II

EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

JULIO 2019

MATEMÁTICAS II

OPCIÓN A

Problema A.1:

Discutir, en función de los valores de m, el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x & +2y & +3z & = & 6 \\ x & +y & -z & = & 1 \\ 2x & -2y & +mz & = & m \end{cases}$$

Problema A.2:

Hallar la ecuación de una recta paralela al plano $\pi \equiv x + 2y + 3z = 6$ y que contenga al punto $P(1, 0, 0)$. ¿Es única dicha recta? Razonar la respuesta.

Problema A.3:

Sea f la función $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$

a) **Obtener los valores *A*, *B* y *C* para que su grafica contenga al punto $P(0, 1)$ y para que f tenga un mínimo local en $Q(2, 0)$**
b) **¿La función obtenida tiene otros máximos o mínimos locales?**

Problema A.4:

c) **Sea *R* el recinto del plano limitado por las curvas $y = x(3 - x)$ y por $y = x^2$. Dibujar *R* y calcular su área.**

Problema A.5:

Una caja tiene 3 monedas *R*, *L* y *M*. La moneda *R* es normal, la *L* tiene cara por los dos lados y la *M* esta trucada, de forma que la probabilidad de salir cara es 1/5. Se tira una moneda al azar.

a) **Calcula la probabilidad que se obtenga cara**
b) **Si ha sido cruz, ¿cuál es la probabilidad que sea la moneda *R*?**

Universidad del País Vasco — Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA — *EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD*

2019ko UZTAILA — *JULIO 2019*

MATEMATIKA II — ***MATEMÁTICAS II***

OPCIÓN B

Problema B.1:

Dada una matriz de tamaño 3x3 cuyo determinante es igual 5, se realizan sucesivamente las siguientes operaciones:

a) Se cambian entre sí la primera y la segunda fila,
b) Se multiplica la tercera columna por -2,
c) Se multiplica a toda la matriz por 2 y
d) Se transpone la matriz

Calcular de forma razonada el valor del determinante de la matriz obtenida.

Problema B.2:

Se considera la recta $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$ y el punto $P(1, 2, 5)$ exterior a la misma. Hallar la ecuación del plano que contiene a r y a P.

Problema B.3:

Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos de la función

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$. Representar f.

Problema B.4:

Calcular $\int \frac{8x+7}{(x+1)(x+3)} dx$ explicando el método seguido para dicho calculo.

Problema B.5:

Los resultados obtenidos en una prueba realizada a 500 estudiantes se distribuyen normalmente con media 40 puntos y desviación típica 10 puntos.

a) ¿Qué porcentaje del alumnado tiene una puntuación entre 30 y 60 puntos?
b) ¿Cuántos estudiantes tienen una puntuación superior a 60 puntos?

SOLUCIONES OPCIÓN A

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema A.1:

Discutir, en función de los valores de m, el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x & +2y & +3z & = & 6 \\ x & +y & -z & = & 1 \\ 2x & -2y & +mz & = & m \end{cases}$$

Solución:

Escribimos el sistema en modo de ecuación matricial para de esta forma obtener la matriz de coeficientes, que será la matriz con la que obtendremos los valores de m que nos servirán para la discusión del sistema.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ m \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & m \end{bmatrix} \\ A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & m & m \end{bmatrix} \end{cases}$$

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes y lo igualamos a 0:

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & m \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [1 \cdot 1 \cdot m + 1 \cdot (-2) \cdot 3 + 2 \cdot (-1) \cdot 2] - [3 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot m + 1 \cdot (-2) \cdot (-1)] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (m - 6 - 4) - (6 + 2m + 2) = 0 \Leftrightarrow m - 6 - 4 - 6 - 2m - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -m - 18 = 0 \Leftrightarrow m = -18$$

