

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2019

Comunidad autónoma de

Murcia



LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Cristina Vidal Brazales

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo





PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA EL ALUMNADO DE
BACHILLERATO
206 MATEMÁTICAS II. JUNIO 2019

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá responder a todas las cuestiones de una de las opciones A o B. No está permitido utilizar calculadoras programables ni que realicen cálculo simbólico, integrales o gráficas.

OPCIÓN A: No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas.

A.1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a :

$$\begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + ay + z = a \\ ax + y + z = a+3 \end{cases}$$

- a) [1 p.] Determine para qué valores de a el sistema tiene solución única. Si es posible, calcule dicha solución para $a = 0$.
- b) [1 p.] Determine para qué valor de a el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.
- c) [0,5 p.] Determine para qué valor de a el sistema no tiene solución.

- A.2:**
- a) [1,5 p.] Calcule la integral indefinida $\int x^2 \cos x \, dx$.
 - b) [1 p.] Determine el área del recinto limitado por el eje OX, las rectas verticales $x = 0$ y $x = \pi$, y la gráfica de la función $f(x) = x^2 \cos x$.

A.3: Los puntos $A = (3, 0, 0)$, $B = (0, 3, 0)$ y $C = (0, 0, 3)$ son tres de los vértices de un tetraedro. El cuarto vértice D está contenido en la recta r que pasa por el punto $P = (1, 1, 1)$ y es perpendicular al plano π que contiene a los puntos A , B y C .

- a) [0,5 p.] Calcule la ecuación del plano que contiene a los puntos A , B y C .
- b) [0,5 p.] Calcule la ecuación de la recta r que pasa por el punto $P = (1, 1, 1)$ y es perpendicular al plano π .
- c) [1,5 p.] Calcule las coordenadas del vértice D sabiendo que el volumen del tetraedro es 18.

A.4: (En este ejercicio trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal).

El tiempo de duración de las bombillas de una cierta marca, medido en horas, sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ . Se sabe que el 69,50% de las bombillas duran menos de 5061,2 horas, y que el 16,60% de las bombillas duran más de 5116,4 horas.

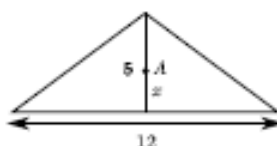
- a) [1 p.] ¿Cuál es la probabilidad de que una bombilla de esta marca dure entre 5061,2 y 5116,4 horas?
- b) [1,5 p.] Calcule la media y la desviación típica de esta distribución normal.

OPCIÓN B: No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas.

B.1: Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- [1 p.] Calcule las potencias sucesivas A^2 , A^3 y A^4 .
- [0,5 p.] Calcule la expresión general de A^n para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}$.
- [1 p.] Determine si existe la inversa de A . En caso afirmativo, calcúlela.

B.2: Considere un triángulo isósceles cuya base de 12 cm es el lado desigual y cuya altura es de 5 cm. Se quiere determinar un punto A situado sobre la altura a una distancia x de la base de manera que la suma de las distancias del punto A a los tres vértices del triángulo sea mínima. Observe la figura:



- [0,5 p.] Demuestre que la suma de las distancias del punto A a los tres vértices del triángulo viene dada por la expresión $f(x) = 5 - x + 2\sqrt{x^2 + 36}$.
- [1,5 p.] Calcule el valor de x para que la suma de las distancias sea mínima.
- [0,5 p.] Calcule dicha cantidad mínima.

B.3: Considere las siguientes rectas:

$$r: \frac{x-5}{1} = \frac{y-6}{1} = \frac{z+1}{1}$$

$$s: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}.$$

- [1 p.] Estudie la posición relativa de ambas rectas.
- [1,5 p.] En caso de que las rectas se corten, calcule el plano que las contiene y el ángulo que forman ambas rectas. En caso de que las rectas se crucen, calcule la perpendicular común a ambas rectas.

B.4: (En este ejercicio trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal).

La probabilidad de que un determinado equipo de fútbol gane cuando juega en casa es $\frac{2}{3}$, y la probabilidad de que gane cuando juega fuera es $\frac{2}{5}$.

- [1 p.] Sin saber dónde jugará el próximo partido, calcule la probabilidad de que gane.
- [1,5 p.] Si ganó el último partido del campeonato, ¿cuál es la probabilidad de que juegue en casa?



PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA EL ALUMNADO DE
BACHILLERATO
206 MATEMÁTICAS II. JUNIO 2019
CRITERIOS DE CALIFICACIÓN

OBSERVACIONES GENERALES:

El corrector deberá ajustarse a los criterios de evaluación establecidos en este documento y en la reunión correspondiente. En ningún caso se podrá puntuar por encima de la valoración indicada en cada apartado. Se procurará que, en lo posible, los errores en un apartado no afecten a otros apartados.

Los errores simples de cálculo restarán 0,25 puntos. Los errores importantes de cálculo o errores simples reiterados pueden conllevar puntuación 0 en ese apartado. Si un error simple ha llevado a un problema más sencillo se disminuirá la puntuación.

Las preguntas contestadas correctamente sin incluir el desarrollo necesario para llegar a su resolución serán valoradas con 0 puntos.

Se valorará el correcto uso del vocabulario y de la notación. El alumno puede elegir el método que considere más oportuno para la resolución de una cuestión pero, si esto demuestra la falta de comprensión de conocimientos básicos, la puntuación final puede ser menor que la indicada para dicha cuestión.

OBSERVACIONES PARTICULARES:

OPCIÓN A

CUESTIÓN A.1: [2,5 puntos]

Apartado a) Justificación correcta y razonada de que el sistema tiene solución única (SCD) para todo valor de a distinto de 1 y de -2 [0,5 puntos]. Cálculo correcto de esa solución única cuando $a = 0$ [0,5 puntos].

Apartado b) Justificación correcta y razonada de que el sistema tiene infinitas soluciones (SCI) cuando $a = -2$ [0,5 puntos]. Cálculo correcto de dicha solución dependiente de un parámetro [0,5 puntos].

Apartado c) Justificación correcta y razonada de que el sistema no tiene solución (SI) cuando $a = 1$ [0,5 puntos].

CUESTIÓN A.2: [2,5 puntos]

Apartado a) Cálculo correcto y justificado de la integral indefinida [1,5 puntos].

Apartado b) Cálculo correcto del área, estudiando el signo de la función $f(x)$ y aplicando la regla de Barrow [1 punto].

CUESTIÓN A.3: [2,5 puntos]

Apartado a) Cálculo correcto y razonado de la ecuación del plano [0,5 puntos].

Apartado b) Cálculo correcto y razonado de la ecuación de la recta [0,5 puntos].

Apartado c) Cálculo correcto y razonado del punto D [1,5 puntos].

CUESTIÓN A.4: [2,5 puntos]

Apartado a) Cálculo correcto y justificado de la probabilidad pedida [1 punto].

Apartado b) Cálculo correcto y justificado de la media [0,75 puntos] y de la desviación típica [0,75 puntos].

