MATEMÁTICAS II

Selectividad 2019

Comunidad autónoma de

La Rioja

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Cristina Vidal Brazales

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU)

Curso 2018/2019

Convocatoria: Junio

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. **Es necesario justificar las respuestas.**

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. **Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.**

Tiempo: Una hora y media.

PROPUESTA A:

1.–(2 puntos) Dados la recta r y el plano π de ecuaciones:

$$r:\begin{cases} 2x+2y+2z=2, \\ -x-2y+z=0. \end{cases} \qquad \pi \equiv ax+y+z-b=0.$$

(I) Determina a y b para que el plano π contenga a la recta r.

(II) Determina a y b para que r sea paralela al plano π.

2.– (2 puntos) La distribución del número de rapes capturados por los barcos pesqueros que salen a faenar en una cierta zona se ajusta a una normal de media 220. Se sabe que, tomando un barco al azar la probabilidad de que capture más de 250 es 0,1587.

(I) Calcula la desviación típica de la distribución.

(II) Calcula el número de rapes que un barco debe capturar para estar en el percentil 95.

(Véase la tabla simplificada de la **normal tipificada** que aparece al final del examen)

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

3.– (3 puntos) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida como:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq 0 \\ -x^2 + ax + b, & x > 0 \end{cases}$$

con a y b números reales.

(I) Halla a y b para que f sea contínua y derivable en $x = 0$.

(II) Para los valores anteriores de a y b analiza si f tiene un extremo relativo en $x = 0$.

(III) Halla el área encerrada por la función y el eje OX en el intervalo $[-\frac{\pi}{2}, 1]$.

4.– (3 puntos) Sea a un parámetro real cualquiera. Considere la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(I) Determina para qué valores del parámetro a existe la inversa de la matriz A.

Sea el sistema de ecuaciones

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(I) Discute el sistema de ecuaciones para los distintos valores del parámetro a.

(II) Resuelve el sistema de ecuaciones cuando sea compatible.

Tabla simplificada de la distribución normal tipificada

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU)

Curso 2018/2019

Convocatoria: Junio

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. **Es necesario justificar las respuestas.**

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programa[bles] ni gráficas ni calculen integrales. **Si algún alumno es sorprendido con calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo c[aso] se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.**

Tiempo: Una hora y media.

PROPUESTA B:

1.– (2 puntos) Sean el plano $\pi \equiv 2x + y - z - 3 = 0$ y la recta $r : \begin{cases} x = 3 - \lambda, \\ y = 2 + \lambda, \\ z = 1 - 3\lambda. \end{cases}$

(I) Determina la ecuación de la recta s que contiene al punto $P = (1, 2, -1)$, es perpendicular a la recta r y paralela al plano π.

(II) Halla la distancia de la recta s al plano π.

2.– (2 puntos) Se tienen tres urnas: A, B y C. La urna A contiene dos bolas blancas y tres negras, la B tres bolas blancas y dos negras, la C cuatro bolas blancas y una negra. Se lanza un dado y se toman dos bolas de una urna: de la urna A si sale un 1, 2 ó 3, de la urna B si sale un 4 ó 5 y de la urna C si sale un 6.

(I) Calcula la probabilidad de obtener dos bolas blancas.

(II) Suponiendo que las dos bolas extraídas son blancas, calcula la probabilidad de que se hayan extraído de la primera urna.

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

3.– (3 puntos) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida como:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq 0 \\ -x^2 + ax + b, & x > 0 \end{cases}$$

con a y b números reales.

(I) Halla a y b para que f sea contínua y derivable en $x = 0$.

(II) Para los valores anteriores de a y b analiza si f tiene un extremo relativo en $x = 0$.

(III) Halla el área encerrada por la función y el eje OX en el intervalo $[-\frac{\pi}{2}, 1]$.

4.– (3 puntos) Sea a un parámetro real cualquiera. Considere la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(I) Determina para qué valores del parámetro a existe la invesa de la matriz A.

Sea el sistema de ecuaciones

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(I) Discute el sistema de ecuaciones para los distintos valores del parámetro a.

(II) Resuelve el sistema de ecuaciones cuando sea compatible.

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU)

Curso 2018/2019

Convocatoria: Junio

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

CRITERIOS GENERALES DE CORRECCIÓN

(1) Se sugiere un tipo de corrección positivo, es decir, partiendo de cero y sumando puntos por los aciertos que el alumno vaya obteniendo.

(2) Como excepción al apartado anterior, los errores muy graves, del tipo

$$\sqrt{a^2+b^2}=a+b\,,\qquad \frac{\ln x}{x}=\ln\,,\qquad \int\frac{x}{x^2+3}=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{x}{3}\right),$$

se penalizarán especialmente, y pueden suponer un 0 en el apartado en el que se hayan cometido.

(3) Se deberá valorar la exposición lógica y la coherencia de las respuestas, tanto en cuestiones teóricas como prácticas. Algunos ejemplos:

(a) Si al resolver un sistema de ecuaciones, el alumno comete un error **numérico**, y el desarrollo posterior es coherente con dicho error, no se prestará especial atención siempre y cuando el problema no haya quedado reducido a uno trivial.

(b) En la representación gráfica de funciones, se valorará la coherencia del dibujo con los datos obtenidos previamente por el alumno. (Vale aquí la misma excepción que en el párrafo anterior.)

(4) La puntuación máxima que se puede obtener en cada ejercicio viene señalada en la copia del examen que se entrega al alumno. Si alguno de los apartados tiene a su vez subapartados, se deberá distribuir razonablemente el número de puntos entre los mismos (no necesariamente debe darse el mismo peso a cada subapartado).

(5) Si un alumno da una respuesta acertada a un problema escribiendo sólo los resultados, sin el desarrollo lógico de cómo los ha obtenido, la puntuación en este apartado no podrá ser superior al 40 % de la nota máxima prevista.

(6) La calificación será la suma de las puntuaciones obtenidas en cada ejercicio de una sola propuesta.