Por tanto, cuando $m = -18$ el determinante de la matriz de coeficientes es 0; lo cual hace que el rango de dicha matriz no sea 3. De manera que estudiaremos los casos posibles y utilizaremos el Teorema de Rouché-Frobenius para decidir que tipo de sistema es cada uno:

$$m \neq -18$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{rango(A)} = 3 \ \text{ por ser } \ \text{det(A)} \neq 0 \\ rango(A') = 3 \ \text{ por ser } \ rango(A) = 3 \\ n = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$$

$$(existe\ una\ unica\ solucion\ para\ cada\ m \neq -18$$

- m = 18
  - $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -18 \end{bmatrix}$ L_1 y L_2 son independientes pues no son proporcionales, veamos si L_3 es combinación lineal de L_1 y L_2. $\begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ 2\alpha + \beta = -2 \\ 3\alpha - \beta = -18 \end{cases}$, despejamos α en la primera ecuación y la sustituimos en las otras dos:

    $$\begin{cases} 2(2-\beta) + \beta = -2 \Leftrightarrow 4 - 2\beta + \beta = -2 \Leftrightarrow -\beta = -6 \Leftrightarrow \beta = 6 \\ 3(2-\beta) - \beta = -18 \Leftrightarrow 6 - 3\beta - \beta = -18 \Leftrightarrow -4\beta = -24 \Leftrightarrow \beta = 6 \end{cases}$$

    Como no hemos llegado a ninguna contradicción podemos asegurar que L_3 es combinación lineal de L_1 y L_2 ($L_3 = -4L_1 + 6L_2$), lo cual nos indica que $rango(A) = 2$.

  - $A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -18 & -18 \end{bmatrix}$ como $rango(A) = 2$, $rango(A') \geq 2$. Se ve claramente que C_4 es igual a la suma de las demás columnas. Por tanto, $rango(A') = rango(A) = 2$
  - $n = 3$

Por tanto:

$$\left.\begin{matrix} \mathrm{rango(A)} = 2 \\ rango(A') = 2 \\ n = 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

Si m = 18, Sistema Compatible Indeterminado (hay infinitas soluciones)

Problema A.2:

Hallar la ecuación de una recta paralela al plano $\pi \equiv x + 2y + 3z = 6$ y que contenga al punto $P(1, 0, 0)$. ¿Es única dicha recta? Razonar la respuesta.

Solución:

Para definir la recta r que buscamos necesitamos un punto de la misma (en nuestro caso P) y un vector director ($\vec{d}_r$) de la recta. Dicho vector director será perpendicular a la normal del plano ($\vec{n} = (1, 2, 3)$).

De hecho, hay $\boxed{\textbf{infinitas posibles soluciones}}$ al problema, pues toda recta contenida en el plano paralelo a nuestro plano π y que pase por el punto P cumple las condiciones.

Busquemos un vector director $\vec{d}_r$ que sea perpendicular a $\vec{n}$. Por ejemplo, $\vec{d}_r = (-2, 10)$ nos vale, pues $\vec{d}_r \cdot \vec{n} = 0$. Luego la representación paramétrica de la recta que buscamos es la siguiente:

$$\boxed{r \equiv \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}}$$

Problema A.3:

Sea f la función $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$

a) **Obtener los valores A, B y C para que su grafica contenga al punto $P(0,1)$ y para que f tenga un mínimo local en $Q(2,0)$**

b) **¿La función obtenida tiene otros máximos o mínimos locales?**

Solución:

Derivaremos la función pues la utilizaremos en ambos apartados: $f'(x) = 3x^2 + 2Ax + B$

a) Traduciremos al lenguaje matemático las condiciones que nos imponen (necesitamos tres condiciones pues son tres las incógnitas que buscamos):

$$P(0,1) \in f \Leftrightarrow f(0) = 1 \Leftrightarrow 1 = C$$

$$Q(2,0) \text{ minimo local } \begin{cases} Q(2,0) \in f \Leftrightarrow f(2) = 0 \Leftrightarrow 0 = 8 + 4A + 2B + C \\ f'(2) = 0 \Leftrightarrow 0 = 3 \cdot 4 + 2A2 + B \end{cases}$$