OPCIÓN B**CUESTIÓN B.1:** [2,5 puntos]

Apartado a) Cálculo correcto de A^2 [0,5 puntos]. Cálculo correcto de A^3 [0,25 puntos]. Cálculo correcto de A^4 [0,25 puntos].

Apartado b) Identificación de la expresión general de A^n para un valor genérico de n [0,5 puntos].

Apartado c) Justificación de que la matriz A es invertible [0,25 puntos]. Cálculo correcto de la matriz inversa [0,75 puntos].

CUESTIÓN B.2: [2,5 puntos]

Apartado a) Justificación correcta y razonada de la expresión de $f(x)$ [0,5 puntos].

Apartado b) Cálculo correcto de la derivada de la función [0,5 puntos]. Cálculo correcto del punto crítico de la función a minimizar (y candidato a ser mínimo) [0,5 puntos]. Justificación de que se trata de un punto de mínimo [0,5 puntos].

Apartado c) Cálculo del valor mínimo [0,5 puntos].

CUESTIÓN B.3: [2,5 puntos]

Apartado a) Justificación correcta y razonada de que las rectas se cruzan [1 punto].

Apartado b) Cálculo correcto y razonado de la perpendicular común a ambas rectas [1,5 puntos].

CUESTIÓN B.4: [2,5 puntos]

Apartado a) Cálculo correcto y justificado de la probabilidad pedida [1 punto].

Apartado b) Cálculo correcto y justificado de la probabilidad pedida [1,5 puntos].

OPCIÓN A

CONVOCATORIA
ORDINARIA DE
JUNIO

Problema A.1:

A.1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a :

$$\begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + ay + z = a \\ ax + y + z = a + 3 \end{cases}$$

- a) Determine para que valores de a el sistema tiene solución única. Si es posible, calcule dicha solución para $a = 0$.
- b) Determine para que valor de a el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.
- c) Determine para que valor de a el sistema no tiene solución.

Solución:

a) Escribimos la matriz de coeficientes: $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = -a^3 + 3a - 2, \quad |C| = 0 \Leftrightarrow -a^3 + 3a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = 1 \text{ (doble)} \text{ y } a = -2$$

Si $a \neq 1$ y $a \neq -2$ $Rg(C) = 3$, por tanto, $Rg(C) = 3 = n^\circ$ incógnitas, luego es un **Sistema Compatible Determinado**.

Para $a = 0$, el sistema queda $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + z = 0 \\ y + z = 3 \end{cases}$ haciendo $F'_2 = -F_1 + F_2$

Obtenemos $\begin{cases} x + y = 1 \\ -y + z = -1 \\ y + z = 3 \end{cases}$ haciendo $F''_3 = F'_2 + F'_3$ $\begin{cases} x + y = 1 \\ -y + z = -1 \\ 2z = 2 \end{cases}$

Resolviendo,

Para $a = 0$, $x = -1$, $y = 2$, $z = 1$

b) Si $a = -2$ el sistema queda $\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ x - 2y + z = -2 \\ -2x + y + z = 1 \end{cases}$, haciendo $F'_2 = -F_1 + F_2$ y $F'_3 = 2F_1 + F_3$,

obtenemos $\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ -3y + 3z = -3 \\ 3y - 3z = 3 \end{cases}$, las filas segunda y tercera son proporcionales, luego podemos eliminar

una y simplificando la que nos queda, tenemos $\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ -y + z = -1 \end{cases}$

Si $a = -2$, nos quedan dos ecuaciones, que no son proporcionales, con tres incógnitas, por lo que es un Sistema Compatible Indeterminado, tiene infinitas soluciones, llamando $z = \alpha$ nos queda,

$$\begin{cases} x + y = 1 + 2\alpha \\ -y = -1 - \alpha \end{cases} \text{ de donde } y = 1 + \alpha, x = \alpha, \text{ por tanto la solución es:}$$

Si $a = -2$, Sistema Compatible Indeterminado, $x = \alpha, y = 1 + \alpha, z = \alpha$.

c) Si $a = 1$ el sistema queda,

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$$

Vemos que para $a = 1$, la segunda y la tercera ecuación no se pueden cumplir a la vez, por tanto, tenemos un **Sistema Incompatible**

Para $a = 1$ tenemos un **Sistema Incompatible**.

Problema A.2:

- a. Calcule la integral indefinida $\int x^2 \cos x dx$.
- b. Determine el área del recinto limitado por el eje OX , las rectas verticales $x = 0$ y $x = \pi$, y la gráfica de la función $f(x) = x^2 \cos x$.

Solución:

a) Integramos por partes:

$$\int x^2 \cos x dx = \begin{cases} u = x^2 & du = 2x dx \\ dv = \cos x dx & v = \int \cos x dx = \sin x \end{cases}$$

aplicando la fórmula:

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \cdot \sin x - \int \sin x 2x dx$$

de nuevo por partes

$$\begin{cases} u = 2x & du = 2 dx \\ dv = \sin x dx & v = \int \sin x dx = -\cos x \end{cases}$$

sustituyendo

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \cdot \sin x - [-2x \cos x - \int (-\cos x) 2 dx] = x^2 \cdot \sin x + 2x \cos x - \int 2 \cos x dx$$

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \cdot \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + K$$

b) Hallamos los cortes de la función con el eje OX

$$x^2 \cos x = 0$$

$$\begin{cases} x^2 = 0, & x = 0 \\ \cos x = 0, & x = \frac{\pi}{2} \text{ y } x = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

por tanto en el intervalo $[0, \pi]$ corta una vez y debemos calcular dos integrales definidas

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx \right| + \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x^2 \cos x dx \right| = \\ &= x^2 \cdot \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + x^2 \cdot \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \end{aligned}$$

sustituyendo obtenemos

$$\text{Área} = \frac{\pi^2}{2} + 2\pi - 4$$

Problema A.3:

Los puntos $A = (3, 0, 0)$, $B = (0, 3, 0)$ y $C = (0, 0, 3)$ son tres de los vértices de un tetraedro. El cuarto vértice D está contenido en la recta r que pasa por el punto $P = (1, 1, 1)$ y es perpendicular al plano π que contiene a los puntos A , B y C .

- Calcule la ecuación del plano π que contiene a los puntos A , B y C .
- Calcule la ecuación de la recta r que pasa por el punto $P = (1, 1, 1)$ y es perpendicular al plano π .
- Calcule las coordenadas del vértice D sabiendo que el volumen del tetraedro es 18.