SOLUCIONES PROPUESTA A

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Problema A.1:

1.–(2 puntos) Dados la recta r y el plano π de ecuaciones:

$$r:\begin{cases} 2x+2y+2z=2, \\ -x-2y+z=0. \end{cases} \qquad \pi \equiv ax+y+z-b=0.$$

(I) Determina a y b para que el plano π contenga a la recta r.

(II) Determina a y b para que r sea paralela al plano π.

Solución:

i. Para que el plano contenga a la recta debe verificarse que, el vector ortogonal al plano sea perpendicular al vector de dirección de la recta, y que un punto de la recta esté contenido en el plano.

El vector ortogonal al plano es: $(a, 1, 1)$.

Para hallar el vector de dirección de la recta, como esta está dada como intersección de dos planos, se puede hallar el producto vectorial de los vectores ortogonales a dichos planos. Pero también podemos encontrar la ecuación paramétrica de la recta.

$$\begin{cases} 2x+2y+2z=2 \\ -x-2y+z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ -x-2y+z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ -y+2z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+2z+z=1 \\ y=2z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=1-3z \\ y=2z \\ z=z \end{cases}$$

Hemos dividido por 2 la primera ecuación. Sumado ambas ecuaciones. Despejado la y en la segunda ecuación. Sustituido en la primera y despejado la x.

La recta pasa por el punto (1, 0, 0) y tiene como vector de dirección (-3, 2, 1).

Imponemos que el vector de dirección de la recta sea ortogonal al vector perpendicular al plano:

$(a, 1, 1)\cdot(-3, 2, 1) = -3a + 2 + 1 = 0$ de donde $a = 1$.

Imponemos que el punto de la recta verifique la ecuación del plano:

$ax + y + z = b$, luego $a = b$, por lo que $b = 1$.

Para que la recta esté contenida en el plano: $a = 1$, $b = 1$.

ii. Para que la recta sea paralela al plano, pero NO esté contenida en él, ya abemos que a debe valer 1, pero el punto no debe verificar la ecuación del plano. Por tanto, debe ser $b \neq 1$.

Para que la recta sea paralela al plano: $a = 1$, $b \neq 1$

Problema A.2:

2.– (2 puntos) La distribución del número de rapes capturados por los barcos pesqueros que salen a faenar en una cierta zona se ajusta a una normal de media 220. Se sabe que, tomando un barco al azar la probabilidad de que capture más de 250 es 0,1587.

(I) Calcula la desviación típica de la distribución.

(II) Calcula el número de rapes que un barco debe capturar para estar en el percentil 95.

(Véase la tabla simplificada de la normal tipificada que aparece al final del examen)

Solución:

i. En el enunciado nos dicen que la distribución del número de rapes capturados se ajusta a una distribución normal de media 220. Y que

$$P(X > 250) = 0.1587.$$

Sabemos que:

$$P(X > 250) = 1 - P(X < 250) = 0.1587 \to P(X < 250) = 1 - 0.1587 = 0.8413$$

Tipificamos:

$$P\left(Z < \frac{250 - 220}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{300}{\sigma}\right) = 0.8413$$

Miramos en la tabla:

$$\frac{300}{\sigma} = 1 \to \sigma = 30$$

La desviación típica vale $\boldsymbol{\sigma = 30}$

ii. Para que el número de rapes esté en el percentil 95 se debe verificar que:

$$P(X < r) = 0.95$$

Tipificamos:

$$P\left(Z < \frac{r - 220}{30}\right) = 0.95$$

Buscamos en la tabla: $P(Z < 1.64) = 0.9495$ y $P(Z < 1.65) = 0.9505$.

Por tanto, podemos tomar $\frac{r-220}{30} = 1.645 \to r = 220 + 30(1.645) = 269.35$

Deben capturar al menos $\mathbf{270}$ rapes para estar en el percentil 95.

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
LibrosMareaVerde.tk

Problema A.3:

3.– (3 puntos) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida como:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq 0 \\ -x^2 + ax + b, & x > 0 \end{cases}$$

con a y b números reales.

(I) Halla a y b para que f sea contínua y derivable en $x = 0$.

(II) Para los valores anteriores de a y b analiza si f tiene un extremo relativo en $x = 0$.

(III) Halla el área encerrada por la función y el eje OX en el intervalo $[-\frac{\pi}{2}, 1]$.

Solución:

i. Nos dan una función definida a trozos, formada por la función coseno, que es continua y derivable en toda la recta real, y una función polinómica, también continua y derivable en toda la recta real. Por lo que el único punto dudoso es el de unión de ambos trozos.

Para $x = 0$, el coseno vale 1. Al acercarse a 0 la función polinómica vale b, luego para que la función sea continua debe valer $b = 1$.

Calculamos la derivada:

$$f'(x) = \begin{cases} -sen\, x & x < 0 \\ -2x + a & x > 0 \end{cases}$$

De nuevo el único caso dudoso es si $x = 0$. Imponemos que coincida la derivada a ambos lados del 0.

$$-sen\, 0 = 0 = -2(0) + a \to a = 0$$

La función es continua y derivable si $b = 1$, y $a = 0$.

ii. Para estudiar si hay un extremo relativo analizamos el crecimiento o decrecimiento de la función cerca de $x = 0$.

Si tomamos $x = -0.01$ la función vale $\cos x$, y su derivada $-sen\, x$, luego $f'(-0.01) = -\text{sen}\,(-0.01) > 0$. La función crece antes de 0.

Si tomamos $x = 0.01$ la función vale $-x^2 + 1$ y su derivada $-2x$, luego $f'(0.01) = -0.02 < 0$. La función decrece después de 0. Luego en (0, 1) la función alcanza un máximo relativo.

En $(0, 1)$ la función alcanza un máximo relativo.

iii. Para calcular el área analizamos la función, antes de 0 es la función coseno, y después la parábola:

$$Área = \left|\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} cosx dx\right| + \left|\int_0^1 (-x^2+1)dx\right| = |-senx|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + \left|\frac{-x^3}{3} + x\right|_0^1 =$$

$$|0 - (+1)| + \left|\frac{-1}{3} + 1 - (0)\right| = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

Área = $\frac{5}{3}$ u^2.