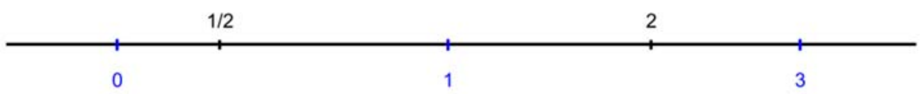
Por tanto, tenemos un sistema de tres incógnitas y tres ecuaciones: $\begin{cases} 1 = C \\ 0 = 8 + 4A + 2B + C \\ 0 = 12 + 4A + B \end{cases}$

Resolviendo el sistema llegamos a que: $\boxed{A = -15/4 \;;\; B = 3 \;;\; C = 1}$

b) Para calcular los máximos y mínimos de f, hay que igualar la derivada a 0.

$$3x^2 - \frac{15}{2}x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{15/2 \pm \sqrt{(-15/2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3}}{2 \cdot 3} = \frac{\frac{15}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4}}}{6} = \frac{\frac{15}{2} \pm \frac{9}{2}}{6} = \frac{15 \pm 9}{12} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_1 = 1/2 \end{cases}$$

Representamos los valores en la recta real y estudiamos que ocurre en los intervalos que se aparecen.



Calculamos los valores de la derivada en los puntos 0, 1 y 3

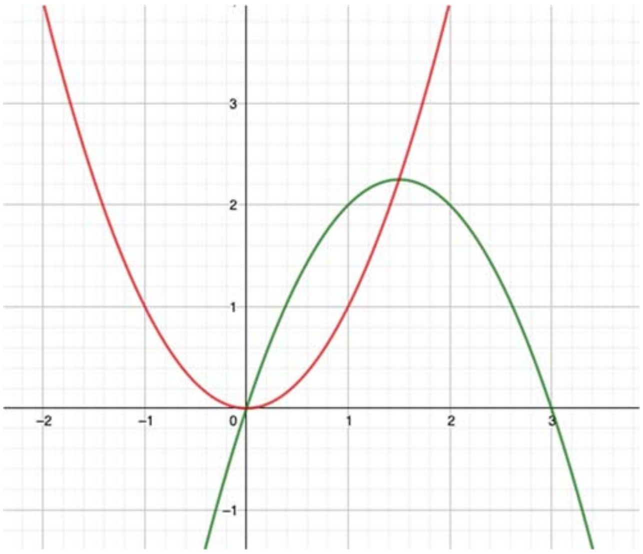
- $f'(0) = 3 \cdot 0 - \frac{15}{2}0 + 3 = 3 > 0$, por tanto es creciente
- $f'(1) = 3 \cdot 1^2 - \frac{15}{2}1 + 3 = -\frac{3}{2} < 0$, por tanto es decreciente
- $f'(3) = 3 \cdot 3^2 - \frac{15}{2}3 + 3 = \frac{15}{2} > 0$, por tanto es creciente

Luego hay un mínimo en $(2, 0)$ y un máximo en $\left(\frac{1}{2}, \frac{57}{16}\right)$

Problema A.4:

Sea *R* el recinto del plano limitado por las curvas $y = x(3 - x)$ y por $y = x^2$. Dibujar *R* y calcular su área.

Solución:



Calcularemos los puntos de intersección de una parábola con la otra parábola, resolviendo el siguiente sistema:

$$\begin{cases} y = 3x - x^2 \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow 3x - x^2 = x^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x = 0 = x(2x-3) \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3/2 \end{cases}.$$

Por tanto, los puntos son $(0,0)$ y $(3/2, 9/4)$.