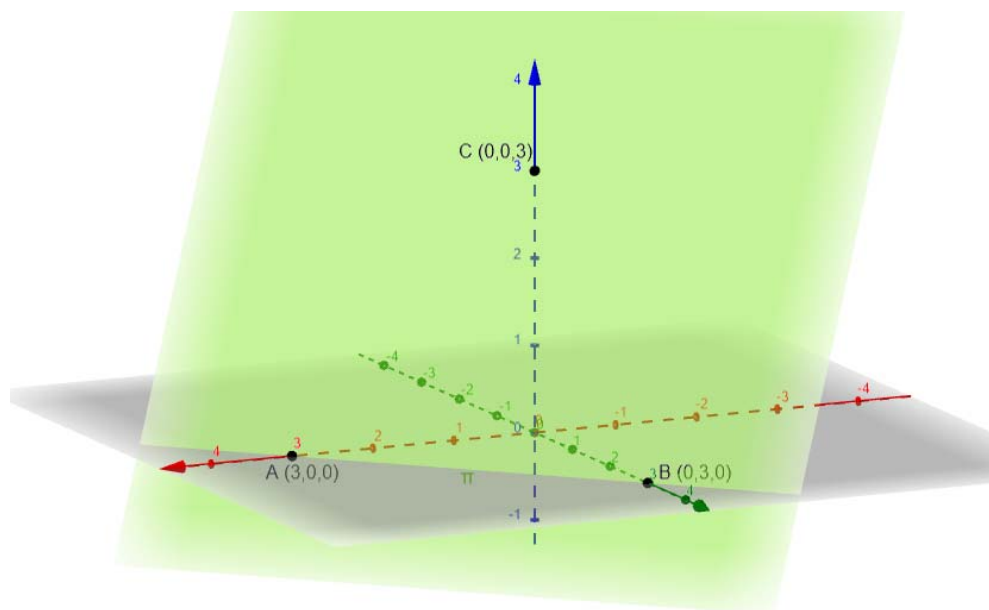
Solución:

- a) El plano π viene determinado, por ejemplo, por los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y el punto A .

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (0, 3, 0) - (3, 0, 0) = (-3, 3, 0); \quad \overrightarrow{AC} = C - A = (0, 0, 3) - (3, 0, 0) = (-3, 0, 3)$$

Luego la ecuación de π es:
$$\begin{vmatrix} x-3 & y & z \\ -3 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 9x - 27 + 9z + 9y = 0 \Rightarrow$$

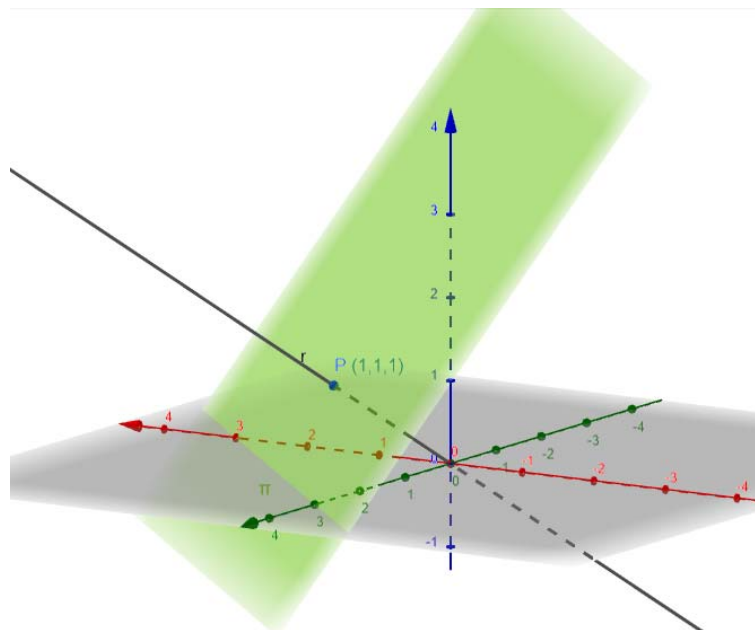
$$\pi: x + y + z - 3 = 0$$



- b) Si la recta r es perpendicular al plano π , su vector director será el vector normal del plano.

Es decir, $r: \begin{cases} \text{punto } P = (1, 1, 1) \\ \text{vector director } \vec{v} = (1, 1, 1) \end{cases}$

$$r: \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 1 + \alpha \\ z = 1 + \alpha \end{cases}$$

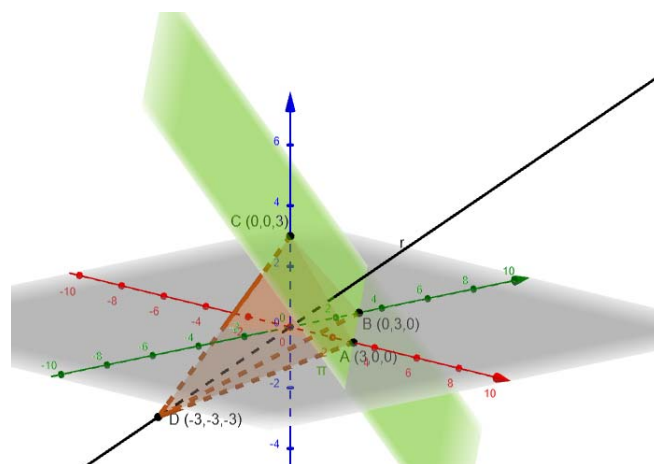
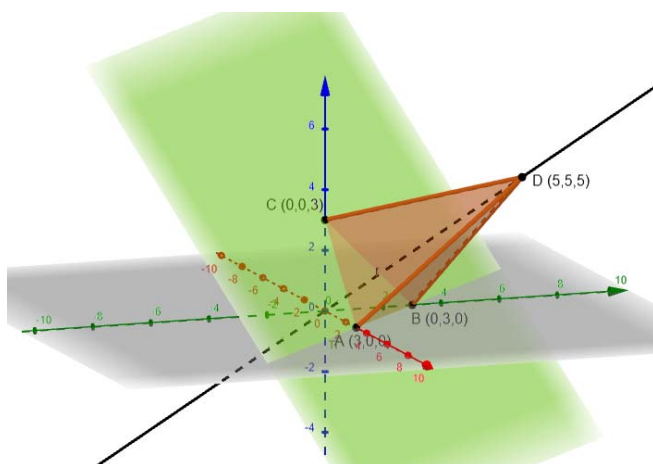


- c) El volumen de un tetraedro determinado por los puntos A , B , C y D , donde las coordenadas del punto D son $(1 + \alpha, 1 + \alpha, 1 + \alpha)$ puesto que pertenece a la recta r , siendo $\overrightarrow{AD} = D - A = (1 + \alpha, 1 + \alpha, 1 + \alpha) - (3, 0, 0) = (-2 + \alpha, 1 + \alpha, 1 + \alpha)$ viene dado por la expresión:

$$V = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -3 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \\ -2 + \alpha & 1 + \alpha & 1 + \alpha \end{vmatrix} = \frac{1}{6} |27\alpha| = \left| \frac{9\alpha}{2} \right| = 18 u^3$$

$$\frac{9\alpha}{2} = 18 \text{ o } \frac{9\alpha}{2} = -18, \text{ de donde}$$

$$\begin{cases} \alpha = 4, & D = (5, 5, 5) \\ \alpha = -4, & D = (-3, -3, -3) \end{cases}$$



$$\begin{cases} D = (5, 5, 5) \\ D = (-3, -3, -3) \end{cases}$$

Problema A.4:

(En este ejercicio trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal)

El tiempo de duración de las bombillas de una cierta marca, medido en horas, sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ . Se sabe que el 69.50% de las bombillas duran menos de 5061.5 horas, y que el 16.60% de las bombillas duran más de 5116.4 horas.