Problema A.4:

4.– (3 puntos) Sea a un parámetro real cualquiera. Considere la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(I) Determina para qué valores del parámetro a existe la inversa de la matriz A.

Sea el sistema de ecuaciones

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(I) Discute el sistema de ecuaciones para los distintos valores del parámetro a.

(II) Resuelve el sistema de ecuaciones cuando sea compatible.

Solución:

i. Para que la matriz tenga inversa debe ser su determinante distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = a + a + a - (a^3 + 1 + 1) = -a^3 + 3a - 2$$

Calculamos las raíces:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \mathrm{a} \\ 1 & \mathrm{a} & 1 \\ \mathrm{a} & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 = -(\mathrm{a}-1)^2(\mathrm{a}+2)$, por lo que:

La matriz tiene inversa si $\boldsymbol{a \neq 1}$ o $\boldsymbol{a \neq -2}$.

ii. Para a = 1, la matriz A queda $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, una matriz de rango 1, igual al rango de la matriz ampliada, luego el sistema es compatible indeterminado de solución:

$$\begin{cases} x = 1 - \alpha - \beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases}$$

Para a = –2, la matriz A queda $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, una matriz de rango 2, mientras que la matriz ampliada es de rango 3, por lo que el sistema es incompatible.

Si $a \neq 1$ o $a \neq -2$ el sistema es compatible determinado, si a = 1 el sistema es compatible indeterminado, y si a = –2, el sistema es incompatible.

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

iii. Para a = 1 ya lo hemos resuelto, $\begin{cases} x = 1 - \alpha - \beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases}$.

Para $a \neq 1$ o $a \neq -2$ lo resolvemos por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{(a+a+1)-(a^2+1+1)}{-(a-1)^2(a+2)} = \frac{-a^2+2a-1}{-(a-1)^2(a+2)} = \frac{-(a-1)^2}{-(a-1)^2(a+2)} = \frac{1}{a+2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{(1+a+a)-(a^2+1+1)}{-(a-1)^2(a+2)} = \frac{-a^2+2a-1}{-(a-1)^2(a+2)} = \frac{-(a-1)^2}{-(a-1)^2(a+2)} = \frac{1}{a+2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{(a+1+a)-(a^2+1+1)}{-(a-1)^2(a+2)} = \frac{-a^2+2a-1}{-(a-1)^2(a+2)} = \frac{-(a-1)^2}{-(a-1)^2(a+2)} = \frac{1}{a+2}$$

Para $a \neq 1$ o $a \neq -2$ la solución es: $\boldsymbol{x = \frac{1}{a+2}, y = \frac{1}{a+2}, z = \frac{1}{a+2}}$.

SOLUCIONES PROPUESTA B

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Problema B.1:

1.– (2 puntos) Sean el plano $\pi \equiv 2x + y - z - 3 = 0$ y la recta $r : \begin{cases} x = 3 - \lambda, \\ y = 2 + \lambda, \\ z = 1 - 3\lambda. \end{cases}$

(I) Determina la ecuación de la recta s que contiene al punto $P = (1, 2, -1)$, es perpendicular a la recta r y paralela al plano π.

(II) Halla la distancia de la recta s al plano π.

Solución:

i. Buscamos una recta s de la que conocemos un punto: P = (1, 2, –1). Sabemos que es perpendicular a la recta r, luego su vector de dirección debe ser ortogonal al vector: (–1, 1, –3). Ya paralela al plano π, luego su vector de dirección debe ser ortogonal al vector perpendicular al plano: (2, 1, –1).

Llamamos (a, b, c) al vector de dirección de s. Imponemos que sea perpendicular a r:

$$(a, b, c)\cdot(-1, 1, -3) = 0 = -a + b - 3c.$$

Imponemos que sea paralela al plano π:

$$(a, b, c)\cdot(2, 1, -1) = 0 = 2a + b - c.$$

Para resolver el sistema restamos a la segunda ecuación la primera: $3a + 2c = 0$, luego $a = -2c/3$. Despejamos b: $b = a + 3c = -2c/3 + 3c = 7c/3$. Como es un vector de dirección podemos multiplicar por 3. El vector es: (–2, 7, 3). Y ya conocemos un unto y el vector de dirección, luego la ecuación de la recta es:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = 1 - 2\alpha} \\ \boldsymbol{y = 2 + 7\alpha} \\ \boldsymbol{z = -1 + 3\alpha} \end{cases}$$

ii. Al ser la recta paralela al plano, todos los puntos de la recta distan lo mismo al plano, por lo que hallamos la distancia del punto P al plano π:

$$d(r, \pi) = d(P, \pi) = \frac{|2(1) + (2) - (-1) - 3|}{\sqrt{(2)^2 + (1)^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$\boldsymbol{d(r, \pi) = \frac{2}{\sqrt{6}} u}$$

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
LibrosMareaVerde.tk

Problema B.2:

2.– (2 puntos) Se tienen tres urnas: A, B y C. La urna A contiene dos bolas blancas y tres negras, la B tres bolas blancas y dos negras, la C cuatro bolas blancas y una negra. Se lanza un dado y se toman dos bolas de una urna: de la urna A si sale un 1, 2 ó 3, de la urna B si sale un 4 ó 5 y de la urna C si sale un 6.

(I) Calcula la probabilidad de obtener dos bolas blancas.

(II) Suponiendo que las dos bolas extraídas son blancas, calcula la probabilidad de que se hayan extraído de la primera urna.

Solución:

Llamamos A al suceso sacar una bola de la urna A, B a sacarla de B y C a sacarla de C. Llamamos N a sacar una bola negra, Bl a sacar una bola blanca y $2Bl$ a sacar dos bolas blancas.

Los datos que nos da el enunciado son: $P(A)$ = 3/6 = 1/2; $P(B)$ = 2/6 = 1/3; $P(C)$ = 1/6.