En el intervalo $[0\,,3/2]$, la parábola $y = x^2$ está por encima de la parábola $y = 3x - x^2$, luego para calcular el área que encierran las dos funciones tenemos que calcular lo siguiente:

$$\int_0^{3/2} [x^2 - (3x - x^2)]dx = \int_0^{3/2} (x^2 - 3x + x^2)dx = \int_0^{3/2} (2x^2 - 3x)dx =$$

$$= \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + C\Big]_0^{3/2} = \left(\frac{2(3/2)^3}{3} - \frac{3(3/2)^2}{2} + C\right) - \left(\frac{0}{3} - \frac{0}{2} + C\right) =$$

$$= \left[\frac{2(3/2)^3}{3} - \frac{3(3/2)^2}{2} + C\right] - \left[\frac{0}{3} - \frac{0}{2} + C\right] = \frac{2 \cdot 27}{3 \cdot 8} - \frac{3 \cdot 9}{2 \cdot 4} = \boxed{\frac{9}{8} u^2}$$

$$\text{Área} = \boxed{\frac{9}{8} u^2}$$

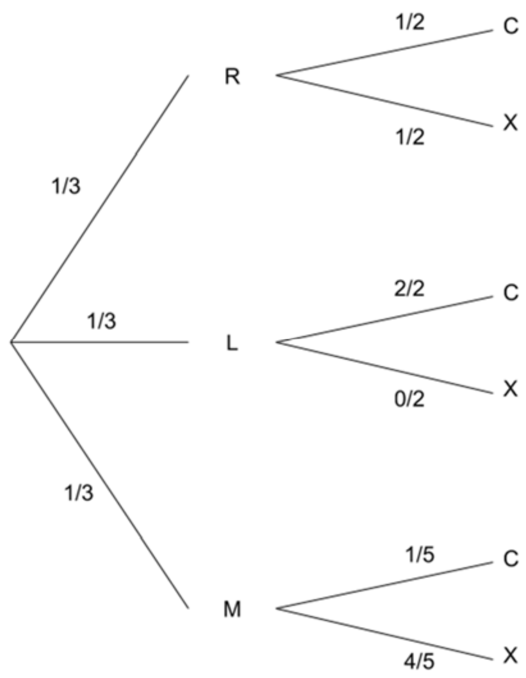
Problema A.5:

Una caja tiene 3 monedas *R*, *L* y *M*. La moneda *R* es normal, la *L* tiene cara por los dos lados y la *M* esta trucada, de forma que la probabilidad de salir cara es 1/5. Se tira una moneda al azar.

a) Calcula la probabilidad que se obtenga cara
b) Si ha sido cruz, ¿cuál es la probabilidad que sea la moneda *R*?

Solución:

Dibujemos un diagrama de árbol para posteriormente calcular las probabilidades que se nos piden:



a) $P(C) = P(R) \cdot P(C|R) + P(L) \cdot P(C|L) + P(M) \cdot P(C|M) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{15} = \frac{17}{30}$

Por tanto, la probabilidad de que se obtenga cara es de $17/30 \approx 0.56\hat{6} \Leftrightarrow 56.67\ \%$

b) Para calcular la probabilidad de que la moneda sacada sea del tipo *R*, sabiendo que es cruz la se calcula utilizando el Teorema de Bayes:

$$P(R|X) = \frac{P(R) \cdot P(X|R)}{P(X)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{13}{30}} = \frac{5}{13}$$

Por tanto, la probabilidad de que la moneda sea del tipo *R* sabiendo que ha salido cruz es de $5/13 \approx 0.3846 \Leftrightarrow 38.46\ \%$

SOLUCIONES OPCIÓN B

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema B.1:

Dada una matriz de tamaño 3x3 cuyo determinante es igual 5, se realizan sucesivamente las siguientes operaciones:

a) Se cambian entre sí la primera y la segunda fila,
b) Se multiplica la tercera columna por -2,
c) Se multiplica a toda la matriz por 2 y
d) Se transpone la matriz

Calcular de forma razonada el valor del determinante de la matriz obtenida.

Solución:

Traduzcamos cada paso usando las propiedades de las matrices:

a) Se cambian entre sí la primera y la segunda fila $\Leftrightarrow$ cambia el signo del determinante

b) Se multiplica la tercera columna por -2 $\Leftrightarrow$ se multiplica el determinante por ese numero

c) Se multiplica a toda la matriz por 2 $\Leftrightarrow$ al multiplicar toda la matriz de 3x3 estamos multiplicando por 2 cada fila o columna, de manera que multiplicamos por $2^3 = 8$ el determinante.

d) Se transpone la matriz $\Leftrightarrow$ el determinante no varia.