- ¿Cuál es la probabilidad de que una bombilla de esta marca dure entre 5061.2 y 5116.4 horas?
- Calcule la media y la desviación típica de esta distribución normal.

Solución:

- Nos piden calcular $P(5061.2 < X < 5116.4)$

Sabemos que $P(X < 5061.2) = 0.6950$ y que $P(X > 5116.4) = 0.1660$, de donde, $P(X < 5116.4) = 0.8340$

Luego $P(5061.2 < X < 5116.4) = P(X < 5116.4) - P(X < 5061.2) = 0.8340 - 0.6950 = \mathbf{0.1390}$

La probabilidad de que una bombilla de esta marca dure entre 5061.2 y 5116.4 horas es de **0.1390**.

- Sea $X =$ tiempo de duración de una bombilla, $X = N(\mu, \sigma)$.

Como $P(X < 5061.2) = 0.6950$, $P(Z < \frac{5061.2 - \mu}{\sigma}) = 0.6950$,

buscamos en el interior de la $N(0, 1)$, 0.6950, obtenemos 0.51, luego

$$\frac{5061.2 - \mu}{\sigma} = \mathbf{0.51},$$

de la misma manera,

$P(X < 5116.4) = 0.8340$, $P(Z < \frac{5116.4 - \mu}{\sigma}) = 0.8340$, obtenemos,

$$\frac{5116.4 - \mu}{\sigma} = 0.97$$

Consideramos el sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} \frac{5061.2 - \mu}{\sigma} &= 0.51 \\ \frac{5116.4 - \mu}{\sigma} &= 0.97 \end{aligned} \right\}$$

resolviendo, obtenemos:

$$\mu = \mathbf{5000 \text{ horas}}, \sigma = \mathbf{120 \text{ horas}}$$

OPCIÓN B

CONVOCATORIA
ORDINARIA DE
JUNIO

Problema B.1:

Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- Calcule las potencias sucesivas A^2 , A^3 y A^4 .
- Calcule la expresión general de A^n para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}$.
- Determine si existe la inversa de A . En caso afirmativo, calcúlela.

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad A^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ A^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ A^4 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{b)} \quad A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- La matriz inversa existe si el valor de su determinante es distinto de 0

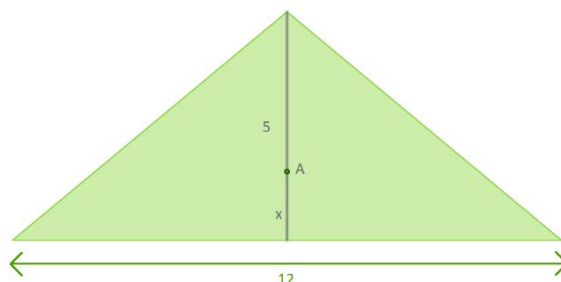
$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \text{ por tanto existe la inversa de } A.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}A^t; \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{Adj}A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ por tanto:}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema B.2:

Considere un triángulo isósceles cuya base de 12 cm es el lado desigual y cuya altura es de 5 cm. Se quiere determinar un punto A situado sobre la altura a una distancia x de la base de manera que la suma de las distancias del punto A a los tres vértices del triángulo sea mínima. Observe la figura:

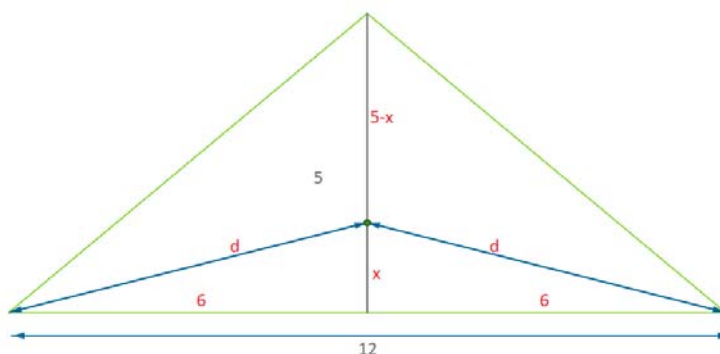


- Demuestre que la suma de las distancias del punto A a los tres vértices del triángulo viene dada por la expresión $f(x) = 5 - x + 2\sqrt{x^2 + 36}$.
- Calcule el valor de x para que la suma de las distancias sea mínima.
- Calcule dicha cantidad mínima.

Solución:

- Como la distancia del punto A al lado desigual es x , y la altura es 5, la distancia del punto A al vértice opuesto al lado desigual es $5 - x$.

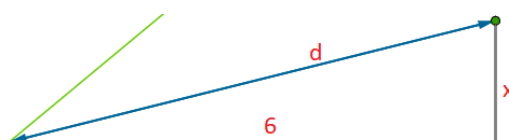
Sea d la distancia del punto A a los otros vértices, nos queda el triángulo:



La suma de las distancias será $f(x) = 5 - x + d + d = 5 - x + 2d$

Hallamos la expresión de d en función de x .

Consideramos el triángulo rectángulo:



donde $x^2 + 6^2 = d^2$, de donde, $d = \sqrt{x^2 + 36}$, sustituyendo, tenemos:

$$f(x) = 5 - x + 2\sqrt{x^2 + 36}$$

b) Para calcular los mínimos de $f(x)$ debemos derivar, igualar a 0 y resolver,

$$f(x) = 5 - x + 2\sqrt{x^2 + 36}.$$

$$f'(x) = -1 + 2 \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+36}},$$

$$\text{de donde: } -1 + \frac{2x}{\sqrt{x^2+36}} = 0$$

Pasando 1 al otro miembro y elevando al cuadrado: $\left(\frac{2x}{\sqrt{x^2+36}}\right)^2 = 1^2$

$$\frac{4x^2}{x^2+36} = 1,$$

$$4x^2 = x^2 + 36,$$

$$\text{resolviendo, } x = \sqrt{12} \text{ y } x = -\sqrt{12},$$

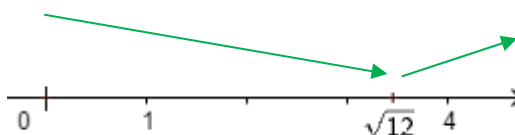
descartamos $x = -\sqrt{12}$, pues x es una distancia, igualmente los valores de x comienzan en 0.

Nos queda $x = \sqrt{12}$, consideramos los intervalos $(0, \sqrt{12})$ y $(\sqrt{12}, +\infty)$

Tomamos valores dentro de estos intervalos y sustituimos en $f'(x) = -1 + \frac{2x}{\sqrt{x^2+36}}$

$$f'(1) = -1 + \frac{2 \cdot 1}{\sqrt{1^2+36}} < 0 \text{ luego } f \text{ es decreciente en el intervalo } (0, \sqrt{12})$$

$$f'(4) = -1 + \frac{2 \cdot 4}{\sqrt{4^2+36}} > 0 \text{ luego } f \text{ es creciente en el intervalo } (\sqrt{12}, \infty)$$



Por tanto, en $x = \sqrt{12}$ f presenta un **mínimo**.

c) Para $x = \sqrt{12}$, $f(\sqrt{12}) = 5 - \sqrt{12} + 2\sqrt{\sqrt{12}^2 + 36} = 5 + 6\sqrt{3}$.