$P(Bl/A)$ = 2/5; $P(2Bl/A)$ = (2/5)(1(4) = 2/20 = 1/10; $P(Bl/B)$ = 3/5; $P(2Bl/B)$ = (3/5)(2/4) = 6/20 = 3/10; $P(Bl/C)$ = 4/5; $P(2Bl/C)$ = (4/5)(3/4) = 12/20 = 3/5.

i. Nos piden la probabilidad de sacar dos bolas blancas. Utilizamos el teorema de la probabilidad total:

$P(2Bl) = P(2Bl/A) \cdot P(A) + P(2Bl/B) \cdot P(B) + P(2Bl/C) \cdot P(C)$ = (1/10) · (1/2) + (3/10) · (1/3) + (3/5) · (1/6) = 1/20 + 1/10 + 1/10 = 5/20 = 1/4.

La probabilidad de sacar dos bolas blancas es $1/4 = 0.25$.

ii. Nos piden ahora $P(A/2Bl)$, es decir, la probabilidad condicionada a que habiendo salido dos bolas blancas sean de la urna A.

$$P(A/2Bl) = \frac{P(A \cap 2Bl)}{P(2Bl)} = \frac{P(A) \cdot P(2Bl/A)}{P(2Bl)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{5}.$$

La probabilidad de que, habiendo salido dos bolas blancas, haya sido de la urna A es de $1/5 = 0.20$.

Problema B.3:

3.– (3 puntos) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida como:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \le 0 \\ -x^2 + ax + b, & x > 0 \end{cases}$$

con a y b números reales.

(I) Halla a y b para que f sea continua y derivable en $x = 0$.

(II) Para los valores anteriores de a y b analiza si f tiene un extremo relativo en $x = 0$.

(III) Halla el área encerrada por la función y el eje OX en el intervalo $[-\frac{\pi}{2}, 1]$.

Solución:

i. Nos dan una función definida a trozos, formada por la función coseno, que es continua y derivable en toda la recta real, y una función polinómica, también continua y derivable en toda la recta real. Por lo que el único punto dudoso es el de unión de ambos trozos.

Para x = 0, el coseno vale 1. Al acercarse a 0 la función polinómica vale b, luego para que la función sea continua debe valer b = 1. Calculamos la derivada:

$$f'(x) = \begin{cases} -sen\ x & x < 0 \\ -2x + a & x > 0 \end{cases}$$

De nuevo el único caso dudoso es si x = 0. Imponemos que coincida la derivada a ambos lados del 0.

$$-sen\ 0 = 0 = -2(0) + a \to a = 0$$

La función es continua y derivable si b = 1, y a = 0.

ii. Para estudiar si hay un extremo relativo analizamos el crecimiento o decrecimiento de la función cerca de x = 0.

Si tomamos x = –0.01 la función vale *cos x*, y su derivada –*sen x*, luego *f'*(–0.01) = –sen (–0.01) > 0. La función crece antes de 0. Si tomamos x = 0.01 la función vale $-x^2$ +1 y su derivada –2x, luego *f'*(0.01) = –0.02 < 0. La función decrece después de 0. Luego en (0, 1) la función alcanza un máximo relativo.

En $(0, 1)$ la función alcanza un máximo relativo.

iii. Para calcular el área analizamos la función, antes de 0 es la función coseno, y después la parábola:

$$Área\ = \left|\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} cosxdx\right| + \left|\int_{0}^{1}(-x^2+1)dx\right| = |-senx|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + \left|\frac{-x^3}{3} + x\right|_0^1 =$$

$$|0-(+1)| + \left|\frac{-1}{3} + 1 - (0)\right| = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

Área = $\mathbf{\frac{5}{3}}$ u^2.

Problema B.4:

4.– (3 puntos) Sea a un parámetro real cualquiera. Considere la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(I) Determina para qué valores del parámetro a existe la invesa de la matriz A.

Sea el sistema de ecuaciones

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(I) Discute el sistema de ecuaciones para los distintos valores del parámetro a.

(II) Resuelve el sistema de ecuaciones cuando sea compatible.

Solución:

i. Para que la matriz tenga inversa debe ser su determinante distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = a + a + a - (a^3 + 1 + 1) = -a^3 + 3a - 2$$

Calculamos las raíces:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \mathrm{a} \\ 1 & \mathrm{a} & 1 \\ \mathrm{a} & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 = -(\mathrm{a} - 1)^2(\mathrm{a} + 2)\text{, por lo que:}$$

La matriz tiene inversa si $\boldsymbol{a \neq 1}$ **o** $\boldsymbol{a \neq -2}$.

ii. Para a = 1, la matriz A queda $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, una matriz de rango 1, igual al rango de la matriz ampliada, luego el sistema es compatible indeterminado de solución:

$$\begin{cases} x = 1 - \alpha - \beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases}$$

Para a = –2, la matriz A queda $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, una matriz de rango 2, mientras que la matriz ampliada es de rango 3, por lo que el sistema es incompatible.

Si $a \neq 1$ o $a \neq -2$ el sistema es compatible determinado, si a = 1 el sistema es compatible indeterminado, y si a = –2, el sistema es incompatible.

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
LibrosMareaVerde.tk

iii. Para a = 1 ya lo hemos resuelto, $\begin{cases} x = 1 - \alpha - \beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases}$.

Para $a \neq 1$ o $a \neq -2$ lo resolvemos por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{(a+a+1)-(a^2+1+1)}{-(a-1)^2(a+2)} = \frac{-a^2+2a-1}{-(a-1)^2(a+2)} = \frac{-(a-1)^2}{-(a-1)^2(a+2)} = \frac{1}{a+2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{(1+a+a)-(a^2+1+1)}{-(a-1)^2(a+2)} = \frac{-a^2+2a-1}{-(a-1)^2(a+2)} = \frac{-(a-1)^2}{-(a-1)^2(a+2)} = \frac{1}{a+2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{(a+1+a)-(a^2+1+1)}{-(a-1)^2(a+2)} = \frac{-a^2+2a-1}{-(a-1)^2(a+2)} = \frac{-(a-1)^2}{-(a-1)^2(a+2)} = \frac{1}{a+2}$$

Para $a \neq 1$ o $a \neq -2$ la solución es: $\boldsymbol{x = \frac{1}{a+2}, y = \frac{1}{a+2}, z = \frac{1}{a+2}}$.