Por tanto, si $det(A) = 5$,

$$\boxed{det(A') = 5(-1)(-2) \cdot 8 = 80}$$

Autor: Alex Aginagalde
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema B.2:

Se considera la recta $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$ y el punto $P(1,2,5)$ exterior a la misma. Hallar la ecuación del plano que contiene a r y a P.

Solución:

De la información del enunciado sabemos esto sobre la recta r: $\boldsymbol{r} \equiv \begin{cases} \vec{\boldsymbol{d}}_r = (\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3}) \\ \boldsymbol{A}(\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3}) \end{cases}$

Para definir el plano que contiene a r y a P necesitamos dos vectores directrices (en nuestro caso $\vec{d}_r$ y el vector $\overrightarrow{AP}$) y un punto del plano (en nuestro caso P). Calculemos lo que nos falta:

$$\overrightarrow{AP} = (1,2,5) - (1,2,3) = (0,0,2)$$

Por tanto, el plano que buscamos viene dado por esta ecuación paramétrica:

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 1 + 1\lambda + 0\mu \\ y = 2 + 2\lambda + 0\mu \\ z = 5 + 3\lambda + 2\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 5 + 3\lambda + 2\mu \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{\pi \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 5 + 3\lambda + 2\mu \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}}$$

Autor: Alex Aginagalde
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
LibrosMareaVerde.tk

Problema B.3:

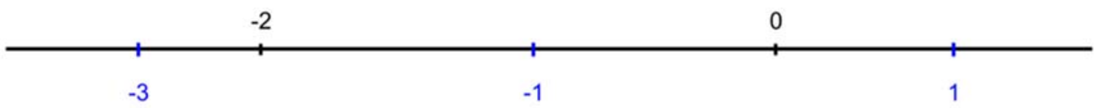
Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos de la función $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$. Representar f.

Solución:

Para estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función hay que igualar a 0 la derivada de la misma:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow 3x(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

Representamos los valores en la recta real y estudiamos que ocurre en los intervalos que se aparecen.

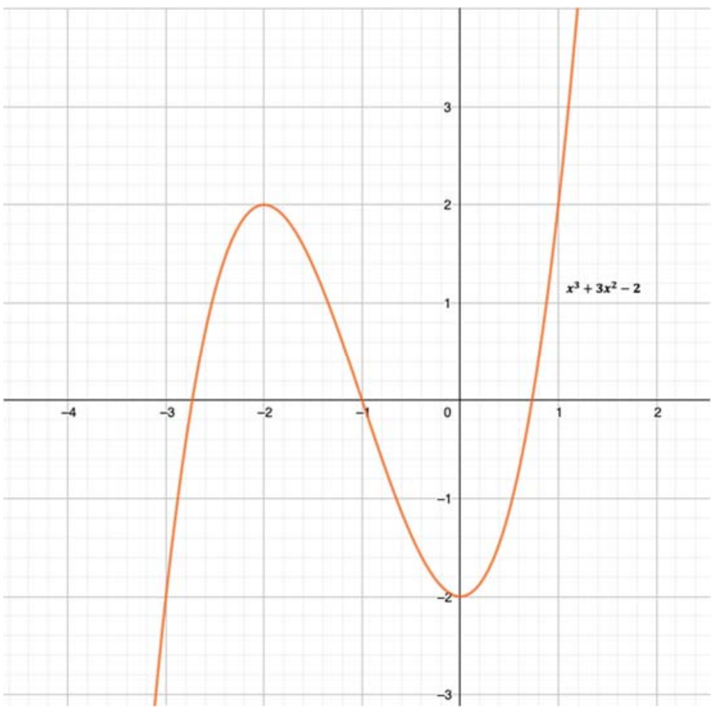


Calculamos los valores de la derivada en los puntos -3, -1 y 1:

- $f'(-3) = 3 \cdot 9 + 6 \cdot (-3) = 9 > 0$, por tanto es creciente
- $f'(-1) = 3 \cdot 1 + 6 \cdot (-1) = -3 < 0$, por tanto es decreciente
- $f'(1) = 3 \cdot 1 + 6 \cdot 1 = 9 > 0$, por tanto es creciente

Por tanto la función es creciente en $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ y decreciente en $(-2, 0)$.