La suma de distancias mínima es de $5 + 6\sqrt{3}$

Problema B.3:

Considere las siguientes rectas: $r: \frac{x-5}{1} = \frac{y-6}{1} = \frac{z+1}{1}$ $s: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$

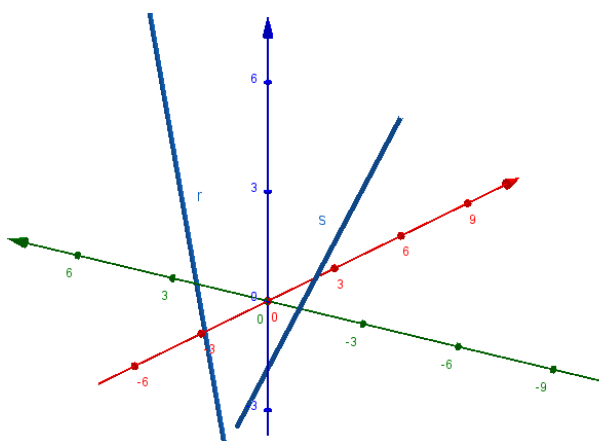
- Estudie la posición relativa de ambas rectas
- En caso de que las rectas se corten, calcule el plano que las contiene y el ángulo que forman ambas rectas. En caso de que las rectas se crucen, calcule la perpendicular común a ambas rectas.

Solución:

- Consideramos un punto de r , $A = (5, 6, -1)$ y otro punto de s , $B = (1, 0, -1)$, calculamos el vector $\overrightarrow{AB} = (-4, -6, 0)$ y junto a los vectores directores de las rectas, $\vec{u} = (1, 1, 1)$ de r y $\vec{v} = (1, 1, -1)$ de s , calculamos el valor del determinante formado por los tres vectores,

$$\begin{vmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0, \text{ por tanto:}$$

las rectas se cruzan.



- Se supone que nos piden la recta perpendicular común a las dos rectas dadas y que pase por las dos.

Hallamos el producto vectorial de los dos vectores directores de las rectas, que nos da un vector perpendicular a ambos

$$\vec{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2i + 2j = (-2, 2, 0)$$

Calculamos la ecuación del plano π determinado por la recta r y el vector $\vec{w}$, obtenemos un plano que es perpendicular a la recta s ; análogamente calculamos la ecuación del plano π' determinado por la recta s y el vector $\vec{w}$, plano que será perpendicular a la recta r . La recta pedida vendrá dada por la intersección de los dos planos, es decir, las dos ecuaciones de los planos son las ecuaciones implícitas de la recta.

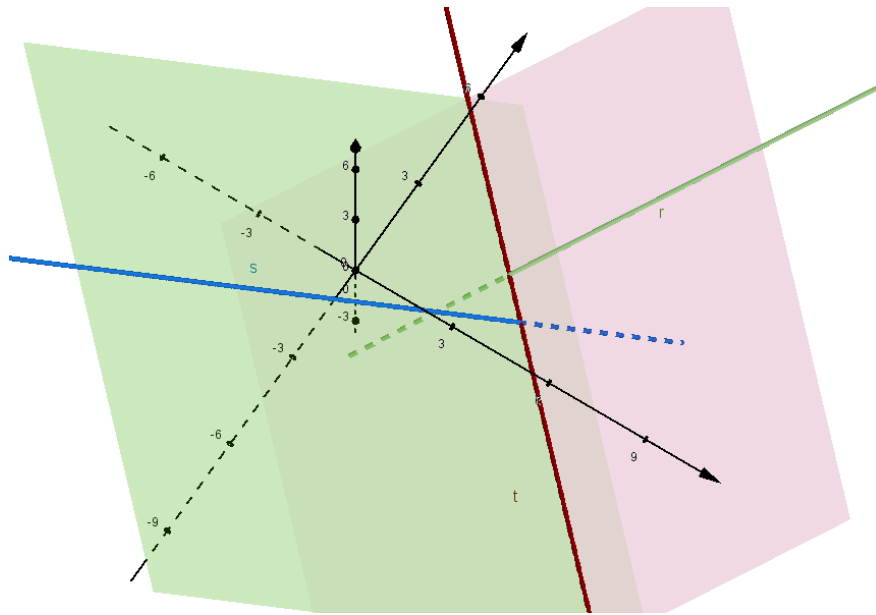
$$\begin{aligned} \text{Plano } \pi: \begin{vmatrix} x-5 & y-6 & z+1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} &= -2y + 12 + 2z + 2 + 2z + 2 - 2x + 10 = \\ &= -2x - 2y + 4z + 26 = 0, \quad \text{simplificando,} \quad x + y - 2z - 13 = 0. \end{aligned}$$

Plano π' : $\begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2y + 2z + 2 + 2z + 2 + 2x - 2 = 2x + 2y + 4z + 2 = 0$,
 simplificando,

$$x + y + 2z + 1 = 0$$

De donde:

$$t \equiv \begin{cases} x + y - 2z - 13 = 0 \\ x + y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$



Problema B.4:

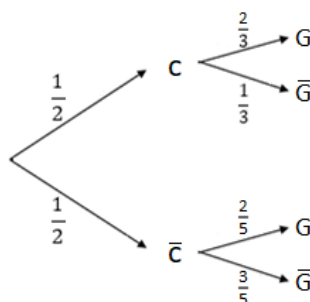
(En este ejercicio trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal)

La probabilidad de que un determinado equipo de fútbol gane cuando juega en casa es $\frac{2}{3}$, y la probabilidad de que gane cuando juega fuera es $\frac{2}{5}$.

- Sin saber dónde jugará el próximo partido, calcule la probabilidad de que gane.
- Si ganó el último partido del campeonato, ¿cuál es la probabilidad de que jugara en casa?

Solución:

Realizamos el diagrama de árbol:



- a) Por el teorema de la probabilidad total:

$$P(G) = P(C) \cdot P(G/C) + P(\bar{C}) \cdot P(G/\bar{C}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{15} \text{ luego:}$$

La probabilidad de que gane el próximo partido es: $\frac{8}{15} = 0.5333$

- b) Por el teorema de Bayes

$$P(C/G) = \frac{P(C \cap G)}{P(G)} = \frac{P(C) \cdot P(G/C)}{P(G)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{8}{15}} = \frac{5}{8}. \text{ Por tanto:}$$

La probabilidad de haber jugado en casa sabiendo que ha ganado el partido es: $\frac{5}{8} = 0.625$



PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA EL ALUMNADO DE
BACHILLERATO
206 MATEMÁTICAS II. SEPTIEMBRE 2019

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá responder a todas las cuestiones de una de las opciones A o B. No está permitido utilizar calculadoras programables ni que realicen cálculo simbólico, integrales o gráficas.

OPCIÓN A: No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas.

A.1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a :

$$\begin{cases} ax + y - 2z = 0 \\ x + y - az = -1 \\ x + y + z = a \end{cases}$$

- [1 p.]** Determine para qué valores de a el sistema tiene solución única. Si es posible, calcule dicha solución para $a = 2$.
- [1 p.]** Determine para qué valor de a el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.
- [0,5 p.]** Determine para qué valor de a el sistema no tiene solución.

A.2: a) **[1,5 p.]** Calcule los extremos relativos (máximos y mínimos) de $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{e^x}$, definida para todo valor de $x \in \mathbb{R}$. Determine también los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

b) **[1 p.]** Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$

A.3: Considere la recta $r: \frac{x+1}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{1}$ y el plano $\pi: x - 2y - z = -1$.

- [1 p.]** Estudie la posición relativa de la recta r y el plano π .
- [1,5 p.]** En caso de que la recta corte al plano, calcule el punto de corte y el ángulo que forman. En caso de que la recta no corte al plano, calcule la distancia entre ambos.

A.4: (En este ejercicio trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal).

La probabilidad de que una flecha dé en la diana es 0,40. Si se lanzan 9 flechas, determine:

- [1 p.]** Qué tipo de distribución sigue la variable aleatoria que cuenta el número de flechas que dan en la diana.
- [0,5 p.]**Cuál es la media y la desviación típica de esta distribución.
- [1 p.]**Cuál es la probabilidad de que al menos 5 flechas den en la diana.

OPCIÓN B

CONVOCATORIA
EXTRAORDINARIA

■ CUESTIÓN B.1:

Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

- Determine para qué valores de a la matriz A tiene inversa.
- Para $a = 1$, calcule la inversa de A .
- Para $a = 1$, resuelva la ecuación matricial $XA + 2I = 2A$, donde I es la matriz identidad 3×3 .

■ CUESTIÓN B.2:

a) Calcule la integral indefinida $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx$

b) Determine la primitiva de $\frac{\sqrt{x}}{1+x}$ que pasa por el punto $(1, 2)$.

c) Calcule el límite $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x}$

■ CUESTIÓN B.3:

Los puntos $A = (0, -1, 1)$ y $B = (1, 1, 1)$ son dos de los vértices de un triángulo. El tercer vértice C está contenido en la recta r que pasa por el punto B y es perpendicular al plano $\pi: 2x - y + z = 1$.

- Calcule la ecuación de la recta r que pasa por el punto B y es perpendicular al plano π .
- Calcule las coordenadas del vértice C sabiendo que el área del triángulo es $3\sqrt{30}$.

■ CUESTIÓN B.4:

(En este ejercicio trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal).

El 60 % de los coches de una marca se fabrican en su factoría de Valencia, el 25 % en Madrid, y el resto en Lisboa. El 1 % de los coches fabricados en Valencia tiene algún defecto de fabricación, mientras que para los coches fabricados en Madrid y en Lisboa estos porcentajes son del 0'5 % y del 2 %, respectivamente.

- Elegido al azar un coche de esa marca, calcule la probabilidad de que no sea defectuoso.
- Si un coche de esa marca resulta ser defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricado en Madrid?

OPCIÓN A

Problema A.1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a :

$$\begin{cases} ax + y - 2z = 0 \\ x + y - az = -1 \\ x + y + z = a \end{cases}$$

- Determine para qué valores a el sistema tiene solución única. Si es posible, calcule dicha solución para $a = 2$.
- Determine para qué valor de a el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.
- Determine para qué valor de a el sistema no tiene solución.

Solución:

- a) Escribimos la matriz ampliada:

$$\begin{pmatrix} a & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -a & -1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix},$$

por comodidad para los cálculos escribimos la tercera fila como primera fila

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ a & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -a & -1 \end{pmatrix},$$

operamos, $-aF_1 + F_2$ y $-F_1 + F_3$ obtenemos,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1-a & -2-a & -a^2 \\ 0 & 0 & -1-a & -1-a \end{pmatrix},$$

los elementos de la diagonal principal se hacen 0 para los valores de $a = 1$ y $a = -1$, por tanto:

Para $a \neq 1$ y $a \neq -1$, el rango de la matriz de coeficientes es 3, igual al rango de la ampliada y al número de incógnitas, luego el sistema es **Compatible Determinado**, es decir, tiene solución única.

Para $a = 2$, la matriz queda,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix},$$

resolviendo obtenemos la solución:

$$x = 1, y = 0, z = 1$$

El sistema tiene solución única si $a \neq 1$ y $a \neq -1$. Para $a = 2$, $x = 1$, $y = 0$, $z = 1$.

b) Estudiamos los casos restantes, $a = 1$ y $a = -1$.

Para $a = -1$, la matriz queda

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

el rango de la matriz de coeficientes es 2, igual al rango de la matriz ampliada y menor que el número de incógnitas, por tanto,

Para $a = -1$, el sistema es **Compatible Indeterminado**, es decir, tiene infinitas soluciones, para resolver el sistema, lo escribimos, $\begin{cases} x + y + z = -1 \\ 2y - z = -1 \end{cases}$, haciendo $z = \lambda$ y pasando al otro miembro,

$$\begin{cases} x + y = -1 - \lambda \\ 2y = -1 + \lambda \end{cases},$$

resolviendo, $z = \lambda$, $y = \frac{\lambda-1}{2}$, $x = \frac{-3\lambda-1}{2}$

Para $a = -1$, el sistema es **Compatible Indeterminado**, de solución: $x = \frac{-3\lambda-1}{2}$, $y = \frac{\lambda-1}{2}$, $z = \lambda$

c) Para $a = 1$, la matriz queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix},$$

calculamos el valor del determinante, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 6 - 2 = 4 \neq 0$ por tanto,

Para $a = 1$, el rango de la matriz de coeficientes es 2 y el rango de la matriz ampliada es 3, luego el sistema es Incompatible, es decir, **no tiene solución**.

El sistema no tiene solución para $a = 1$.

Problema A.2:

- a) Calcule los extremos relativos (máximos y mínimos) de $f(x) = \frac{x^2+2x}{e^x}$, definida para todo valor de x , $x \in \mathbb{R}$. Determine también los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.
- b) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1} \right)$

Solución:

- a) Calculamos los intervalos de crecimiento y decrecimiento y de ahí podemos obtener los extremos.

$$f'(x) = \frac{(2x+2)e^x - e^x \cdot (x^2+2x)}{(e^x)^2} = \frac{-x^2+2}{e^x}$$

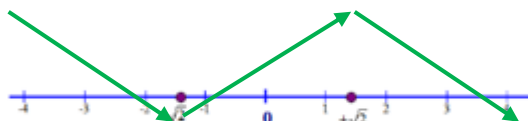
$$-x^2+2=0 \Rightarrow x=\sqrt{2}, x=-\sqrt{2},$$

tomamos valores de los intervalos formados y sustituimos en la función derivada,

$$f'(-10) = \frac{-(-10)^2+2}{e^{-10}} < 0 \Rightarrow \text{Decreciente}$$

$$f'(0) = \frac{-(0)^2+2}{e^0} > 0 \Rightarrow \text{Creciente}$$

$$f'(10) = \frac{-(10)^2+2}{e^{10}} < 0 \Rightarrow \text{Decreciente}$$



Es decir, f es:

Decreciente en $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$ y creciente en $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

Por tanto,

Hay un mínimo relativo en $x = -\sqrt{2}$ y un máximo relativo en $x = \sqrt{2}$.

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1} \right) = \left(\frac{1}{0} - \frac{1}{e^0-1} \right) = \infty - \infty$, indeterminación, operamos,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x-1-x}{x \cdot (e^x-1)} \right) = \frac{0}{0} \text{ indeterminación;}$$

por L'Hôpital, derivamos numerador y denominador,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x-1-x}{x \cdot (e^x-1)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x-1}{1 \cdot (e^x-1) + x \cdot e^x} \right) = \frac{0}{0}$$

indeterminación; por L'Hôpital, derivamos numerador y denominador,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x-1}{(e^x-1)+x \cdot e^x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x}{e^x+1+x \cdot e^x} \right) = \frac{e^0}{e^0+e^0+0 \cdot e^0} = \frac{1}{1+1+0} = \frac{1}{2} \text{ por tanto,}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1} \right) = \frac{1}{2}$$

Problema A.3:CONVOCATORIA
EXTRAORDINARIA

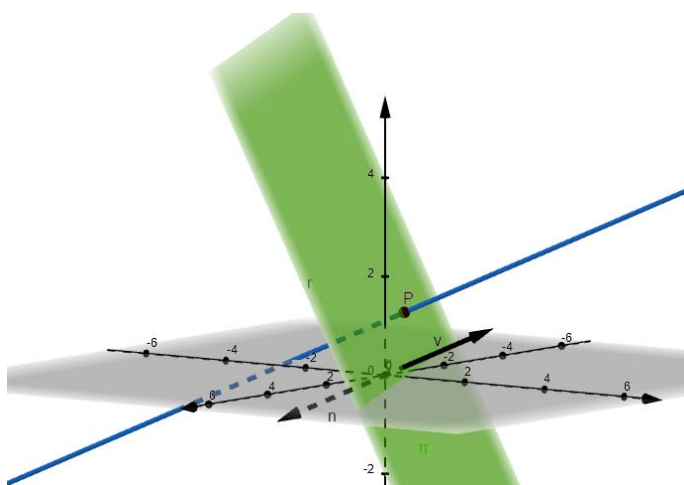
Considere la recta $r: \frac{x+1}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{1}$ y el plano $\pi: x - 2y - z = -1$

- Estudie la posición relativa de la recta r y el plano π .
- En caso de que la recta corte al plano, calcule el punto de corte y el ángulo que forman. En caso de que la recta no corte al plano, calcule la distancia entre ambos.

Solución:

- a) Consideramos el vector director de la recta, $\vec{v} = (-1, 2, 1)$

y el vector normal al plano, $\vec{n} = (1, -2, -1)$, vemos que son proporcionales, luego la recta y el plano son **perpendiculares** y por tanto la recta r y el plano π se cortan en un punto.



La recta r y el plano π se cortan en un punto.

- b) Escribimos las ecuaciones paramétricas de la recta y sustituimos en la ecuación del plano:

$$\begin{cases} x = -1 - t \\ y = -3 + 2t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow (-1 - t) - 2(-3 + 2t) - t = -1 \Rightarrow -6t = -6 \Rightarrow t = 1,$$

sustituyendo en las ecuaciones paramétricas de la recta, tenemos,

$$x = -2, y = -1, z = 1.$$

La recta y el plano se cortan en el punto $P(-2, -1, 1)$

Al ser perpendiculares,

El ángulo formado por la recta y el plano es de 90° .

Problema A.4:

(En este ejercicio trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal).

La probabilidad de que una flecha dé en la diana es 0.40. Si se lanzan 9 flechas, determine:

- Qué tipo de distribución sigue la variable aleatoria que cuenta el número de flechas que dan en la diana.
- Cuál es la media y la desviación típica de esta distribución.
- Cuál es la probabilidad de que al menos 5 flechas den en la diana.

Solución:

Llamamos $X \equiv$ Acertar la flecha en la diana, $P(X) = 0.40$.

- a) Si $p = P(X) = 0.40$, $q = 1 - p = 1 - 0.40 = 0.60$, $n = 9$.

Se trata de una variable aleatoria que sigue una distribución binomial,

$$X \equiv B(9, 0.40)$$

- b) Media = $\mu = n \cdot p = 9 \cdot 0.40 = 3.6$,

$$\text{Desviación típica} = \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{9 \cdot 0.40 \cdot 0.60} = \sqrt{2.16} = 1.4697.$$

$$\text{Media} = \mu = 3.6, \text{ Desviación típica} = \sigma = 1.4697.$$

- c) $P(X \geq 5) = P(X=5) + P(X=6) + P(X=7) + P(X=8) + P(X=9) =$

buscando cada valor en la tabla o aplicando la fórmula

$$P(x=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \text{ siendo } X \equiv B(n, p)$$

$$= 0.1672 + 0.0743 + 0.0212 + 0.0035 + 0.0003 = 0.2665.$$

$$P(X \geq 5) = 0.2665.$$

OPCIÓN B

CONVOCATORIA
EXTRAORDINARIA

Problema B.1:

Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

- Determine para qué valores de a la matriz A tiene inversa.
- Para $a = 1$, calcule la inversa de A .
- Para $a = 1$, resuelva la ecuación matricial $X \cdot A + 2 \cdot I = 2 \cdot A$, donde I es la matriz identidad 3×3 .

Solución:

- a) La matriz inversa existe si es una matriz cuadrada y el valor de su determinante es distinto de 0.

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + a^2 - a = a^2 - a - 1,$$

igualamos a 0 y resolvemos,

$a^2 - a - 1 = 0$, obtenemos, $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $a = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, por tanto,

si $a \neq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $a \neq \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, el valor del determinante de A es distinto de 0 y A tiene inversa.

- b) Para $a = 1$, la matriz queda $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y su determinante vale: $1^2 - 1 - 1 = -1$ distinto de 0.

$$A^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ de donde,}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}(A^t) = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- c) $X \cdot A + 2 \cdot I = 2 \cdot A \Rightarrow X \cdot A = 2 \cdot A - 2 \cdot I \Rightarrow X = (2 \cdot A - 2 \cdot I) \cdot A^{-1} \Rightarrow X = 2 \cdot A \cdot A^{-1} - 2 \cdot I \cdot A^{-1} \Rightarrow$

$X = 2 \cdot I - 2 \cdot A^{-1}$, de donde,

$$X = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema B.2:

- a) Calcule la integral indefinida $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx$
- b) Determine la primitiva de $\frac{\sqrt{x}}{1+x}$ que pasa por el punto (1, 2)
- c) Calcule el límite $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x}$

Solución:

a) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx,$

por cambio de variable, hacemos $x = t^2$ derivando, $dx = 2t dt$, sustituimos,

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx = \int \frac{\sqrt{t^2}}{1+t^2} 2t dt = \int \frac{t}{1+t^2} 2t dt = 2 \int \frac{t^2}{1+t^2} dt$$

haciendo la división, $\frac{t^2}{1+t^2} = 1 + \frac{-1}{1+t^2}$, sustituyendo,

$$2 \int \frac{t^2}{1+t^2} dt = 2 \int \left(1 + \frac{-1}{1+t^2}\right) dt = 2 \int dt - 2 \int \frac{1}{1+t^2} dt = 2t - 2 \arctg t + C$$

Deshaciendo el cambio, $\Rightarrow t = \sqrt{x}$, de donde,

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx = 2\sqrt{x} - 2\arctg \sqrt{x} + C$$

- b) Buscamos C de manera que $F(1) = 2$, siendo $F(x) = 2\sqrt{x} - 2\arctg \sqrt{x} + C$.

$$F(1) = 2\sqrt{1} - 2\arctg \sqrt{1} + C = 2 - 2\arctg 1 + C = 2 \Rightarrow 2 - 2 \cdot \frac{\pi}{4} + C = 2, C = \frac{\pi}{2},$$

$$\text{La primitiva es } F(x) = 2\sqrt{x} - 2\arctg \sqrt{x} + \frac{\pi}{2}.$$

- c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x} = 0$, pues el exponente de la x del numerador es menor que el del denominador,

También lo podemos resolver de la siguiente forma, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x} = \frac{\infty}{\infty}$, indeterminación, por L'Hôpital, derivamos el numerador y el denominador $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1} = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x} = 0$$

Problema B.3:

Los puntos $A = (0, -1, 1)$ y $B = (1, 1, 1)$ son dos de los vértices de un triángulo. El tercer vértice C está contenido en la recta r que pasa por el punto B y es perpendicular al plano $\pi: 2x - y + z = 1$.

- Calcule la ecuación de la recta r que pasa por el punto B y es perpendicular al plano π .
- Calcule las coordenadas del vértice C sabiendo que el área del triángulo es $3\sqrt{30}$.

Solución:

- a) Como la recta pedida es perpendicular al plano tomamos como vector director de la misma el vector normal del plano: $\vec{n} = (2, -1, 1)$, con el punto $B = (1, 1, 1)$, podemos escribir las

ecuaciones paramétricas de la recta r : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$ y la ecuación continua $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}$.

Ecuaciones de la recta r : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$ y $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}$.

- b) El área de un triángulo de vértices A , B y C es: $\frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|$

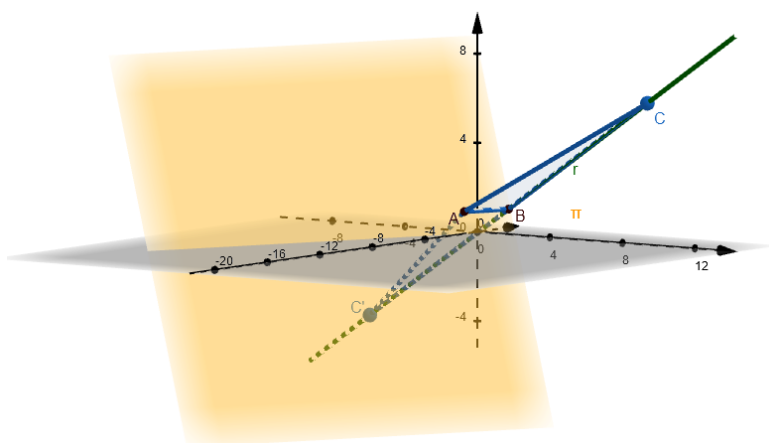
$\overrightarrow{AB} = (1, 2, 0)$, como $C = (1 + 2t, 1 - t, 1 + t)$, $\overrightarrow{AC} = (1 + 2t, 2 - t, t)$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 + 2t & 2 - t & t \end{vmatrix} = 2ti - tj - 5tk \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (2t, -t, -5t)$$

$$\frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2} \sqrt{(2t)^2 + (-t)^2 + (-5t)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{30t^2} = \frac{1}{2} \sqrt{30} \cdot |t|,$$

como el área es $3\sqrt{30}$, igualamos, $\frac{1}{2} \sqrt{30} \cdot |t| = 3\sqrt{30}$, de donde, $t = 6$ o $t = -6$ por tanto

$$C = (13, -5, 7) \text{ o } C = (-11, 7, -5)$$



Problema B.4:

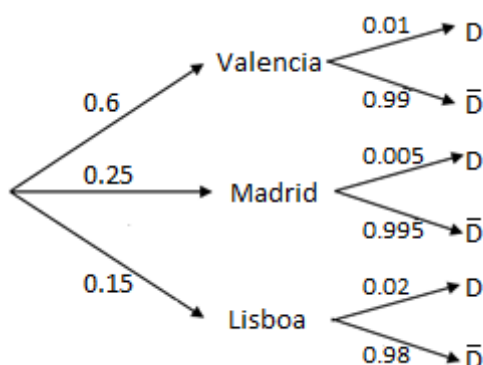
(En este ejercicio trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal)

El 60% de los coches de una marca se fabrican en su factoría de Valencia, el 25% en Madrid y el resto en Lisboa. El 1% de los coches fabricados en Valencia tiene algún defecto de fabricación, mientras que para los coches fabricados en Madrid y en Lisboa estos porcentajes son del 0.5% y del 2% respectivamente.

- Elegido al azar un coche de esa marca, calcule la probabilidad de que no sea defectuoso.
- Si un coche de esa marca resulta ser defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricado en Madrid?

Solución:

Realizamos el diagrama de árbol:



- Por el teorema de la probabilidad total:

$$P(\bar{D}) = P(V \cap \bar{D}) + P(M \cap \bar{D}) + P(L \cap \bar{D}) =$$

$$P(V) \cdot P(\bar{D}/V) + P(M) \cdot P(\bar{D}/M) + P(L) \cdot P(\bar{D}/L) =$$

$$0.6 \cdot 0.99 + 0.25 \cdot 0.995 + 0.15 \cdot 0.98 = 0.9897, \text{ es decir,}$$

$$P(\bar{D}) = 0.9897$$

- Por el teorema de Bayes:

$$P(M/D) = \frac{P(M \cap D)}{P(D)} = \frac{P(M) \cdot P(D/M)}{P(D)},$$

$$\text{como } P(D) = 1 - P(\bar{D}) = 1 - 0.9897 = 0.0103,$$

$$\frac{P(M) \cdot P(D/M)}{P(D)} = \frac{0.25 \cdot 0.005}{0.0103} = 0.1220, \text{ es decir,}$$

$$P(M/D) = 0.1220.$$