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU)

Curso 2018/2019

Convocatoria: Julio

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. **Es necesario justificar las respuestas.**

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. **Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.**

Tiempo: Una hora y media.

PROPUESTA A:

1.–(2 puntos) Sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$, de modo que los vectores son unitarios y forman entre sí ángulos de 45°. Dados los vectores $u = e_1 + e_2$ y $v = e_1 - e_2 + e_3$

(I) Calcula el módulo de los vectores u y v.

(II) Calcula el coseno del ángulo formado por los vectores u y v.

2.– (2 puntos) El peso medio según la OMS de un niño de 5 años sigue una distribución normal de media 18,5 kg. y desviación típica 2,25 kg. Si se elige un niño al azar. Halla el porcentaje de niños

(I) cuyo peso es superior a 23 kg.

(II) cuyo peso está entre 15 y 23 kg.

(Véase la tabla simplificada de la **normal tipificada** que aparece al final del examen)

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

3.– (3 puntos) Sea la función

$$f(x) = \frac{|x|}{x^2 - 1}.$$

(I) Analiza la continuidad y derivabilidad de la función f.

(II) Razona si se puede aplicar, o no, el teorema de Rolle en el intervalo $[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}]$. En caso afirmativo, calcula el valor $c \in (\frac{-1}{2}, \frac{1}{2})$ a que se refiere el teorema de Rolle.

(III) Halla el área encerrada por f y el eje de abcisas en el intervalo $[\frac{3}{2}, 4]$.

4.– (3 puntos) Sea a un parámetro real cualquiera. Considera la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & -a & 2a-1 \end{pmatrix},$$

(I) Determina para qué valores del parámetro a existe la inversa de la matriz A.

(II) Halla la inversa de la matriz A, cuando exista.

(III) Para $a = 1$ y las matrices

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

resuelve el sistema

$$\begin{cases} BXA & = Y, \\ \frac{1}{3}Y + C & = D. \end{cases}$$

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU)

Curso 2018/2019

Convocatoria: Julio

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. **Es necesario justificar las respuestas.**

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. **Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.**

Tiempo: Una hora y media.

PROPUESTA B:

1.– (2 puntos) En un colegio se han ofertado para los niños de infantil tres actividades extraescolares Inglés (ING), Multideporte (MUL) y Robótica (ROB), con dos rangos de edad de 3 a 4 años (MP) y de 5 a 6 años(MG). Se sabe que se han apuntado a alguna actividad un total de 300 niños. De ellos, hay 100 que tienen entre 3 y 4 años, de los cuales 82 hacen Inglés y 10 han elegido Multideporte. Se sabe que al grupo de Robótica se han apuntado 83 niños, y hay 105 niños de entre 5 y 6 años que se han apuntado a Inglés.

(I) Toma un niño al azar, halla las siguientes probabilidades: $P(MG)$, $P(MUL)$, $P(MP \cap ROB)$, $P(ROB|MP)$ y $P(MG|ING)$.

(II) Comprueba que el suceso MUL es independiente de la edad del niño.

2.– (2 puntos) Dos vértices consecutivos de un rectángulo son $P = (2, 2, 1)$ y $Q = (0, 0, -1)$ y los otros dos pertenecen a una recta r que pasa por el punto $A = (5, 4, 3)$.

(I) Determina la ecuación de la recta r.

(II) Determina la ecuación del plano que contiene al rectángulo.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

3.– (3 puntos) Sea la función

$$f(x) = \frac{|x|}{x^2 - 1}.$$

(I) Analiza la continuidad y derivabilidad de la función f.

(II) Razona si se puede aplicar, o no, el teorema de Rolle en el intervalo $[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}]$. En caso afirmativo, calcula el valor $c \in (\frac{-1}{2}, \frac{1}{2})$ a que se refiere el teorema de Rolle.

(III) Halla el área encerrada por f y el eje de abcisas en el intervalo $[\frac{3}{2}, 4]$.

4.– (3 puntos) Sea a un parámetro real cualquiera. Considera la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & -a & 2a-1 \end{pmatrix},$$

(I) Determina para qué valores del parámetro a existe la inversa de la matriz A.

(II) Halla la inversa de la matriz A, cuando exista.

(III) Para $a = 1$ y las matrices

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

resuelve el sistema

$$\begin{cases} BXA & = Y, \\ \frac{1}{3}Y + C & = D. \end{cases}$$

SOLUCIONES PROPUESTA A

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema A.1:

1.–(2 puntos) Sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$, de modo que los vectores son unitarios y forman entre sí ángulos de 45°. Dados los vectores $u = e_1 + e_2$ y $v = e_1 - e_2 + e_3$

(I) Calcula el módulo de los vectores u y v.

(II) Calcula el coseno del ángulo formado por los vectores u y v.

Solución:

i. El enunciado nos da dos vectores en una base que es unitaria pero no ortogonal. Nos pide calcular el módulo de dichos vectores:

$$|\bar{u}| = \sqrt{|\bar{u}\cdot\bar{u}|} = \sqrt{(e_1+e_2)\cdot(e_1+e_2)} = \sqrt{e_1\cdot e_1 + e_1\cdot e_2 + e_2\cdot e_1 + e_2\cdot e_2} =$$
$$\sqrt{|e_1|\cdot|e_1|\cdot cos\,0 + |e_1|\cdot|e_2|\cdot cos\,45 + |e_2|\cdot|e_1|\cdot cos\,45 + |e_2|\cdot|e_2|\cdot cos\,0} =$$
$$\sqrt{1 + 1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\cdot 1} = \sqrt{2+\sqrt{2}}\,.$$

$$|\bar{v}| = \sqrt{|\bar{v}\cdot\bar{v}|} = \sqrt{(e_1 - e_2 + e_3)\cdot(e_1 - e_2 + e_3)} =$$
$$= \sqrt{e_1\cdot e_1 - e_1\cdot e_2 + e_1\cdot e_3 - e_2\cdot e_1 + e_2\cdot e_2 - e_2\cdot e_3 + e_3\cdot e_1 - e_3\cdot e_2 + e_3\cdot e_3} =$$
$$= \sqrt{1 - |e_1|\cdot|e_2|\cdot cos\,45 + |e_1|\cdot|e_3|\cdot cos\,45 - |e_2|\cdot|e_1|\cdot cos\,45 + 1 - |e_2|\cdot|e_3|\cdot cos\,45 + |e_3|\cdot|e_1|\cdot cos\,45 - |e_3|\cdot|e_2|\cdot cos\,45 + 1}$$
$$= \sqrt{3-\sqrt{2}}$$

Los módulos valen: $|\bar{\boldsymbol{u}}| = \sqrt{\mathbf{2}+\sqrt{\mathbf{2}}}$ y $|\bar{\boldsymbol{v}}| = \sqrt{\mathbf{3}-\sqrt{\mathbf{2}}}$

ii. Sabemos que el producto escalar de dos vectores es igual al producto de los módulos por el coseno del ángulo que forman.

$$\bar{u}\cdot\bar{v} = (e_1+e_2)\cdot(e_1 - e_2 + e_3) = e_1\cdot e_1 - e_1\cdot e_2 + e_1\cdot e_3 + e_2\cdot e_1 - e_2\cdot e_2 + e_2\cdot e_3$$
$$= 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

Y por otra parte:

$$\bar{u}\cdot\bar{v} = |\bar{u}|\cdot|\bar{v}|\cdot cos\alpha = \sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot\sqrt{3-\sqrt{2}}\cdot cos\alpha = \sqrt{6-2\sqrt{2}+3\sqrt{2}-2}\cdot cos\alpha = \sqrt{4+\sqrt{2}}\cdot cos\alpha$$

Igualando:

$$\sqrt{2} = \sqrt{4+\sqrt{2}}\cdot cos\alpha \to cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4+\sqrt{2}}} = 0.607$$

Los vectores forman un ángulo cuyo coseno vale $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4+\sqrt{2}}} = \mathbf{0.607}$

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
LibrosMareaVerde.tk

Problema A.2:

2.– **(2 puntos)** El peso medio según la OMS de un niño de 5 años sigue una distribución normal de media 18,5 kg. y desviación típica 2,25 kg. Si se elige un niño al azar. Halla el porcentaje de niños

(I) cuyo peso es superior a 23 kg.

(II) cuyo peso está entre 15 y 23 kg.

(Véase la tabla simplificada de la **normal tipificada** que aparece al final del examen)

Solución:

Nos dice el enunciado que el peso de un niño de 5 años sigue una distribución normal de media 18.5 kg y una desviación típica de 2.25 kg: $N(18.5,\ 2.25)$.

i. Queremos conocer el porcentaje de niños cuyo peso es superior a 23 kg: $P(X > 23)$

Tipificamos, y miramos en la tabla:

$$P(X > 23) = 1 - P(X < 23) = 1 - P\left(Z < \frac{23-18.5}{2.25}\right) = 1 - P(Z < 2) = 1 - 0.9772 = 0.0228.$$

El porcentaje de niños de peso superior a 23 kg es del **2.28 %**.

ii. Queremos conocer el porcentaje de niños cuyo peso está comprendido entre 15 y 23 kg: $P(15 < X < 23)$.

$$P(15 < X < 23) = P(X < 23) - P(X < 15) =$$

Tipificamos y miramos en la tabla:

$$P\left(Z < \frac{23-18.5}{2.25}\right) - P\left(Z < \frac{15-18.5}{2.25}\right) = P(Z < 2) - P(Z < -1.555)$$
$$= P(Z < 2) - (1 - P(Z < 1.555)) = 0.9772 - 1 + 0.9394 = 0.9166.$$

El porcentaje de niños cuyo peso está entre 15 y 23 kg es de **91.66 %**

Problema A.3:

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

3.– (3 puntos) Sea la función

$$f(x) = \frac{|x|}{x^2 - 1}.$$

(I) Analiza la continuidad y derivabilidad de la función f.

(II) Razona si se puede aplicar, o no, el teorema de Rolle en el intervalo $[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}]$. En caso afirmativo, calcula el valor $c \in \left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ a que se refiere el teorema de Rolle.

(III) Halla el área encerrada por f y el eje de abcisas en el intervalo $[\frac{3}{2}, 4]$.

Solución:

i. La función es cociente de dos funciones. El numerador, de la función valor absoluto, que es continua en toda la recta real, pero no es derivable en x = 0. El denominador es una función polinómica, continua y derivable en toda la recta real, que se anula en x = 1 y en x = –1.

Podemos definirla como: $f(x) = \begin{cases} \frac{-x}{x^2-1} & x < 0 \\ \frac{x}{x^2-1} & x \geq 0 \end{cases}$

La función no es continua ni derivable en x = 1 y en x = –1. Tampoco es derivable en x = 0.

ii. El teorema de Rolle dice que si una función es continua en [a, b], y derivable en (a, b), y f(a) = f(b), existe un punto c en el intervalo (a, b) en el que se anula la derivada.

Nuestra función es continua en [–1/2, 1/2], pero no es derivable en x = 0, luego no es derivable en (–1/2, 1/2), por lo que NO se puede aplicar el teorema de Rolle.

No se puede aplicar el teorema de Rolle en [–1/2, 1/2].

iii. La función en el intervalo [3/2, 4] es siempre positiva. Se puede completar la derivada del denominador en el numerador, luego es una integral inmediata de tipo logaritmo:

$$Área = \int_{\frac{3}{2}}^{4} \frac{x}{x^2 - 1} dx = \left| \frac{1}{2} ln(x^2 - 1) \right|_{\frac{3}{2}}^{4} =$$

$$\frac{1}{2}(\ln 15 - \ln(2.25 - 1)) = \frac{1}{2}(\ln 15 - \ln(1.25)) = \frac{1}{2}(\ln \frac{15}{1.25}) = \frac{1}{2}(\ln 12) = 1.2424$$

Área = $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathbf{ln 12}) = 1.2424$ u².

Problema A.4:

4.– (3 puntos) Sea a un parámetro real cualquiera. Considera la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & -a & 2a-1 \end{pmatrix},$$

(I) Determina para qué valores del parámetro a existe la inversa de la matriz A.

(II) Halla la inversa de la matriz A, cuando exista.

(III) Para $a = 1$ y las matrices

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

resuelve el sistema

$$\begin{cases} BXA & = Y, \\ \frac{1}{3}Y + C & = D. \end{cases}$$

Solución:

i. Para que una matriz tenga inversa debe ser una matriz cuadrada cuyo determinante sea distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & -a & 2a-1 \end{vmatrix} = a(2a-1)$$

Para que exista inversa a no puede valer ni 0, ni 1/2.

Si $a \neq 0$ o $a \neq 1/2$ entonces A tiene matriz inversa.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot AdjA^t; \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -a \\ 0 & 0 & 2a-1 \end{pmatrix}; \qquad AdjA^t = \begin{pmatrix} a(2a-1) & 0 & 0 \\ 0 & 2a-1 & 0 \\ 0 & -a & a \end{pmatrix}$$, por tanto:

$$A^{-1} = \frac{1}{a(2a-1)} \cdot \begin{pmatrix} a(2a-1) & 0 & 0 \\ 0 & 2a-1 & 0 \\ 0 & a & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2a-1} & \frac{1}{2a-1} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2a-1} & \frac{1}{2a-1} \end{pmatrix}}$$

ii. Si a = 1, la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ tiene inversa: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Para resolver $BXA = Y$, multiplicamos por las inversas: $X = B^{-1}YA^{-1}$. Despejamos Y de la segunda ecuación: $(1/3)Y + C = D$, luego $Y = 3(D - C)$.

Calculamos Y:

$$Y = 3\left(\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}\right) = 3\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz inversa de B:

$$|B| = 1;\ B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculamos X:

$$X = B^{-1}YA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & -15 \\ -21 & -3 & 42 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 9 & -15 & -15 \\ -21 & 39 & 42 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} 9 & -15 & -15 \\ -21 & 39 & 42 \end{pmatrix}}\ \textbf{e}\ \boldsymbol{Y = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}}$$

Problema B.1:

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

1.- (2 puntos) En un colegio se han ofertado para los niños de infantil tres actividades extraescolares Inglés (ING), Multideporte (MUL) y Robótica (ROB), con dos rangos de edad de 3 a 4 años (MP) y de 5 a 6 años (MG). Se sabe que se han apuntado a alguna actividad un total de 300 niños. De ellos, hay 100 que tienen entre 3 y 4 años, de los cuales 82 hacen Inglés y 10 han elegido Multideporte. Se sabe que al grupo de Robótica se han apuntado 83 niños, y hay 105 niños de entre 5 y 6 años que se han apuntado a Inglés.

(I) Toma un niño al azar, halla las siguientes probabilidades:

$P(MG)$, $P(MUL)$, $P(MP \cap ROB)$, $P(ROB / MP)$ y $P(MG / ING)$.

(II) Comprueba que el suceso MUL es independiente de la edad del niño.

Solución:

i. Por el enunciado sabemos que: $P(MP) = 100/300 = 1/3$; $P(ING \cap MP) = 82/300$; $P(MUL \cap MP) = 10/300$; $P(ROB) = 83/300$; $P(ING \cap MG) = 105/300$.

Llevamos estos datos a una tabla de contingencia:

	Inglés (ING)	Multideporte (MUL)	Robótica (ROB)	
De 3 a 4 años (MP)	82/300	10/300		100/300
De 5 a 6 años (MG)	105/300			
			83/300	1

Podemos completar en esta tabla muchos datos:

	Inglés (ING)	Multideporte (MUL)	Robótica (ROB)	
De 3 a 4 años (MP)	82/300	10/300	***8/300***	100/300
De 5 a 6 años (MG)	105/300	***20/300***	***75/300***	***200/300***
	187/300	***30/300***	83/300	1

Algunas operaciones: 100 – 82 – 10 = 8; 82 + 105 = 187; 300 – 187 – 83 = 30; 83 – 8 = 75; 40 – 10 = 30.

Podemos responder directamente:

$P(MG) = 200/300 = 2/3 = 0.66$; $P(MUL) = 30/300 = 1/10 = 0.1$; $P(MP \cap ROB) = 8/300 = 0.026$;

Sabemos que:

$$P(ROB/MP) = \frac{P(ROB \cap MP)}{P(MP)} = \frac{\frac{8}{300}}{\frac{100}{300}} = \frac{8}{100} = 0.08; \quad P(MG/ING) = \frac{P(MG \cap ING)}{P(ING)} = \frac{\frac{105}{300}}{\frac{187}{300}} = \frac{105}{187} = 0.561$$

ii. Dos sucesos son independientes si la probabilidad de la intersección es igual al producto de las probabilidades. Para saber si el hacer multideporte es un suceso independiente de la edad del niño sabemos que:

$P(MUL \cap MP) = 10/300 = 1/30$; $P(MUL) = 30/300$; $P(MP) = 100/300$;

$P(MUL) \cdot P(MP) = (30/300) \cdot (100/300) = (1/10) \cdot (1/3) = 1/30 = P(MUL \cap MP)$.

Los sucesos MUL y MP son independientes.

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
LibrosMareaVerde.tk

Problema B.2:

2.- (2 puntos) Dos vértices consecutivos de un rectángulo son P = (2,2,1) y Q = (0,0,–1) y los otros dos pertenecen a una recta r que pasa por el punto A = (5,4,3).

(I) Determina la ecuación de la recta r.

(II) Determina la ecuación del plano que contiene al rectángulo.

Solución:

i. De la recta r conocemos un punto A = (5, 4, 3). Como los puntos P y Q están en un rectángulo del que la recta r es uno de los lados, el vector $\overline{PQ}$ es un vector de dirección de r.

Por tanto, $\overline{PQ} = Q - P = (0,0,-1) - (2,2,1) = (-2,-2,-2)$.

Podemos tomar como vector el (1, 1, 1) que tiene la misma dirección.

La ecuación de la recta es: $\begin{cases} x = 5 + \alpha \\ y = 4 + \alpha \\ z = 3 + \alpha \end{cases}$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = 5 + \alpha} \\ \boldsymbol{y = 4 + \alpha} \\ \boldsymbol{z = 3 + \alpha} \end{cases}$$

ii. Para determinar la ecuación de un plano necesitamos conocer un punto y dos vectores de orientación del plano. Conocemos el punto A = (5, 4, 3), y el vector $\overline{PQ}$, nos falta otro vector.

El vector $\overline{AP}$ también es de orientación del plano: $\overline{AP} = P - A = (2,2,1) - (5,4,3) = (-3,-2,-2)$. Podemos tomar el vector: (3, 2, 2).

La ecuación paramétrica del plano es: $\begin{cases} x = 5 + \alpha + 3\beta \\ y = 4 + \alpha + 2\beta \\ z = 3 + \alpha + 2\beta \end{cases}$, y eliminando los parámetros:

$$\begin{vmatrix} x-5 & y-4 & z-3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 = 0(x-5) + (y-4) - (z-3) = y - z - 1$$

La ecuación del plano es: $\boldsymbol{y - z = 1}$.

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema B.3:

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

3.- (3 puntos) Sea la función

$$f(x) = \frac{|x|}{x^2 - 1}$$

(I) Analiza la continuidad y derivabilidad de la función f.

(II) Razona si se puede aplicar, o no, el teorema de Rolle en el intervalo $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. En caso afirmativo, calcula el valor $c \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ a que se refiere el teorema de Rolle.

(III) Halla el área encerrada por f y el eje de abscisas en el intervalo $\left[\frac{3}{2}, 4\right]$

Solución:

i. La función es cociente de dos funciones. El numerador, de la función valor absoluto, que es continua en toda la recta real, pero no es derivable en $x = 0$. El denominador es una función polinómica, continua y derivable en toda la recta real, que se anula en $x = 1$ y en $x = -1$.

Podemos definirla como:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{x^2-1} & x < 0 \\ \dfrac{x}{x^2-1} & x \geq 0 \end{cases}$$

La función no es continua ni derivable en $x = 1$ y en $x = -1$. Tampoco es derivable en $x = 0$.

ii. El teorema de Rolle dice que si una función es continua en $[a, b]$, y derivable en (a, b), y $f(a) = f(b)$, existe un punto c en el intervalo (a, b) en el que se anula la derivada.

Nuestra función es continua en $[-1/2, 1/2]$, pero no es derivable en $x = 0$, luego no es derivable en $(-1/2, 1/2)$, por lo que NO se puede aplicar el teorema de Rolle.

No se puede aplicar el teorema de Rolle en $[-1/2, 1/2]$.

iii. La función en el intervalo $[3/2, 4]$ es siempre positiva. Se puede completar la derivada del denominador en el numerador, luego es una integral inmediata de tipo logaritmo:

$$Área = \int_{\frac{3}{2}}^{4} \frac{x}{x^2-1}dx = \left|\frac{1}{2}ln(x^2-1)\right|_{\frac{3}{2}}^{4} =$$

$$\frac{1}{2}(\ln 15 - \ln(2.25-1)) = \frac{1}{2}(\ln 15 - \ln(1.25)) = \frac{1}{2}(\ln\frac{15}{1.25}) = \frac{1}{2}(\ln 12) = 1.2424$$

Área = $\frac{1}{2}(ln 12) = 1.2424$ u².

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
LibrosMareaVerde.tk

Problema B.4:

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

4.- (3 puntos) Sea a un parámetro real cualquiera. Considere la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & -a & 2a-1 \end{pmatrix}.$$

(I) Determina para qué valores del parámetro a existe la inversa de la matriz A.

(II) Halla la inversa de la matriz A, cuando exista.

(III) Para $a=1$ y las matrices

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix},\quad D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

resuelve el sistema

$$\begin{cases} BXA = Y \\ \frac{1}{3}Y + C = D \end{cases}$$

Solución:

i. Para que una matriz tenga inversa debe ser una matriz cuadrada cuyo determinante sea distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & -a & 2a-1 \end{vmatrix} = a(2a-1)$$

Para que exista inversa a no puede valer ni 0, ni 1/2.

Si $\boldsymbol{a \neq 0}$ **o** $\boldsymbol{a \neq 1/2}$ entonces A tiene matriz inversa.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot AdjA^t; \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -a \\ 0 & 0 & 2a-1 \end{pmatrix}; \qquad AdjA^t = \begin{pmatrix} a(2a-1) & 0 & 0 \\ 0 & 2a-1 & 0 \\ 0 & -a & a \end{pmatrix}$$, por tanto:

$$A^{-1} = \frac{1}{a(2a-1)} \cdot \begin{pmatrix} a(2a-1) & 0 & 0 \\ 0 & 2a-1 & 0 \\ 0 & a & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2a-1} & \frac{1}{2a-1} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2a-1} & \frac{1}{2a-1} \end{pmatrix}}$$

ii. Si a = 1, la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ tiene inversa: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Para resolver $BXA = Y$, multiplicamos por las inversas: $X = B^{-1}YA^{-1}$. Despejamos Y de la segunda ecuación: (1/3)$Y + C = D$, luego $Y = 3(D - C)$.

Calculamos Y:

$$Y = 3\left(\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}\right) = 3\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz inversa de B:

$$|B| = 1;\ B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculamos X:

$$X = B^{-1}YA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & -15 \\ -21 & -3 & 42 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 9 & -15 & -15 \\ -21 & 39 & 42 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} 9 & -15 & -15 \\ -21 & 39 & 42 \end{pmatrix}} \textbf{ e } \boldsymbol{Y = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}}$$