De manera que tiene un máximo en el punto $(-2, 2)$ y en el punto $(0, -2)$, un mínimo.



Con esta información se puede dibujar más o menos la gráfica. Si igualamos la función a 0, podremos encontrar los puntos de corte con el eje OX:

$$x^3 + 3x^2 - 2 = 0 = (x+1)(x^2 + 2x - 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -1 - \sqrt{3} \approx -2.73 \\ x = -1 + \sqrt{3} \approx 0.73 \end{cases}$$

Problema B.4:

Calcular $\int \frac{8x+7}{(x+1)(x+3)} dx$ explicando el método seguido para dicho calculo.

Solución:

Tenemos que descomponer la función en fracciones simples: $\frac{8x+7}{(x+1)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+3}$

Lo cual queda: $8x + 7 = A(x+3) + B(x+1)$

A continuación sustituimos la x por un par de valores para hallar A y B; los más adecuados son –3 y –1 pues en ambos casos un sumando del término de la derecha desaparece:

- $x = -3 \Longrightarrow -24 + 7 = B(-2) \Longrightarrow B = \frac{17}{2}$
- $x = -1 \Longrightarrow -8 + 7 = 2A \Longrightarrow A = -\frac{1}{2}$

Luego *la integral queda así:*

$$\int \frac{8x+7}{(x+1)(x+3)} dx = \int \left(\frac{-1/2}{x+1} + \frac{17/2}{x+3}\right) dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1} dx + \frac{17}{2}\int \frac{1}{x+3} dx =$$

$$= \boxed{-\frac{1}{2} ln|x+1| + \frac{17}{2} ln|x+3| + C}$$

$$\int \frac{8x+7}{(x+1)(x+3)} dx = \boxed{-\frac{1}{2} ln|x+1| + \frac{17}{2} ln|x+3| + C}$$

Problema B.5:

Los resultados obtenidos en una prueba realizada a 500 estudiantes se distribuyen normalmente con media 40 puntos y desviación típica 10 puntos.

a) ¿Qué porcentaje del alumnado tiene una puntuación entre 30 y 60 puntos?
b) ¿Cuántos estudiantes tienen una puntuación superior a 60 puntos?

Solución:

$X: N(40, 10) \approx Z: N(0, 1)$ la variable X tras tipificarla se transforma en $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$.

a) $P(30 < x < 60) = P\left(\frac{30-40}{10} < \frac{x-\mu}{\sigma} < \frac{60-40}{10}\right) = P(-1 < z < 2) =$

$= P(z < 2) - [1 - P(z < 1)] = 0.9772 - (1 - 0.943) =$

$= \boxed{0.8185 \iff 81.85\ \%}$

Un 81.85 % del alumnado tiene una puntuación entre 30 y 60 puntos.

b) $P(x > 60) = P(\frac{x-\mu}{\sigma} > \frac{60-40}{10}) = P(z > 2) = 1 - P(z < 2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$

Por tanto, al haber 500 estudiantes en el estudio, $0.0228 \cdot 500 = 11.4$ estudiantes habrán obtenido una puntuación mayor que 60 puntos. Como la puntuación no puede ser decimal hay que decantarse por 11 o 12 estudiantes. Con 11 estudiantes no llegaremos a tener el 22.8 % que buscamos, tendremos menos, por tanto, son 12.

Son 12 los estudiantes que han sacado más de 60 puntos.

Autor: Alex Aginagalde
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo